Predgovor

Doktorska disertacija *Perturbovane stohastičke diferencijalne jednačine* zasnovana je na originalnim rezultatima, a bavi se proučavanjem različitih klasa stohastičkih diferencijalnih jednačina koje zavise od malog parametra. Jedan njen deo predstavlja nastavak istraživanja započetog magistarskim radom [39] u oblasti naslednih stohastičkih diferencijalnih jednačina.

Stohastičke diferencijalne jednačine koje zavise od neslučajnih i slučajnih perturbacija, predstavljaju predmet proučavanja mnogih istraživača. Teorija perturbovanih običnih diferencijalnih jednačina razvija se sedamdesetih godina prošlog veka u radovima mnogih matematičara i mehaničara, pre svega sovjetskih matematičara Hasminskog i Mitropoljskog, a nastala je iz potrebe rešavanja nekih konkretnih problema iz mehanike, tehnike i fizike. Oslanjajući se na ove rezultate, koji ne sadrže elemente stohastike, u brojnim radovima iz mehanike, inžinjerstva, a u poslednje vreme iz finansijske matematike, proučavaju se matematički modeli koji su predstavljeni perturbovanim stohastičkim diferencijalnim jednačinama, na primer, u radovima Hasminskog [47] 1966; Picarda [68], 1989; Kabanova i Pergamenshchikova [43], 1990; [44], 1991; Stoyanova [73], 1973; [74] 1996; Stoyanova i Boteva [75], 1997; Stoyanova i Liptsera [57], 1990, a pre svega u monografiji Skorohoda [72], 1987.

U teoriji stohastičkih diferencijalnih jednačina mali je broj nelinearnih jednačina koje su efektivno rešive, odnosno ne može se generalno dati analitički oblik rešenja. U tom slučaju često se koriste analitičke i numeričke metode za aproksimativno rešavanje tih jednačina. Jedna od analitičkih metoda za aproksimativno određivanje rešenja perturbovanih stohastičkih diferencijalnih jednačina izložena je u radu Stoyanova i Boteva *Quantitative results for perturbed stochastic differential equations*, Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis, 9 (3), (1996), 255–261, koji je za ovu disertaciju predstavljao pravi podsticaj za proučavanje više tipova perturbovanih stohastičkih diferencijalnih jednačina.

Osnovna ideja ove disertacije je proučavanje uticaja malih perturbacija na rešenja različitih klasa perturbovanih stohastičkih diferencijalnih jednačina, opštijih od onih koje su razmatrali Stoyanov i Botev, kao i upoređivanje rešenja perturbovanih i odgovarajućih neperturbovanih jednačina istog ili jednostavnijeg tipa.

Ova doktorska disertacija sadrži rezultate koji su izloženi u tri glave:

U prvoj glavi uvedeni su osnovni pojmovi iz teorije slučajnih procesa i stohastičkih diferencijalnih jednačina, date su osnovne teoreme egzistencije i jedinstvenosti rešenja različitih tipova stohastičkih diferencijalnih i integrodiferencijalnih jednačina Itoa.

Druga glava je posvećena perturbovanim stohastičkim diferencijalnim jednačinama Itoa. U njoj su dati rezultati rada [75] Stoyanova i Boteva koji se odnose na specijalne tipove perturbacija za stohastičku diferencijalnu jednačinu. Ova glava sadrži originalne rezultate u proučavanju aditivno perturbovanih linearnih i opštih stohastičkih integrodiferencijalnih jednačina. Dati su uslovi pri kojima su rešenja perturbovanih i odgovarajućih neperturbovanih jednačina bliska u smislu momenta $(2m)$-tog reda na konačnim intervalima i na intervalima čija dužina teži beskonačnosti kada mali parametari teži nuli. Slični problemi su razmatrani i za linearno i funkcionalno perturbovane stohastičke diferencijalne i opšte integrodiferencijalne jednačine. Većina rezultata ove glave je publikovana u radovima: Sv. Janković, M. Jovanović, [29], 2000; M. Jovanović, Sv. Janković, [40], 2002; Sv. Janković, M. Jovanović, [28], 2000; Sv. Janković, M. Jovanović, [37], 2002.

U Glavi 3 izučavaju se perturbovane nasledne stohastičke diferencijalne i integrodiferencijalne jednačine, pri različitim pretpostavkama o uslovima koje zadovoljavaju koeficijenti tih jednačina, pri Lipschitzovom uslovu i uslovu ograničenog slučajnog integralnog kontraktora. Rezultati su objavljeni u radovima: Sv. Janković, M. Jovanović, [36], 2002; Sv. Janković, M. Jovanović, [35], 2001.

Ovde dobijeni rezultati mogu se uopštiti na stohastičke diferencijalne jednačine koje umesto Wienerovog procesa uključuju kvadratno integrabilne martingale. Metod korišćen u ovom poglavlju se može kombinovati sa metodom stohastičkog usrednjenja Hasminskog, koja je primenjena u radovima [56] i [74], što može biti predmet budućih istraživanja.

Rezultati dobijeni u ovoj tezi se mogu primeniti i za ispitivanje asimptotske stabilnosti rešenja perturbovane jednačine, u smislu momenta $(2m)$-tog reda, tako što bi se ispitivala asimptotska stabilnost u istom smislu odgovarajuće, jednostavnije neperturbovane jednačine.

R. Zuber [82] je razradio jednu uopštenu analitičku metodu za izračunavanje obične diferencijalne jednačine prvog reda. Uopštenost ove metode ogleda se u tome da, mnoge dobro poznate, istorijski značajne iterativne metode predstavljaju njen specijalan slučaj, kao na primer: Picard-Lindelöf metod sukcesivnih aproksimacija, Chaplyginove metode sečica i tangenata, Newton-Kantorovichev metod i neke interpolacione metode [83]. Kasnije je taj metod definisan i prilagođen za proučavanje specijalnih klasa stohastičkih diferencijalnih i integrodiferencijalnih jednačina Itovog tipa (videti [23], [24], [25], [26]) i direktno iskorišćen, na primer u [46], za ocenjivanje brzine konvergencije aproksimativnog rešenja. U radu Sv. Janković, M. Jovanović, [32], 1996. napravljen je analogan iterativni postupak za izračunavanje uopštene stohastičke integrodiferencijalne jednačine koja uključuje, u nekim specijalnim slučajevima, različite klase stohastičkih jednačina Itoa. Pri određenim pretpostavkama za disketne perturbacije može se dokazati skoro izvesna bliskost rešenja perturbovanih i odgovarajućih neperturbovanih diferencijalnih jednačina Itoa.

Zahvalnost za veliku podršku, kako u izradi ove disertacije, tako i u svakodnevnom životu i radu, dugujem svom profesoru dr Svetlani Janković, čija ogromna energija i entuzijazam predstavljaju pravi podsticaj za rad.

Specijalnu zahvalnost dugujem svom profesoru dr Slobodanu Jankoviću za korisne komentare i pomoć u izradi grafika za ovu tezu.

Ovu disertaciju posvećujem svojim roditeljima Ljiljani i Draganu.

Sadržaj

Glava 1

Uvodni pojmovi i rezultati

U ovoj glavi se uvode neki osnovni pojmovi i daju neki poznati rezultati. U Poglavlju 1.1. se uvode pojmovi teorije slučajnih procesa kao što su separabilan, ekvivalentan, merljiv, neprekidan u nekom smislu, ograničen, markovski, stacionaran slučajni proces. Mnogi procesi u mehanici i inžinjerstvu, a u novije vreme u finansijama, zavise od determinističkih i slučajnih pobuda tipa Gaussovog belog šuma. Imajući u vidu da je Gaussov beli šum apstrakcija i nije fizički proces, a može se matematički opisati kao formalni izvod Wienerovog procesa, tj. Brownovog kretanja, u Poglavlju 1.2. je data definicija Wienerovog procesa i njegove najvažnije osobine. Itova konstrukcija integrala slučajne funkcije po Wienerovom procesu i osobine tako definisanog integrala date su u Poglavlju 1.3. Mnogi autori su se bavili proučavanjem stohastičkih diferencijalnih i integrodiferencijalnih jednačina. Pošto je prihvaćen Itov pristup ovoj teoriji, matematički modeli u različitim oblastima su predstavljeni stohastičkim diferencijalnim i integrodiferencijalnim jednačinama Itoa. U Poglavljima 1.4 i 1.5 date su definicije i teoreme egzistencije i jedinstvenosti rešenja stohastičkih diferencijalnih i linearnih integrodiferencijalnih jednačina, pri čemu se podrazumeva linearnost po integralima, dok su u Poglavlju 1.6 definisane opšte stohastičke integrodiferencijalne jednačine Itoa i data je teorema egzistencije i jedinstvenosti rešenja za te jednačine (videti, na primer, [4], [8], [15], [16], [17], [20], [21], [63]-[66], [67], [81]). S obzirom da veliku primenu u tehničkim naukama, posebno kod materijala se memorijom, imaju stohastičke nasledne diferencijalne i integrodiferencijalne jednačine Itoa, u Poglavlju 1.7. su date osnovne definicije, kao i teoreme egzistencije i jedinstvenosti rešenja tih jednačina ([59]-[62]). Pri tome je egzistencija i jedinstvenost rešenja nelinearne stohastičke nasledne integrodiferencijalne jednačine Itoa posmatrana korišćenjem koncepta ograničenog slučajnog integralnog kontraktora, koji uključuje Lipschitzov uslov kao specijalan slučaj (M. Jovanović i Sv. Janković, [41], 1997.). Takođe, uvedeni su pojmovi modifikovanog Lipschitzovog uslova i modifikovanogog integralnog kontraktora i posmatran je njihov uzajamni odnos (M. Jovanović i Sv. Janković, [42], 2001.). Na kraju, u Poglavlju 1.8 date su neke elementarne nejednakosti, kao i integralne nejednakosti Gronwall-Bellmana, koje će se često koristiti u daljem radu ([5], [54], [60]).

1.1. Osnovni elementi teorije slučajnih procesa

Početkom prošlog veka usavršavanje tehnike postavilo je pred teoriju verovatnoće veliki broj novih zadataka koji su prevazilazili okvire klasične teorije. U to vreme su se fizika i tehnika bavile proučavanjem procesa, tj. pojava koje se menjaju sa protokom vremena, a teorija verovatnoće nije imala ni opšti metod, ni razrađene delimične šeme za rešavanje zadataka koji su proizilazili iz proučavanja takvih pojava. Logično se nametnula neophodnost razrađivanja opšte teorije slučajnih procesa, tj. teorije koja bi proučavala slučajne promenljive koje zavise od jednog ili nekoliko parametara koji se neprekidno menjaju.

Pojam slučajnog procesa nešto je stariji od sto godina i vezan je za imena Kolmogorova, Hinčina, Sluckog i Wienera. Osnovu opšte teorije slučajnih procesa dali su tridesetih godina, svojim radovima, ruski matematičari Kolmogorov i Hinčin. U radu Kolmogorova "O analitičkim metodama u teoriji verovatnoće" [51] data je sistematska i stroga konstrukcija osnova teorije slučajnih procesa markovskog tipa, dok radovi Hinčina predstavljaju osnovu teorije stacionarnih procesa. U današnje vreme pojam slučajnog procesa je centralni pojam u stohastici, ali i u inžinjerstvu, ekonomiji, organizaciji proizvodnje, teoriji veze. Teorija slučajnih procesa spada u kategoriju najbrže razvijanih matematičkih disciplina, nesumnjivo zbog toga što je ona duboko povezana sa praksom.

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ zadati prostor verovatnoća i $T \subset R$ parametarski skup. Slučajni proces je funkcija od dve promenljive $x(t) = x(\omega, t)$, $\omega \in \Omega$, $t \in T$, definisana na datom prostoru verovatnoća. Za svaku fiksiranu vrednost parametra t funkcija $x(\omega, t)$ je slučajna promenljiva, dakle $\mathcal{F}$-merljiva funkcija. Za svaku fiksiranu vrednost ω, tj. za svaki zadati elementarni događaj, $x(\omega, t)$ predstavlja funkciju realnog argumenta $t \in T$. Svaka takva funkcija zove se *realizacija ili trajektorija* slučajnog procesa $x(\omega, t)$. U tom slučaju je $(R, \mathcal{B})$ fazni prostor svake slučajne promenljive $x(\omega, t)$. Dakle, *slučajni proces* $\{x(\omega, t),\ t \in T\}$ je familija merljivih funkcija $x(\omega, t) : (\Omega, \mathcal{F}) \to (R, \mathcal{B})$ definisana na prostoru verovatnoće $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, sa faznim prostorom $(R, \mathcal{B})$ i parametarskim skupom T. Parametar $t \in T$ se najčešće smatra vremenskim parametrom. Ako je $T = N$, vreme uzima diskretan niz vrednosti, pa se govori o *slučajnom nizu* $\{x_n(\omega),\ n \in N\}$. U ovom radu razmatraće se isključivo slučajni procesi sa neprekidnim vremenom, tj. sa parametarskim skupom koji je interval $[0, T]$.

Zbog jednostavnijeg zapisa ubuduće će se izostavljati $\omega \in \Omega$, pa će prihvatiti ravnopravno označavanje slučajnog procesa $\{x(t),\ t \in [0, T]\}$ ili $\{x_t,\ t \in [0, T]\}$.

Slučajni proces se definiše *familijom konačno-dimenzionalnih funkcija raspodela*

$$F_{t_1,\ldots,t_n}(u_1, \ldots, u_n) = P\{x(t_1) < u_1, \ldots, x(t_n) < u_n\},$$
$$t_1 < t_2 < \ldots < t_n,\ t_i \in [0, T],\ i = 1, \ldots, n,\ n \in N.$$

Tu činjenicu potkrepljuje tvrđenje Kolmogorova, koji je dokazao da se za datu familiju konačno-dimenzionalnih funkcija raspodela uvek može naći prostor verovatnoće $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ i familija slučajnih promenljivih $\{x(t),\ t \in [0, T]\}$ koje imaju date konačno-dimenzionalne funkcije raspodela.

Pored uobičajenih osobina funkcija raspodela višedimenzionalnih slučajnih promenljivih, konačno-dimenzionalne funkcije raspodela slučajnog procesa zadovoljavaju:
– uslov simetrije, ako za svaku permutaciju $(i_1, \ldots, i_n)$ skupa $(1, \ldots, n)$ važi

$$F_{t_{i_1},\ldots,t_{i_n}}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}) = F_{t_1,\ldots,t_n}(x_1, \ldots, x_n);$$

– uslov saglasnosti, ako je

$$F_{t_1,\ldots,t_{n-1},t_n}(x_1, \ldots, x_{n-1}, +\infty) = F_{t_1,\ldots,t_{n-1}}(x_1, \ldots, x_{n-1}).$$

Definicija 1.1.1. *Slučajni proces $\{x_t,\, t \in [0,T]\}$ je separabilan ako postoji prebrojiv skup $S \subset T$ (separant) i događaj $\Lambda \subset \Omega$ za koji je $P(\Lambda) = 0$, tako da se za proizvoljan zatvoren skup $F \subset R$ i proizvoljan otvoren interval $I \subset T$, skupovi*

$$\{\,\omega : \; x_t(\omega) \in F,\; t \in I\} \qquad \text{i} \qquad \{\,\omega : x_t(\omega) \in F,\; t \in I \cap S\}$$

razlikuju samo na podskupu od Λ.

Definicija 1.1.2. *Dva slučajna procesa $\{x_t,\, t \in [0,T]\}$ i $\{\tilde{x}_t,\, t \in [0,T]\}$, definisana na istom prostoru verovatnoća, su stohastički ekvivalentna ako je*

$$P\{x_t \neq \tilde{x}_t\} = 0, \quad \text{za svako } t \in [0,T].$$

Definicija 1.1.3. *Slučajni proces $\{x_t,\, t \in [0,T]\}$ je merljiv ako je $x_t(\omega)$ merljiva funkcija u odnosu na $\mathcal{B}_t \times \mathcal{F}$, gde je $\mathcal{B}_t$ Borelovo σ-polje nad $[0,T]$, tj. za svako $x \in (-\infty, +\infty)$, važi $\{(t,\omega) : \; x_t(\omega) \leq x\} \in \mathcal{B}_t \times \mathcal{F}$.*

Slučajni proces $\{x_t,\, t \in [0,T]\}$ je *stohastički neprekidan* u tački $t_0 \in [0,T]$, ako za $t \in [0,T]$ i $\varepsilon > 0$ važi

$$P\{|x_t - x_{t_0}| > \varepsilon\} \to 0, \quad \text{kada } t \to t_0.$$

Proces je stohastički neprekidan na nekom podskupu od $[0,T]$ ako je stohastički neprekidan u svakoj tački tog podskupa.

Teorema 1.1.1. (Doob, [14]) *Za svaki slučajni proces $\{x_t,\, t \in [0,T]\}$ koji je stohastički neprekidan na $[0,T]$, postoji stohastički ekvivalentan, separabilan i merljiv proces $\{\tilde{x}_t,\, t \in [0,T]\}$, definisan na istom prostoru verovatnoća.*

Proces $\{\tilde{x}_t,\, t \in [0,T]\}$ iz Teoreme 1.1.1 zove se *separabilna i merljiva modifikacija* slučajnog procesa $\{x_t,\, t \in [0,T]\}$.

Slučajni proces $\{x_t,\, t \in [0,T]\}$ je *neprekidan u srednjem reda p*, odnosno L_p-neprekidan u tački $t_0 \in [0,T]$, ako za $t \in [0,T]$ važi

$$E|x_t - x_{t_0}|^p \to 0, \quad \text{kada } t \to t_0.$$

Proces je neprekidan u srednjem reda p na nekom podskupu od $[0,T]$ ako je neprekidan u srednjem reda p u svakoj tački tog podskupa.

Slučajni proces $\{x_t,\, t \in [0,T]\}$ je *skoro izvesno neprekidan* na segmentu $[a,b] \subset [0,T]$, ako su skoro sve njegove trajektorije neprekidne na $[a,b]$, tj.

$$P\{\omega : \; x_t(\omega) \text{ prekidno na } [a,b]\} = 0.$$

Često se za ispitivanje skoro izvesne neprekidnosti nekog slučajnog procesa koristi sledeći uslov Kolmogorova:

Teorema 1.1.2. *Separabilan slučajni proces $\{x_t,\, t \in [0,T]\}$, gde je $[0,T]$ konačan segment, je skoro izvesno neprekidan na segmentu $[a,b] \subset [0,T]$, ako postoje pozitivne konstante p, q, k, takve, da za svako $t, s \in [a,b]$ važi nejednakost*

$$E|x_t - x_s|^p \leq k|t-s|^{1+q}.$$

Definicija 1.1.4. *Slučajni proces $\{x_t,\, t \in [0,T]\}$ je drugog reda (L_2-proces) ako je $Ex_t^2 < \infty$, za svako $t \in [0,T]$.*

Funkcija $R(t,s) = E(x_t - Ex_t)(x_s - Ex_s)$, za $t, s \in [0,T]$, je *koralaciona funkcija* zadatog slučajnog procesa $\{x_t,\, t \in [0,T]\}$.

Definicija 1.1.5. *Slučajni proces drugog reda $\{x_t,\, t \in [0,T]\}$ je stacionaran (u užem smislu) ako za svaki izbor parametara $t_1, \ldots, t_n \in R$ i proizvoljno $h \in R$ zajednička raspodela za $(x_{t_1+h}, x_{t_2+h}, \ldots, x_{t_n+h})$ ne zavisi od h.*

Definicija 1.1.6. *Slučajni proces $\{x_t,\, t \in [0,T]\}$ je stacionaran u širem smislu ako za svako $t \in R$ važi da je $EX_t^2 < \infty$, $EX_t = a =$const i korelaciona funkcija $R(t,s)$ zavisi samo od razlike $t-s$.*

Definicija 1.1.7. *Neka je $\{\mathcal{F}_t, t \in [0,T]\}$ neopadajuća familija σ-polja, tako da je $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$ za $s < t$, $s, t \in [0,T]$. Za slučajni proces $\{x_t,\, t \in [0,T]\}$ se kaže da je saglasan sa familijom $\{\mathcal{F}_t, t \in [0,T]\}$ ako su slučajne promenljive x_t $\mathcal{F}_t$-merljive za svako $t \in [0,T]$.*

Činjenica da je slučajni proces $\{x_t,\, t \in [0,T]\}$ saglasan sa familijom $\{\mathcal{F}_t, t \in [0,T]\}$ obeležavaće se sa $\{x_t, \mathcal{F}_t, t \in [0,T]\}$.

Definicija 1.1.8. *Slučajni proces $\{x_t, \mathcal{F}_t, t \in [0,T]\}$ je $\mathcal{G}_t$-progresivno merljiv ako je za svako $t \in [0,T]$ $x_s(\omega)$ $\mathcal{B}_{[0,t]} \times \mathcal{F}_t$ merljivo.*

Teorema 1.1.3. (Teorema Meyera, [58]) *Svaki merljiv proces neprekidan s leva ili desna je progresivno merljiv.*

Definicija 1.1.9. *Slučajni proces $\{x_t,\, t \in [0,T]\}$ je proces Markova ako je za svako $t > s$ i svaki Borelov skup $B \in \mathcal{B}$*

$$P\{x_t \in B | \mathcal{F}_s\} = P\{x_t \in B | x_s\}, \text{ skoro izvesno.}$$

Definicija 1.1.10. *Slučajni proces $\{x_t, \mathcal{F}_t, t \in [0,T]\}$ je martingal u odnosu familiju σ-polja $\{\mathcal{F}_t,\, t \in [0,T]\}$ ako je:*

(i) $E|x_t| < \infty$, za svako $t \in [0,T]$;

(ii) $E(x_t|\mathcal{F}_s) = x_s$, skoro izvesno, za $t > s$, $t, s \in [0,T]$.

1.2. Wienerov proces

Mnogobrojne pojave u fizičkim, tehničkim i ekonomskim sistemima mogu se matematički modelirati Gaussovim procesima.

Slučajni proces $\{X_t,\, t \in [0,T]\}$ je *Gaussov proces* ako je svaka linearna kombinacija n-dimenzionalnog zaseka $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ Gaussova slučajna promenljiva. Dakle, za svako $n \in N$, $t_1, \dots, t_n \in [0,T]$ i $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in R$, je $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_{t_i}$ Gaussova slučajna promenljiva.

Definicija 1.2.1. *Slučajni proces $\{w_t,\, t \geq 0\}$ je Wienerov proces ako zadovoljava sledeće uslove:*

(a) $w_0 = 0$ *skoro izvesno;*

(b) sa nezavisnim je priraštajima, tj. za svako $0 \leq t_0 < t_1 < \ldots < t_n$*, slučajne promenljive* $w_{t_0}, w_{t_1} - w_{t_0}, \dots, w_{t_n} - w_{t_{n-1}}$ *su nezavisne;*

(c) $w_t - w_s : \mathcal{N}(0, \sigma^2(t-s))$*,* $0 \leq s < t$*.*

Parametar $\sigma^2 \neq 0$ je disperzija. Za $\sigma^2 = 1$ radi se o standardnom Wienerovom procesu (procesu Brownovog kretanja).

Može se dokazati da je slučajni proces $\{w_t,\, t \geq 0\}$ Wienerov ako i samo ako je Gaussov i $Ew_t = 0$, $R(t,s) = \sigma^2 \min\{t,s\}$.

Wienerov proces ima sledeće osobine:

- proces je drugog reda, jer je $E|w_t|^2 = \sigma^2 t < \infty$;
- n-dimenzionalna gustina raspodele za $t_1 < \ldots < t_n$ i $u_1, \dots, u_n \in R$ se može izraziti preko jednodimenzionalnih gustina raspodele $f_1(t,u)$ Gaussove slučajne promenljive, tj.

  $$f_n(t_1, \dots, t_n; u_1, \dots, u_n) = f_1(t_1; u_1) \cdot f_1(t_2 - t_1; u_2 - u_1) \cdot \ldots \cdot f_1(t_n - t_{n-1}; u_n - u_{n-1});$$
- proces je Markova;
- srednje kvadratno je neprekidan;
- skoro izvesno je neprekidan, pa su sve njegove trajektorije neprekidne funkcije, jer je $E|w_t - w_s|^4 \leq 3\sigma^2(t-s)$ (Teorema 1.1.2 Kolmogorova);
- sve trajektorije su skoro izvesno nediferencijabilne funkcije u svakoj tački (kako je

  $$\frac{w_{t_0+h} - w_{t_0}}{h} : \mathcal{N}\Big(0, \frac{\sigma^2}{|h|}\Big),$$

  za $t_0 \geq 0$, $h \to 0$, izvod u raspodeli Wienerovog procesa ima beskonačnu disperziju, što je nemoguće);

- skoro izvesno je neograničene varijacije i konačne kvadratne varijacije na svakom odsečku $[a,b] \subset [0,\infty)$ (za proizvoljnu konstantu $c \in R$ i razbijanje $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ intervala $[a,b]$ za koje $\max\limits_{k=\overline{1,n}}(t_k - t_{k-1}) \to 0$ kada $n \to \infty$,

$$P\left\{\sum_{k=1}^{n} |w_{t_k} - w_{t_{k-1}}| > c\right\} \to 1, \qquad \sum_{k=1}^{n}[w_k - w_{k-1}]^2 \xrightarrow{s.k.} \sigma^2(b-a);$$

- proces $\{w_t, \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ je martingal, jer za $t \geq s$ važi da je

$$\begin{aligned} E(w_t|\mathcal{F}_t) &= E[(w_t - w_s + w_s)|\mathcal{F}_s] \\ &= 0 + w_s = w_s, \text{ skoro izvesno.} \end{aligned}$$

- može se definisati na parametarskom skupu $(-\infty, +\infty)$, pri čemu je $Ew_t = 0$, a $R(t,s) = \frac{1}{2}(|t| + |s| - |t-s|)$. Na taj način se dobijaju nezavisni Wienerovi procesi $\{w_t,\, t \geq 0\}$ i $\{w_{-t},\, t \geq 0\}$ čije su trajektorije skoro izvesno spojene u tački $t = 0$.

Definicija 1.2.2. *Slučajni proces* $w = \{w_t, t \geq 0\} = \{(W_1(t), W_2(t), \ldots, W_m(t)), t \geq 0\}$ *je* m*-dimenzionalni Winerov ako zadovoljava sledeće osobine:*

1. $w_0 = 0$*, skoro izvesno;*
2. *sa nezavisnim je priraštajima;*
3. $w_t - w_s : \mathcal{N}(0, \sigma^2|t-s|I)$*, pri čemu je* I *jedinična matrica reda* m.

Dakle, koordinate Wienerovog procesa su jednodimenzionalni međusobno nezavisni Wienerovi procesi. Za m-dimenzionalni Wienerov proces se mogu dokazati sve osobine koje važe i za jednodimenzionalni Wienerov proces.

1.3. Itov integral

1.3.1. Konstrukcija Itovog integrala

U prethodnom poglavlju je istaknuto da je Wienerov proces neograničene varijacije, kao i da njegove trajektorije, skoro izvesno, nemaju izvod ni u jednoj tački. U tom slučaju se slučajni integral po Wienerovom procesu ne može definisati na standardan način, tj. kao Riemann-Stieltjesov ili Lebesgueov integral, pa se zbog toga uvodi pojam Itovog integrala.

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ prostor verovatnoća na kome je definisan standardni Winerov proces $w = \{w_t,\, t \geq 0\}$, pri čemu je slučajna promenljiva w_s $\mathcal{F}_t$-merljiva za svako $t \geq s$, $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ za $s < t$ i $w_t - w_s$ ne zavisi od $\mathcal{F}_s$, za svako $t \geq s$, tj. $\mathcal{F}_t = \sigma(w_s, 0 \leq s \leq t)$. Tada se familija σ-polja $\{\mathcal{F}_t,\, t \geq 0\}$ generisana Wienerovim procesom w naziva *potok*. Wienerov proces $\{w_t,\, t \geq 0\}$ saglasan sa potokom $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$, označavaće se sa $W = \{w_t, \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$.

Slučajni proces $\{x_t,\, t \in [0,T]\}$ je *neanticipativan* u odnosu na potok $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ ako je:

(i) separabilan;
(ii) merljiv;
(iii) za svako $t \in [0,T]$, x_t je $\mathcal{F}_t$ merljivo.

Kada važi osobina (iii), tada se kaže da je proces $\{x_t,\, t \in [0,T]\}$ saglasan sa potokom $\mathcal{F}_t$ generisanim slučajnim procesom $\{w_t,\, t \geq 0\}$.

Neka je sa $L_p[0,T]$, $p \geq 1$ označen prostor neanticipativnih procesa $\{\varphi(t), t \in [0,T]\}$ za koje važi $\int\limits_0^T |\varphi|^p(t)dt < \infty$ skoro izvesno, dok je sa $\mathcal{M}_2[0,T]$ označen podprostor prostora slučajnih procesa $L_2[0,T]$, tako da je $\int_0^T E\varphi^2(t)dt < \infty$.

