
ЗАДАЦИ СА РЕШЕЊИМА ПРИЈЕМНОГ ИСПИТА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

1. Одредити модуо комплексног броја

$$z = \frac{(1+i)^{2026}}{(1-i)^{2024}}.$$

Решење. На основу

$$(1+i)^2 = 2i \Rightarrow (1+i)^{2026} = 2^{1013}(i^4)^{253}i = 2^{1013}i$$

и

$$(1-i)^2 = -2i \Rightarrow (1-i)^{2024} = 2^{1012}(i^4)^{253} = 2^{1012}$$

следи

$$z = \frac{2^{1013}i}{2^{1012}} = 2i.$$

Дакле,

$$|z| = 2.$$

2. Наћи све вредности комплексног параметра $m \in \mathbb{C}$ за који полиноми $P(x) = x^2 + mx + m$ и $Q(x) = x^2 + (m+i)x + 2m$ имају заједничку нулу.

Решење. По претпоставци задатка постоје $p, a, b \in \mathbb{C}$ тако да је

$$P(x) = (x-p)(x-a) \quad \text{и} \quad Q(x) = (x-p)(x-b)$$

односно тако да је

$$m = -p - a \tag{1}$$

$$m + i = -p - b \tag{2}$$

$$m = pa \tag{3}$$

$$2m = pb \tag{4}$$

Ако је $p = 0$, онда је лако видети да мора бити $m = a = 0$ и $b = -i$ те је у том случају четворка $(m, p, a, b) = (0, 0, 0, -i)$ једино решење система (1)-(4) а $m = 0$ једно решење нашег задатка.

Ако је $p \neq 0$, онда из (3) и (4) следи $b = 2a$ а из (1) и (2) следи $-b + a = i$ одакле се добија $a = -i$ и $b = -2i$. Из (3) је сада $m = -ip$ а из (1) је $m = -p + i$, одакле добијамо $p = \frac{-1+i}{2}$

и $m = \frac{1+i}{2}$, те је у овом случају четворка $(m, p, a, b) = \left(\frac{1+i}{2}, \frac{-1+i}{2}, -i, -2i\right)$ једино решење система (1)-(4) а $m = \frac{1+i}{2}$ једино преостало решење нашег задатка.

3. Ако је $2 + 3i$ једна нула полинома $P(x) = x^4 - 5x^3 + 15x^2 - 5x - 26$, одредити остале нуле тог полинома.

Решење. Како су сви коефицијенти датог полинома реални бројеви а $2 + 3i$ његова нула то и $\overline{2 + 3i} = 2 - 3i$ мора бити његова нула и полином P је дељив полиномом $(x - (2 + 3i))(x - (2 - 3i)) = x^2 - 4x + 13$. Након дељења се добија

$$P(x) = (x^2 - 4x + 13) \cdot (x^2 - x - 2).$$

Решења једначине $x^2 - x - 2 = 0$ су бројеви 2 и -1 те су нуле полинома P бројеви $2 + 3i$, $2 - 3i$, 2 и -1 .

4. Решити једначину

$$4^{\frac{1}{x}-1} - 2^{\frac{1}{x}-2} - 3 = 0.$$

Решење. Једначина има смисла за $x \neq 0$. Тада је

$$\begin{aligned} 4^{\frac{1}{x}-1} - 2^{\frac{1}{x}-2} - 3 = 0 &\iff 2^{\frac{2}{x}} - 2^{\frac{1}{x}} - 12 = 0 \\ &\iff t^2 - t - 12 = 0 \wedge t = 2^{\frac{1}{x}} \\ &\iff (t = -3 \wedge t = 4) \wedge t = 2^{\frac{1}{x}} \\ &\iff 2^{\frac{1}{x}} = 4 \\ &\iff x = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

5. Решити једначину

$$\sin x + \sin 2x = 0.$$

Решење. Применом формуле $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ полазна једначина је еквивалентна са

$$\begin{aligned} \sin x + \sin 2x = 0 &\iff \sin x + 2 \sin x \cos x = 0 \\ &\iff \sin x \cdot (1 + 2 \cos x) = 0 \\ &\iff \sin x = 0 \vee \cos x = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Сва решења једначине $\sin x = 0$ су бројеви $k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), док су сва решења једначине $\cos x = -\frac{1}{2}$ бројеви $\frac{2\pi}{3} + 2n\pi$ ($n \in \mathbb{Z}$) и бројеви $\frac{4\pi}{3} + 2l\pi$, ($l \in \mathbb{Z}$). Скуп решења дате једначине је дакле

$$\{k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{ \frac{2\pi}{3} + 2n\pi : n \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{4\pi}{3} + 2l\pi : l \in \mathbb{Z} \right\}.$$

6. Решити неједначину

$$\log_2(x-1) + \log_2(x+3) > 3.$$

Решење. Област дефинисаности дате логаритамске неједначине је скуп свих оних реалних бројева x који задовољавају услов $x-1 > 0 \wedge x+3 > 0$, односно $x > 1$. За њих је полазна неједначина еквивалентна са

$$\log_2((x-1) \cdot (x+3)) > 3 \Leftrightarrow (x-1) \cdot (x+3) > 2^3 = 8 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 11 > 0.$$

Како су $x = -1 \pm 2\sqrt{3}$ нуле квадратне функције $f(x) = x^2 + 2x - 11$, решење последње квадратне неједначине је скуп свих оних $x \in \mathbb{R}$ таквих да је $x < -1 - 2\sqrt{3} \vee x > -1 + 2\sqrt{3}$. Узимајући у обзир област дефинисаности полазне неједначине добијамо да је скуп њених решења $(-1 + 2\sqrt{3}, +\infty)$.