Definicija 1.3.1. *Slučajni proces $\varphi \in L_2[0,T]$ je stepenasta (slučajna) funkcija ako postoji razbijanje $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$, tako da je*

$$\varphi(t) = \varphi(t_i) \text{ skoro izvesno za } t_i \leq t < t_{i+1},\ 0 \leq i \leq n.$$

Definicija 1.3.2. *Neka je $\varphi \in L_2[0,T]$ stepenasta funkcija. Slučajna promenljiva*

$$\int_0^T \varphi(t)dw_t := \sum_{k=1}^{n} \varphi(t_k)[w_{t_k} - w_{t_{k-1}}] \tag{1.3.1}$$

naziva se stohastički integral stepenaste funkcije φ u odnosu na Wienerov proces w, ili Itov integral.

Teorema 1.3.1. *Ako je $\varphi \in L_2[0,T]$ stepenasta funkcija, tada je*

$$E\int_0^T \varphi(t)dw_t = 0.$$

Integral (1.3.1) definisan za slučajne procese iz klase $\mathcal{M}_2[0,T]$ ima sledeće osobine:
(I) ako su $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{M}_2[0,T]$ dve stepenaste funkcije i $\alpha, \beta \in R$ proizvoljne konstante, tada je $\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2 \in \mathcal{M}_2[0,T]$ i važi

$$\int_0^T (\alpha\varphi_1(t) + \beta\varphi_2(t))\, dw_t = \alpha\int_0^T \varphi_1(t)dw_t + \beta\int_0^T \varphi_2(t)dw_t;$$

(II) ako je $\varphi \in \mathcal{M}_2[0,T]$ stepenasta funkcija, tada je

$$E\left(\int_0^T \varphi(t)dw_t\right)^2 = \int_0^T E\varphi^2(t)dt \quad \text{–izometrija Itovog integrala;}$$

(III) za svaku stepenastu funkciju $\varphi \in L_2[0,T]$ i pozitivne konstante ε i N, važi

$$P\left\{\left|\int_0^T \varphi(t)dw_t\right| > \varepsilon\right\} \leq P\left\{\int_0^T \varphi^2(t)dt > N\right\} + \frac{N}{\varepsilon^2}.$$

Neka je proces $f \in \mathcal{M}_2[0,T]$ i neka postoji niz stepenastih funkcija $\varphi_n \in \mathcal{M}_2[0,T]$, koji aproksimira f, u smislu da je

$$\lim_{n\to\infty} E\int_0^T [f(t)-\varphi_n(t)]^2 dt = 0.$$

Tada je

$$\lim_{n,m\to\infty} E\int_0^T [\varphi_n(t)-\varphi_m(t)]^2 dt = 0,$$

pa je u tom slučaju

$$\lim_{n,m\to\infty} E\left[\int_0^T \varphi_n(t)dw_t - \int_0^T \varphi_m(t)dw_t\right]^2 = \lim_{n,m\to\infty} E\int_0^T [\varphi_n(t)-\varphi_m(t)]^2 dt = 0. \tag{1.3.2}$$

Odatle se može zaključiti da je niz slučajnih promenljivih $\{\int_0^T \varphi_n(t)dw_t\}$ Cauchyjev u smislu srednje kvadratne konvergencije, pa konvergira ka nekoj granici, koja će biti označena sa $\int_0^T f(t)dw_t$. Dakle, Itov integral je

$$\int_0^T f(t)dw_t := \text{sk}\lim_{n\to\infty}\int_0^T \varphi_n(t)dw_t.$$

Za dva različita niza stepenastih funkcija $\{\varphi_n(t)\}$ i $\{\psi_n(t)\}$, $n\in N$, koja aproksimiraju f, može se pokazati da se skoro izvesno poklapaju vrednosti njihovog Itovog integrala $\int_0^T f(t)dw_t$, pa on ne zavisi od izbora niza stepenastih funkcija.

Može se zaključiti, na osnovu srednje kvadratne konvergencije niza stepenastih funkcija ka procesu $f\in\mathcal{M}_2[0,T]$, da za Itov integral procesa f važe osobine $(I)-(III)$.

Sa klase $\mathcal{M}_2[0,T]$ može se preći na klasu $L_2[0,T]$, na sledeći način: Pošto za niz stepenastih funkcija $\{\varphi(t), t\in[0,T]\}$, koji aproksimira $f\in L_2[0,T]$, važi osobina (III), za proizvoljne pozitivne brojeve ε i δ je

$$P\left\{\left|\int_0^T \varphi_n(t)dw_t - \int_0^T \varphi_m(t)dw_t\right| > \varepsilon\right\} \le P\left\{\int_0^T [\,\varphi_n(t)-\varphi_m(t)]^2(t)dt > \varepsilon^2\delta\right\} + \varepsilon,$$

pa se na osnovu (1.3.2) može zaključiti da je niz $\{\int_0^T \varphi_n(t)dw_t\}$ Cauchyjev u smislu konvergencije u verovatnoći. Zbog toga on konvergira u verovatnoći ka nekoj slučajnoj promenljivoj koja ne zavisi od izbora niza stepenih slučajnih funkcija, i koja predstavlja Itov integral slučajnog procesa $f\in L_2[0,T]$. Tada se može dokazati da za Itov integral slučajnog procesa $f\in L_2[0,T]$ važe osobine (I) i (III), dok izometrija Itovog integrala, dakle osobina (II), ne važi.

Neka je m-dimenzionalni Wienerov proces $w=\{w_t, t\ge 0\}$ definisan na prostoru verovatnoća $(\Omega,\mathcal{F},P)$, $\{\mathcal{F}_t, t\ge 0\}$ potok generisan ovim procesom i $f:[0,T]\times\Omega\to R^n\times R^m$ $n\times m$-dimenzionalni slučajni proces saglasan sa potokom $\{\mathcal{F}_t, t\ge 0\}$. Pri tome su elementi prostora $R^n\times R^m$ matrice $f=[f_{ij}]$, $i=1,\dots,n$, $j=1,\dots,m$ dimenzije $n\times m$ sa normom $|f|^2=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m f_{ij}^2 = trff^T$. Neka je $L_2[0,T]$ klasa svih $n\times m$-dimenzionalnih slučajnih procesa f saglasnih sa potokom $\{\mathcal{F}_t, t\ge 0\}$, za koje važi $\int_0^T |f(t,\omega)|^2 dt<\infty$, skoro izvesno. Slučajni integral Itoa po m-dimenzionalnom Wienerovom procesu se konstruiše slično kao u slučaju jednodimenzionalnog Wienerovog procesa, samo sa odgovarajućom matričnom normom, pri čemu važe iste osobine kao u jednodimenzionalnom slučaju.

1.3.2. Neodređeni slučajni integral Itoa

Definicija 1.3.3. *Slučajni proces* $\{I_t, t \in [0,T]\}$ *definisan sa*

$$I(t) := \int_0^T I_{\{s\leq t\}} f(s)dw_s = \int_0^t f(s)dw_s \tag{1.3.3}$$

je neodređeni slučajni integral Itoa slučajnog procesa $f \in \mathcal{M}_2[0,T]$, *gde je* $I_{\{s\leq t\}}$ *indikator skupa* $\{s \leq t\}$.

Neodređeni slučajni integral (1.3.3) ima sledeće osobine koje slede iz same konstrukcije slučajnog integrala Itoa:

1. $I(t)$ je $\mathcal{F}_t$-merljiv proces, za svako $t \in [0,T]$;
2. $EI(t) = 0$;
3. $E|I(t)|^2 = \int_0^t E|f(t)|^2 ds$ -integralna izometrija;
4. $\int_0^t f(s)dw_s = \int_0^u f(s)dw_s + \int_u^t f(s)dw_s$, $u, t \in [0,T]$.

U slučaju kada je $f \in L_2[0,T]$ za neodređeni slučajni integral Itoa (1.3.3) ne važi osobina 3.

Za slučajni proces $\{I(t), t \in [0,T]\}$ važe sledeća tvrđenja:

Teorema 1.3.2. *Neka je* $\{w_t, \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ *Wienerov proces i neka je* $f \in \mathcal{M}_2[0,T]$. *Neodređeni slučajni integral Itoa* $\{I(t), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$, *definisan sa (1.3.3), je martingal, odnosno* $E(I(t)|\mathcal{F}_s) = I(s)$, *skoro izvesno, za* $s < t$.

Može se dokazati da prethodno tvrđenje ne važi pod pretpostavkom $f \in L_2[0,T]$.

Teorema 1.3.3. *Ako je* $f \in \mathcal{M}_2[0,T]$, *slučajni proces definisan sa (1.3.3) je skoro izvesno neprekidan.*

Teorema 1.3.4. (Nejednakost Dooba, [14]).*Za slučajni proces* $f \in \mathcal{M}_2[0,T]$ *važi nejednakost*

$$E\left\{\sup_{t\in[0,T]}\left|\int_0^t f(s)ds\right|^2\right\} \leq 4\int_0^T E|f(t)|^2 dr. \tag{1.3.4}$$

Teorema 1.3.5. (Nejednakost Burkholder-Davis-Gundy, [9]) *Za merljiv proces* $f \in L_2[0,T]$, *koji je saglasan sa familijom* σ*-polja* $\{\mathcal{F}_t,\ t \geq 0\}$ *generisanom slučajnim procesom* $\{w_t,\ t \geq 0\}$ *i za svako* $l > 0$, *postoji pozitivna konstanta* c_l *koja zavisi samo od* l, *tako da je*

$$E\left\{\sup_{0\leq s\leq t}\left|\int_0^s f(u)dw_u\right|^l\right\} \leq c_l E\left(\int_0^t |f(u)|^2 du\right)^{\frac{l}{2}}, \qquad t \in [0,T]. \tag{1.3.5}$$

Neodređeni slučajni integral Itoa slučajne funkcije $f \in L_2[0,T]$ po m-dimenzionalnom Wienerovom procesu je n-dimenzionalni slučajni proces $\{I(t),\ t \in [0,T]\}$, skoro izvesno jedinstven, takav da je $I(t) = \int_0^t f(s)dw_s := \int_0^T f(s)I_{\{s\leq t\}}dw_s$, $t \in [0,T]$, sa istim osobinama koje važe za jednodimenzionalni slučaj. Ako je $\int_0^t E|f(s)|^2 ds < \infty$, zadovoljena je osobina integralne izometrije, tj. $E|I(t)|^2 = \int_0^t E|f(s)|^2 ds$, u odnosu na odgovarajuće norme, odnosno sa leve strane jednakosti je Euclidova norma u R^n, a sa desne Euclidova norma u $R^n \times R^m$.

1.3.3. Itova formula

Definicija 1.3.4. *Neka su slučajni procesi* $|a|^{1/2}, b \in L_2[0,T]$ *i proces* $\{x_t,\, t \in [0,T]\}$ *takav da za svako* $0 \le t_1 < t_2 \le T$ *važi*

$$x_{t_1} - x_{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} a(t)dt + \int_{t_1}^{t_2} b(t)dw_t.$$

Tada slučajni proces x_t *ima stohastički diferencijal*

$$dx_t = a(t)dt + b(t)dw_t,\ t \in [0,T].$$

U mnogim slučajevima efektivno izračunavanje slučajnog integrala Itoa ne bi bilo moguće bez primene Itove formule za stohastičko diferenciranje složene funkcije.

Teorema 1.3.6. (Formula Itoa, [22]) *Neka slučajni proces* x_t *ima stohastički diferencijal*

$$dx_t = a(t)dt + b(t)dw_t,$$

i neka je funkcija $f : [0,T] \times R \to R$ *neprekidna i sa neprekidnim parcijalnim izvodima* $f'_t(t,x), f'_x(t,x),\ f''_{xx}(t,x)$*. Tada proces* $f(t,x_t)$ *ima stohastički diferencijal*

$$(1.3.6)\quad df(t,x_t) = \left[f'_t(t,x_t) + \frac{1}{2}f''_{xx}(t,x_t)b^2(t) + f'_x(t,x_t)a(t)\right]dt + f'_x(t,x_t)b(t)dw_t,\ t \in [0,T].$$

Izraz (1.3.6) dobio je ime po Itou i predstavlja *Itovu formulu* za stohastičko diferenciranje.

Primer 1.3.1. Primenom Itove formule za stohastičko diferenciranje (1.3.6) može se efektivno izračunati neodređeni slučajni integral Itoa $\int_0^t w_s dw_s$. Pošto je $a \equiv 0$, a $b \equiv 1$, ako se primeni formula (1.3.6) na funkciju $f(x) = x^2$, dobija se

$$dw_t^2 = dt + 2w_t dw_t,$$

tako da je

$$\int_0^t w_t dw_t = \frac{1}{2}w_t^2 - \frac{1}{2}t. \qquad \triangle$$

Ako se iskoristi Itova formula (1.3.6), može se dokazati sledeće tvrđenje:

Teorema 1.3.7. (videti, na primer, [4], [15], [16], [20]) *Neka je slučajni proces* $f \in L_2[0,T]$ *i* $\int_0^T Ef^{2m}(t)dt < \infty$*, pri čemu je* $m \in N$*. Tada je*

$$(1.3.7)\qquad E\left(\int_0^t f(t)dw_t\right)^{2m} \le [m(2m-1)]^{m-1}t^{m-1}\int_0^t Ef^{2m}(t)dt,\ t \in [0,T].$$

Neka su zadati n-dimenzionalni slučajni proces $a \in L_1[0,T]$, $n \times m$-dimenzionalni slučajni proces $b \in L_2[0,T]$ i n-dimenzionalna slučajna promenljiva x_0, $\mathcal{F}_0$-merljiva i nezavisna u odnosu na m-dimenzionalni Wienerov proces. n-dimenzionalni slučajni proces

$$x_t = x_0 + \int_0^t a(s)ds + \int_0^t b(s)dw_s,\ t \in [0,T],$$

je saglasan sa potokom $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ i skoro izvesno neprekidan. Za $0 \leq s \leq t \leq T$ je

$$x_t - x_s = \int_s^t a(u)du + \int_s^t b(u)dw_u.$$

U tom slučaju slučajni proces $\{x_t, t \in [0,T]\}$ ima *stohastički diferencijal* $dx_t = a(t)dt + b(t)dw_t$, odnosno, $dx_t = (dx_1(t), \ldots, dx_n(t))$, gde je $dx_i(t) = a_i(t)dt + \sum_{j=1}^m b_{ij}(t)dW_j(t)$, $i = 1, \ldots, n$.

I u višedimenzionalnom slučaju za efeksivno rešavanje Itovih slučajnih integrala, u većini slučajeva je neohodno primeniti Itovu formulu za stohastično diferenciranje složene funkcije.

Teorema 1.3.8. (Formula Itoa, [22]) *Neka slučajni proces* $\{x_t, t \in [0,T]$ *ima stohastički diferencijal*

$$dx_t = a(t)dt + b(t)dw_t,$$

i neka je funkcija $f : [0,T] \times R^n \to R$, *tj.* $f(t,x) = f(t, x_1, \ldots, x_n)$, *neprekidna i sa neprekidnim parcijalnim izvodima* $f'_t(t,x), f'_{x_i}(t,x),\ f''_{x_i x_j}(t,x)$, $i = 1, \ldots, n$. *Tada slučajni proces* $f(t, x_t) = f(t, x_1(t), \ldots, x_n(t))$ *ima stohastički diferencijal*

$$\begin{aligned} (1.3.8)\quad df(t,x_t) = &\left[f'_t(t,x_t) + \frac{1}{2} \cdot \sum_{i,j=1}^n f''_{x_i x_j}(t,x_t) \cdot \sum_{k=1}^m b_{ik}(t)b_{jk}(t) + \sum_{i=1}^n f'_{x_i}(t,x_t)a_i(t) \right] dt \\ &+ \sum_{i=1}^n f'_{x_i}(t,x_t) \cdot \sum_{j=1}^m b_{ij}(t)dW_j(t), \qquad t \in [0,T]. \end{aligned}$$

1.4. Stohastičke diferencijalne jednačine

Kao sastavni deo teorije slučajnih procesa razvijala se i teorija stohastičkih diferencijalnih jednačina. U nekim radovima Bernsteina i Wienera, četrdesetih godina prošlog veka, sadržani su pojedini elementi ove teorije. Međutim, sovjetski matematičar I.I.Gihman [17] i japanski matematičar K.Itô [21], [22] su desetak godina kasnije, definisali stohastičku diferencijalnu jednačinu čije je rešenje proces Markova. U današnje vreme je prihvaćena definicija slučajnog integrala kao integrala slučajne funkcije po Wienerovom procesu, koju je dao Ito. U isto vreme Doob je uveo pojam martingala, čime je doprineo da razvitak ove teorija bude još intenzivniji. Značajne rezultate u proučavanju stohastičkih diferencijalnih jednačina po martingalima i martingalnim merama dali su mnogi matematičari, a posebno Gihman i Skorohod [17], Kunita i Watanabe [20], Meyer [58]. Tokom sedamdesetih godina teorija stohastičkih diferencijalnih i integralnih jednačina ubrzano se razvija i njome se bave mnogi poznati matematičari C.P.

Tsokos [76], L. Arnold [4], A.T. Bharucha-Reid [6], A. Friedman [15], N. Ikeda i S. Watanabe [20], E. Wong [79], G. Kallianpur [45] i drugi.

Neka je $w = (w_t, t \geq 0)$ standardan Wienerov proces, definisan na kompletnom prostoru verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$, $x = \{x_t, t \in [0,T]\}$ slučajni proces saglasan sa familijom σ-polja $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ generisanom slučajnim procesom w, η slučajna promenljiva definisana na istom prostoru verovatnoća i nezavisna od w, a funkcije $a : [0,T] \times R \to R$ i $b : [0,T] \times R \to R \times R$, su definisane i Borel merljive na svojim domenima. Stohastička diferencijalna jednačina Itoa je oblika

$$dx_t = a(t, x_t)dt + b(t, x_t)dw_t, \quad x_0 = \eta, \quad t \in [0,T]. \tag{1.4.1}$$

Funkcije $a(t,x)$ i $b(t,x)$ predstavljaju koeficijente jednačine (1.4.1), pri čemu se funkcija $a(t,x)$ naziva *koeficijent prenosa*, a funkcija $b(t,x)$ *koeficijent difuzije.*

Jednačina (1.4.1) se može zapisati i u ekvivalentnom integralnom obliku,

$$x_t = \eta + \int_0^t a(s, x_s)ds + \int_0^t b(s, x_s)dw_s, \ t \in [0,T], \tag{1.4.2}$$

pri čemu je prvi integral sa desne strane ove jednakosti Lebesgueov integral, a drugi Itov integral.

Definicija 1.4.1. *Slučajni proces $\{x_t, t \in [0,T]\}$ je strogo rešenje jednačine (1.4.2) ako su zadovoljeni sledeći uslovi:*

(a) x_t je neanticipativan proces za $t \in [0,T]$;

(b) $\int_0^T |a(t,x_t)|dt < \infty$, $\int_0^T |b(t,x_t)|^2 dt < \infty$, skoro izvesno;

(c) $x_0 = \eta$, skoro izvesno;

(d) jednačina (1.4.2) je zadovoljena za svako $t \in [0,T]$, skoro izvesno.

Definicija 1.4.2. *Stohastička diferencijalna jednačina(1.4.2) ima jedinstveno strogo rešenje ako za bilo koja dva stroga rešenja x i y važi*

$$P\{\sup_{t \in [0,T]} |x_t - y_t| > 0\} = 0.$$

Potrebno je precizno definisati uslove pri kojima postoji jedinstveno rešenje jednačine (1.4.2). Sledeća teorema egzistencije i jedinstvenosti rešenja daje dovoljne uslove pod kojima postoji rešenje jednačine (1.4.2) koje je jedinstveno i omogućava izračunavanje karakteristika i ispitivanje osobina rešenja stohastičkih diferencijalnih jednačina.

Teorema 1.4.1. ([4], [15], [17]) *Pretpostavimo da su koeficijenti $a : [0,T] \times R \to R$ i $b : [0,T] \times R \to R$ jednačine (1.4.1) Borel merljivi i da za njih važe globalni Lipschitzov uslov i uslov ograničenog rasta po poslednjem argumentu, tj. postoji konstanta $L > 0$, takva da je za svako $x, y \in R$, $t \in [0,T]$:*

$$|a(t,x) - a(t,y)| + |b(t,x) - b(t,y)| \leq L|x - y|, \tag{1.4.3}$$

$$|a(t,x)|^2 + |b(t,x)|^2 \leq L^2 \left(1 + |x|^2\right). \tag{1.4.4}$$

Ako je $E|\eta|^{2m} < \infty$ *za fiksiran prirodan broj* m*, tada postoji jedinstveno, skoro izvesno neprekidno strogo rešenje* $x = \{x_t, t \in [0,T]\}$ *jednačine* (1.4.1)*, za koje važi da je* $E\{\sup_{t\in[0,T]} |x_t|^{2m}\} < \infty$.

Ova osnovna teorema egzistencije i jedinstvenosti rešenja jednačine (1.4.1) se dokazuje konstrukcijom niza sukcesivnih aproksimacija, tj. niza slučajnih procesa $\{x_n(t),\, t \in [0,T]\}$, na sledeći način:

$$\begin{aligned} x_0(t) &= \eta, \\ x_n(t) &= \eta + \int_0^t a(s, x_{n-1}(s))ds + \int_0^t b(s, x_{n-1}(s))dw_s,\ n = 0, 1, \dots,\ t \in [0,T]. \end{aligned}$$

Dokazuje se da je posmatrani niz skoro izvesno uniformno neprekidan i da konvergira ka slučajnom procesu x_t koji je rešenje jednačine (1.4.1). Ovakav metod dokazivanja egzistencije rešenja x_t jednačine (1.4.1) naziva se *Picardov metod sukcesivnih aproksimacija.*

Teorema egzistencije i jedinstvenosti rešenja jednačine (1.4.1) može se iskazati i pod drugim pretpostavkama koje važe za koeficijente te jednačine. Jedna od njih je egzistencija ograničenog slučajnog integralnog kontraktora za koeficijente jednačine (1.4.1) (videti, na primer, [53], [66], [69]).

Ocena momenta $(2m)$-tog reda rešenja jednačine (1.4.1) data je sledećim izrazom

$$E|x_t|^{2m} \le (1 + E|\eta|^{2m})\, e^{c_1 t} - 1, \quad t \in [0,T], \tag{1.4.5}$$

gde je $c_1 > 0$ konstanta koja ne zavisi od T. Dokaz se može naći u literaturi, na primer, [17], [15], [67].

Može se dokazati (videti, na primer, [4], [17], [20], [67]) da je strogo rešenje x_t stohastičke diferencijalne jednačine (1.4.1) proces Markova.

Koeficijenti stohastičke diferencijalne jednačine mogu biti i slučajne funkcije, uz izvesne pretpostavke o njihovoj merljivosti. Neka su date slučajne funkcije $a : [0,T] \times R^n \times \Omega \to R^n$, $b : [0,T] \times R^n \times \Omega \to R^n \times R^m$ i n–dimenzionalna slučajna promenljiva η $\mathcal{F}_0$-merljiva i nezavisna u odnosu na m-dimenzionalni Wienerov proces. Jednačina

$$dx_t = a(t, x_t)dt + b(t, x_t)dw_t,\ x_0 = \eta,\ t \in [0,T],$$

je *višedimenzionalna stohastička diferencijalna jednačina Itoa* sa početnom vrednošću η. Pod istim pretpostavkama kao i u slučaju jednodimenzionalne diferencijalne jednačina Itoa (1.4.1), s tim da Lipschitzov uslov i uslov ograničenog rasta važe skoro izvesno, može se iskazati osnovna teorema egzistencije i jedinstvenosti rešenja, naravno u odnosu na odgovarajuće prostore i norme.

1.5. Linearne stohastičke integrodiferencijalne jednačine

M. Berger i V. Mizel [8] su, uvodeći pojam dvostrukog stohastičkog integrala, dokazali egzistenciju i jedinstvenost rešenja linearne stohastičke integrodiferencijalne jednačine Itoa,

$$dx_t = \left[a_1(t, x_t) + \int_0^t a_2(t, s, x_s)\, ds + \int_0^t a_3(t, s, x_s)\, dw_s\right] dt \tag{1.5.1}$$

$$+ \left[b_1(t, x_t) + \int_0^t b_2(t, s, x_s)\, ds + \int_0^t b_3(t, s, x_s)\, dw_s \right] dw_t, \quad t \in [0, T],$$
$$x_0 = \eta,$$

pri čemu se podrazumeva linearnost po integralima. Ovde je x_t slučajni proces sa vrednostima u R^n definisan na $[0, T]$, w je R^m-vrednosni Wienerov proces, η je slučajna promenljiva sa vrednostima u R^n, nezavisna od w, a funkcije

$$\begin{array}{ll} a_1 : [0, T] \times R^n \to R^n, & b_1 : [0, T] \times R^n \to R^n \times R^m, \\ a_2 : J \times R^n \to R^n, & b_2 : J \times R^n \to R^n \times R^m, \\ a_3 : J \times R^n \to R^n \times R^m, & b_3 : J \times R^n \to R^n \times R^m \times R^m \end{array}$$

su definisane i Borel merljive na svojim domenima, gde je

$$J = \{ (t, s) \, : \, 0 \leq s \leq t \leq T \}.$$

Jednačina (1.5.1) se može zapisati u integralnom obliku,

$$(1.5.2) \quad \begin{aligned} x_t &= \int_0^t \left[a_1(s, x_s) + \int_0^s a_2(s, r, x_s)\, dr + \int_0^s a_3(s, r, x_r)\, dw_r \right] ds \\ &+ \int_0^t \left[b_1(s, x_s) + \int_0^s b_2(s, r, x_r)\, dr + \int_0^s b_3(s, r, x_r)\, dw_r \right] dw_s, \quad t \in [0, T], \\ x_0 &= \eta, \end{aligned}$$

pri čemu se u ovoj jednačini pojavljuju dvostruki stohastički integrali. Potrebno je definisati uslove pod kojima oni postoje kao neanticipativni i skoro izvesno neprekidni slučajni procesi.

Lema 1.5.1. *(Berger, Mizel, [8]) Neka je funkcija f definisana i merljiva na $[0, T] \times [0, T] \times \Omega$ sa vrednostima u $R^n \times R^m$ ili u $R^n \times R^m \times R^m$. Neka je $f(t, s)$ neanticipativna po s za svako $t \in [0, T]$. Ako je*

$$\int_0^T |f(t, s)|^2 ds < \infty, \quad \textit{skoro izvesno,}$$

za svako $t \in [0, T]$, tada je

$$\int_0^T f(t, s) dw_s$$

merljiva funkcija na $[0, T] \times \Omega$.

Lema 1.5.2. *(Berger, Mizel, [8]) Neka je funkcija f definisana i merljiva na $[0, T] \times [0, T] \times \Omega$ sa vrednostima u $R^n \times R^m$ ili u $R^n \times R^m \times R^m$. Neka je $f(t, s)$ neanticipativna po s za svako $t \in [0, T]$. Ako je*

$$\int_0^T \int_0^T |f(t, s)|^2 ds dt < \infty, \quad \textit{skoro izvesno,}$$

tada je

$$\int_0^T f(t, s) dw_s \in L_2[0, T].$$

Lema 1.5.3. *(Berger, Mizel, [8]) Neka je funkcija f definisana i merljiva na $[0,T]\times[0,T]\times\Omega$ sa vrednostima u $R^n \times R^m$ ili u $R^n \times R^m \times R^m$. Neka je $f(t,s)$ neanticipativna u s za svako $t \in [0,T]$ i neka postoji neslučajna funkcija $K(s)$ i konstanta $\alpha > 0$, tako da je*

$$\int_0^T |K(s)|^2 ds < \infty,$$

i

$$|f(t_2,s) - f(t_1,s)| \leq K(s)|t_2 - t_1|^\alpha, \quad \textit{skoro izvesno,}$$

za $t_1, t_2, s \in [0,T]$. Tada je proces

$$\int_0^T f(t,s) dw_s,$$

skoro izvesno neprekidan na $[0,T]$.

Lema 1.5.4. *(Berger, Mizel, [8]) Neka je funkcija f definisana i merljiva na $J \times \Omega$ sa vrednostima u $R^n \times R^m$ ili u $R^n \times R^m \times R^m$. Neka je $f(t,s)$ neanticipativna u s za svako $t \in [0,T]$ i neka postoji neslučajna funkcija $K(s)$ i konstanta $\alpha > 0$, tako da je*

$$\int_0^T |K(s)|^2 ds < \infty,$$

i

$$|f(t_2,s) - f(t_1,s)| \leq K(s)|t_2 - t_1|^\alpha, \quad \textit{skoro izvesno,}$$

za $0 \leq s \leq t_1 \leq t_2 \leq T$. Neka postoje konstante $\varepsilon > 0$, $D > 0$ takve da je

$$\sup_{t\in[0,T]} \int_0^t |f(t,s)|^{2+\varepsilon} ds \leq D, \quad \textit{skoro izvesno.}$$

Tada je proces

$$\int_0^t f(t,s) dw_s,$$

skoro izvesno neprekidan na $[0,T]$.

Na osnovu ovih tvrđenja može se zaključiti da su svi jednostruki i dvostruki integrali koji figurišu u jednačini (1.5.2) neanticipativni i skoro izvesno neprekidni procesi.

Definicija 1.5.1. *Slučajni proces $\{x_t, t \in [0,T]\}$ sa vrednostima u R^n, je rešenje jednačine (1.5.2) ako su zadovoljeni sledeći uslovi:*

(a) x_t *je neanticipativan proces za $t \in [0,T]$;*

(b)
$$\begin{aligned}
&\int_0^T |a_1(t,x_t)| dt < \infty, && \int_0^T |b_1(t,x_t)|^2 dt < \infty, \quad \textit{skoro izvesno,}\\
&\int_0^T \int_0^t |a_2(t,s,x_s)| ds dt < \infty, && \int_0^T \int_0^t |b_2(t,s,x_s)|^2 ds dt < \infty, \ \textit{skoro izvesno,}\\
&\int_0^T \int_0^t |a_3(t,s,x_s)| ds dt < \infty, && \int_0^T \int_0^t |b_3(t,s,x_s)|^2 ds dt < \infty, \ \textit{skoro izvesno;}
\end{aligned}$$

(c) *jednačina (1.5.2) je zadovoljena za svako $t \in [0,T]$, skoro izvesno.*

Teorema egzistencije i jedinstvenosti rešenja stohastičke integrodiferencijalne jednačine Itoa je formulisana po uzoru na klasičnu teoremu egzistencije i jedinstvenosti rešenja SDJ, a dokaz je, naravno, izveden korišćenjem klasičnog Picard-Lindelöfovog metoda sukcesivnih aproksimacija.

Teorema 1.5.1. *(Berger, Mizel, [8]) Neka je η slučajna promenljiva sa vrednostima u R^n, nezavisna od Wienerovog procesa $w = \{w_t,\, t \geq 0\}$, pri čemu je $E|\eta|^2 < \infty$. Pretpostavimo da postoji konstanta $L > 0$ tako da za svako $(t,s) \in J$ i $x, y \in R^n$ važi*

$$\begin{aligned} &|a_1(t,x) - a_1(t,y)| \leq L|x-y|, \qquad |a_i(t,s,x) - a_i(t,s,y)| \leq L|x-y|,\ i = 2,3,\\ &|b_1(t,x) - b_1(t,y)| \leq L|x-y|, \qquad |b_i(t,s,x) - b_i(t,s,y)| \leq L|x-y|,\ i = 2,3, \end{aligned} \tag{1.5.3}$$

$$\begin{aligned} &|a_1(t,x)|^2 \leq L^2(1+|x|^2), \qquad |a_i(t,s,x)|^2| \leq L^2(1+|x|^2),\ i = 2,3,\\ &|b_1(t,x)|^2 \leq L^2(1+|x|^2), \qquad |b_i(t,s,x)|^2 \leq L^2(1+|x|^2),\ i = 2,3. \end{aligned} \tag{1.5.4}$$

Tada postoji jedinstveno, skoro izvesno neprekidno rešenje $\{x_t, t \in [0,T]\}$ jednačine (1.5.1), *tako da je $x_0 = \eta$ skoro izvesno i $E \sup_{0 \leq t \leq T} |x_t|^2 < \infty$.*

Prateći postupak korišćen u [56] i [8], lako se može dokazati da ako je $E|\eta|^{2m} < \infty$, za neki fiksiran broj $m \in N$, tada je $E\{\sup_{t\in[0,T]} |x_t|^{2m}\} < \infty$.

Može se iskazati analogna teorema Teoreme 1.5.1 (videti [8], strana 207-209), u slučaju da koeficijenti jednačine (1.5.1) zavise od ω, pri čemu je neophodno pretpostaviti da je početni uslov slučajni proces, dok su $a_1(t,x)$ i $b_1(t,x)$ neanticipativne slučajne funkcije u t za svako x, $a_2(t,s,x)$ i $b_2(t,s,x)$ su neanticipativne u t za svako (s,x), dok su $a_3(t,s,x)$ i $b_3(t,s,x)$ neanticipativne u s za svako (t,x).

Teorema egzistencije i jedinstvenosti rešenja jednačine (1.5.1) može biti iskazana pod pretpostavkama drugačijim od onih u Teoremi 1.5.1, kao što je u radu (M. Jovanović, [38], 1994.), gde je za koeficijente jednačine pretpostavljena egzistencija regularnog ograničenog slučajnog integralnog kontraktora, umesto uslova (1.5.3) i (1.5.4).

1.6. Opšte stohastičke integrodiferencijalne jednačine

Neke pojave u socijalnim naukama, fizici, inženjerstvu, biologiji i medicini, kao i ekonomiji, koje zavise od slučajnih pobuda tipa Gaussovog belog šuma, matematički se opisuju i modeliraju opšim stohastičkim integrodiferencijalnim jednačinama Itoa. Te jednačine predstavljaju uopštenje stohastičkih diferencijalnih jednačina oblika (1.4.1) i linearnih stohastičkih integrodiferencijalnih jednačina oblika (1.5.1), a detaljno su ih proučavali autori Murge i Pachpatte ([63], [64], [65]), zatim Stoyanov [73] i naravno, u jednostavanijem obliku, Berger i Mizel [8]. Osnovna teorema egzistencije i jedinstvenosti rešenja dokazana je u navedenim radovima, korišćenjem klasičnog Picardovog metoda sukcesivnih aproksimacija.

Opša stohastička integrodiferencijalna jednačina Itoa je oblika

$$dx_t = F\Big(t, x_t, \int_0^t f_1(t,s,x_s)\,ds, \int_0^t f_2(t,s,x_s)\,dw_s\Big)\,dt \tag{1.6.1}$$

$$+ G\Big(t, x_t, \int_0^t g_1(t,s,x_s)\,ds, \int_0^t g_2(t,s,x_s)\,dw_s\Big)\,dw_t,\ \ t \in [0,T],$$
$$x_0 = \eta, \quad \text{skoro izvesno.}$$

U ovom slučaju pretpostavlja se da je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ kompletan prostor verovatnoća na kome je definisan jednodimenzionalan standardni Wienerov proces $w = (w_t, t \geq 0)$, $\{x_t, t \in [0,T]\}$ je jednodimenzionalan slučajni proces saglasan sa familijom σ-polja $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ generisanom slučajnim procesom w, a η je slučajna promenljiva definisana na istom prostoru verovatnoća i nezavisna od w. Slučajne funkcije

$$f_i : J \times R \times \Omega \to R, \qquad g_i : J \times R \times \Omega \to R, \qquad i = 1,2,$$
$$F : [0,T] \times R^3 \times \Omega \to R, \qquad G : [0,T] \times R^3 \times \Omega \to R,$$

gde je $J = \{(t,s) : 0 \leq s \leq t \leq T\}$, su Borel merljive na svojim domenima, $f_i(t,s,x)$ i $g_i(t,s,x)$ su $\mathcal{F}_s$-merljive za svako $s \leq t$, $x \in R$, $F(t,x,y,z)$ i $G(t,x,y,z)$ su $\mathcal{F}_t$-merljive za svako $(x,y,z) \in R^3$. Da bi označavanje bilo jednostavnije, izostavljeno je ω u svim slučajnim funkcijama i procesima vezanim za jednačinu (1.6.1).

Teorema 1.6.1. *(Murge, Pachpatte, [66]) Neka je $E|\eta|^2 < \infty$ i neka slučajne funkcije f_i, g_i, F i G zadovoljavaju globalni Lipschitzov uslov i uslov ograničenog rasta, tj. neka postoji konstanta $L > 0$ takva da za svako $(t,s) \in J$ i $(x,y,z), (x',y',z') \in R^3$, sa verovatnoćom jedan, važi*

(1.6.2)
$$|F(t,x,y,z) - F(t,x',y',z')| \leq L\,(|x-x'| + |y-y'| + |z-z'|),$$
$$|f_i(t,s,x) - f_i(t,s,x')| \leq L\,|x-x'|, \quad i = 1,2,$$

(1.6.3)
$$|F(t,x,y,z)|^2 \leq L^2(1 + |x|^2 + |y|^2 + |z|^2),$$
$$|f_i(t,s,x)|^2 \leq L^2(1 + |x|^2),$$

i analogno za G, g_1, g_2. Tada jednačina (1.6.1) ima jedinstveno skoro izvesno neprekidno i $\mathcal{F}_t$-merljivo rešenje x_t koje zadovoljava uslov da je $E\{\sup_{t\in[0,T]} |x_t|^2\} < \infty$.

Analogno, kao kod prethodnih jednačina, prateći postupak korišćen u radu [56], može se dokazati da ako je $E|\eta|^{2m} < \infty$ za neki prirodan broj m, tada je $E\{\sup_{t\in[0,T]} |x_t|^{2m}\} < \infty$.

1.7. Nasledne stohastičke diferencijalne jednačine

Nasledne stohastičke diferencijalne i integrodiferencijalne jednačine Itovog tipa imaju veliku primenu u mehanici i tehničkim naukama. U mehanici fluida, kod materijala sa memorijom, od posebnog je značaja nasledni fenomen. Matematičke modele u teoriji viskoelastičnosti predstavljaju nasledne funkcionalne diferencijalne jednačine, čije su asimptotsko ponašanje i stabilnost rešenja proučavali, na primer, Coleman [11], [12], [13], Mizel [55], [59], [61] Hale, Marcus [59] , Trutzer [61], [62]. U radu V.Mizela i V.Trutzera [62], koji je ustvari doktorska disertacija V.Trutzera, proučavane su egzistencija, jedinstvenost i stabilnost rešenja jedne klase naslednih stohastičkih diferencijalnih i integrodiferencijalnih jednačina Itoa.

Neka je R^n realni n-dimenzionalni Euklidov prostor i L_p^ρ, $1 \le p < \infty$, prostor merljivih funkcija sa *težinskom funkcijom* $\rho : R^+ \to R^+$, tj.

$$L_p^\rho = \left\{ \varphi \,|\, \varphi : R^+ \to R^n, \int_0^\infty |\, \varphi(s)|^p \rho(s) ds < \infty \right\}.$$

gde težinska funkcija zadovoljava uslove:

(a) ρ je integrabilna na R^+;

(b) $\forall \sigma \ge 0 \quad \overline{K}(\sigma) = ess\,\sup_{s\in R^+} \dfrac{\rho(s+\sigma)}{\rho(s)} \le \overline{\overline{K}} < \infty,$

$\qquad \underline{K}(\sigma) = ess\,\sup_{s\in R^+} \dfrac{\rho(s)}{\rho(s+\sigma)} < \infty;$

(c) ρ je esencijalno ograničena na R^+;

(d) ρ je esencijalno strogo pozitivna na $(0, \infty)$;

(e) $s\rho(s) \to 0$, kada $s \to \infty$.

Neka je $X = R^n \times L_p^\rho$ prostor funkcija, tj. *prostor sa istorijom* i elementima $x = (\varphi(0), \varphi)$, sa normom

$$||\, x \,||_X = \left(|\, \varphi(0)|^p + \int_0^\infty |\, \varphi(s)|^p \rho(s) ds \right)^{1/p} = (|\, \varphi(0)| + ||\, \varphi||_r^p)^{1/p}.$$

Prostor $(X, ||\cdot||_X)$ je Banahov prostor.

Merljiva funkcija $x : (-\infty, a] \to R^n$ je *dopustiva u odnosu na* X ako je za svako $t \in (-\infty, a]$ funkcija x^t definisana sa $x^t(s) = x(t-s)$, $s \in R^+$. Pri tome je $x^t \in X$.

Ako je funkcija x dopustiva u odnosu na X, tada je $x^t = (x(t), x_r^t) \in X$, za svako $t \in (-\infty, a]$, pri čemu je

$$x_r^t(s) = \begin{cases} x(t-s), & 0 \le s \le t, \\ \varphi(s-t), & s > t, \end{cases} \qquad x(t) = \begin{cases} x(t), & 0 \le t \le T, \\ \varphi(-t), & t \le 0. \end{cases}$$

Neka je, kao i dosada, $w = \{w_t, t \ge 0\}$ m-dimenzionalni Wienerov proces definisan na prostoru verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ i saglasan sa potokom $\{\mathcal{F}_t, t \ge 0\}$. Za $t \ge 0$ neka je $\mathcal{X}_0$ prostor merljivih slučajnih procesa $x(t)$, $t \le 0$, gde je $x^0 \in X$ za skoro svako ω i za svako t, $x(t)$ ne zavisi od $\{w_u - w_0 : u \ge 0\}$. Na osnovu strukture prostora X, sledi da je $x^t \in X$ skoro izvesno, za svako $t \le 0$.

Početna vrednost φ takođe pripada prostoru $\mathcal{X}_0$.

Lema 1.7.1. *Neka je $x(t)$, $t \in R$ merljiv slučajni proces, pri čemu je $\sigma\{\, x(u) : u \le 0\} = \mathcal{G}_0$ nezavisno od $w_t - w_0$, $t \ge 0$ i za $t \ge 0$ $x(\cdot)$ je neprekidno i $\mathcal{G}_t := \mathcal{G}_0 \vee \mathcal{F}_t$-progresivno merljivo. Pored toga, za skoro svako ω funkcija $x^0(\cdot, \omega) \in X$. Za $t \ge 0$, $x^t(\omega) \in X$ za skoro svako ω i proces x^t sa vrednostima u X je skoro izvesno neprekidan i $\mathcal{G}_t$-progresivno merljiv.*

Sledeće relacije, koje su dobijene u radu [61], biće neophodne za dalji rad:

Za svako $x \in X$, $0 \in [0,a]$, $t \in [0,a]$,

$$|| x^t ||_X^p = | x(t)|^p + || x^t ||_r^p, \tag{1.7.1}$$

$$\begin{aligned} || x^t ||_X^l &= \left(|| x^t ||^p \right)^\nu \\ &\le \tilde{k}_\nu \left[| x(t)|^l + \overline{\overline{K}}^\nu || x^0 ||_X^l + \left(\int_0^t | x(u)|^p \rho(t-u)\, du \right)^\nu \right], \end{aligned} \tag{1.7.2}$$

gde je $l \ge 1$, $\nu = l/p$, $\tilde{k}_\nu = 3^{\nu-1} \vee 1$.

Ako je $w = \{w_t, t \ge 0\}$ m-dimenzionalni Wienerov proces definisan na prostoru verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ i saglasan sa potokom $\{\mathcal{F}_t, t \ge 0\}$, $x(t)$ slučajni proces sa vrednostima u R^n, $a : R \times X \to R^n$ i $b : R \times X \to R^n \times R^m$ funkcionali definisani i Borel merljivi na $R \times X$, tada je *nasledna stohastička diferencijalna jednačina* oblika

$$\begin{aligned} dx(t) &= a(t, x^t)dt + b(t, x^t)dw_t, \;\; t \ge 0 \\ x^0 &= \varphi^0. \end{aligned} \tag{1.7.3}$$

Kao što je napred istaknuto, u radu [61] detaljno su proučavani problemi egzistencije, jedinstvenosti i stabilnosti nasledne stohastičke diferencijalne jednačine.

Definicija 1.7.1. *Slučajni proces $\{x(t), t \in (-\infty, T]\}$, je strogo rešenje jednačine (1.7.3) za $t \in [0,T]$ ako važi:*

(a) $x(t)$ je neanticipativno za $t \le T$;

(b) za skoro svako ω, x^t je u X, za $t \in [0,T]$;

(c) $\int_0^T |a(t, x^t)|dt < \infty$, skoro izvesno i $\int_0^T |b(t, x^t)|^2 dt < \infty$, skoro izvesno;

(d) $x^0 = \varphi$, skoro izvesno;

(e) jednačina (1.7.3) važi za skoro svako $t \in [0,T]$.

Sada se može iskazati osnovna teorema egzistencije i jedinstvenosti rešenja nasledne stohastičke diferencijalne jednačine (1.7.3).

Teorema 1.7.1. *(Trutzer, Mizel, [61]) Neka su funkcionali a i b jednačine (1.7.3) $R \times X$ Borel merljivi i postoji konstanta $L > 0$, takva da je*

$$| a(t,x) - a(t,y)| + | b(t,x) - b(t,y)| \;\; \le L|| x - y ||_X, \tag{1.7.4}$$

$$| a(t,x)| + | b(t,x)| \;\; \le L(1 + || x ||_X) \tag{1.7.5}$$

za svako $t \in [0,T]$ i svako $x, y \in X$. Neka je $l \ge 1$, a x_- proces takav da je $x_- \in \mathcal{X}_0$ i $E|| x_-^0 ||_X^l < \infty$.

Tada postoji jedinstveno strogo rešenje jednačine (1.7.3), *skoro izvesno neprekidno za $t \in [0,T]$, sa početnim uslovom $x^0 = x_-^0$, za koje važi i*

$$E \sup_{0 \le s \le T} | x(s)|^l < \infty.$$

Ova teorema je dokazana klasičnom metodom sukcesivnih aproksimacija Picard-Lindelöfa, uz korišćenje odgovarajuće norme prostora X.

U citiranom radu [61] posmatrana je i opštija nasledna stohastička integrodiferencijalna jednačina

$$
\begin{aligned}
(1.7.6) \qquad dx(t) &= \left[a_1(t,x^t) + \int_0^t a_2(t,s,x^s)\,ds + \int_0^t a_3(t,s,x^s)\,dw_s\right] dt \\
&\quad + \left[b_1(t,x^t) + \int_0^t b_2(t,s,x^s)\,ds + \int_0^t b_3(t,s,x^s)\,dw_s\right] dw_s, \;\; t\in[0,T], \\
x^0 &= \varphi^0,
\end{aligned}
$$

sa funkcionalima

$$
\begin{aligned}
&a_1 : [0,T]\times X \to R^n, && b_1 : [0,T]\times X \to R^n\times R^m, \\
&a_2 : J\times X \to R^n, && b_2 : J\times X \to R^n\times R^m, \\
&a_3 : J\times X \to R^n\times R^m, && b_3 : J\times X \to R^n\times R^m\times R^m,
\end{aligned}
$$

gde je $J = \{\,(t,s)\,:\, 0\le s\le t\le T\}$, koji su Borel merljivi na svojim domenima; $\varphi\in X$ je nezavisno od $w_t - w_0$, $t\ge 0$.

Definicija 1.7.2. *Slučajni proces $\{x(t), t\in(-\infty,T]\}$ je rešenje jednačine (1.7.6) ako važi:*

(a) $x(t)$ je neanticipativno za $t\le T$;

(b) za skoro svako ω, $x^t\in X$, $t\in[0,T]$;

(c)
$$
\begin{aligned}
&\hat a_1(t) = a_1(t,x^t), && \hat a_2(t,s) = a_2(t,s,x^s), && \hat a_3(t,s) = a_3(t,s,x^s), \\
&\hat b_1(t) = b_1(t,x^t), && \hat b_2(t,s) = b_2(t,s,x^s), && \hat b_3(t,s) = b_3(t,s,x^s),
\end{aligned}
$$
su takvi da je

$\int_0^T |\hat a_1(t)|dt < \infty$ *s.i.,* $\int_0^T |\hat b_1(t)|^2 dt < \infty$ *s.i.,* $\int_0^T\int_0^t |\hat a_2(t,s)|dsdt < \infty$ *s.i.,*

dok $\hat a_3, \hat b_2, \hat b_3$ *zadovoljavaju* $\int_0^T\int_0^t |f(t,s)|^2 dsdt < \infty$ *s.i.;*

(d) $x^0 = \varphi^0$;

e) jednačina (1.7.6) je zadovoljena skoro izvesno za svako $t\in[0,T]$.

Teorema egzistencije i jedinstvenosti rešenja dokazana je, kao u klasičnom stohastičkom slučaju, Picard-Lindelöfovom metodom sukcesivnih aproksimacija uz korišćenje odgovarajuće norme prostora X.

Teorema 1.7.2. *Neka koeficijenti jednačine (1.7.6) a_i, b_i, $i = 1,2,3$ zadovoljavaju globalni Lipschitzov uslov, tj. postoji konstanta $L>0$, tako da za svako $(t,s)\in J$ i $x,y\in X$*

$$
\begin{aligned}
(1.7.7)\; &|\,a_1(t,x) - a_1(t,y)| \le L||\,x-y||_X, \quad |\,a_i(t,s,x) - a_i(t,s,y)| \le L||\,x-y||_X,\; i=2,3, \\
&|\,b_1(t,x) - b_1(t,y)| \le L||\,x-y||_X, \quad |\,b_i(t,s,x) - b_i(t,s,y)| \le L||\,x-y||_X,\; i=2,3
\end{aligned}
$$

i uslov ograničenog rasta sa istom konstantom

$$
\begin{aligned}
(1.7.8) \qquad &|\,a_1(t,x)| \le L(1+||\,x||_X), \quad |\,a_i(t,s,x)| \le L(1+||\,x||_X),\;\; i=2,3, \\
&|\,b_1(t,x)| \le L(1+||\,x||_X), \quad |\,b_i(t,s,x)| \le L(1+||\,x||_X),\;\; i=2,3.
\end{aligned}
$$

Ako je $x_- \in \mathcal{X}_0$, tako da je $E||\, x_-^0\, ||_X^2 < \infty$, tada postoji jedinstveno skoro izvesno neprekidno rešenje jednačine (1.7.6)*, za koje je $E \sup_{0 \le t \le T} |\, x(t)|^2 < \infty$.*

Pod pretpostavkom da je $E||\, x_-^0\, ||_X^l < \infty$, može se dokazati teorema slična Teoremi 1.7.1, samo za naslednu stohastičku diferencijalnu jednačinu (1.7.6), odakle je $E \sup_{0 \le t \le T} |x(t)|^l < \infty$.

1.7.1. Ograničen slučajni integralni kontraktor

Za različite klase stohastičkih diferencijalnih i integrodiferencijalnih jednačina Itoa teoreme egzistencije i jedinstvenosti rešenja mogu se proučavati korišćenjem pojma ograničenog slučajnog kontraktora, koji uključuje Lipschitzov uslov kao specijalan slučaj. Koncept integralnih kontraktora definisao je M. Altman 1973. godine [1] za različite klase neslučajnih diferencijalnih jednačina u Banahovim prostorima. Pojam ograničenog slučajnog integralnog kontraktora uveo je H.H. Kuo [53], koji je modifikovao Altmanovu definiciju ograničenog integralnog kontraktora i primenio je u dokazu egzistencije i jedinstvenosti rešenja stohastičke integralne jednačine Itovog tipa. Naglasimo da se i W.J. Padgett u nekim svojim radovima [70], [76], [81] bavio različitim tipovima stohastičkih diferencijalnih i integralnih jednačina sa ograničenim integralnim kontraktorom.

Da bi se dobila potpunija slika o klasama stohastičkih diferencijalnih jednačina za koje su definisani slučajni integralni kontraktori, nezaobilazni su autori Berger [8], Murge-Pachpatte [63], [64], [65], [66], Popescu-Rascanu [69], Stoyanov [75], M. Janković [38], Sv. Janković i M. Jovanović [35], [41], [42]. U svim navedenim radovima egzistencija i jedinstvenost rešenja su dokazane pod uslovima koji su potpuno različiti od Lipschitzovog uslova i uslova ograničenog rasta. Prateći ideje Kua, Pachpatta, S. Janković i M. Janković, a koristeći pojam ograničenog slučajnog integralnog kontraktora, nastao je rad [41], u kome je dokazana egzistencija i jedinstvenost rešenja nasledne stohastičke integrodiferencijalne jednačine Itoa oblika (1.7.6).

Neka je sa $((Ax)y)^t$ označen element prostora X definisan kao

$$((Ax)y)^t = (((Ax)y)(t), y_r^t),$$

gde je

$$\begin{aligned}((Ax)y)(t) = y(t) &+ \int_0^t \left[\Gamma_1(s, x^s)y(s) + \int_0^s \Gamma_2(s,r,x^r)y(r)dr + \int_0^s \Gamma_3(s,r,x^r)y(r)dw_r \right] ds \\ &+ \int_0^t \left[\Phi_1(s, x^s)y(s) + \int_0^s \Phi_2(s,r,x^r)y(r)dr + \int_0^s \Phi_3(s,r,x^r)y(r)dw_r \right] dw_s, \qquad (1.7.9)\end{aligned}$$

a y_r^t je neki element prostora L_p^ρ.

Ovde su

$$\begin{aligned}&\Gamma_1 : [0,T] \times X \to R^n \times R^n, \quad && \Phi_1 : [0,T] \times X \to R^n \times R^n, \\ &\Gamma_i : J \times X \to R^n \times R^n, && \Phi_i : J \times X \to R^n \times R^n, \quad i = 2,3\end{aligned}$$

merljiva preslikavanja, ograničena u smislu da postoje pozitivne konstante α_i, β_i, $i=1,2,3$, tako da je

$$
\begin{aligned}
&\forall (t,s)\in[0,T]\times X, \quad \forall y\in R^n,\\
&\qquad |\Gamma_1(t,x)y|\le \alpha_1|y|, \quad |\Phi_1(t,x)y|\le \beta_1|y|\\
&\forall (t,s,x)\in J\times X, \quad \forall y\in R^n,\\
&\qquad |\Gamma_i(t,s,x)y|\le \alpha_i|y|, \quad |\Phi_i(t,s,x)y|\le \beta_i|y|, \quad i=2,3.
\end{aligned}
\tag{1.7.10}
$$

Definicija 1.7.3. *Ako postoji pozitivna konstanta K, tako da za svako $x^t, y^t \in X$ i $(t,s)\in J$, sledeće nejednakosti važe skoro izvesno:*

$$
\begin{aligned}
&|\, a_1(t,x^t+((Ax)y)^t)-a_1(t,x^t)-\Gamma_1(t,x^t)y(t)|\le K||\, y||_t\\
&|\, a_i(t,s,x^s+((Ax)y)^s)-a_i(t,s,x^s)-\Gamma_i(t,s,x^s)y(s)|\le K||\, y||_s,\ i=2,3\\
&|\, b_1(t,x^t+((Ax)y)^t)-b_1(t,x^t)-\Phi_1(t,x^t)y(t)|\le K||\, y||_t\\
&|\, b_i(t,s,x^s+((Ax)y)^s)-b_i(t,s,x^s)-\Phi_i(t,s,x^s)y(s)|\le K||\, y||_s,\ i=2,3,
\end{aligned}
\tag{1.7.11}
$$

gde je $||y||_t=\sup_{0\le s\le t}||y^s||_X$, tada skup funkcionala $(a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3)$ ima ograničen slučajni integralni kontraktor

$$
\left\{ I+\int_0^t \left[\Gamma_1+\int_0^s \Gamma_2 dr+\int_0^s \Gamma_3 dw_r\right] ds+\int_0^t \left[\Phi_1+\int_0^s \Phi_2 dr\int_0^s \Phi_3 dw_r\right] dw_s \right\}.
\tag{1.7.12}
$$

Imajući u vidu dimenzije elemenata ograničenog slučajnog integralnog kontraktora (1.7.12), moguće je posmatrati samo slučaj kada je dimenzija $m=1$. Dakle, Wienerov proces je jednodimenzionalan.

Definicija 1.7.4. *Funkcional $h:[0,T]\times X\to R^n$ je stohastički zatvoren ako za svako x i x_n iz X, tako da $x_n\to x$ i $h(\cdot,x_n)\to y$ u $L^2([0,T]\times\Omega)$, skoro izvesno je $y(t)=h(t,x^t)$, za svako $t\in[0,T]$*

Analogno se može definisati stohastička zatvorenost funkcionala $h: J\times X\to R^n$.

Definicija 1.7.5. *Ograničen slučajni integralni kontraktor je regularan ako jednačina*

$$
(Ax)y=z
\tag{1.7.13}
$$

ima rešenje $y\in X$ za svako $x,z\in X$.

Ako koeficijenti jednačine (1.7.6) a_i, b_i, $i=1,2,3$ zadovoljavaju Lipschitzov uslov uniformno po $(t,s)\in J$, tada su oni stohastički zatvoreni i skup funkcionala $(a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3)$ ima regularan ograničen slučajni integralni kontraktor (1.7.12) za $\Gamma_i=\Phi_i=0$, $i=1,2,3$. Pored toga, Lipshitzov uslov implicira da postoji klasa ograničenih slučajnih integralnih kontraktora $\left\{I+\int_0^t\left[\Gamma_1+\int_0^s\Gamma_2 dr\right]ds\right\}$, gde su Γ_1 i Γ_2 proizvoljna preslikavanja definisana u (1.7.10), pri čemu je $\Gamma_3=0$, $\Phi_i=0$, $i=1,2,3$. Dokaz ove činjenice, kao i dokaz da nasledna stohastička integrodiferencijalna jednačina (1.7.6) ima regularan slučajni integralni kontraktor, iako Lipschitzov uslov nije zadovoljen, može se naći u radu [41]. U tom smislu se iskazuje teorema egzistencije i jedinstvenosti rešenja jednačine (1.7.6), koristeći pojam ograničenog slučajnog integralnog kontraktora.

Neka je sa C_X označena familija slučajnih procesa, definisanih na intervalu $[0, T]$ sa vrednostima u R^n, skoro izvesno neprekidnih i neanticipativnih u odnosu na familiju $\{\mathcal{G}_t,\ t \geq 0\}$.