7. Решити једначину

$$\sqrt{x+6} = \sqrt{x+1} + \sqrt{2x-5}.$$

Решење. Како су услови за дефинисаност израза $\sqrt{x+6}$, $\sqrt{x+1}$ и $\sqrt{2x-5}$, тим редом, $x \geq -6$, $x \geq -1$ и $x \geq \frac{5}{2}$, то је област дефинисаности једначине њихов пресек, тј. скуп $\{x \in \mathbb{R} : x \geq \frac{5}{2}\}$. Квадрирањем дате једначине у области дефинисаности, следи

$$\begin{aligned} \sqrt{x+6} = \sqrt{x+1} + \sqrt{2x-5} &\Leftrightarrow x+6 = x+1 + 2\sqrt{(x+1)(2x-5)} + 2x-5 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(x+1)(2x-5)} = -x+5 \\ &\Leftrightarrow (x+1)(2x-5) = (-x+5)^2 \wedge x \leq 5 \\ &\Leftrightarrow x^2 + 7x - 30 = 0 \wedge x \leq 5 \\ &\Leftrightarrow (x=3 \vee x=-10) \wedge x \leq 5 \\ &\Leftrightarrow x=3 \vee x=-10. \end{aligned}$$

Пошто друго решење не припада области дефинисаности једначине, $x=3$ је једино решење.

8. Наћи једначину кружнице која садржи тачке $M(10,9)$ и $N(4,3)$ а чији центар припада правој $(p) : 2x - 3y + 19 = 0$.

Решење. Нека је једначина тражене кружнице $(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$. Како тачке M и N припадају тој кружници то је

$$(10-p)^2 + (9-q)^2 = r^2 \quad \text{и} \quad (4-p)^2 + (3-q)^2 = r^2$$

па је

$$(10-p)^2 + (9-q)^2 = (4-p)^2 + (3-q)^2 = r^2$$

односно

$$13 - p - q = 0 \tag{5}$$

Центар кружнице прапада правој p па је

$$2p - 3q + 19 = 0 \tag{6}$$

Из (5) и (6) се добија $p=4$ и $q=9$, а затим и $r^2 = (10-4)^2 + (9-9)^2 = 36$ па је једначина тражене кружнице

$$(x-4)^2 + (y-9)^2 = 36.$$

9. Површина праве зарубљене купе је $(15\sqrt{2} + 17)\pi$ а површина њеног омотача $15\pi\sqrt{2}$. Ако је угао између изводнице и веће основе те зарубљене купе једнак 45° , наћи њену висину.

Решење. Нека је R полупречник веће а r полупречник мање основе и нека је H тражена висина а s изводница дате зарубљене купе.

Посматрањем осног пресека купа уочавамо правоугли троугао чије су дужине катета H и $R - r$ а хипотенузе s и код кога је угао наспрам једне од катета 45° . Зато је $H = R - r$ и $s = (R - r)\sqrt{2}$.

По услову задатка је $\pi s(R + r) = 15\pi\sqrt{2}$, тј. $\pi(R - r)\sqrt{2}(R + r) = 15\sqrt{2}\pi$, односно $R^2 - r^2 = 15$. Са друге стране по услову задатка је $R^2\pi + r^2\pi = 17\pi$, односно $R^2 + r^2 = 17$. Одавде следи $R^2 = 16$ и $r^2 = 1$, тј. $R = 4$ и $r = 1$ па је $H = R - r = 3$.

10. Збир прва четири члана аритметичког низа једнак је 28, а збир наредна четири члана једнак је 60. Одредити први члан и разлику низа.

Решење. Означимо први члан и разлику траженог аритметичког низа редом са a и d . Како је збир првих n чланова аритметичког низа дат формулом $S_n = \frac{n}{2}(2a + (n - 1)d)$, према услову задатка важи

$$S_4 = 2(2a + 3d) = 28 \quad \Rightarrow \quad 2a + 3d = 14.$$

Како је n -ти члан низа дат са $a_n = a + (n - 1)d$, имамо да је збир чланова a_5, a_6, a_7, a_8 једнак

$$a_5 + a_6 + a_7 + a_8 = a + 4d + a + 5d + a + 6d + a + 7d = 4a + 22d,$$

односно према другом услову задатка је $4a + 22d = 60$ тј. $2a + 11d = 30$. Решавањем система линеарних једначина $2a + 3d = 14$, $2a + 11d = 30$ добијамо $a = 4$, $d = 2$.