Teorema 1.7.3. (M. Jovanović, Sv. Janković, [41], 1997.) *Neka su funkcionali $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ iz jednačine (1.7.6) stohastički zatvoreni i imaju ograničen slučajni integralni kontraktor (1.7.12). Takođe, neka važi da je*

$$\int_0^T Ea_1^2(t, \varphi^0)dt < \infty, \qquad \int_0^T Eb_1^2(t, \varphi^0)dt < \infty,$$

i za $a_i, b_i,\ i = 2, 3$

$$\int_0^T \int_0^t Ef^2(t, s, \varphi^0)dsdt < \infty.$$

Tada jednačina (1.7.6) ima rešenje $x \in C_X$.

Teorema 1.7.4. (M. Jovanović, Sv. Janković, [41], 1997.) *Neka funkcionali $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ zadovoljavaju pretpostavke Teoreme 1.7.3 i neka je ograničen slučajni integralni kontraktor regularan. Tada je rešenje jednačine (1.7.6) jedinstveno u C_X.*

1.7.2. Problemi egzistencije i jedinstvenosti rešenja

U radu (M. Jovanović, Sv. Janković, [42], 2001.) posmatrana je klasa slučajnih procesa za koju je data definicija jedne modifikacije Lipschitzovog uslova kao i ograničenog integralnog kontraktora za tu klasu, tako da važe prethodno navedene teoreme egzistencije i jedinstvenosti rešenja za naslednu stohastičku integrodiferencijalnu jednačinu (1.7.6). Pored toga, uspostavljene su i određene relacije izmedju tih uslova, što je iskazano sledećim tvrđenjima:

Teorema 1.7.5. (M. Jovanović, Sv. Janković, [42], 2001.) *Neka su zadovoljeni uslovi Teoreme 1.7.4 i neka za početni uslov $\varphi^0 \in \mathcal{X}_0$ važi $E||\varphi^0||_X^2 < \infty$. Tada jednačina (1.7.6) ima rešenje $x \in C_X$, koje zadovoljava uslov*

$$E \sup_{0 \leq t \leq T} |x(t)|^2 < \infty. \tag{1.7.14}$$

Na osnovu ocene (1.7.2), za $l = 2$ i Teoreme 1.7.5 može se zaključiti da je

$$E||x||_T^2 \leq \tilde{k}\,(1 + ||\rho||_{L_1}^{2/p})\,E \sup_{0 \leq t \leq T} |x(t)|^2 + \tilde{k}\,\overline{\overline{K}}^{2/p} ||\varphi^0||^2 < \infty.$$

Zbog toga ima smisla proučavati probleme egzistencije i jedinstvenosti za jednačinu (1.7.6) u klasi $L_2(C_X)$ slučajnih procesa $x \in C_X$ sa normom

$$||\,x||_*^2\ := E||\,x||_T^2 < \infty.$$

Naravno, $(L_2(C_X), ||\cdot||_*)$ je Banachov prostor.

Slično kao u radovima [69] i [81], definisana je norma na prostoru $L_2(C_X)$: Za fiksiran broj $\mu > 0$ i svako $x \in L_2(C_X)$, neka je

$$|||x|||^2 := \sup_{0\le t\le T} E\left\{||x||_t^2 \cdot e^{-2\mu t}\right\}. \tag{1.7.15}$$

Pošto je

$$||x||_*^2 \cdot e^{-2\mu T} \le |||x|||^2 \le ||x||_*^2,$$

norme $|||\cdot|||$ i $||\cdot||_*$ su ekvivalentne, tako da je $(L_2(C_X), |||\cdot|||)$ takođe Banachov prostor. Da bi se shvatio odnos koji postoji između različitih uslova egzistencije i jedinstvenosti rešenja jednačine (1.7.6) dokazana su sledeća tvrđenja.

Lema 1.7.2. (M. Jovanović, Sv. Janković, [42], 2001.) *Neka preslikavanja $\Gamma_i, \Phi_i,\ i = 1,2,3$ zadovoljavaju uslove (1.7.10). Tada za svako $x, z \in L_2(C_X)$ jednačina (1.7.13) ima jedinstveno rešenje $y \in L_2(C_X)$. Pored toga, postoji konstanta $\gamma > 0$, koja ne zavisi od x i z, tako da je*

$$E||y||_t^2 \le \gamma E||z||_t^2, \quad t \in [0,T]. \tag{1.7.16}$$

U tom slučaju može se formulisati sledeća teorema egzistencije i jedinstvenosti rešenja:

Teorema 1.7.6. (M. Jovanović, Sv. Janković, [42], 2001.) *Neka su zadovoljeni uslovi Teoreme 1.7.3 i neka početna vrednost $\varphi^0 \in \mathcal{X}_0$ zadovoljava uslov $E||\varphi^0||_X^2 < \infty$. Tada jednačina (1.7.6) ima jedinstveno rešenje x iz $L_2(C_X)$.*

Uvodi se jedna verzija Lipschitzovog uslova:

Definicija 1.7.6. (M. Jovanović, Sv. Janković, [42], 2001.) *Neka postoji konstanta $L_1 > 0$ takva da za svako $(t,s) \in J$ i $x, y \in L_2(C_X)$,*

$$\begin{aligned} &E|a_1(t,x^t) - a_1(t,y^t)|^2 \le L_1 E||x-y||_t^2,\\ &E|a_i(t,s,x^s) - a_i(t,s,y^s)|^2 \le L_1 E||x-y||_s^2,\ i = 2,3, \end{aligned} \tag{1.7.17}$$

i analogno za $b_i,\ i = 1,2,3$. Tada funkcionali $a_i, b_i, i = 1,2,3$ zadovoljavaju modifikovani Lipschitzov uslov na prostoru $L_2(C_X)$.

Naravno, ako funkcionali $a_i, b_i, i = 1,2,3$ zadovoljavaju Lipschitzov uslov (1.7.7) na prostoru $L_2(C_X)$, tada oni zadovoljavaju modifikovan Lipschitzov uslov (1.7.17). Pored toga, prateći dokaz Teoreme 1.7.2 iz rada [62], nije teško zaključiti da ta teorema važi ako se uslov (1.7.7) zameni uslovom (1.7.17).

Lemma 1.7.2 se može primeniti za opisivanje odnosa koji postoji izmedju ograničenog slučajnog integralnog kontraktora i modifikovanog Lipschitzovog uslova na prostoru $L_2(C_X)$.

Lema 1.7.3. (M. Jovanović, Sv. Janković, [42], 2001.) *Neka funkcionali $a_i, b_i, i = 1,2,3$ iz jednačine (1.7.6) imaju ograničeni slučajni integralni kontraktor (1.7.12). Tada oni zadovoljavaju modifikovani Lipcshitzov uslov (1.7.17) na prostoru $L_2(C_X)$.*

Pošto obratno tvrđenje iz Leme 1.7.3 generelno ne važi, potrebno je uvesti pojam modifikovanog ograničenog integralnog kontraktora na prostoru $L_2(C_X)$.

Definicija 1.7.7. (M. Jovanović, Sv. Janković, [42], 2001.) *Neka postoji konstanta $K_1 > 0$ takva da za svako $(t,s) \in J$ i $x, y \in L_2(C_X)$,*

$$E|a_1(t,x^t + ((Ax)y)^t) - a_1(t,x^t) - \Gamma_1(t,x^t)y(t)|^2 \le K_1 E||y||_t^2,$$
$$E|a_i(t,s,x^s + ((Ax)y)^s) - a_i(t,s,x^s) - \Gamma_i(t,s,x^s)y(s)|^2 \le K_i E||y||_s^2, \ i = 2,3, \tag{1.7.18}$$

i analogno za b_i, $i = 1,2,3$. Tada funkcionali $(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3)$ imaju modifikovan ograničen integralni kontraktor na prostoru $L_2(C_X)$

$$\left\{ I + \int_0^t \left[\Gamma_1 + \int_0^s \Gamma_2 dr + \int_0^s \Gamma_3 dw_r \right] ds + \int_0^t \left[\Phi_1 + \int_0^s \Phi_2 dr \int_0^s \Phi_3 dw_r \right] dw_s \right\}_E . \tag{1.7.19}$$

Prateći dokaze Teoreme 1.7.3 i Teoreme 1.7.4 [41] i Teoreme 1.7.6 [42], može se pokazati da one važe ako funkcionali $a_i, b_i, i = 1,2,3$ imaju modifikovani ograničeni integralni kontraktor (1.7.19) umesto ograničenog slučajnog integralnog kontraktora (1.7.12) na prostoru $L_2(C_X)$.

Na osnovu svih ovih činjenica, nije teško dokazati ekvivalenciju modifikovanog Lipschitzovog uslova (1.7.17) i modifikovanog ograničanog integralnog kontraktora (1.7.19).

Teorema 1.7.7. (M. Jovanović, Sv. Janković, [42], 2001.) *Funkcionali $a_i, b_i, i = 1,2,3$ zadovoljavaju modifikovani Lipschitzov uslov (1.7.17) ako i samo ako imaju modifikovani ograničeni slučajni integralni kontraktor (1.7.19).*

Sledeća teorema predstavlja sažetak prethodnih razmatranja:

Teorema 1.7.8. *Neka funkcionali a_i, b_i, $i = 1,2,3$ zadovoljavaju modifikovani Lipschitzov uslov (1.7.17). Neka početna vrednost $\varphi^0 \in \mathcal{X}_0$ zadovoljava uslove $E||\varphi^0||_X^2 < \infty$, $\int_0^T E|a_1(t,\varphi^0)|^2 dt < \infty$, $\int_0^T E|b_1(t,\varphi^0)|^2 dt < \infty$ i $\int_0^T \int_0^t E|f(t,s,\varphi^0)|^2 ds\, dt < \infty$ za a_i, b_i, $i = 2,3$. Tada jednačina (1.7.6) ima jedinstveno rešenje x u $L_2(C_X)$.*

Može se primetiti da je ova teorema formulisana bez uslova ograničenog rasta (1.7.8).

1.8. Elementarne i integralne nejednakosti

U nastavku, posebno u sledećoj glavi koja sadrži glavne rezultate, koristiće se neke elementarne nejednakosti [60], kao i različite integralne nejednakosti Gronwall-Bellmana [5], [54], [60].

Važe sledeće nejednakosti:

$$\Big(\sum_{i=1}^n a_i\Big)^k \le n^{k-1} \sum_{i=1}^n a_i^k, \quad a_i \ge 0, \ k \in N, \tag{1.8.1}$$

$$|a+b|^r \le k_r\,(|a|^r + |b|^r), \quad k_r = 2^{r-1} \vee 1, \quad r \ge 0, \tag{1.8.2}$$

$$|a+b+c|^r \le k_r\,(|a|^r + |b|^r + |c|^r), \quad k_r = 3^{r-1} \vee 1, \quad r \ge 0, \tag{1.8.3}$$

$$|a|^r\,|b|^{1-r} \le r\,|a| + (1-r)\,|b|, \quad 0 \le r \le 1, \tag{1.8.4}$$

$$|a|^{r_2} \le |a| + |a|^{r_1}, \quad 0 < r_1 \le r_2 < 1. \tag{1.8.5}$$

Osnovna nejednakost Gronwall-Bellmana:

Neka su $u : [a, b] \to R$, $v : [a, b] \to R$ nenegativna integrabilne funkcije i H pozitivna konstanta, tako da važi nejednakost

$$u(t) \leq v(t) + H \int_a^t u(s) ds, \quad t \in [a, b]. \tag{1.8.6}$$

Tada je

$$u(t) \leq v(t) + H \int_a^t v(s) e^{H(t-s)} ds, \quad t \in [a, b].$$

Jedna verzija nejednakosti Gronwall-Bellmana:

Neka je $u(t)$ neprekidna funkcija na $[0, T]$, $b(t)$ nenegativna neprekidna funkcija na $[0, T]$, $k(t, s)$ nenegativna neprekidna funkcija za $0 \leq s \leq t \leq T$ i neka važi

$$u(t) \leq a(t) + b(t) \int_0^t k(t, s) u(s)\, ds, \quad t \in [0, T]. \tag{1.8.7}$$

Tada je

$$u(t) \leq A(t) e^{B(t) \int_0^t K(t,s)\, ds},$$

gde je

$$A(t) = \sup_{s \in [0,t]} a(s), \;\; B(t) = \sup_{s \in [0,t]} b(s), \;\; K(t, s) = \sup_{r \in [s,t]} k(r, s).$$

Uopštena nejednakost Gronwall-Bellmana [5]:

Neka su $u(t)$, $a(t)$ i $b(t)$ nenegativne i neprekidne funkcije na $[0, T]$ i neka su $C > 0$, $0 \leq \gamma < 1$ konstante. Ako je

$$u(t) \leq C + \int_0^t a(s) u(s)\, ds + \int_0^t b(s)\, u^{\gamma}(s)\, ds, \quad t \in [0, T], \tag{1.8.8}$$

tada je

$$u(t) \leq \left(C^{1-\gamma}\, e^{(1-\gamma) \int_0^t a(s) ds} + (1 - \gamma) \int_0^t b(s)\, e^{(1-\gamma) \int_s^t a(r) dr} ds \right)^{\frac{1}{1-\gamma}}.$$

Glava 2

Perturbovane stohastičke diferencijalne jednačine

Osnovni podsticaj za proučavanje stohastičkih diferencijalnih jednačina predstavljao je rad Stoyanova i Boteva [75], 1996. U tom radu su razmatrani neki specijalni tipovi perturbacija za stohastičku diferencijalnu jednačinu Itoa, pa su u Poglavlju 2.1 izložene osnovne ideje i rezultati dobijeni u ovom radu.

Perturovane stohastičke diferencijalne jednačine, opštije od onih koje su proučavali Stoyanov i Botev, kod kojih su koeficijenti prenosa i difuzije aditivno perturbovani, tj. predstavljaju zbir koeficijenta prenosa i male perturbacije, odnosno koeficijenta difuzije i male perturbacije, su proučavane u Poglavlju 2.2. Ispitivani su i uslovi pri kojima su rešenja perturbovane i neperturbovane linearne stohastičke integrodiferencijalne jednačine (linearne po integralima), kao i opšte stohastičke integrodiferencijalne jednačine, bliska u smislu momenta $(2m)$-tog reda, na konačnim intervalima i na intervalima čija dužina teži beskonačnosti kad male perturbacije teže nuli. Rezultati izloženi u ovim poglavljima su sadržani u radovima Sv. Janković, M. Jovanović, [29], 2000; M. Jovanović, Sv. Janković, [40], 2002.

Nelinearne diferencijalne jednačine, kao matematički modeli kretanja nelinearnih oscilatornih sistema, proučavaju se u zavisnosti od parametarskih i stohastičkih pobuda koje na njih deluju. Mnogi autori, na primer, Ariaratnam [2], Caughey [10], Ibrahim [19], Kozin [52], Wu i Lin [80], proučavali su probleme kretanja elastičnih oscilatornih sistema sa malim parametarskim pobudama i slučajnim pobudama tipa Gaussovog belog šuma, koji su matematički opisani Gaussovim stacionarnim slučajnim procesom malog intenziteta i korelacionog vremena. To je poslužilo kao osnova za rezultate izložene u radu Sv. Janković, M. Jovanović, [34], 2000, u kome se ispituje asimptotsko ponašanje, u smislu momenta $(2m)$-tog reda, amplitude nelinearnog oscilatora pod uticajem malih parametarskih perturbacija i slučajnih pobuda tipa Gaussovog belog šuma. Pošto je ovaj problem esencijalno povezan sa stohastičkom diferencijalnom jednačinom tipa Itoa, razmatrano je asimptotsko ponašanje i asimptotska stabilnost rešenja Itove stohastičke diferencijalne jednačine sa malim perturbacijama, upoređujući ga sa rešenjem odgovarajuće neperturbovane linearne jednačine.

Pored velike primene stohastičkih diferencijalnih jednačina Itoa u prirodnim i tehničkim naukama, poslednje decenije se sve više nailazi na njihovu primenu i u socijalnim naukama, pre svega u ekonomiji. Tako je u radu Sv. Janković, M. Jovanović, [33], 2000, data globalna ocena ponašanja rešenja perturbovane stohastičke diferencijalne jednačine, kojom mogu biti opisane mnoge ekonomske kategorije iz finansijske matematike (promene cena, kamatnih stopa, priraštaji populacije i sl.), na koje deluju slučajni uticaji tipa Gaussovog belog šuma.

U radovima Sv. Janković, M. Jovanović, [28], 2000; Sv. Janković, M. Jovanović, [37], (prihvaćen za štampu) su proučavane perturbovane stohastičke i opšte stohastičke integrodiferencijalne jednačine čiji su koeficijenti predstavljeni kao linearne kombinacije perturbacija i koeficijenata prenosa, odnosno difuzije, neperturbovanih jednačina istog tipa, što je izloženo u Poglavlju 2.3. Zadati su uslovi kojima se obezbeđuje bliskost rešenja perturbovane i neperturbovane jednačine u smislu momenta $(2m)$-tog reda na konačnim intervalima, kao i na intervalima čija dužina beskonačno raste kada mali parametar teži nuli. Dokazano je da se ovaj slučaj ne može svesti na prethodni.

U Poglavlju 2.4 definisana je široka klasa perturbovanih stohastičkih diferencijalnih jednačina Itoa, čiji koeficijenti predstavljaju funkcionalnu vezu između perturbacija i koeficijenata prenosa, odnosno difuzije, neperturbovane stohastičke diferencijalne jednačine. Zadati su uslovi koji obezbeđuju bliskost rešenja posmatranih jednačina, u smislu momenta $(2m)$-tog reda, na konačnim intervalima i na intervalima čija dužina teži beskonačnosti kada perturbacije teže nuli, pri čemu su ti intervali bliskosti rešenja efektivno izračunati. Funkcionalno perturbovane jednačine predstavljaju uopštenje aditivno perturbovanih jednačina, dok obuhvataju samo specijalan slučaj linearno perturbovanih jednačina. U ovom poglavlju su date neke ideje koje omogućavaju da se dobijeni teorijski rezultati primene za numeričko izračunavanje intervala u kome se rešenje funkcionalno perturbovane diferencijalne jednačine može aproksimirati, u smislu momenta $(2m)$-tog reda, rešenjem odgovarajuće neperturbovane diferencijalne jednačine. Pri tome ostaju neka otvorena pitanja za buduća istraživanja, kao što je, na primer, nalaženje najoptimalnijeg intervala, tj. maksimalnog intervala sa minimalom greškom aproksimacije rešenja, zatim obezbeđivanje softverske podrške za pojednostavljivanje numeričkih izračunavanja koja se baziraju na metodama izloženim u ovoj tezi, kao i definisanje uslova koji obezbeđuju aproksimaciju rešenja funkcionalno perturbovane opšte stohastičke integrodiferencijalne jednačine rešenjem odgovarajuće neperturbovane jednačine istog tipa.

2.1. Poznati rezultati za perturbovane stohastičke diferencijalne jednačine

U ovom poglavlju navedeni su rezultati rada J. Stoyanova i D. Boteva *Quantitative results for perturbed stochastic differential equations*, Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis, 9 (3), (1996), u kome je posmatrana stohastička diferencijalna jednačina

$$x_t = x_{t_0} + \int_{t_0}^{t} a(s, x_s)\, ds + \int_{t_0}^{t} b(s, x_s)\, dw_s, \quad t \ge t_0 \ge 0, \tag{2.1.1}$$

čije su rešenje upoređeno sa rešenjem odgovarajuće stohastičke diferencijalne jednačine istog tipa

$$x_t^{\varepsilon} = x_{t_0}^{\varepsilon_0} + \int_{t_0}^{t} \tilde{a}(s, x_s^{\varepsilon})\, ds + \int_{t_0}^{t} \tilde{b}(s, x_s^{\varepsilon})\, dw_s, \quad t \ge t_0, \tag{2.1.2}$$

koja zavisi od malih parametara $\varepsilon, \varepsilon_0 \in (0,1)$. Pri tome se jednačina (2.1.1) zove *neperturbovana* stohastička diferencijalna jednačina, a jednačina (2.1.2) odgovarajuća *perturbovana* stohastička diferencijalna jednačina.

Jednačine (2.1.1) i (2.1.2) su oblika (1.4.1), i pretpostavlja se da njihovi koeficijenti zadovoljavaju sve definisane uslove iz Poglavlja 1.4, tj. globalni Lipschitzov uslov (1.4.3) i uslov ograničenog rasta po poslednjem argumentu (1.4.4). Pretpostavlja se da za početne uslove jednačina (2.1.1) i (2.1.2) važi $E|x_{t_0}|^{2m} < \infty$ $E|x_{t_0}^{\varepsilon_0}|^{2m} < \infty$, gde je $m \in N$ neki dati broj. Na osnovu Teoreme 1.4.1, egzistencije i jedinstvenosti rešenja, postoje jedinstvena skoro izvesno neprekidna rešenja x i x^ε jednačina (2.1.1) i (2.1.2), respektivno tako $\sup_t E|x_t|^{2m} < \infty$, $\sup_t E|x_t^\varepsilon|^{2m} < \infty$.

Funkcionali $\tilde{a}$ i $\tilde{b}$ koji su koeficijenti perturbovane stohastičke diferencijalne jednačine (2.1.2), oblika su

$$\tilde{a}(t,x,\varepsilon_1) = a(t,x) + \alpha(t,x,\varepsilon_1), \quad \tilde{b}(t,x,\varepsilon_2) = b(t,x) + \beta(t,x,\varepsilon_2), \tag{2.1.3}$$

a nazivaju se *perturbacije* koeficijenata a i b, pri čemu su $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in (0,1)$ proizvoljni mali parametri, koji generišu parametar ε.

Neka koeficijenti jednačina (2.1.1) i (2.1.2), kao i početne vrednosti, zadovoljavaju sledeće uslove bliskosti

$$E|x_{t_0}^{\varepsilon_0} - x_{t_0}|^{2m} \le \delta_0(\varepsilon_0), \tag{2.1.4}$$

$$\sup_x |\alpha(t,x,\varepsilon_1)| \le \delta_1(t,\varepsilon_1), \quad \sup_x |\beta(t,x,\varepsilon_2)| \le \delta_2(t,\varepsilon_2). \tag{2.1.5}$$

U tom slučaju je ocenjena bliskost rešenja x_t i x_t^ε u smislu momenta $(2m)$-tog reda, tj. $\sup_t E|x_t^\varepsilon - x_t|^{2m}$. Neka je uvedeno sledeće označavanje

$$z_t^\varepsilon = x_t^\varepsilon - x_t, \qquad \Delta_t^\varepsilon = E|x_t^\varepsilon - x_t|^{2m}. \tag{2.1.6}$$

Propozicija 2.1.1. *(Stoyanov, Botev, [75]) Neka jednačine (2.1.1) i (2.1.2) zadovoljavaju uslove (1.4.3) i (1.4.4). Tada je za svako $t \ge t_0$*

$$\Delta_t^\varepsilon \le \Big[\delta_0^{1/m}(\varepsilon_0)\, e^{M(t-t_0)+2\int_{t_0}^t \delta_1(s,\varepsilon_1)\,ds} + \int_{t_0}^t [2\delta_1(s,\varepsilon_1) + (2m-1)\delta_2^2(s,\varepsilon_2)]\, e^{M(t-s)+2\int_s^t \delta_1(\tau,\varepsilon_1)\,d\tau}\, ds\Big]^m, \tag{2.1.7}$$

gde je $M = 2L + 2(2m-1)L^2$.

Ova teorema je dokazana korišćenjem Itove formule za stohastičko diferenciranje (1.3.6) na funkciju $f(z) = z^{2m}$. Pošto je

$$d(x_t^\varepsilon - x_t) = [\tilde{a}(t,x_t^\varepsilon) - a(t,x_t)]\,dt + [\tilde{b}(t,x_t^\varepsilon) - b(t,x_t)]\,dw_t,$$

a

$$d(z_t^\varepsilon)^{2m} = 2m(z_t^\varepsilon)^{2m-1}[(\tilde{a}-a)dt + (\tilde{b}-b)dw_t] + m(2m-1)\,(z_t^\varepsilon)^{2m-2}(\tilde{b}-b)^2\,dt,$$

to je

$$\Delta_t^\varepsilon = E|z_t^\varepsilon|^{2m} = E|z_{t_0}^{\varepsilon_0}|^{2m} + 2mEI_1(t) + m(2m-1)EI_2(t) + 2mEI_3(t), \tag{2.1.8}$$

gde su

$$
\begin{aligned}
I_1(t) &= \int_{t_0}^{t} [\tilde{a}(s, x_s^\varepsilon, \varepsilon_1) - a(s, x_s)]\,(z_s^\varepsilon)^{2m-1} ds\\
I_2(t) &= \int_{t_0}^{t} [\tilde{b}(s, x_s^\varepsilon, \varepsilon_2) - b(s, x_s)]^2\,(z_s^\varepsilon)^{2m-2} ds\\
I_3(t) &= \int_{t_0}^{t} [\tilde{b}(s, x_s^\varepsilon, \varepsilon_2) - b(s, x_s)]\,(z_s^\varepsilon)^{2m-1} dw_s.
\end{aligned}
$$

Ako se iskoristi pretpostavljena bliskost (2.1.4) i (2.1.5), nije teško dokazati da važi ocena (2.1.7) bliskosti rešenja u smislu momenta $(2m)$-tog reda.

U radu [75] razmatrani su specijalni tipovi perturbacija, tj. konstantne, stepene i eksponencijalne perturbacije, pri čemu su eksplicitno dobijeni intervali bliskosti rešenja posmatranih jednačina, čija dužina teži beskonačnosti kada mali parametri teže nuli.

Teorema 2.1.1. *(Stoyanov, Botev, [75]) Neka za svako $t \geq t_0$ važi*

$$\delta_0(\varepsilon_0) = \varepsilon_0, \qquad \delta_1(t, \varepsilon_1) = \varepsilon_1, \qquad \delta_2(t, \varepsilon_2) = \varepsilon_2.$$

Neka su brojevi ε i T_1 definisani na sledeći način:

$$\varepsilon = \max\{\varepsilon_0^{1/m}, \varepsilon_1, \varepsilon_2^2\}, \quad T_1 = \frac{1-\rho}{M+\rho},$$

gde je $\rho \in (0,1)$ proizvoljno izabrano. Tada $\sup_t \Delta_t^\varepsilon \to 0$ kada $\varepsilon \to 0$, $t \in [t_0, t_0 + T_1 \ln(1/\varepsilon))$.

Teorema 2.1.2. *(Stoyanov, Botev, [75]) Neka je $t \geq t_0 > 1$ i*

$$\delta_0(\varepsilon_0) = t_0^{-1/\varepsilon_0}, \qquad \delta_1(t, \varepsilon_1) = t^{-1/\varepsilon_1}, \qquad \delta_2(t, \varepsilon_2) = t^{-1/\varepsilon_2}.$$

Ako je

$$\varepsilon = \max\{m\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2/2\}, \quad T_2 = \frac{1}{M}\ln(t_0 - \rho),$$

za proizvoljno $\rho \in (0, 1/t_0)$. Tada $\sup_t \Delta_t^\varepsilon \to 0$ kada $\varepsilon \to 0$, za $t \in [t_0, t_0 + T_2/\varepsilon)$.

Teorema 2.1.3. *(Stoyanov, Botev, [75]) Neka je $t \geq t_0 > 0$ i*

$$\delta_0(\varepsilon_0) = e^{-t_0/\varepsilon_0}, \qquad \delta_1(t, \varepsilon_1) = e^{-t/\varepsilon_1}, \qquad \delta_2(t, \varepsilon_2) = e^{-t/\varepsilon_2}.$$

Ako je

$$\varepsilon = \max\{m\varepsilon_0, \varepsilon_2/2\}, \quad T_3 = \frac{t_0 - \rho}{M},$$

za proizvoljno $\rho \in (0, t_0)$, tada $\sup_t \Delta_t^\varepsilon \to 0$ kada $\varepsilon \to 0$, za $t \in [t_0, t_0 + T_3/\varepsilon)$.

Naravno, nametnulo se pitanje bliskosti rešenja za različite tipove perturbovanih i neperturbovanih jednačina, kao i sam izgled intervala bliskosti rešenja čija bi dužina težila beskonačnosti kada mali parametri teže nuli, ako su perturbacije proizvoljne funkcije malog parametra, a ne specijalni slučajevi kao u Teoremama 2.1.1, 2.1.2 i 2.1.3. Ovi problemi su razmatrani u poglavljima: 2.2, 2.3, 2.4, 3.1 i 3.2.

2.2. Aditivno perturbovane stohastičke diferencijalne jednačine

2.2.1. Aditivno perturbovane linearne stohastičke integrodiferencijalne jednačine

Neka je data stohastička integrodifferencijalna jednačina oblika (1.5.1). Potrebno je uporediti rešenje ovakve neperturbovane jednačine sa rešenjem odgovarajuće perturbovane jednačine istog tipa koja sadrži "male" perturbacije. Tačnije, potrebno je dati uslove da bi se obezbedila bliskost tih rešenja, u smislu momenta $(2m)$-tog reda, na fiksiranim intervalima ili na intervalima čija dužina teži beskonačnosti. Osnovna ideja za oblik perturbacija koji se ovde razmatra, dobijena je iz rada [75], ali je postupak korišćen u analizi potpuno drugačiji od onog korišćnog u pomenutom radu. Šta više, generalizovani su rezultati rada [75] i ovde posmatrani kao ilustrativan primer. Celo ovo poglavlje objavljeno je kao rad Sv. Janković, M. Jovanović, [29], 2000.

Uporedo sa jednačinom (1.5.1) u integralnoj formi, tj.

$$
\begin{aligned}
x_t = x_0 &+ \int_{t_0}^{t} \left[a_1(s, x_s) + \int_{t_0}^{s} a_2(s, r, x_r)\, dr + \int_{t_0}^{s} a_3(s, r, x_r)\, dw_r \right] ds \\
&+ \int_{t_0}^{t} \left[b_1(s, x_s) + \int_{t_0}^{s} b_2(s, r, x_r)\, dr + \int_{t_0}^{s} b_3(s, r, x_r)\, dw_r \right] dw_s,
\end{aligned}
\tag{2.2.1}
$$

posmatra se sledeća jednačina

$$
\begin{aligned}
x_t^{\varepsilon} = x_0^{\varepsilon} &+ \int_{t_0}^{t} \left[\tilde{a}_1(s, x_s^{\varepsilon}, \varepsilon) + \int_{t_0}^{s} \tilde{a}_2(s, r, x_r^{\varepsilon}, \varepsilon)\, dr + \int_{t_0}^{s} \tilde{a}_3(s, r, x_r^{\varepsilon}, \varepsilon)\, dw_r \right] ds \\
&+ \int_{t_0}^{t} \left[\tilde{b}_1(s, x_s^{\varepsilon}, \varepsilon) + \int_{t_0}^{s} \tilde{b}_2(s, r, x_r^{\varepsilon}, \varepsilon)\, dr + \int_{t_0}^{s} \tilde{b}_3(s, r, x_r^{\varepsilon}, \varepsilon)\, dw_r \right] dw_s,
\end{aligned}
\tag{2.2.2}
$$

gde je $t \in [t_0, T]$, početni uslov je x_0^{ε}, funkcije $\tilde{a}_i, \tilde{b}_i$, $i = 1, 2, 3$ su definisane kao i koeficijenti jednačine (1.5.1), w je Wienerov proces saglasan sa potokom $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$, a ε je *mali parametar* iz intervala $(0, 1)$

Neka je, po uzoru na rad [75], pretpostavljena egzistencija neslučajnih funkcija $\alpha_i(\cdot), \beta_i(\cdot)$, $i = 1, 2, 3$, koje su definisane kao i funkcije $a_i, b_i, i = 1, 2, 3$, respektivno, i koje zavise od malog parametra ε, tako da je za $(t, s) \in J$, $x \in R^n$

$$
\begin{aligned}
\tilde{a}_1(t, x, \varepsilon) &= a_1(t, x) + \alpha_1(t, x, \varepsilon), & \tilde{a}_i(t, s, x, \varepsilon) &= a_i(t, s, x) + \alpha_i(t, s, x, \varepsilon), \quad i = 2, 3, \\
\tilde{b}_1(t, x, \varepsilon) &= b_1(t, x) + \beta_1(t, x, \varepsilon), & \tilde{b}_i(t, s, x, \varepsilon) &= b_i(t, s, x) + \beta_i(t, s, x, \varepsilon), \quad i = 2, 3.
\end{aligned}
$$

Funkcije α_i i β_i su *perturbacije* koeficijenata a_i i b_i, respektivno. Zbog toga se jednačina (2.2.2) prirodno naziva *perturbovana jednačina*, u odnosu na *neperturbovanu jednačinu* (2.2.1).

Uvedimo sledeće pretpostavke:

$\mathcal{A}_1$. Neka postoji prirodan broj m, neslučajna vrednost $\delta_0(\varepsilon)$ i jednodimenzionalne nenegativne ograničene funkcije $\delta_i(\cdot), \gamma_i(\cdot),\ i = 1,2,3$, definisane na J, koje zavise od ε, tako da je

$$E|x_0|^{2m} < \infty, \quad E|x_0^\varepsilon|^{2m} < \infty, \quad E|x_0 - x_0^\varepsilon|^{2m} \le \delta_0(\varepsilon), \tag{2.2.3}$$

$$\begin{aligned} &\sup_{x\in R^n} |\alpha_1(t,x,\varepsilon)| \le \delta_1(t,\varepsilon), && \sup_{x\in R^n} |\beta_1(t,x,\varepsilon)| \le \gamma_1(t,\varepsilon), \\ &\sup_{x\in R^n} |\alpha_i(t,s,x,\varepsilon)| \le \delta_i(t,s,\varepsilon), && \sup_{x\in R^n} |\beta_i(t,s,x,\varepsilon)| \le \gamma_i(t,s,\varepsilon), \quad i = 2,3. \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

$\mathcal{A}_2$. Neka jednačine (2.2.1) i (2.2.2) imaju jedinstvena rešenja, koje zadovoljavaju uslove $E\{\sup_{t\in[t_0,T]} |x_t|^{2m}\} < \infty$ i $E\{\sup_{t\in[t_0,T]} |x_t^\varepsilon|^{2m}\} < \infty$ (neka su, na primer, zadovoljeni uslovi teoreme egzistencije i jedinstvenosti rešenja Teorema 1.5.1).

Ako se uvedu ovakve pretpostavke, a funkcije na desnoj strani relacija (2.2.4) su male za malo ε, tada se mogu postaviti uslovi pri kojima su rešenja x^ε i x bliska u smislu momenta $(2m)$-tog reda.

Prvo će biti data globalna ocena bliskosti rešenja x i x^ε u smislu momenta $(2m)$-tog reda, koja je neophodna da bi se dobili glavni rezultati.

Propozicija 2.2.1. (Sv. Janković, M. Jovanović, [29], 2000.) *Neka su x_t i x_t^ε rešenja jednačina (2.2.1) i (2.2.2) respektivno i neka su, na konačnom intervalu $[t_0,T]$, zadovoljeni uslovi (1.5.3) i (1.5.4), kao i (2.2.3) i (2.2.4) . Tada je*

$$E|x_t^\varepsilon - x_t|^{2m} \le a(t,\varepsilon)\, e^{\xi(t-t_0)}, \quad t\in[t_0,T], \tag{2.2.5}$$

gde je

$$\begin{aligned} a(t,\varepsilon) = A\delta_0(\varepsilon) + A(t-t_0)^{m-1} \Big\{ &\int_{t_0}^t \Big[(t-t_0)^m \delta_1^{2m}(s,\varepsilon) + B\gamma_1^{2m}(s,\varepsilon)\Big] ds \\ &+ \int_{t_0}^t (s-t_0)^{2m-1} \int_{t_0}^s \Big[(t-t_0)^m \delta_2^{2m}(s,\varepsilon) + B\gamma_2^{2m}(s,\varepsilon)\Big] dr\, ds \\ &+ B\int_{t_0}^t (s-t_0)^{m-1} \int_{t_0}^s \Big[(t-t_0)^m \delta_3^{2m}(s,\varepsilon) + B\gamma_3^{2m}(s,\varepsilon)\Big] dr\, ds \Big\}, \end{aligned} \tag{2.2.6}$$

$$\xi(t) = AL^{2m} t^m \left[\frac{t^{3m}}{2m+1} + \frac{B(3m+2)\,t^{2m}}{(m+1)(2m+1)} + \Big(1 + \frac{B^2}{m+1}\Big) t^m + B\right], \tag{2.2.7}$$

pri čemu je $A = 13^{2m-1}$, $B = [m(2m-1)]^m$, a L je Lipschitzova konstanta iz (1.5.3) i (1.5.4).

Dokaz. Neka važe oznake $z_t^\varepsilon = x_t^\varepsilon - x_t$ i $\Delta_t^\varepsilon = E|x_t^\varepsilon - x_t|^{2m}$ kao u (2.1.6). Oduzimajući jednačinu (2.2.1) od (2.2.2), uz primenu elementarne nejednakosti (1.8.1), dobija se da je za svako $t\in[t_0,T]$,

$$\begin{aligned} E|z_t^\varepsilon|^{2m} \le 13^{2m-1} \Big\{ &E|z_{t_0}^\varepsilon|^{2m} \\ &+ E\Big(\int_{t_0}^t [a_1(s,x_s^\varepsilon) - a_1(s,x_s)]\, ds\Big)^{2m} + E\Big(\int_{t_0}^t \alpha_1(s,x_s^\varepsilon,\varepsilon)\, ds\Big)^{2m} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+E\Big(\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}[a_2(s,r,x_r^\varepsilon)-a_2(s,r,x_r)]\,dr\,ds\Big)^{2m}+E\Big(\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}\alpha_2(s,r,x_r^\varepsilon,\varepsilon)\,dr\,ds\Big)^{2m}\\
&+E\Big(\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}[a_3(s,r,x_r^\varepsilon)-a_3(s,r,x_r)]\,dw_r\,ds\Big)^{2m}+E\Big(\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}\alpha_3(s,r,x_r^\varepsilon,\varepsilon)\,dw_r\,ds\Big)^{2m}\\
&+E\Big(\int_{t_0}^{t}[b_1(s,x_s^\varepsilon)-b_1(s,x_s)]\,dw_s\Big)^{2m}+E\Big(\int_{t_0}^{t}\beta_1(s,x_s^\varepsilon,\varepsilon)\,dw_s\Big)^{2m}\\
&+E\Big(\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}[b_2(s,r,x_r^\varepsilon)-b_2(s,r,x_r)]\,dr\,dw_s\Big)^{2m}+E\Big(\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}\beta_2(s,r,x_r^\varepsilon,\varepsilon)\,dr\,dw_s\Big)^{2m}\\
&+E\Big(\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}[b_3(s,r,x_r^\varepsilon)-b_3(s,r,x_r)]\,dw_r\,dw_s\Big)^{2m}+E\Big(\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}\beta_3(s,r,x_r^\varepsilon,\varepsilon)\,dw_r\,dw_s\Big)^{2m}\Big\}.
\end{aligned}
$$

Da bi se ocenio svaki od ovih integrala, potrebno je iskoristiti uobičajenu stohastičku integralnu izometriju, Lipschitzov uslov (1.5.3) za funkcije a_i, b_i, relacije (2.2.3) i (2.2.4), parcijalnu integraciju, Hölderovu nejednakost za $p = 2m$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ i poznatu integralnu formulu (1.3.7) za Itove integrale. Tako, ako se označi $B=[m(2m-1)]^m$, dobiće se ocene

$$
\begin{aligned}
E\Big(\int_{t_0}^{t}[a_1(s,x_s^\varepsilon)-a_1(s,x_s)]\,ds\Big)^{2m} &\le (t-t_0)^{2m-1}\int_{t_0}^{t}E|a_1(s,x_s^\varepsilon)-a_1(s,x_s)|^{2m}\,ds\\
&\le L^{2m}(t-t_0)^{2m-1}\int_{t_0}^{t}\Delta_s^\varepsilon\,ds,\\
E\Big(\int_{t_0}^{t}\alpha_1(s,x_s^\varepsilon,\varepsilon)\,ds\Big)^{2m} &\le (t-t_0)^{2m-1}\int_{t_0}^{t}\delta_1^{2m}(s,\varepsilon)\,ds,\\
E\Big(\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}[a_2(s,r,x_r^\varepsilon)-a_2(s,r,x_r)]\,dr\,ds\Big)^{2m} &\le L^{2m}(t-t_0)^{2m-1}\int_{t_0}^{t}(s-t_0)^{2m-1}\int_{t_0}^{s}\Delta_r^\varepsilon dr ds\\
&=\frac{L^{2m}}{2m}(t-t_0)^{2m-1}\int_{t_0}^{t}[(t-t_0)^{2m}-(s-t_0)^{2m}]\,\Delta_s^\varepsilon\,ds,\\
E\Big(\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}\alpha_2(s,r,x_r^\varepsilon,\varepsilon)\,dr\,ds\Big)^{2m} &\le (t-t_0)^{2m-1}\int_{t_0}^{t}(s-t_0)^{2m-1}\int_{t_0}^{s}\delta_2^{2m}(s,r,\varepsilon)\,dr\,ds,\\
E\Big(\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}[a_3(s,r,x_r^\varepsilon)-a_3(s,r,x_r)]dw_r ds\Big)^{2m} &\le BL^{2m}(t-t_0)^{2m-1}\int_{t_0}^{t}(s-t_0)^{m-1}\int_{t_0}^{s}\Delta_r^\varepsilon dr ds\\
&=\frac{BL^{2m}}{m}(t-t_0)^{2m-1}\int_{t_0}^{t}[(t-t_0)^{m}-(s-t_0)^{m}]\,\Delta_s^\varepsilon\,ds,\\
E\Big(\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}\alpha_3(s,r,x_r^\varepsilon,\varepsilon)\,dw_r\,ds\Big)^{2m} &\le B(t-t_0)^{2m-1}\int_{t_0}^{t}(s-t_0)^{m-1}\int_{t_0}^{s}\delta_3^{2m}(s,r,\varepsilon)\,dr\,ds,\\
E\Big(\int_{t_0}^{t}[b_1(s,x_s^\varepsilon)-b_1(s,x_s)]\,dw_s\Big)^{2m} &\le BL^{2m}(t-t_0)^{m-1}\int_{t_0}^{t}\Delta_s^\varepsilon\,ds,\\
E\Big(\int_{t_0}^{t}\beta_1(s,x_s^\varepsilon,\varepsilon)\,dw_s\Big)^{2m} &\le B(t-t_0)^{m-1}\int_{t_0}^{t}\gamma_1^{2m}(s,\varepsilon)\,ds,\\
E\Big(\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}[b_2(s,r,x_r^\varepsilon)-b_2(s,r,x_r)]dr\,dw_s\Big)^{2m}&\\
&\le\frac{BL^{2m}}{2m}(t-t_0)^{m-1}\int_{t_0}^{t}[(t-t_0)^{2m}-(s-t_0)^{2m}]\Delta_s^\varepsilon ds,\\
E\Big(\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}\beta_2(s,r,x_r^\varepsilon,\varepsilon)\,dr\,dw_s\Big)^{2m} &\le B(t-t_0)^{m-1}\int_{t_0}^{t}(s-t_0)^{2m-1}\int_{t_0}^{s}\gamma_2^{2m}(s,r,\varepsilon)\,dr\,ds,
\end{aligned}
$$

$$E\Big(\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}[b_3(s,r,x_r^\varepsilon)-b_3(s,r,x_r)]\,dw_r\,dw_s\Big)^{2m}$$
$$\leq \frac{B^2L^{2m}}{m}(t-t_0)^{m-1}\int_{t_0}^{t}[(t-t_0)^m-(s-t_0)^m]\,\Delta_s^\varepsilon\,ds,$$
$$E\Big(\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}\beta_3(s,r,x_r^\varepsilon,\varepsilon)\,dw_r\,dw_s\Big)^{2m}\leq B^2(t-t_0)^{m-1}\int_{t_0}^{t}(s-t_0)^{m-1}\int_{t_0}^{s}\gamma_3^{2m}(s,r,\varepsilon)\,dr\,ds.$$

Konačno, dobiće se integralna nejednakost oblika (1.8.7),

$$\Delta_t^\varepsilon\leq a(t,\varepsilon)+b(t)\int_{t_0}^{t}k(t,s)\,\Delta_s^\varepsilon\,ds,\quad t\in[t_0,T], \tag{2.2.8}$$

gde je

$$\begin{aligned}a(t,\varepsilon)&=A\delta_0(\varepsilon)+A(t-t_0)^{m-1}\bigg\{\int_{t_0}^{t}\Big[(t-t_0)^m\delta_1^{2m}(s,\varepsilon)+B\gamma_1^{2m}(s,\varepsilon)\Big]ds\\&\quad+\int_{t_0}^{t}(s-t_0)^{2m-1}\int_{t_0}^{s}\Big[(t-t_0)^m\delta_2^{2m}(s,\varepsilon)+B\gamma_2^{2m}(s,\varepsilon)\Big]dr\,ds\\&\quad+B\int_{t_0}^{t}(s-t_0)^{m-1}\int_{t_0}^{s}\Big[(t-t_0)^m\delta_3^{2m}(s,\varepsilon)+B\gamma_3^{2m}(s,\varepsilon)\Big]dr\,ds\bigg\},\\b(t)&=AL^{2m}(t-t_0)^{m-1}[B+(t-t_0)^m],\\k(t,s)&=1+\frac{1}{2m}[(t-t_0)^{2m}-(s-t_0)^{2m}]+\frac{B}{m}[(t-t_0)^m-(s-t_0)^m],\end{aligned}$$

i $A=13^{2m-1}$. Pošto su funkcije $a(t,\varepsilon)$ i $b(t)$ neopadajuće, a i funkcija $k(t,s)$ je neopadajuća u odnosu na prvi argument, pri čemu je

$$\int_{t_0}^{t}k(t,s)\,ds=(t-t_0)\Big[1+\frac{1}{2m+1}(t-t_0)^{2m}+\frac{B}{m+1}(t-t_0)^m\Big],$$

lako se dolazi do ocene (2.2.5) primenom jedne verzije Gronwall–Bellmanove nejednakosti (1.8.7). □

Ako se pođe od globalne ocene (2.2.5) i uzme u obzir ograničenost perturbacija sledećim funkcijama $\delta_0(\cdot)$, $\delta_i(\cdot)$, $\gamma_i(\cdot)$, ako se pretpostavi da $\delta_0(\cdot)\to 0$, $\delta_i(\cdot)\to 0$, $\gamma_i(\cdot)\to 0$ kada $\varepsilon\to 0$, može se očekivati da, pod tim uslovima, $\sup_{t\in[t_0,T]}E|x_t^\varepsilon-x_t|^{2m}\to 0$ kada $\varepsilon\to 0$.

Teorema 2.2.1. (Sv. Janković, M. Jovanović, [29], 2000.) *Neka su zadovoljeni uslovi Propozicije 2.2.1 i neka funkcije $\delta_0(\cdot)$, $\delta_i(\cdot)$, $\gamma_i(\cdot)$, $i=1,2,3$, teže ka nuli kada ε teži ka nuli, za svako $(t,s)\in J$. Tada*

$$\sup_{t\in[t_0,T]}E|x_t^\varepsilon-x_t|^{2m}\to 0\quad \textit{kada}\quad \varepsilon\to 0.$$

Dokaz. Neka je

$$\begin{aligned}&\overline{\delta}_1(\varepsilon)=\sup_{t\in[t_0,T]}\delta_1(t,\varepsilon),\quad \overline{\delta}_i(\varepsilon)=\sup_{(t,s)\in J}\delta_i(t,s,\varepsilon),\ i=2,3\\&\overline{\gamma}_1(\varepsilon)=\sup_{t\in[t_0,T]}\gamma_1(t,\varepsilon),\quad \overline{\gamma}_i(\varepsilon)=\sup_{(t,s)\in J}\gamma_i(t,s,\varepsilon),\ i=2,3\end{aligned} \tag{2.2.9}$$

i neka je

$$\phi(\varepsilon)=\max\Big\{\delta_0(\varepsilon),\overline{\delta}_1^{2m}(\varepsilon),\overline{\delta}_2^{2m}(\varepsilon),\overline{\delta}_3^{2m}(\varepsilon),\overline{\gamma}_1^{2m}(\varepsilon),\overline{\gamma}_2^{2m}(\varepsilon),\overline{\gamma}_3^{2m}(\varepsilon)\Big\}. \tag{2.2.10}$$

Jasno, $\phi(\varepsilon)\to 0$ kada $\varepsilon\to 0$. Na osnovu (2.2.6) sledi da je

$$a(t,\varepsilon)\le\phi(\varepsilon)\,P_4((t-t_0)^m),\quad t\in[t_0,T],$$

gde je $P_4(v),\ v\ge 0$, odgovarajući polinom reda 4. Tada, na osnovu (2.2.5) važi

$$E|x_t^\varepsilon-x_t|^{2m}\le\phi(\varepsilon)\,P_4((t-t_0)^m)\,e^{\xi(t-t_0)},\quad t\in[t_0,T], \tag{2.2.11}$$

gde je $\xi(t-t_0)$ definisano u (2.2.7). Pošto je T konačno, postoji konstanta $C>0$, koja ne zavisi od ε, tako da je

$$E|x_t^\varepsilon-x_t|^{2m}\le C\,\phi(\varepsilon),\quad t\in[t_0,T].$$

Tada, $\sup_{t\in[t_0,T]}E|x_t^\varepsilon-x_t|^{2m}\to 0$ kada $\varepsilon\to 0$. □

Napomena 2.2.1. Početni uslov x_0^ε i perturbacije $\alpha_i(\cdot),\ \beta_i(\cdot), i=1,2,3$, u perturbovanoj jednačini (2.2.2) mogu zavisiti od različitih malih parametara $\varepsilon_0,\varepsilon_i,\mu_i,\ \ i=1,2,3$, respektivno. Pošto rešenje zavisi od njih, može se usvojiti kraći zapis ε u x_t^ε i pretpostaviti se da ε takođe zavisi od njih. Jasno, funkcije $\delta_0(\cdot),\ \delta_i(\cdot),\gamma_i(\cdot),\ i=1,2,3$, iz (2.2.3) i (2.2.4) takođe zavise od njih. Ako su one neopadajuće u odnosu na male parametre, tada Propozicija 2.2.1 i Teorema 2.2.1 važe za $\varepsilon=\max\{\varepsilon_0,\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\mu_1,\mu_2,\mu_3\}$.

Može se primetiti da sva dosadašnja razmatranja podrazumevaju neki fiksiran konačan vremenski interval. Logično je zapitati se da li analogni zaključci važe i na beskonačnom itervalu. Sledeća teorema pokazuje da $\sup_t E|x_t^\varepsilon-x_t|^{2m}\to 0$ kada $\varepsilon\to 0$ na intervalima čija dužina teži beskonačnosti.

Teorema 2.2.2. (Sv. Janković, M. Jovanović, [29], 2000.) *Neka su zadovoljeni uslovi Teoreme 2.2.1 za $t\ge t_0$. Tada, za proizvoljan broj $r\in(0,1)$ i ε dovoljno malo, postoji broj $T(\varepsilon)>0$, takav da je*

$$T(\varepsilon)=M\Big[\big(-r\ln\phi(\varepsilon)\big)^{1/4}-K\Big]^{1/m}, \tag{2.2.12}$$

gde je $\phi(\varepsilon)$ dato sa (2.2.10), a M i K su neke generisane pozitivne konstante, tako da

$$\sup_{t\in[t_0,t_0+T(\varepsilon)]}E|x_t^\varepsilon-x_t|^{2m}\to 0\quad \textit{kada}\quad \varepsilon\to 0.$$

Dokaz. Ako je vremenski interval beskonačan, Teorema 2.2.1 generalno neće važiti. Zbog toga možemo staviti da je $T=t_0+T(\varepsilon)$ i efektivno izračunati vrednost $T(\varepsilon)$ tako da kada $\varepsilon\to 0$ $\sup_{t\in[t_0,t_0+T(\varepsilon)]}E|x_t^\varepsilon-x_t|^{2m}\to 0$.

Na osnovu (2.2.11) je

$$E|x_t^\varepsilon-x_t|^{2m}\le\phi(\varepsilon)\,P_4(T^m(\varepsilon))\,e^{\xi(T(\varepsilon))},\quad t\in[t_0,t_0+T(\varepsilon)]. \tag{2.2.13}$$

Pošto $\phi(\varepsilon)\to 0$ kad $\varepsilon\to 0$, to postoji konstanta $\varepsilon_0,\ 0<\varepsilon_0<1$, takva da je $\phi(\varepsilon)<1$ za $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$. S obzirom da desna strana nejednakosti (2.2.13) teži ka nuli kada ε teži ka nuli, $T(\varepsilon)$ se može odrediti tako da je

$$\xi(T(\varepsilon))\le -r\ln\phi(\varepsilon)$$

za proizvoljan broj $r \in (0,1)$ i za $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$.

Ako se primeni elementarna nejednakost $a_1^4+4a_1^3a_2+6a_1^2a_3^2+4a_1a_4^3 \le \left(\sum_{i=1}^4 a_i\right)^4$, $a_i \ge 0$, na funkciju $\xi(t-t_0)$ definisanu sa (2.2.7), pri čemu je

$$a_1 = \left(\frac{AL^{2m}}{2m+1}\right)^{1/4}, \qquad a_2 = \frac{B\,(3m+2)}{4\,(m+1)} \cdot \left(\frac{AL^{2m}}{2m+1}\right)^{1/4},$$
$$a_3 = \Big[AL^{2m}(2m+1)\Big]^{1/4} \cdot \left[\frac{1}{6}\left(1+\frac{B^2}{m+1}\right)\right]^{1/2},$$
$$a_4 = \Big(\frac{B}{4}\Big)^{1/3} \cdot (2m+1)^{1/12} \cdot (AL^{2m})^{1/4},$$

dobiće se da je

$$\xi(t-t_0) \le \xi(T(\varepsilon)) \le \left[\Big(\frac{AL^{2m}}{2m+1}\Big)^{1/4} T^m(\varepsilon) + K\right]^4, \quad t \in [t_0, T(\varepsilon)],$$

pri čemu je $K = a_2+a_3+a_4$. Sada, za proizvoljan broj $r \in (0,1)$ i ε dovoljno malo ($\varepsilon < \varepsilon_0$), za koje je $-r\ln\phi(\varepsilon) \ge K^4$, $T(\varepsilon)$ se određuje tako da je

$$\left[\Big(\frac{AL^{2m}}{2m+1}\Big)^{1/4} T^m(\varepsilon) + K\right]^4 = -r\ln\phi(\varepsilon).$$

Odavde se lako nalazi maksimalna vrednost $T(\varepsilon)$ oblika (2.2.12), gde je $M = \left(\frac{2m+1}{AL^{2m}}\right)^{1/4m}$.

Jasno, $T(\varepsilon) \to \infty$ kada $\varepsilon \to 0$.

Konačno, na osnovu (2.2.12), za svako $t \in [t_0, t_0+T(\varepsilon)]$ sledi da je

$$E|x_t^\varepsilon - x_t|^{2m} \le (\phi(\varepsilon))^{1-r} P_4\left(M\left[\big(-r\ln\phi(\varepsilon)\big)^{1/4} - K\right]^{1/m}\right) \to 0 \quad \text{kada} \quad \varepsilon \to 0,$$

pa i $\sup_{t\in[t_0,t_0+T(\varepsilon)]} E|x_t^\varepsilon - x_t|^{2m} \to 0$ kada $\varepsilon \to 0$. Dokaz teoreme je kompletan. □

Primer 2.2.1. Dobijeni rezultati mogu se jednostavno primeniti za ocenjivanje bliskosti, u smislu momenta $(2m)$-tog reda, rešenja perturbovane i odgovarajuće neperturbovane jednačine. Izbor perturbacija se razlikuje od onog iz rada [75]. Posmatra se skalarna perturbovana jednačina

$$x_t^\varepsilon = \eta + \varepsilon_0 + \int_0^t \left[a_s + b_s\,x_s^\varepsilon + \frac{\varepsilon_1}{1+|x_s^\varepsilon|} + \int_0^s \Big(\varepsilon_3 + e^{-(r+1)/\varepsilon_3}\Big)\sin x_r^\varepsilon\,dw_r\right] ds$$
$$+ \int_0^t \left[c_s + \mu_1 + \int_0^s \sin\frac{\mu_3}{1+s+r+|x_r^\varepsilon|}\,dw_r\right] dw_s, \quad t \ge 0,$$

gde su a_t, b_t, c_t, $t \ge 0$, neslučajne, merljive i ograničene funkcije, a $\eta = \text{const} > 0$ skoro izvesno, dok je

$$x_t = \eta + \int_0^t (a_s + b_s\,x_s^\varepsilon)\,ds + \int_0^t c_s\,dw_s, \quad t \ge 0,$$

odgovarajuća neperturbovana linearna jednačina. Ona je efektivno rešiva, pri čemu je njeno rešenje Gaussov i markovski proces (videti, na primer, [16], [19], [56]). Lako se proverava da perturbacije koje se javljaju u perturbovanoj jednačini zadovoljavaju uslove (1.5.3), (1.5.4), kao i (2.2.3) i (2.2.4). Uslovi Teoreme 2.2.1 i Teoreme 2.2.2 su takođe zadovoljeni, pa se mogu izračunati intervali $[0, T(\varepsilon)]$ čija dužina teži beskonačnosti kada $\varepsilon \to 0$ i za koje važi da $\sup_{t\in[0,T(\varepsilon)]} E|x_t^\varepsilon - x_t|^{2m} \to 0$ kada $\varepsilon \to 0$. Na osnovu (2.2.9) i (2.2.10) sledi da je

$$\phi(\varepsilon) = \max\left\{\varepsilon^{2m}, \left(\varepsilon + e^{-1/\varepsilon}\right)^{2m}, (\sin\varepsilon)^{2m}\right\} = \left(\varepsilon + e^{-1/\varepsilon}\right)^{2m}.$$

Pošto postoji $\varepsilon_0 \in (0,1)$, tako da je $\varepsilon + e^{-1/\varepsilon} < 1$ za svako $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, tada, za proizvoljan broj $r \in (0,1)$, na osnovu (2.2.12) se dobija

$$T(\varepsilon) = M\left[\left(-2mr\ln\left(\varepsilon + e^{-1/\varepsilon}\right)\right)^{1/4} - K\right]^{1/m},$$

gde su M i K generisane konstante i $A = 6^{2m-1}$. $\triangle$

Napomena 2.2.2. Ako se umesto prethodno primenjene izometrije stohastičkih integrala primeni nejednakost Burkholder–Davis–Gundy (1.3.5), može se oceniti mera bliskosti rešenja x^ε i x predstavljena sa $\overline{\Delta}^\varepsilon(T) = E\{\sup_{t\in[t_0,T]} |x_t^\varepsilon - x_t|^{2m}\}$. Analogno, kao u prethodno izloženom postupku mogu se naći uslovi pri kojima $\overline{\Delta}^\varepsilon(T) \to 0$ kada $\varepsilon \to 0$ na konačnim intervalima ili na intervalima čija dužina teži beskonačnosti.

Napomena 2.2.3. Ako je vremenski interval beskonačan, ovaj rezultat bi se odmah mogao primeniti na proučavanje asimptotske stabilnosti u smislu momenta $(2m)$-tog reda rešenja perturbovanih jednačina, tako što bi se proučavala asimptotsku stabilnost rešenja odgovarajućih neperturbovanih jednačina.

2.2.2. Aditivno perturbovane opšte stohastičke integrodiferencijalne jednačine

U ovom poglavlju predmet proučavanja su perturbacije istog tipa kao u Poglavlju 2.1.1, koje zavise od *malog parametra* $\varepsilon \in (0,1)$, ali opštije od onih koje su proučavane u radu [75]. Rezultati ovog poglavlja objavljeni su u radu M. Jovanović, Sv. Janković, [40], 2002.

Rešenje sledeće *perturbovane opšte stohastičke integrodiferencijalne jednačine*

$$\begin{aligned}
dx_t^\varepsilon &= \tilde{F}\Big(t, x_t^\varepsilon, \int_0^t \tilde{f}_1(t,s,x_s^\varepsilon,\varepsilon)\,ds, \int_0^t \tilde{f}_2(t,s,x_s^\varepsilon,\varepsilon)\,dw_s, \varepsilon\Big)\,dt \\
&\quad + \tilde{G}\Big(t, x_t^\varepsilon, \int_0^t \tilde{g}_1(t,s,x_s^\varepsilon,\varepsilon)\,ds, \int_0^t \tilde{g}_2(t,s,x_s^\varepsilon,\varepsilon)\,dw_s, \varepsilon\Big)\,dw_t, \\
x^\varepsilon(0) &= x_0^\varepsilon \ \text{ skoro izvesno}
\end{aligned} \tag{2.2.14}$$

se upoređuje sa rešenjem odgovarajuće *neperturbovane jednačine* istog tipa,

$$\begin{aligned}
dx_t &= F\Big(t, x_t, \int_0^t f_1(t,s,x_s)\,ds, \int_0^t f_2(t,s,x_s)\,dw_s\Big)\,dt \\
&\quad + G\Big(t, x_t, \int_0^t g_1(t,s,x_s)\,ds, \int_0^t g_2(t,s,x_s)\,dw_s\Big)\,dw_t, \ t \in [0,T], \\
x(0) &= x_0 \ \text{ skoro izvesno.}
\end{aligned} \tag{2.2.15}$$

Potrebno je oceniti bliskost rešenja ovih jednačina u smislu momenta $(2m)$-tog reda.

Pošto su jednačine (2.2.14) i (2.2.15) oblika (1.6.1), važe sve pretpostavke o koeficijentima ovih jednačina iz Poglavlja 1.8. Ovde, se zbog kraćeg i jednostavnijeg označavanja izostavlja ω u svim slučajnim funkcijama i procesima.

Potrebno je uvesti pretpostavke pri kojima su početna vrednost x_0^ε i slučajne funkcije $\tilde{F}, \tilde{G}, \tilde{f}_i, \tilde{g}_i$ bliske u nekom smislu sa x_0 i F, G, f_i, g_i, respektivno, tako da rešenja jednačina (2.2.14) i (2.2.15) budu bliska u smislu momenta $(2m)$-tog reda.

Zbog veoma komplikovanog zapisa samih jednačina, uvedimo sledeća označavanja:

$$\begin{aligned} A_1 x_t &= \int_0^t f_1(t,s,x_s)\,ds, \qquad & A_2 x_t &= \int_0^t f_2(t,s,x_s)\,dw_s,\\ B_1 x_t &= \int_0^t g_1(t,s,x_s)\,ds, \qquad & B_2 x_t &= \int_0^t g_2(t,s,x_s)\,dw_s,\\ F x_t &= F(t,x_t,A_1x_t,A_2x_t), \qquad & G x_t &= G(t,x_t,B_1x_t,B_2x_t). \end{aligned}$$

Tada jednačina (2.2.15) može biti izražena u kraćoj integralnoj formi, na sledeći način

$$x_t = x_0 + \int_0^t F x_s\,ds + \int_0^t G x_s\,dw_s, \quad t \in [0,T]. \tag{2.2.16}$$

Pretpostavimo da postoje neslučajne funkcije:

$\alpha_i : J \times R \to R, \quad \beta_i : J \times R \to R, \ i = 1,2, \quad \alpha_3 : [0,T] \times R \to R, \quad \beta_3 : [0,T] \times R \to R,$
koje zavise od ε, tako da je

$$\begin{aligned} \tilde{A}_1 x_t^\varepsilon &= A_1 x_t^\varepsilon + \int_0^t \alpha_1(t,s,x_s^\varepsilon,\varepsilon)\,ds, \ \tilde{A}_2 x_t^\varepsilon = A_2 x_t^\varepsilon + \int_0^t \alpha_2(t,s,x_s^\varepsilon,\varepsilon)\,dw_s,\\ \tilde{B}_1 x_t^\varepsilon &= B_1 x_t^\varepsilon + \int_0^t \beta_1(t,s,x_s^\varepsilon,\varepsilon)\,ds, \ \tilde{B}_2 x_t^\varepsilon = B_2 x_t^\varepsilon + \int_0^t \beta_2(t,s,x_s^\varepsilon,\varepsilon)\,dw_s,\\ \tilde{F} x_t^\varepsilon &= F(t,x_t^\varepsilon,\tilde{A}_1 x_t^\varepsilon,\tilde{A}_2 x_t^\varepsilon) + \alpha_3(t,x_t^\varepsilon,\varepsilon),\\ \tilde{G} x_t^\varepsilon &= G(t,x_t^\varepsilon,\tilde{B}_1 x_t^\varepsilon,\tilde{B}_2 x_t^\varepsilon) + \beta_3(t,x_t^\varepsilon,\varepsilon). \end{aligned}$$

Tada, jednačina (2.2.14) ima sledeći kraći integralni oblik

$$x_t^\varepsilon = x_0^\varepsilon + \int_0^t \tilde{F} x_s^\varepsilon\,ds + \int_0^t \tilde{G} x_s^\varepsilon\,dw_s, \quad t \in [0,T]. \tag{2.2.17}$$

Članovi α_i i β_i se u skladu sa prethodnim razmatranjima nazivaju *perturbacije* u perturbovanoj jednačini (2.2.14). Takođe, ako se pretpostavi da su perturbacije dovoljno male, tada se može očekivati da perturbovana i neperturbovana jednačina budu bliske u nekom smislu. U skladu s tim, mogu se uvesti sledeće pretpostavke:

$\mathcal{A}_1$. Neka postoji pozitivan ceo broj m i neslučajna vrednost $\delta_0(\varepsilon)$, tako da početni uslovi x_0 i x_0^ε, jednačina (2.2.14) i (2.2.15), zadovoljavaju $E|x_0|^{2m} < \infty$, $E|x_0^\varepsilon|^{2m} < \infty$ i

$$E|x_0^\varepsilon - x_0|^{2m} \le \delta_0(\varepsilon). \tag{2.2.18}$$

$\mathcal{A}_2$. Postoje neslučajne i nenegativne ograničene funkcije $\delta_i(\cdot)$, $\gamma_i(\cdot)$, $i=1,2,3$, definisane na J i zavisne od ε, takve da je

$$
\begin{aligned}
&\sup_{x\in R}|\alpha_i(t,s,x,\varepsilon)| \le \delta_i(t,s,\varepsilon), \quad \sup_{x\in R}|\beta_i(t,s,x,\varepsilon)| \le \gamma_i(t,s,\varepsilon),\ i=1,2,\\
&\sup_{x\in R}|\alpha_3(t,x,\varepsilon)| \le \delta_3(t,\varepsilon), \qquad \sup_{x\in R}|\beta_3(t,x,\varepsilon)| \le \gamma_3(t,\varepsilon).
\end{aligned} \tag{2.2.19}
$$

$\mathcal{A}_3$. Slučajne funkcije f_i, g_i, F, G zadovoljavaju globalni Lipschitzov uslov uniformno na J i postoje jedinstvena skoro izvesno neprekidna neanticipativna rešenja: x_t^ε jednačine (2.2.14) koje zadovoljava uslov $E\{\sup_{t\in[0,T]}|x_t^\varepsilon|^{2m}\}<\infty$ i x_t jednačine (2.2.15) koje zadovoljava uslov $E\{\sup_{t\in[0,T]}|x_t|^{2m}\}<\infty$.

Ako se pretpostavi da su $\delta_0(\cdot), \delta_i(\cdot), \gamma_i(\cdot)$ male vrednosti za ε dovoljno malo, tada se, pri nekim uslovima, može očekivati da x_t i x_t^ε budu bliski u smislu momenta $(2m)$-tog reda. U odnosu na to, potrebno je naći globalnu ocenu bliskosti ovih rešenja, tj. naći ocenu za $E|x_t^\varepsilon - x_t|^{2m}$, na osnovu koje se izvode glavni rezultati vezani za ovaj tip perturbacija i ovaj tip jednačina.

Propozicija 2.2.2. (M. Jovanović, Sv. Janković, [40], 2002.) *Neka su x_t^ε i x_t rešenja jednačina (2.2.14) and (2.2.15) respektivno, definisana na konačnom intervalu $[0,T]$, i neka su zadovoljene pretpostavke $\mathcal{A}_1$–$\mathcal{A}_3$. Tada je, za $t\in[0,T]$ i $m>1$,*

$$
\begin{aligned}
E|x_t^\varepsilon - x_t|^{2m}
&\le \left[\delta_0^{\frac{1}{m}}(\varepsilon)\, e^{\int_0^t \xi(s,\varepsilon)\,ds} + A\int_0^t [2p(s,\varepsilon)+(2m-1)A\,q(s,\varepsilon)]\, e^{\int_s^t \xi(r,\varepsilon)\,dr} ds\right]^m,
\end{aligned} \tag{2.2.20}
$$

gde je

$$
\begin{aligned}
p(s,\varepsilon) &= M\int_0^s \delta_1(s,r,\varepsilon)\,dr + MC\, s^{\frac{m-1}{2m}}\Big(\int_0^s \delta_2^{2m}(s,r,\varepsilon)\,dr\Big)^{\frac{1}{2m}} + \delta_3(s,\varepsilon),\\
q(s,\varepsilon) &= M^2 s\int_0^s \gamma_1^2(s,r,\varepsilon)\,dr + M^2C^2\, s^{\frac{m-1}{m}}\Big(\int_0^s \gamma_2^{2m}(s,r,\varepsilon)\,dr\Big)^{\frac{1}{m}} + \gamma_3^2(s,\varepsilon),\\
\xi(s,\varepsilon) &= c_1\, s^{\frac{2m-1}{m-1}} + c_2\, s + c_3\, s^{\frac{m-1}{2m-1}} + c_4 + c_5 T + 2A\,p(s,\varepsilon),
\end{aligned}
$$

a $A, C, M, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5$ su generisane pozitivne konstante koje ne zavise od ε i T;

za $m=1$,

$$
E|x_t^\varepsilon - x_t|^2 \le 5\left[\delta_0(\varepsilon) + t\int_0^t \mu(s,\varepsilon)\,ds + \int_0^t \nu(s,\varepsilon)\,ds\right]\cdot e^{P_4(t)}, \tag{2.2.21}
$$

gde je

$$
\begin{aligned}
\mu(s,\varepsilon) &= 2L^2\int_0^s [s\delta_1^2(s,r,\varepsilon)+\delta_2^2(s,r,\varepsilon)]\,dr + \delta_3^2(s,\varepsilon),\\
\nu(s,\varepsilon) &= 2L^2\int_0^s [s\gamma_1^2(s,r,\varepsilon)+\gamma_2^2(s,r,\varepsilon)]\,dr + \gamma_3^2(s,\varepsilon),\\
P_4(t) &= 5/3\, L^2[2L^2t^4 + 5L^2t^3 + 3(1+L^2)t^2 + 3t].
\end{aligned} \tag{2.2.22}
$$

Dokaz. Označimo, kao i ranije, $z_t^\varepsilon = x_t^\varepsilon - x_t$ i $\Delta_t^\varepsilon = E|x_t^\varepsilon - x_t|^{2m}$.

Neka je $m > 1$. Ako se primeni postupak iz Propozicije 2.1.1, tj. oduzmu se jednačine (2.2.14) i (2.2.15) i primeni Itova formula za stohastičko diferenciranje na $(z_t^\varepsilon)^{2m}$, dobiće se izraz (2.1.8), gde su

$$\begin{aligned}
I_1(t) &= \int_0^t [\tilde{F}x_s^\varepsilon - Fx_s]\,(z_s^\varepsilon)^{2m-1}\,ds,\\
I_2(t) &= \int_0^t [\tilde{G}x_s^\varepsilon - Gx_s]^2\,(z_s^\varepsilon)^{2m-2}\,ds,\\
I_3(t) &= \int_0^t [\tilde{G}x_s^\varepsilon - Gx_s]\,(z_s^\varepsilon)^{2m-1}\,dw_s.
\end{aligned}$$

Pošto je $EI_3(t) = 0$ za $t \in [0,T]$, tada je

$$\Delta_t^\varepsilon = \Delta_0^\varepsilon + 2mEI_1(t) + m(2m-1)EI_2(t), \quad t \in [0,T]. \tag{2.2.23}$$

Da bi se ocenilo $EI_1(t)$, koristi se Hölderova nejednakost za $p = 2m$, $q = \frac{2m}{2m-1}$, a zatim elementarna nejednakost (1.8.2). Tada je

$$\begin{aligned}
EI_1(t) &\le \int_0^t (E|\tilde{F}x_s^\varepsilon - Fx_s|^{2m})^{\frac{1}{2m}}\,(E|z_s^\varepsilon|^{2m})^{\frac{2m-1}{2m}}\,ds\\
&\le 2^{\frac{2m-1}{2m}} \int_0^t \Big[E|F(s,x_s^\varepsilon,\tilde{A}_1x_s^\varepsilon,\tilde{A}_2x_s^\varepsilon) - Fx_s|^{2m} + E|\alpha_3(s,x_s^\varepsilon,\varepsilon)|^{2m}\Big]^{\frac{1}{2m}}\,(\Delta_s^\varepsilon)^{\frac{2m-1}{2m}}\,ds.
\end{aligned}$$

Primenom Lipschitzovog uslova na funkciju F, a zatim i (2.2.19) dobija se

$$EI_1(t) \le A\int_0^t \Big[L^{2m}E(|z_s^\varepsilon|^2 + |\tilde{A}_1x_s^\varepsilon - A_1x_s|^2 + |\tilde{A}_2x_s^\varepsilon - A_2x_s|^2)^m + \delta_3^{2m}(s,\varepsilon)\Big]^{\frac{1}{2m}}\,(\Delta_s^\varepsilon)^{\frac{2m-1}{2m}}\,ds.$$

Ako se zatim primeni elementarna nejednakost (1.8.3) i uvedu oznake za nove konstante $A = 2^{\frac{2m-1}{2m}}$, $B = 3^{\frac{m-1}{2m}}$, $M = ALB$, poslednja nejednakost postaje

$$\begin{aligned}
EI_1(t) &\le M\int_0^t \Delta_s^\varepsilon\,ds + M\int_0^t \Big[(E|\tilde{A}_1x_s^\varepsilon - A_1x_s|^{2m})^{\frac{1}{2m}}\\
&\quad + (E|\tilde{A}_2x_s^\varepsilon - A_2x_s|^{2m})^{\frac{1}{2m}}\Big](\Delta_s^\varepsilon)^{\frac{2m-1}{2m}}\,ds + A\int_0^t \delta_3(s,\varepsilon)\,(\Delta_s^\varepsilon)^{\frac{2m-1}{2m}}\,ds.
\end{aligned} \tag{2.2.24}$$

Sada je

$$\begin{aligned}
&\int_0^t (E|\tilde{A}_1x_s^\varepsilon - A_1x_s|^{2m})^{\frac{1}{2m}}\,(\Delta_s^\varepsilon)^{\frac{2m-1}{2m}}\,ds\\
&\quad = \int_0^t \Big[E\Big|A_1x_s^\varepsilon - A_1x_s + \int_0^s \alpha_1(s,r,x_r^\varepsilon,\varepsilon)\,dr\Big|^{2m}\Big]^{\frac{1}{2m}}\,(\Delta_s^\varepsilon)^{\frac{2m-1}{2m}}\,ds\\
&\quad \le AL\int_0^t \Big[E\Big(\int_0^s |z_r^\varepsilon|\,dr\Big)^{2m}\Big]^{\frac{1}{2m}}(\Delta_s^\varepsilon)^{\frac{2m-1}{2m}}\,ds + A\int_0^t\int_0^s \delta_1(s,r,\varepsilon)\,dr\,(\Delta_s^\varepsilon)^{\frac{2m-1}{2m}}\,ds.
\end{aligned}$$

Primenom Schwarzove nejednakosti u prvom sabirku, a zatim Youngove nejednakosti (1.8.4), može se zaključiti da je

$$\begin{aligned}
\int_0^t \Big[E\Big(\int_0^s |z_r^\varepsilon|\,dr\Big)^{2m}\Big]^{\frac{1}{2m}}(\Delta_s^\varepsilon)^{\frac{2m-1}{2m}}\,ds &\le \int_0^t s^{\frac{2m-1}{2m}}\Big(\int_0^s \Delta_r^\varepsilon\,dr\Big)^{\frac{1}{2m}}(\Delta_s^\varepsilon)^{\frac{2m-1}{2m}}\,ds\\
&\le \frac{1}{2m}\int_0^t\int_0^s \Delta_r^\varepsilon\,dr\,ds + \frac{2m-1}{2m}\int_0^t s\,\Delta_s^\varepsilon\,ds\\
&= \frac{1}{2m}\int_0^t [t + (2m-2)s]\,\Delta_s^\varepsilon\,ds.
\end{aligned}$$

Na osnovu toga sledi

$$\begin{aligned}(2.2.25)\quad & \int_0^t (E|\tilde{A}_1 x_s^\varepsilon - A_1 x_s|^{2m})^{\frac{1}{2m}} (\Delta_s^\varepsilon)^{\frac{2m-1}{2m}}\, ds \\ & \leq \frac{AL}{2m} \int_0^t [T + (2m-2)s]\, \Delta_s^\varepsilon\, ds + A \int_0^t \int_0^s \delta_1(s,r,\varepsilon)\, dr\, (\Delta_s^\varepsilon)^{\frac{2m-1}{2m}}\, ds.\end{aligned}$$

Ponavljajući prethodni postupak uz primenu integralne formule (1.3.7), dolazi se do sledeće ocene,

$$\begin{aligned}(2.2.26)\quad & \int_0^t (E|\tilde{A}_2 x_s^\varepsilon - A_2 x_s|^{2m})^{\frac{1}{2m}} (\Delta_s^\varepsilon)^{\frac{2m-1}{2m}}\, ds \leq \frac{N}{2m} \int_0^t \Big[t - s + (2m-1)\, s^{\frac{m-1}{2m-1}}\Big] \Delta_s^\varepsilon\, ds \\ & + AC \int_0^t s^{\frac{m-1}{2m}} \Big(\int_0^s \delta_2^{2m}(s,r,\varepsilon)\, dr\Big)^{\frac{1}{2m}} (\Delta_s^\varepsilon)^{\frac{2m-1}{2m}}\, ds,\end{aligned}$$

gde je $C = [m(2m-1)]^{1/2}$ i $N = ALC$. Zamenjujući (2.2.25) i (2.2.26) u (2.2.24), dobija se ocena

$$\begin{aligned}(2.2.27)\quad EI_1(t) \leq{} & M \int_0^t \Big[1 + \frac{AL+N}{2m} T + \frac{AL(m-1)}{m} s + \frac{N(2m-1)}{2m} s^{\frac{m-1}{2m-1}}\Big] \Delta_s^\varepsilon\, ds \\ & + A \int_0^t p(s,\varepsilon)\, (\Delta_s^\varepsilon)^{\frac{2m-1}{2m}}\, ds,\end{aligned}$$

pri čemu je $p(s,\varepsilon) = M \int_0^s \delta_1(s,r,\varepsilon)\, dr + MC\, s^{\frac{m-1}{2m}} \Big(\int_0^s \delta_2^{2m}(s,t,\varepsilon)\, dr\Big)^{\frac{1}{2m}} + \delta_3(s,\varepsilon)$.

Analogno, za ocenu $EI_2(t)$, koristi se Hölderova nejednakost za $p = m$, $q = \frac{m-1}{m}$ i postupak koji je prethodno primenjen. Konačno,

$$\begin{aligned}(2.2.28)\quad EI_2(t) \leq{} & \int_0^t (E|\tilde{G} x_s^\varepsilon - G x_s|^{2m})^{\frac{1}{m}} (E|z_s^\varepsilon|^{2m})^{\frac{m-1}{m}}\, ds \leq M^2 \int_0^t \Delta_s^\varepsilon\, ds \\ & + M^2 \int_0^t \Big[(E|\tilde{B}_1 x_s^\varepsilon - B_1 x_s|^{2m})^{\frac{1}{m}} + (E|\tilde{B}_2 x_s^\varepsilon - B_2 x_s|^{2m})^{\frac{1}{m}}\Big] (\Delta_s^\varepsilon)^{\frac{m-1}{m}}\, ds \\ & + A^2 \int_0^t \gamma_3^2(s,\varepsilon)\, (\Delta_s^\varepsilon)^{\frac{m-1}{m}}\, ds \\ \leq{} & M^2 \int_0^t \Big[1 + \frac{A^2L^2 + N^2}{m} T + \frac{N^2(m-2)}{m} s + \frac{A^2L^2(m-1)}{m} s^{\frac{2m-1}{m-1}}\Big] \Delta_s^\varepsilon\, ds \\ & + A^2 \int_0^t q(s,\varepsilon)\, (\Delta_s^\varepsilon)^{\frac{m-1}{m}}\, ds,\end{aligned}$$

pri čemu je $q(s,\varepsilon) = M^2 s \int_0^s \gamma_1^2(s,r,\varepsilon)\, dr + M^2 C^2\, s^{\frac{m-1}{m}} \Big(\int_0^s \gamma_2^{2m}(s,r,\varepsilon)\, dr\Big)^{\frac{1}{m}} + \gamma_3^2(s,\varepsilon)$.

Relacija (2.2.23) zajedno sa (2.2.18), (2.2.27) i (2.2.28), implicira ocenu

$$\begin{aligned}(2.2.29)\quad \Delta_t^\varepsilon \leq{} & \delta_0(\varepsilon) + m \int_0^t \eta(s)\, \Delta_s^\varepsilon\, ds \\ & + mA \int_0^t \Big[2p(s,\varepsilon)\, (\Delta_s^\varepsilon)^{\frac{2m-1}{2m}} + (2m-1) A\, q(s,\varepsilon)\, (\Delta_s^\varepsilon)^{\frac{m-1}{m}}\Big]\, ds,\end{aligned}$$

gde je $\eta(s) = c_1\, s^{\frac{2m-1}{m-1}} + c_2\, s + c_3\, s^{\frac{m-1}{2m-1}} + c_4 + c_5 T$ i c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 su generisane pozitivne konstante koje ne zavise od ε i T. Ako se primeni elementarna nejednakost (1.8.5) za $a = \Delta_t^\varepsilon$, $r_1 = \frac{m-1}{m}$, $r_2 = \frac{2m-1}{2m}$, dobija se da je $(\Delta_s^\varepsilon)^{\frac{2m-1}{2m}} \le (\Delta_s^\varepsilon)^{\frac{m-1}{m}} + \Delta_s^\varepsilon$, tako da (2.2.29) postaje

$$\begin{aligned} \Delta_t^\varepsilon \le \delta_0(\varepsilon) &+ m \int_0^t \xi(s,\varepsilon)\, \Delta_s^\varepsilon\, ds \\ &+ mA \int_0^t [2p(s,\varepsilon) + (2m-1)A\, q(s,\varepsilon)]\, (\Delta_s^\varepsilon)^{\frac{m-1}{m}}\, ds, \end{aligned}$$

gde je $\xi(s,\varepsilon) = \eta(s) + 2A\, p(s,\varepsilon)$. Da bi se ocenilo Δ_t^ε iz ove nejednakosti, potrebno je primeniti uopštenu Gronwall–Bellmanovu nejednakost. Poslednja nejednakost je oblika (1.8.8), pa se u tom slučaju jednostavno dolazi do ocene (2.2.20) zamenjujući $u(s) = \Delta_s^\varepsilon$, $\gamma = \frac{m-1}{m}$. Na taj način je dokazan prvi deo tvrđenja.

Neka je $m = 1$. Tada je

$$\begin{aligned} \Delta_t^\varepsilon \le 5^{2m-1} \Big[\Delta_0^\varepsilon &+ E\Big(\int_0^t [F(s, x_s^\varepsilon, \tilde{A}_1 x_s^\varepsilon, \tilde{A}_2 x_s^\varepsilon) - F x_s] ds\Big)^{2m} + E\Big(\int_0^t \alpha_3(s, x_s^\varepsilon, \varepsilon) ds\Big)^{2m} \\ &+ E\Big(\int_0^t [G(s, x_s^\varepsilon, \tilde{B}_1 x_s^\varepsilon, \tilde{B}_2 x_s^\varepsilon) - G x_s] dw_s\Big)^{2m} + E\Big(\int_0^t \beta_3(s, x_s^\varepsilon, \varepsilon) dw_s\Big)^{2m} \Big]. \end{aligned}$$

Pod pretpostavkama Propozicije 2.2.2, nije teško pokazati da je

$$\Delta_t^\varepsilon \le \alpha(t) + L^2(t+1) \int_0^t [1 + L^2(t^2 - s^2) + 2L^2(t-s)]\, \Delta_s^\varepsilon\, ds,$$

gde su $\mu(s,\varepsilon)$ i $\nu(s,\varepsilon)$ funkcije (2.2.22). S obzirom da je poslednja nejednakost oblika (1.8.7), primenom verzije nejednakosti Gronwall–Bellmana, dolazi se do ocene (2.2.21). Time je dokaz kompletan. $\square$

Sledeći rezultat daje dovoljne uslove pri kojima $\sup_{t\in[0,T]} E|x_t^\varepsilon - x_t|^{2m} \to 0$ kada $\varepsilon \to 0$, imajući u vidu da su perturbacije ograničene sa $\delta_0(\cdot)$, $\delta_i(\cdot), \gamma_i(\cdot)$, $i = 1,2,3$.

Teorema 2.2.3. (M. Jovanović, Sv. Janković, [40], 2002.) *Neka su zadovoljeni uslovi Propozicije* 2.2.2 *i neka funkcije* $\delta_0(\cdot)$, $\delta_i(\cdot)$, $\gamma_i(\cdot)$, $i = 1,2,3$, *teže nuli kada* ε *teži nuli za svako* $(t,s) \in J$. *Tada*

$$\sup_{t\in[0,T]} E|x_t^\varepsilon - x_t|^{2m} \to 0 \quad \text{kada} \quad \varepsilon \to 0.$$

Dokaz. Neka je

$$\begin{aligned} \overline{\delta}_i(\varepsilon) &= \sup_{(t,s)\in J} \delta_i(t,s,\varepsilon), \quad \overline{\gamma}_i(\varepsilon) = \sup_{(t,s)\in J} \gamma_i(t,s,\varepsilon), \ i = 1,2, \\ \overline{\delta}_3(\varepsilon) &= \sup_{t\in[0,T]} \delta_3(t,\varepsilon), \qquad \overline{\gamma}_3(\varepsilon) = \sup_{t\in[0,T]} \gamma_3(t,\varepsilon). \end{aligned} \tag{2.2.30}$$

Za $m > 1$, označimo

$$\phi(\varepsilon) = \max\left\{ \delta_0^{\frac{1}{m}}(\varepsilon), \overline{\delta}_i(\varepsilon), \overline{\gamma}_i^2(\varepsilon), i = 1,2,3 \right\}. \tag{2.2.31}$$

Pošto $\phi(\varepsilon) \to 0$ kada $\varepsilon \to 0$, postoji pozitivna konstanta ρ, tako da je $\phi(\varepsilon) \le \rho$ za dovoljno malo ε. Tako, za funkcije $p(s,\varepsilon), q(s,\varepsilon)$ i $\xi(s,\varepsilon)$ iz Propozicije 2.2.2 važi

$$\begin{aligned} &p(s,\varepsilon) \le \phi(\varepsilon)[(M+1)s + MCs^{\frac{1}{2}}],\\ &q(s,\varepsilon) \le \phi(\varepsilon)[M^2(C^2+1)s^2 + s],\\ &\xi(s,\varepsilon) \le c_1\, s^{\frac{2m-1}{m-1}} + c_2\, s + c_3\, s^{\frac{m-1}{2m-1}} + c_4 + c_5 T + 2A\rho[(M+1)s + MCs^{\frac{1}{2}}]. \end{aligned}$$

Naravno, na osnovu (2.2.20) sledi

$$E|x_t^\varepsilon - x_t|^{2m} \le (\phi(\varepsilon))^m\, e^{f(t)}\, \theta(t), \quad t \in [0,T], \tag{2.2.32}$$

pri čemu je

$$\begin{aligned} f(t) &= d_1\, t^{\frac{3m-2}{m-1}} + b_1\, t^2 + d_3\, t^{\frac{3m-2}{2m-1}} + d_4\, t + b_2 T t + d_5\, t^{\frac{3}{2}},\\ \theta(t) &= (h_1\, t^3 + h_2\, t^2 + h_3\, t^{\frac{3}{2}} + h_4\, t + h_5)^m, \end{aligned}$$

i d_i, b_i, h_i su pozitivne konstante koje ne zavise od ε i T. Pošto je T konačno i $\phi(\varepsilon) \to 0$ kada $\varepsilon \to 0$, tada $\sup_{t\in[0,T]} E|x_t^\varepsilon - x_t|^{2m} \to 0$ kada $\varepsilon \to 0$.

Slično, za $m = 1$, ako se označi

$$\phi(\varepsilon) = \max\left\{\delta_0(\varepsilon), \overline{\delta}_i^2(\varepsilon), \overline{\gamma}_i^2(\varepsilon), i = 1,2,3\right\}, \tag{2.2.33}$$

na osnovu (2.2.21) dobija se ocena

$$E|x_t^\varepsilon - x_t|^2 \le \phi(\varepsilon)\cdot Q_4(t)\cdot e^{P_4(t)}, \quad t \in [0,T], \tag{2.2.34}$$

gde je $Q_4(t)$ polinom četvrtog stepena sa pozitivnim koeficijentima koji ne zavise od ε. Otuda $\sup_{t\in[0,T]} E|x_t^\varepsilon - x_t|^{2m} \to 0$ kada $\varepsilon \to 0$. Na taj način, dokaz je završen. □

Osnovna pretpostavka u prethodnom razmatranju je da je $[0,T]$ neki fiksirani konačni interval. Naravno, Propozicija 2.2.2 i Teorema 2.2.3 generalno ne važe za $T = \infty$, pa se može dokazati da $\sup E|x_t^\varepsilon - x_t|^{2m} \to 0$ kada $\varepsilon \to 0$ na intervalima čija dužina teži beskonačnosti kada $\varepsilon \to 0$. Može se uočiti da je konstrukcija tih intervala mnogo složenija od one u Poglavlju 2.1.

Teorema 2.2.4. (M. Jovanović, Sv. Janković, [40], 2002.) *Neka su zadovoljeni uslovi Teoreme 1.7.5 za $t \ge 0$. Tada, za proizvoljan broj $r \in (0,1)$ i dovoljno malo ε, postoji broj $T(\varepsilon)$, tako da*

$$\sup_{t\in[0,T(\varepsilon)]} E|x_t^\varepsilon - x_t|^{2m} \to 0 \quad \text{kada} \quad \varepsilon \to 0,$$

gde je:

za $m > 1$,

$$T(\varepsilon) = \left[\left(\frac{-mr\ln\phi(\varepsilon)}{d_1}\right)^{\frac{1}{2(3m-2)(2m-1)}} - \beta\right]^{2(2m-1)(m-1)}, \tag{2.2.35}$$

a $\phi(\varepsilon)$ je dato sa (2.2.31) i d_1 i β generisane pozitivne konstante koje ne zavise od ε;

za $m = 1$,

$$T(\varepsilon) = -\frac{3}{10L}\, r\ln\phi(\varepsilon) - \beta, \tag{2.2.36}$$

a $\phi(\varepsilon)$ je dato sa (2.2.33) i β pozitivna konstanta koja ne zavisi od ε.

Dokaz. Pošto važe sve prethodne ocene za $E|x_t^\varepsilon - x_t|^{2m}$ na konačnom fiksiranom vremenskom intervalu, može se posmatrati konačan interval $[0, T(\varepsilon)]$ i efektivno konstruisati $T(\varepsilon)$ tako da $\sup_{t\in[0,T(\varepsilon)]} E|x_t^\varepsilon - x_t|^{2m} \to 0$ kada $\varepsilon \to 0$.

S obzirom da važi (2.2.32), to je

$$E|x_t^\varepsilon - x_t|^{2m} \le (\phi(\varepsilon))^m \, e^{f(T(\varepsilon))} \, \theta(T(\varepsilon)), \quad t \in [0, T(\varepsilon)], \tag{2.2.37}$$

pa je potrebno dokazati da

$$(\phi(\varepsilon))^m \, e^{f(T(\varepsilon))} \, \theta(T(\varepsilon)) \to 0 \quad \text{kada} \quad \varepsilon \to 0. \tag{2.2.38}$$

Pošto $\phi(\varepsilon) \to 0$ kada $\varepsilon \to 0$, tada postoji konstanta ε_0, $0 < \varepsilon_0 < 1$, tako da je $\phi(\varepsilon) \le \rho < 1$ za $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Iz uslova da važi (2.2.38), trebalo bi izračunati $T(\varepsilon)$ tako da je

$$f(T(\varepsilon)) < -mr \ln \phi(\varepsilon), \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0), \tag{2.2.39}$$

za neki proizvoljan broj $r \in (0, 1)$. U tom cilju može se primeniti binomni obrazac

$$\begin{aligned}
&\left[A_1 (T(\varepsilon))^{\frac{1}{2(2m-1)(m-1)}} + \sum_{i=2}^{5} A_i\right]^{2(3m-2)(2m-1)} \\
&\qquad = \sum_{k=0}^{2(3m-2)(2m-1)} C^k_{2(3m-2)(2m-1)} \, A_1^k \, (T(\varepsilon))^{\frac{k}{2(2m-1)(m-1)}} \Big(\sum_{i=2}^{5} A_i\Big)^{2(3m-2)(2m=1)-k},
\end{aligned}$$

pri čemu se konstante $A_i, i = 1, 2, \ldots, 5$ biraju tako da je, na osnovu, (2.2.39),

$$\begin{aligned}
f(T(\varepsilon)) &< \left[A_1 (T(\varepsilon))^{\frac{1}{2(2m-1)(m-1)}} + \sum_{i=2}^{5} A_i\right]^{2(3m-2)(2m-1)} \\
&= -mr \, \ln \phi(\varepsilon).
\end{aligned} \tag{2.2.40}$$

Član sa najbržim rastom za funkciju $f(t)$ je $d_1 t^{\frac{3m-2}{m-1}}$. Za izračunavanje konstante A_1, potrebno je izračunati k tako da je $\frac{k}{2(2m-1)(m-1)} = \frac{3m-2}{m-1}$. Tada je $A_1 = d_1^{\frac{1}{2(3m-2)(2m-1)}}$. Ponavljajući ovaj postupak, stavljajući da je $b_1 + b_2 = d_2$, može se jednostavno dokazati da je

$$A_i = \left[\frac{d_i}{C^k_{2(3m-2)(2m-1)} \, A_1^k}\right]^{\frac{1}{2(3m-2)(2m-1)-k}}, \quad i = 1, 2, \ldots, 5,$$

pri čemu se A_2 dobija za $k = 4(2m-1)(m-1)$, A_3 za $k = 2(3m-2)(m-1)$, A_4 za $k = 2(2m-1)(m-1)$ i A_5 za $k = 3(2m-1)(m-1)$. Iz jednakosti (2.2.40) lako je izraziti $T(\varepsilon)$ u obliku (2.2.35), stavljajući da je $\beta = (A_2 + A_3 + A_4 + A_5)/A_1$. Naravno, $T(\varepsilon) \to \infty$ kada $\varepsilon \to 0$.

Na osnovu (2.2.37) i (2.2.40) očigledno se dobija $E|x_t^\varepsilon - x_t|^{2m} \le (\phi(\varepsilon))^{m(1-r)} \, \theta(T(\varepsilon))$ za svako $t \in [0, T(\varepsilon)]$. Pošto $(\phi(\varepsilon))^{m(1-r)} \, (-r \ln \phi(\varepsilon))^p \to 0$ kada $\varepsilon \to 0$ za proizvoljno $p \ge 0$, sledi

$$\sup_{t\in[0,T(\varepsilon)]} E|x_t^\varepsilon - x_t|^{2m} \le (\phi(\varepsilon))^{m(1-r)} \, \theta(T(\varepsilon)) \to 0 \quad \text{kada} \quad \varepsilon \to 0. \tag{2.2.41}$$

Za $m = 1$, polazeći od (2.2.34) i potpuno se držeći argumentacije iz prvog dela ovog dokaza, mogu se naći konstante $a_i, i = 1,2,3,4$ a zatim i $T(\varepsilon)$, tako da je

$$P_4(T(\varepsilon)) < \left[a_1 T(\varepsilon) + \sum_{i=2}^{4} a_i\right]^4 = -r \ln \phi(\varepsilon).$$

Odatle je lako zaključiti da je $T(\varepsilon)$ oblika (2.2.36), gde je $\beta = (a_2 + a_3 + a_4)/a_1$. Ovim je dokaz kompletan. $\square$

Primer 2.2.2. Data je skalarna perturbovana jednačina

$$(2.2.42)\quad x_t^\varepsilon = x_0 + \varepsilon + \int_0^t \left[\frac{1}{\sqrt{1+|x_s^\varepsilon|}} + \sin\frac{2^{-s}\varepsilon}{1+|x_s^\varepsilon|}\right] ds + \int_0^t \left[\ln\left(e^{-s}\Big|\int_0^s [x_r^\varepsilon + (2+r)^{-1/\varepsilon}] dw_r\Big| + 1\right) + \ln\left(1 + \frac{\varepsilon}{1+s}\right)^{1/2}\right] dw_s,\ t \geq 0,$$

dok je odgovarajuća neperturbovana jednačina

$$(2.2.43)\qquad x_t = x_0 + \int_0^t \frac{1}{\sqrt{1+|x_s|}} ds + \int_0^s \ln\left(e^{-s}\left|\int_0^s x_r dw_r\right| + 1\right) dw_s,\ t \geq 0.$$

Sve funkcije koje figurišu u jednačini (2.2.43) i perturbacije iz jednačine (2.2.42), zadovoljavaju globalni Lipschitzov uslov i uslov graničenog rasta. Ako je $E|x_0|^{2m} < \infty$, tada posmatrane jednačine imaju skoro izvesno neprekidna i neanticipativna rešenja. Pored toga, zadovoljeni su svi uslovi Teoreme 2.2.3 i Teoreme 2.2.4. U ovom slučaju je

$$\delta_0(\varepsilon) = \varepsilon^{2m}, \quad \overline{\delta}_3(\varepsilon) = \sin\varepsilon, \quad \overline{\gamma}_2(\varepsilon) = 2^{-1/\varepsilon}, \quad \overline{\gamma}_3(\varepsilon) = \frac{1}{2}\ln(1+\varepsilon),$$

tako da je

$$\phi(\varepsilon) = \max\left\{\varepsilon^2,\, \sin\varepsilon,\, 2^{-2/\varepsilon},\, \frac{1}{4}\ln^2(1+\varepsilon)\right\} = \sin\varepsilon.$$

Na osnovu izraza (2.2.35) mogu se izračunati intervali $[0, T(\varepsilon)]$ čija dužina teži beskonačnosti kada $\varepsilon \to 0$ i $\sup_{[0,T(\varepsilon)]} E|x_t^\varepsilon - x_t|^{2m} \to 0$ kada $\varepsilon \to 0$. $\triangle$

U ovom poglavlju za ocenu $E|x_t^\varepsilon - x_t|^{2m}$ korišćena je Itova formula za stohastičko diferenciranje, dok je u Poglavlju 3.2 taj izraz za stohastičke integrodiferencijalne jednačine ocenjen direktno, uz primenu nekih elementarnih nejednakosti. Ako bi se ocena za $E|x_t^\varepsilon - x_t|^{2m}$ tražila direktno, za slučaj $m \geq 1$ trebalo bi poći od izraza

$$(z_t^\varepsilon)^{2m} = \left[z_0^\varepsilon + \int_0^t [\tilde{F}x_s^\varepsilon - Fx_s]\, ds + \int_0^t [\tilde{G}s_s^\varepsilon - Gx_s]\, dw_s\right]^{2m},$$

iz koga se primenom elementarne nejednakosti (1.8.1) dobija

$$\Delta_t^\varepsilon \leq 5^{2m-1}\Big[\Delta_0^\varepsilon + E\Big(\int_0^t [F(s, x_s^\varepsilon, \tilde{A}_1 x_s^\varepsilon, \tilde{A}_2 x_s^\varepsilon) - Fx_s] ds\Big)^{2m} + E\Big(\int_0^t \alpha_3(s, x_s^\varepsilon, \varepsilon) ds\Big)^{2m} + E\Big(\int_0^t [G(s, x_s^\varepsilon, \tilde{B}_1 x_s^\varepsilon, \tilde{B}_2 x_s^\varepsilon) - Gx_s] dw_s\Big)^{2m} + E(\int_0^t \beta_3(s, x_s^\varepsilon, \varepsilon) dw_s\Big)^{2m}\Big].$$

Pod pretpostavkama Propozicije 2.2.2 i uz primenu uobičajene izometrije Lebesgueovih i Itovih integrala, nije teško dokazati da je

$$\Delta_t^\varepsilon \le \alpha(t) + \beta(t) \int_0^t k(t,s) \Delta_s^\varepsilon \, ds, \tag{2.2.44}$$

gde je

$$\begin{aligned}
&\alpha(t) = a\Big[\delta_0(\varepsilon) + t^{2m-1}\int_0^t \mu(s,\varepsilon)\,ds + t^{m-1}\int_0^t \nu(s,\varepsilon)\,ds\Big],\\
&\beta(t) = bcL^{2m}\,(t^{2m-1} + bt^{m-1}),\\
&k(t,s) = 1 + \frac{dL^{2m}}{2m}\,(t^{2m} - s^{2m}) + \frac{bdL^{2m}}{m}\,(t^m - s^m),\\
&\mu(s,\varepsilon) = cdL^{2m}\Big[s^{2m-1}\int_0^s \delta_1^{2m}(s,r,x_r^\varepsilon)dr + bs^{m-1}\int_0^s \delta_2^{2m}(s,r,x_r^\varepsilon)dr\Big] + \delta_3^{2m}(s,\varepsilon),\\
&\nu(s,\varepsilon) = bcdL^{2m}\Big[s^{2m-1}\int_0^s \gamma_1^{2m}(s,r,x_r^\varepsilon)dr + bs^{m-1}\int_0^s \gamma_2^{2m}(s,r,x_r^\varepsilon)dr\Big] + \gamma_3^{2m}(s,\varepsilon),\\
&\qquad a = 5^{2m-1},\ b = [m(2m-1)]^m,\ c = 3^{m-1},\ d = 2^{2m-1}.
\end{aligned}$$

Pošto je nejednakost (2.2.44) oblika (1.8.7), primenom verzije Gronwall–Bellmanove nejednakosti dobija se sledeća ocena za Δ_t^ε:

$$\Delta_t^\varepsilon \le \alpha(t)\, e^{\zeta(t)}, \quad t \in [0,T], \tag{2.2.45}$$

gde je

$$\begin{aligned}
\zeta(t) &= \beta(t)\int_0^t k(t,s)\,ds\\
&= acL^{2m}\left[\frac{dL^{2m}}{2m+1}\,t^{4m} + \frac{bdL^{2m}(3m+2)}{(2m+1)(m+1)}\,t^{3m} + \Big(1 + \frac{b^2dL^{2m}}{m+1}\Big)\,t^{2m} + bt^m\right].
\end{aligned}$$

Pod pretpostavkama Teoreme 2.2.3, koristeći prethodno dobijenu relaciju (2.2.30) i uvodeći oznake

$$\overline{\Phi}(\varepsilon) = \max\Big\{\delta_0(\varepsilon), \overline{\delta}_1^{2m}(\varepsilon), \overline{\delta}_2^{2m}(\varepsilon), \overline{\delta}_3^{2m}(\varepsilon), \overline{\gamma}_1^{2m}(\varepsilon), \overline{\gamma}_2^{2m}(\varepsilon), \overline{\gamma}_3^{2m}(\varepsilon)\Big\}, \tag{2.2.46}$$

na osnovu (2.2.45) lako je zaključiti da je

$$\Delta_t^\varepsilon \le \overline{\phi}(\varepsilon)\, e^{\zeta(t)}\, P_4(t^m), \quad t \in [0,T], \tag{2.2.47}$$

pri čemu je $P_4(r)$, $r \ge 0$ odgovarajući polinom stepena 4 sa pozitivnim koeficijentima koji ne zavise od ε. Naravno, $\sup_{t\in[0,T]} E|x_t^\varepsilon - x_t|^{2m} \to 0$ kada $\varepsilon \to 0$.

Pod pretpostavkama Teoreme 2.2.4, polazeći od relacije (2.2.47) mogu se naći intervali $[0, \overline{T}(\varepsilon)]$ čija dužina teži beskonačnosti kada $\varepsilon \to 0$ i $\sup_{t\in[0,\overline{T}(\varepsilon)]} E|x_t^\varepsilon - x_t|^{2m} \to 0$ kada $\varepsilon \to 0$. Da bi se to uradilo, potrebno je iskoristiti postupak kao za dokaz Teoreme 2.2.4. Mogu se izračunati konstante a_1, a_2, a_3, a_4, a zatim i $\overline{T}(\varepsilon)$, tako da je za proizvoljan broj $\overline{r} \in (0,1)$ i $\overline{\phi}(\varepsilon) < 1,\ 0 < \varepsilon < \overline{\varepsilon}_0 < 1$,

$$\zeta(\overline{T}(\varepsilon)) < \Big[a_1\, \overline{T}^m(\varepsilon) + \sum_{i=2}^{4} a_i\Big]^4 = -\overline{r}\, \ln \overline{\phi}(\varepsilon).$$

Odatle je lako zaključiti da je

$$\overline{T}(\varepsilon) = \left[\frac{1}{L}\left(\frac{-(2m+1)\,\overline{r}\,\ln \overline{\phi}(\varepsilon)}{acd}\right)^{1/4} - \overline{\beta}\right]^{1/m}, \tag{2.2.48}$$

pri čemu je $\overline{\beta} = (a_2 + a_3 + a_4)/a_1$. Sada, na osnovu (2.2.47) sledi

$$\sup_{t\in[0,\overline{T}(\varepsilon)]} E|x_t^\varepsilon - x_t|^{2m} \le (\overline{\phi}(\varepsilon))^{1-r}\, P_4(\overline{T}^m(\varepsilon)) \to 0 \quad \text{kada} \quad \varepsilon \to 0. \tag{2.2.49}$$

Na osnovu toga se može zaključiti da se Teorema 2.2.3 i Teorema 2.2.4 mogu dokazati korišćenjem postupka sličnog upravo izloženom. Međutim, pošto je $\phi(\varepsilon) < 1$ i $\overline{\phi}(\varepsilon) < 1$ za $\varepsilon < \min\{\varepsilon_0, \overline{\varepsilon}_0\}$, na osnovu (2.2.31) i (2.2.46) sledi

$$(\phi(\varepsilon))^{2m} \le \overline{\phi}(\varepsilon), \tag{2.2.50}$$

tako da iz izraza (2.2.35) i (2.2.48) sledi

$$\begin{aligned}\frac{T(\varepsilon)}{\overline{T}(\varepsilon)} &\sim k\, \frac{(-\ln \phi(\varepsilon))^{(m-1)/(3m-2)}}{(-\ln \overline{\phi}(\varepsilon))^{1/(4m)}}\\ &\ge \frac{k}{(2m)^{1/(4m)}}\,(-\ln \phi(\varepsilon))^{\frac{m-1}{3m-2}-\frac{1}{4m}} \to \infty \quad \text{kada} \quad \varepsilon \to 0,\end{aligned}$$

pri čemu je k pozitivna konstanta. Dakle, $T(\varepsilon) \gg \overline{T}(\varepsilon)$ za svako dovoljno malo ε.

Međutim, potrebno je u potpunosti opravdati opredeljenje da se za izračunavanje intervala na kome su rešenja posmatranih jednačina bliska u smislu momenta $(2m)$-tog reda, a čija dužina teži beskonačnosti kada mali parametar teži nuli, koristi Itova formula diferenciranja, a ne direktna metoda. Zbog toga je neophodno dokazati da je na intervalu $[0, \overline{T}(\varepsilon)]$ brzina konvergencije za $\sup E|x_t^\varepsilon - x_t|^{2m}$, kada ε teži nuli, mnogo veća ako se $\sup E|x_t^\varepsilon - x_t|^{2m}$ ocenjuje primenom Itove formule diferenciranja. Zatim treba pokazati da to važi i na intervalu $[0, T(\varepsilon)]$, jer je $[0, \overline{T}(\varepsilon)] \subset [0, T(\varepsilon)]$, čime je dobijen potreban i dovoljan uslov da se koristi ocena (2.2.20) umesto (2.2.47) kada su vremenski intervali beskonačni.

S obzirom da važi ocena (2.2.32) dobijena primenom Itove formule diferenciranja, sledi da je

$$\sup_{t\in[0,\overline{T}(\varepsilon)]} E|x_t^\varepsilon - x_t|^{2m} \le (\phi(\varepsilon))^m e^{f(\overline{T}(\varepsilon))}\theta(\overline{T}(\varepsilon)),$$

pri čemu je

$$\begin{aligned}f(\overline{T}(\varepsilon)) &= d_1\,(\overline{T}(\varepsilon))^{\frac{3m-2}{m-1}} + (b_1+b_2)\,(\overline{T}(\varepsilon))^2 + d_3\,(\overline{T}(\varepsilon))^{\frac{3m-2}{2m-1}} + d_4\,\overline{T}(\varepsilon) + d_5\,(\overline{T}(\varepsilon))^{\frac{3}{2}},\\ \theta(\overline{T}(\varepsilon)) &= \Big(h_1\,(\overline{T}(\varepsilon))^3 + h_2\,(\overline{T}(\varepsilon))^2 + h_3\,(\overline{T}(\varepsilon))^{\frac{3}{2}} + h_4\,\overline{T}(\varepsilon) + h_5\Big)^m,\end{aligned}$$

$d_i, k_i,\ i = 1, \cdots, 5$ su pozitivne konstante, dok je $\phi(\varepsilon)$ definisano sa (2.2.33). Pritom

$$R(\varepsilon) = (\phi(\varepsilon))^m e^{f(\overline{T}(\varepsilon))}\theta(\overline{T}(\varepsilon))$$

predstavlja grešku aproksimacije perturbovane jednačine (2.2.14) neperturbovanom (2.2.15) u smislu momenta $(2m)$-tog reda na intervalu $[0, \overline{T}(\varepsilon)]$. Istovremeno, primenom direktne metode dobijena je ocena (2.2.47), na osnovu koje se takođe može proceniti greška aproksimacije na istom intervalu $[0, \overline{T}(\varepsilon)]$. Neka je greška te aproksimacije označena sa

$$\overline{R}(\varepsilon) = (\overline{\phi}(\varepsilon))^{1-\overline{r}}\, P_4(\overline{T}^m(\varepsilon)).$$

U tom slučaju je

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{R}(\varepsilon)}{R(\varepsilon)} &= \frac{(\overline{\phi}(\varepsilon))^{1-\overline{r}} P_4(\overline{T}^m(\varepsilon))}{(\phi(\varepsilon))^m e^{f(\overline{T}(\varepsilon))}\theta(\overline{T}(\varepsilon))}\\
&\geq \frac{(\overline{\phi}(\varepsilon))^{1-\overline{r}}}{(\overline{\phi}(\varepsilon))^{\frac{1}{2}}} e^{-f(\overline{T}(\varepsilon))}\frac{P_4(\overline{T}^m(\varepsilon))}{\theta(\overline{T}(\varepsilon))} \quad \text{(na osnovu relacije (2.2.50))}\\
&\geq k\frac{(\overline{T}(\varepsilon))^m(\overline{\phi}(\varepsilon))^{\frac{1}{2}-\overline{r}}}{(\overline{T}(\varepsilon))^{3m}e^{f(\overline{T}(\varepsilon))}} \quad \text{(na osnovu oblika polinoma } P_4(\overline{T}^m(\varepsilon)) \text{ i } \theta(\overline{T}(\varepsilon)))\\
&\geq k\frac{e^{-c(\frac{1}{2}-\overline{r})(\overline{T}(\varepsilon))^{4m}}}{(\overline{T}(\varepsilon))^{2m}} e^{-A(\overline{T}(\varepsilon))^{\frac{3m-2}{m-1}}} \quad \text{(na osnovu (2.2.48))}\\
&\to \infty \text{ kada } \varepsilon \to 0, \text{ u slučaju da } \overline{r} > \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

gde je k neka generisana konstanta. Dakle, $\overline{R}(\varepsilon) \gg R(\varepsilon)$ na intervalu $[0, \overline{T}(\varepsilon)]$, za svako dovoljno malo ε i proizvoljno $\overline{r} \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

Pošto na intervalu $[0, T(\varepsilon)]$ važi ocena (2.2.41), greška aproksimacije rešenja x_t^ε rešenjem x_t je

$$R_1(\varepsilon) = (\phi(\varepsilon))^{m(1-r)}\, \theta(T(\varepsilon)).$$

Tada

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{R}(\varepsilon)}{R_1(\varepsilon)} &= \frac{(\overline{\phi}(\varepsilon))^{1-\overline{r}} P_4(\overline{T}^m(\varepsilon))}{(\phi(\varepsilon))^{m(1-r)}\theta(T(\varepsilon))}\\
&\geq c\,\frac{(\overline{\phi}(\varepsilon))^{2m(1-\overline{r})}}{(\overline{\phi}(\varepsilon))^{m(1-r)}}\cdot\frac{P_4(\overline{T}^m(\varepsilon))}{\theta(T(\varepsilon))} \quad \text{(na osnovu relacije (2.2.50))}\\
&\geq c_1\,\frac{(\overline{T}(\varepsilon))^m}{(T(\varepsilon))^{3m}}\cdot(\overline{\phi}(\varepsilon))^{m(1+r-2\overline{r})} \quad \text{(na osnovu oblika polinoma } P_4(\overline{T}^m(\varepsilon)) \text{ i } \theta(\overline{T}(\varepsilon)))\\
&\sim c_2\cdot(\overline{\phi}(\varepsilon))^{m(1+r-2\overline{r})}\frac{\big(-\ln\overline{\phi}(\varepsilon)\big)^{1/4}}{\big(-\ln\phi(\varepsilon)\big)^{3m(m-1)/(3m-2)}} \quad \text{(na osnovu (2.2.35) i (2.2.48))}\\
&\geq c_3\,(\overline{\phi}(\varepsilon))^{m(1+r-2\overline{r})}\cdot\frac{\big(-\ln\overline{\phi}(\varepsilon)\big)^{1/4}}{\big(-\ln\overline{\phi}(\varepsilon)\big)^{3m(m-1)/(3m-2)}} \quad \text{(na osnovu (2.2.50))}\\
&= c_3\,\frac{(\overline{\phi}(\varepsilon))^{m(1+r-2\overline{r})}}{\big(-\ln\overline{\phi}(\varepsilon)\big)^{3m(m-1)/(3m-2)-1/4}}\\
&\to \infty, \text{ kada } \varepsilon \to 0, \text{ kada je } \overline{r} > \frac{1}{2} \text{ i } r < 2\overline{r}-1,
\end{aligned}$$

tako da $\overline{R}(\varepsilon) \gg R(\varepsilon)$ za svako dovoljno malo ε, proizvoljno $\overline{r} \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ i svako $r \in (0,1)$ za koje je $r < 2\overline{r} - 1$.

Zbog činjenice da primena Itove formule za stohastičko diferenciranja daje bolje rezultate, tj. veće vremenske intervale na kojima su rešenja posmatranih jednačina bliska u smislu momenta (2m)-tog reda, a manju grešku aproksimacije, u daljem radu će biti primenjivana isključivo ova metoda.

2.3. Linearno perturbovane stohastičke diferencijalne jednačine

U ovom poglavlju su razmatrane stohastičke diferencijalne jednačine Itoa i opše stohastičke integrodiferencijalne jednačine Itoa, čiji su koeficijenti linearno perturbovani, tj. izraženi su kao linearne kombinacije perturbacija i koeficijenata prenosa, odnosno difuzije, odgovarajuće neperturbovane jednačine istog tipa. Kao u slučaju aditivno perturbovanih jednačina, dati su uslovi bliskosti rešenja perturbovane i odgovarajuće neperturbovane jednačine istog tipa u smislu momenta $(2m)$-tog reda, kako na konačnim fiksiranim intervalima, tako i na intervalima čija dužina teži beskonačnosti kada mali parametar teži nuli. Pored toga dokazano je da su linearne perturbovane jednačine opštije od aditivnih i da se generalno ne mogu svesti na njih. Rezultati Poglavlja 2.3.1 su objavljeni u radu Sv. Janković, M. Jovanović, [28], 2000, a Poglavlja 2.3.2 su prihvaćeni za štampu kao rad Sv. Janković, M. Jovanović, [37].

2.3.1. Linearno perturbovane stohastičke diferencijalne jednačine

Neka je data stohastička diferencijalna jednačina Itoa oblika (1.4.1), sa svim osobinama definisanim u Poglavlju 1.4. Uporedo sa tom jednačinom u integralnom obliku,

$$x_t = \eta + \int_0^t a(s,x_s)ds + \int_0^t b(s,x_s)dw_s, \quad t \in [0,T], \tag{2.3.1}$$

posmatrana je jednačina

$$\begin{aligned} x_t^\varepsilon = \eta^\varepsilon \quad &+ \quad \int_0^t \left[\alpha_1(s,x_s^\varepsilon,\varepsilon)\, a(s,x_s^\varepsilon) + \alpha_2(s,x_s^\varepsilon,\varepsilon)\right] ds \\ &+ \quad \int_0^t \left[\beta_1(s,x_s^\varepsilon,\varepsilon)\, b(s,x_s^\varepsilon) + \beta_2(s,x_s^\varepsilon,\varepsilon)\right] dw_s, \quad t \in [0,T], \end{aligned} \tag{2.3.2}$$

u kojoj je ε *mali parametar* iz intervala $(0,1)$, a početna vrednost η^ε, koja zadovoljava uslov $E|\eta^\varepsilon|^{2m} < \infty$, nezavisna je od Brownovog kretanja w, dok su $\alpha_i : [0,T] \times R \to R$ i $\beta_i : [0,T] \times R \to R$, $i = 1,2$ date funkcije koje zavise od ε.

Za jednačinu (2.3.1) se pretpostavlja da zadovoljava uslove teoreme egzistencije i jedinstvenosti rešenja (Teorema 1.4.1), dakle $E|\eta|^{2m} < \infty$, (1.4.3) i (1.4.4), dok jednačina (2.3.2) može zadovoljavati različite uslove egzistencije i jedinstvenosti rešenja. Pored toga, neka skoro izvesno neprekidna rešenja tih jednačina zadovoljavaju uslove $E\sup_{t\in[0,T]}|x_t|^{2m} < \infty$ i $E\sup_{t\in[0,T]}|x_t^\varepsilon|^{2m} < \infty$.

Pretpostavimo da postoji neslučajna vrednost $\delta_0(\cdot)$, takva da je

$$E|\eta^\varepsilon - \eta|^{2m} \le \delta_0(\varepsilon), \tag{2.3.3}$$

i neprekidne funkcije $\delta_i(\cdot)$ i $\gamma_i(\cdot)$, $i = 1, 2$, definisane na intervalu $[0, T]$, zavisne od ε i takve da je

$$\begin{aligned} &\sup_{x \in R} |\alpha_1(t, x, \varepsilon) - 1| \le \delta_1(t, \varepsilon), \quad \sup_{x \in R} |\alpha_2(t, x, \varepsilon)| \le \delta_2(t, \varepsilon), \\ &\sup_{x \in R} |\beta_1(t, x, \varepsilon_2) - 1| \le \gamma_1(t, \varepsilon), \quad \sup_{x \in R} |\beta_2(t, x, \varepsilon)| \le \gamma_2(t, \varepsilon). \end{aligned} \tag{2.3.4}$$

Naravno, ako su vrednosti $\delta_0(\varepsilon), \delta_i(t, \varepsilon), \gamma_i(t, \varepsilon)$ male za malo ε, tada se može očekivati da rešenja x_t i x_t^ε budu bliska u nekom smislu. Slično kao u prethodnim poglavljima, odnosno, po uzoru na radove [29], [34], [40], a pre svih [75], funkcije $\alpha_i(\cdot)$ i $\beta_i(\cdot)$ se zovu *perturbacije*, pri čemu se jednačina (2.3.2) logično zove *perturbovana jednačina* u odnosu na *neperturbovanu jednačinu* (2.3.1).

Perturbacije koje se ovde javljaju predstavljaju uopštenje onih perturbacija koje su posmatrane u radu [75] i svode se na njih za $\alpha_1(\cdot) \equiv 1$, $\beta_1(\cdot) \equiv 1$. Ako je $\alpha_1(t, x, \varepsilon) = 1 + \nu(t, x, \varepsilon)$, tada je $|\nu(t, x, \varepsilon)\, a(t, x)| \le \delta_1(t, \varepsilon)\, |a(t, x)|$, što u opštem slučaju ne mora da bude ograničeno po $x \in R$. Jasno, ovaj slučaj može biti tretiran kao onaj u radu [75] samo ako je $\sup_{x \in R} |\nu(t, x, \varepsilon)\, a(t, x)| \le \delta_3(t, \varepsilon)$ za proizvoljnu neprekidnu funkciju $\delta_3(\cdot)$, što predstavlja veoma strog zahtev u odnosu na uslov ograničenog rasta (1.4.4). Naravno, analogno važi i za $\beta_1(\cdot)$.

S obzirom da je potrebno dobiti globalnu ocenu bliskosti rešenja x i x^ε jednačina (2.3.1) i (2.3.2) u smislu momenta $(2m)$-tog reda, postupak koji će biti korišćen je delimično sličan onom iz radova [75] i [40], ali različit od [29].

Propozicija 2.3.1. (Sv. Janković, M. Jovanović, [28], 2000.) *Neka su x i x^ε rešenja jednačina (2.3.1) i (2.3.2) respektivno, definisana na konačnom intervalu $[0, T]$, i neka su zadovoljeni uslovi (1.4.3), (1.4.4), (2.3.3) i (2.3.4). Tada, za svako $t \in [0, T]$,*

$$E|x_t^\varepsilon - x_t|^{2m} \le \left[(\nu(T))^{1/m} \exp\Big\{ \frac{1}{m} \int_0^t \xi(s)\, ds \Big\} + \frac{1}{m} \int_0^t \theta(s) \exp\Big\{ \frac{1}{m} \int_s^t \xi(r)\, dr \Big\} ds \right]^m, \tag{2.3.5}$$

gde je

$$\begin{aligned} \nu(t) &= \delta_0(\varepsilon) + c \int_0^t [\delta_1(s, \varepsilon) + 3(2m-1)\, \gamma_1^2(s, \varepsilon)]\, e^{c_1 s}\, ds \\ \xi(t) &= (2m-1)\, \delta_1(t, \varepsilon) + 2m\, \delta_2(t, \varepsilon) + 3(m-1)(2m-1)\, \gamma_1^2(t, \varepsilon) \\ &\quad + 2mL + 3m(2m-1)L^2 \\ \theta(t) &= 2m\, \delta_2(t, \varepsilon) + 3m(2m-1)\, \gamma_2^2(t, \varepsilon), \end{aligned} \tag{2.3.6}$$

a c i c_1 su generisane pozitivne konstante koje ne zavise od ε i T.

Dokaz. Ako se uvedu oznake $z_t^\varepsilon = x_t^\varepsilon - x_t$, $\Delta_t^\varepsilon = E|x_t^\varepsilon - x_t|^{2m}$ i od jednačine (2.3.2) oduzme jednačina (2.3.1), a zatim primeni Itova formula za stohastičko diferenciranje na $(z_t^\varepsilon)^{2m}$ dobiće se (2.1.8), gde je

$$\begin{aligned}
I_1(t) &= \int_0^t [\alpha_1(s,x_s^\varepsilon,\varepsilon)\, a(s,x_s^\varepsilon) + \alpha_2(s,x_s^\varepsilon,\varepsilon)]\,(z_s^\varepsilon)^{2m-1}\,ds,\\
I_2(t) &= \int_0^t [\beta_1(s,x_s^\varepsilon,\varepsilon)\, b(s,x_s^\varepsilon) + \beta_2(s,x_s^\varepsilon,\varepsilon)]^2\,(z_s^\varepsilon)^{2m-2}\,ds,\\
I_3(t) &= \int_0^t [\beta_1(s,x_s^\varepsilon,\varepsilon)\, b(s,x_s^\varepsilon) + \beta_2(s,x_s^\varepsilon,\varepsilon)]\,(z_s^\varepsilon)^{2m-1}\,dw_s.
\end{aligned}$$

Pošto je $EI_3(t) = 0$ za $t \in [0,T]$, tada je

$$\Delta_t^\varepsilon = \Delta_0^\varepsilon + 2mEI_1(t) + m(2m-1)EI_2(t), \quad t \in [0,T]. \tag{2.3.7}$$

Potrebno je oceniti članove $EI_1(t)$ i $EI_2(t)$. Tako, primenom pretpostavke (2.3.4) i Lipschitzovog uslova (1.4.3), sledi

$$\begin{aligned}
EI_1(t) &\le E\int_0^t |\alpha_1(s,x_s^\varepsilon,\varepsilon) - 1|\cdot|a(s,x_s^\varepsilon)|\cdot|z_s^\varepsilon|^{2m-1}ds + L\int_0^t \Delta_s^\varepsilon\,ds\\
&\quad + E\int_0^t |\alpha_2(s,x_s^\varepsilon,\varepsilon)|\cdot|z_s^\varepsilon|^{2m-1}ds\\
&\le \int_0^t \delta_1(s,\varepsilon)\,E\{|a(s,x_s^\varepsilon)|\cdot|z_s^\varepsilon|^{2m-1}\}ds + L\int_0^t \Delta_s^\varepsilon\,ds + \int_0^t \delta_2(s,\varepsilon)\,E|z_s^\varepsilon|^{2m-1}ds.
\end{aligned}$$

Primenom elementarne nejednakosti (1.8.4) a zatim i Hölderove nejednakosti na prvi i treći član, uzimajući da je u oba slučaja $p = 2m/(2m-1)$, sledi

$$\begin{aligned}
EI_1(t) &\le \int_0^t \delta_1(s,\varepsilon)\left(\frac{2m-1}{2m}\,\Delta_s^\varepsilon + \frac{1}{2m}\,E|a(s,x_s^\varepsilon)|^{2m}\right)ds + L\int_0^t \Delta_s^\varepsilon\,ds\\
&\quad + \int_0^t \delta_2(s,\varepsilon)\,(\Delta_s^\varepsilon)^{\frac{2m-1}{2m}}\,ds.
\end{aligned}$$

Na osnovu (1.4.4) i (1.4.5) dobija se

$$\begin{aligned}
E|a(s,x_s^\varepsilon)|^{2m} &\le L^{2m}E(1+|x_s^\varepsilon|^2)^m\\
&\le L^{2m}2^{m-1}(1+E|\eta^\varepsilon|^{2m})\,e^{c_1 s}.
\end{aligned}$$

Neka je $L^{2m}2^{m-1}(1+E|\eta^\varepsilon|^{2m}) = c$. Tada je

$$\begin{aligned}
EI_1(t) &\le \frac{c}{2m}\int_0^t \delta_1(s,\varepsilon)\,e^{c_1 s}ds + \int_0^t \left(\frac{2m-1}{2m}\,\delta_1(s,\varepsilon) + L\right)\Delta_s^\varepsilon\,ds\\
&\quad + \int_0^t \delta_2(s,\varepsilon)\,(\Delta_s^\varepsilon)^{\frac{2m-1}{2m}}\,ds.
\end{aligned} \tag{2.3.8}$$

Za ocenu člana $EI_2(t)$ koristi se prethodni postupak i Hölderova nejednakost za $p = m/(m-1)$. Tada je

$$EI_2(t) \le 3E\int_0^t |\beta_1(s,x_s^\varepsilon,\varepsilon) - 1|^2\cdot|b(s,x_s^\varepsilon)|^2\cdot|z_s^\varepsilon|^{2m-2}ds \tag{2.3.9}$$

$$
\begin{aligned}
& +3L^2 \int_0^t \Delta_s^\varepsilon\, ds + 3E \int_0^t |\beta_2(s, x_s^\varepsilon, \varepsilon)|^2 \cdot |z_s^\varepsilon|^{2m-2} ds \\
\leq\ & \frac{3c}{m} \int_0^t \gamma_1^2(s,\varepsilon)\, e^{c_1 s} ds + 3 \int_0^t \left(\frac{m-1}{m}\, \gamma_1^2(s,\varepsilon) + L^2 \right) \Delta_s^\varepsilon\, ds \\
& +3 \int_0^t \gamma_2^2(s,\varepsilon)\, (\Delta_s^\varepsilon)^{\frac{m-1}{m}} ds.
\end{aligned}
$$

Relacija (2.3.7) zajedno sa (2.3.3), (2.3.8) i (2.3.9) implicira

$$
\begin{aligned}
\Delta_t^\varepsilon \ \leq\ & \delta_0(\varepsilon) + c \int_0^t [\delta_1(s,\varepsilon) + 3(2m-1)\gamma_1^2(s,\varepsilon)]\, e^{c_1 s} ds \\
& + \int_0^t [(2m-1)\delta_1(s,\varepsilon) + 3(m-1)(2m-1)\gamma_1^2(s,\varepsilon) + 2mL + 3m(2m-1)L^2]\, \Delta_s^\varepsilon\, ds \\
& +2m \int_0^t \delta_2(s,\varepsilon)\, (\Delta_s^\varepsilon)^{\frac{2m-1}{2m}} ds + 3m(2m-1) \int_0^t \gamma_2^2(s,\varepsilon)\, (\Delta_s^\varepsilon)^{\frac{m-1}{m}} ds.
\end{aligned}
$$

Pošto važi elementarna nejednakost (1.8.5), ako se stavi $a = \Delta_s^\varepsilon$, $r_1 = (m-1)/m$, $r_2 = (2m-1)/2m$, sledi da je $(\Delta_s^\varepsilon)^{(2m-1)/2m} \leq (\Delta_s^\varepsilon)^{(m-1)/m} + \Delta_s^\varepsilon$. Tada poslednja nejednakost postaje

$$
\Delta_t^\varepsilon \leq \nu(t) + \int_0^t \xi(s)\, \Delta_s^\varepsilon\, ds + \int_0^t \theta(s)\, (\Delta_s^\varepsilon)^{(m-1)/m} ds, \quad t \in [0,T], \tag{2.3.10}
$$

gde su funkcije $\nu(t)$, $\xi(t)$ i $\theta(t)$ definisane sa (2.3.6).

Da bi se ocenilo Δ_t^ε, potrebno je primeniti neku integralnu nejednakost. S obzirom da je $\nu(t)$ neopadajuća funkcija po $t \in [0,T]$, uzimajući $\nu(T)$ umesto $\nu(t)$ u (2.3.10), relacija (2.3.10) je oblika (1.8.8), pri čemu je $u(t) = \Delta_t^\varepsilon$, $\gamma = (m-1)/m$, pa se primenom verzije nejednakosti Gronwall-Bellmana direktno dobija ocena (2.3.5). Time je dokaz završen. □

Kako su perturbacije ograničene u smislu (2.3.3) i (2.3.4), ako se pretpostavi da vrednosti $\delta_0(\cdot), \delta_i(\cdot), \gamma_i(\cdot), i = 1,2$ teže nuli kada $\varepsilon \to 0$, može se očekivati da rešenja x i x^ε budu bliska u smislu momenta $(2m)$-tog reda. Tako su u radu [75] slični problemi razmatrani za specijalne tipove perturbacija $\alpha_2(\cdot), \beta_2(\cdot)$, specijalno izabrano η^ε i za $\alpha_1(\cdot) \equiv 1, \beta_1(\cdot) \equiv 1$.

Analognim teoremama iz prethodnih poglavlja, iskazuju se sledeća tvrđenja:

Teorema 2.3.1. (Sv. Janković, M. Jovanović, [28], 2000.) *Neka su zadovoljeni uslovi Propozicije 2.3.1 i neka funkcije $\delta_0(\cdot)$, $\delta_i(\cdot)$, $\gamma_i(\cdot)$, $i = 1,2$ monotono teže nuli kada $\varepsilon \to 0$, uniformno na $[0,T]$. Tada*

$$
\sup_{t\in[0,T]} E|x_t^\varepsilon - x_t|^{2m} \to 0 \quad \text{kada} \quad \varepsilon \to 0.
$$

Dokaz. Neka je

$$
\overline{\delta}_i(\varepsilon) \sup_{t\in[0,T]} \delta_i(t,\varepsilon), \quad \overline{\gamma}_i(\varepsilon) = \sup_{t\in[0,T]} \gamma_i(t,\varepsilon), \quad i = 1,2
$$

i

$$
\phi(\varepsilon) = \max\{\delta_0(\varepsilon),\, \overline{\delta}_i(\varepsilon),\, \overline{\gamma}_i^2(\varepsilon),\, i = 1,2\}. \tag{2.3.11}
$$

Tada, na osnovu (2.3.5) i (2.3.6) sledi

$$(2.3.12)\quad (\Delta_t^\varepsilon)^{1/m} \le (\phi(\varepsilon))^{1/m}\left[1 + c(6m-2)\frac{e^{c_1 t}-1}{c_1}\right]^{1/m} \cdot e^{c_2 t} + \phi(\varepsilon)(6m-1)\frac{e^{c_2 t}-1}{c_2}$$

gde je $c_2 = [4m - 1 + 2L + 2(2m-1)L^2 + 3(m-1)(2m-1)\rho]/m$ i ρ je konstanta za koju je $\phi(\varepsilon) \le \rho$ za $\varepsilon \in (0,1)$. Ako je T konačno i $\phi(\varepsilon) \to 0$ kada $\varepsilon \to 0$, sledi da $\sup_{t\in[0,T]} \Delta_t^\varepsilon \to 0$ kada $\varepsilon \to 0$. $\square$

Ako se pretpostavi da postoje jedinstvena rešenja x i x^ε jednačina (2.3.1) i (2.3.2) respektivno, definisana na $[0,\infty)$, tada prethodna tvrđenja generalno ne važe. Cilj ovog proučavanja je isti kao i za slučaj aditivno perturbovanih jednačina, dakle, konstrukcija konaňih vremenskih intervala koji zavise od ε i čija dužina teži beskonačnosti kada ε teži nuli, tako da rešenja x_t^ε i x_t budu bliska u smislu momenta $(2m)$-tog reda na tim intervalima.

Teorema 2.3.2. (Sv. Janković, M. Jovanović, [28], 2000.) *Neka su zadovoljeni uslovi Teoreme 2.3.1 za $t \in [0,\infty)$ i neka su funkcije $\delta_i(\cdot), \gamma_i(\cdot), i = 1,2$ ograničene na $[0,\infty)$. Tada, za proizvoljan broj $r \in (0,1)$ i ε dovoljno malo, postoji broj $T(\varepsilon) > 0$, takav da je*

$$(2.3.13)\qquad T(\varepsilon) = -\frac{r}{c_1 + mc_2}\ln\phi(\varepsilon),$$

gde je $\phi(\varepsilon)$ dato sa (2.3.11), a c_1, c_2 su generisane pozitivne konstante, tako da

$$\sup_{t\in[0,T(\varepsilon)]} E|x_t^\varepsilon - x_t|^{2m} \to 0 \quad \text{kada} \quad \varepsilon \to 0.$$

Dokaz. Osnovna ideja u ovom dokazu je staviti $T = T(\varepsilon)$ i definisati $T(\varepsilon)$ na osnovu (2.3.12), tako da $\sup_{t\in[0,T(\varepsilon)]}(\Delta_t^\varepsilon)^{1/m} \to 0$ kada $\varepsilon \to 0$.

S obzirom da $\phi(\varepsilon) \to 0$ kada $\varepsilon \to 0$, postoji $\overline{\varepsilon} \in (0,1)$ tako da je $\phi(\varepsilon) < 1$ za $\varepsilon < \overline{\varepsilon}$. Pošto je $[0, T(\varepsilon)]$ konačan vremenski interval, primenom Teoreme 2.3.1 može se oceniti bliskost rešenja x i x^ε na tom intervalu. Primenom elementarne nejednakosti (1.8.2), na osnovu (2.3.12), sledi da je

$$\sup_{t\in[0,T(\varepsilon)]} (\Delta_t^\varepsilon)^{1/m} \le (\phi(\varepsilon))^{1/m}[q_1 + q_2 e^{c_1/m\cdot T(\varepsilon)}]\cdot e^{c_2 T(\varepsilon)} + \phi(\varepsilon)\,[q_3 + q_4\, e^{c_2 T(\varepsilon)}],$$

gde su $q_i, i = \overline{1,4}$ neke pozitivne konstante koje ne zavise od ε i $T(\varepsilon)$. Sada se može izračunati $T(\varepsilon)$ u odnosu na $\phi(\varepsilon)$ tako da član sa najvećom vrednošću sa desne strane prethodne nejednakosti teži nuli kada $\varepsilon \to 0$. Zaista, ako se uzme da je

$$(c_1/m + c_2)T(\varepsilon) = -r/m \cdot \ln\phi(\varepsilon)$$

za proizvoljan broj $r \in (0,1)$ i $\varepsilon < \overline{\varepsilon}$, dobija se $T(\varepsilon)$ u obliku (2.3.13).

Za $T(\varepsilon)$ izabrano na taj način, lako je zaključiti da $T(\varepsilon) \to \infty$ kada $\varepsilon \to 0$ i

$$(2.3.14)\quad \sup_{t\in[0,T(\varepsilon)]} (\Delta_t^\varepsilon)^{1/m} \le q_1\,(\phi(\varepsilon))^{1/m} + q_2\,(\phi(\varepsilon))^{(1-r)/m} + q_3\,\phi(\varepsilon) + q_4\,(\phi(\varepsilon))^{(c_1+c_2(m-r))/(c_1+mc_2)} \to 0 \quad \text{kada} \quad \varepsilon \to 0,$$

čime je dokaz kompletan. $\square$

Primer 2.3.1. Neka je data sledeća perturbovana jednačina

$$dx_t^\varepsilon = (ax_t^\varepsilon + \varepsilon \sin x_t^\varepsilon)\, dt + bx_t^\varepsilon\, e^{\varepsilon/(1+t+|x_t^\varepsilon|)} dw_t, \quad x_0^\varepsilon = \eta + \varepsilon, \quad t \geq 0, \tag{2.3.15}$$

u kojoj su a, b neslučajne konstante i $E|\eta|^{2m} < \infty$. Njeno rešenje se upoređuje sa rešenjem odgovarajuće linearne jednačine

$$dx_t = ax_t\, dt + bx_t\, dw_t, \quad x_0 = \eta, \quad t \geq 0. \tag{2.3.16}$$

Pošto je $E|x_0^\varepsilon - x_0|^{2m} = \varepsilon^{2m}$, $|\varepsilon \sin x| < \varepsilon$, $\left|e^{\varepsilon/(1+t+|x|)} - 1\right| \leq e^\varepsilon - 1$, zadovoljeni su svi uslovi Teoreme 2.3.2 za $\phi(\varepsilon) = \max\{\varepsilon^{2m}, \varepsilon, (e^\varepsilon - 1)^2\} = \varepsilon$, gde je $\varepsilon < \varepsilon_0$, $(e^{\varepsilon_0} - 1)^2 = \varepsilon_0$, i $\phi(\varepsilon) \to 0$ kada $\varepsilon \to 0$. Na osnovu (2.3.13),

$$T(\varepsilon) = -\frac{2r}{c_1 + mc_2} \ln \varepsilon,$$

gde su c_1 i c_2 pozitivne konstante. Tada $\sup_{t\in[0,T(\varepsilon)]} E|x_t^\varepsilon - x_t|^{2m} \to 0$ kada $\varepsilon \to 0$. $\triangle$

Poznato je da je $E|x_t|^{2m} = |\eta|^{2m} e^{[a+(2m-1)/2\, b^2]\, t}, t \geq 0$ (videti, na primer, [4, 67]), tj. rešenje x_t linearne stohastičke diferencijalne jednačine (2.3.16) je eksponencijalno stabilno ako i samo ako je $a + (2m-1)/2\, b^2 < 0$. Pod tim uslovima rešenje x_t^ε perturbovane jednačine (2.3.15) se ponaša kao rešenje x_t odgovarajuće linearne jednačine, aproksimativno u smislu momenta $(2m)$-tog reda, kada mali parametar ε teži nuli.

Na osnovu nejednakosti (2.3.14) može se na intervalu $[0, T(\varepsilon)]$ odrediti brzina konvergencija rešenja x^ε ka rešenju x za kada ε teži nuli.

Početni uslov i perturbacije $\alpha_i(\cdot), \beta_i(\cdot), i = 1, 2$ mogu zavisiti od različitih malih parametara $\varepsilon_i, i = \overline{0, 4}$. Ako su perturbacije monotone funkcije po malim parametrima, tada važe svi prethodni zaključci ako se stavi da je $\varepsilon = \max\{\varepsilon_i, i = \overline{0, 4}\}$.

2.3.2. Linearno perturbovane opšte stohastičke integrodiferencijalne jednačine

U ovom poglavlju predmet proučavanja su problemi perturbacija opštih stohastičkih integrodiferencijalnih jednačina koje zavise od malog parametra $\varepsilon \in (0, 1)$, oblika

$$\begin{aligned} dx_t^\varepsilon &= \tilde{F}\Big(t, x_t^\varepsilon, \int_0^t \tilde{f}_1(t, s, x_s^\varepsilon, \varepsilon)\, ds, \int_0^t \tilde{f}_2(t, s, x_s^\varepsilon, \varepsilon)\, dw_s, \varepsilon\Big)\, dt \\ &\quad + \tilde{G}\Big(t, x_t^\varepsilon, \int_0^t \tilde{g}_1(t, s, x_s^\varepsilon, \varepsilon)\, ds, \int_0^t \tilde{g}_2(t, s, x_s^\varepsilon, \varepsilon)\, dw_s, \varepsilon\Big)\, dw_t, \\ x_0^\varepsilon &= \eta^\varepsilon \quad \text{skoro izvesno.} \end{aligned} \tag{2.3.17}$$

Zajedno sa jednačinom (2.3.17) posmatrana je jednačina (1.6.1) istog tipa, pri čemu važe sve pretpostavke o funkcijama i početnom uslovu jednačine (1.6.1) navedene u Poglavlju 1.6. Iste pretpostavke važe za početni uslov η^ε i slučajne funkcije $\tilde{f}_i, \tilde{g}_i, i = 1, 2, \tilde{F}, \tilde{G}$ jednačine (2.3.17).

Ako se pretpostavi da su početna vrednost η^ε i slučajne funkcije $\tilde{F}, \tilde{G}, \tilde{f}_i, \tilde{g}_i$ bliske u nekom smislu sa η, F, G, f_i, g_i respektivno, tada se može očekivati da rešenja x_t^ε i x_t budu bliska u istom smislu. U ovom poglavlju će, kao i u Poglavlju 2.2.2, biti reči o bliskosti pomenutih rešenja u smislu momenta $(2m)$-tog reda. Pri tome je oblik perturbacija generalizacija onih perturbacija koje se javljaju u radu [75], kao i u [40], dok su slični problemi razmatrani u prethodnom poglavlju, ali za mnogo jednostavniji slučaj, za stohastičku diferencijalnu jednačinu Itoa. Pri tome, jednačina (2.3.17) se može smatrati perturbovanom jednačinom u odnosu na neperturbovanu jednačinu (1.6.1).

Posmatra se specijalan oblik jednačine (2.3.17) u odnosu na jednačinu (1.6.1). Pretpostavlja se da postoje neslučajne funkcije $\alpha_i, \alpha_{ii}, \beta_i, \beta_{ii}, i = 1,2$ definisane na $J \times R$ sa vrednostima u R koje zavise od ε, tako da je

$$\begin{aligned}\tilde{f}_i(t,s,x,\varepsilon) &= \alpha_i(t,s,x,\varepsilon)\, f_i(t,s,x) + \alpha_{ii}(t,s,x,\varepsilon), \quad i = 1,2,\\ \tilde{g}_i(t,s,x,\varepsilon) &= \beta_i(t,s,x,\varepsilon)\, g_i(t,s,x) + \beta_{ii}(t,s,x,\varepsilon), \quad i = 1,2.\end{aligned}$$

Zbog jednostavnijeg zapisa, uvedimo sledeće oznake:

$$\begin{aligned}\tilde{A}_1 x_t^\varepsilon &= \int_0^t \tilde{f}_1(t,s,x_s^\varepsilon,\varepsilon)\, ds, & \tilde{A}_2 x_t^\varepsilon &= \int_0^t \tilde{f}_2(t,s,x_s^\varepsilon,\varepsilon)\, dw_s,\\ \tilde{B}_1 x_t^\varepsilon &= \int_0^t \tilde{g}_1(t,s,x_s^\varepsilon,\varepsilon)\, ds, & \tilde{B}_2 x_t^\varepsilon &= \int_0^t \tilde{g}_2(t,s,x_s^\varepsilon,\varepsilon)\, dw_s,\\ \overline{F} x_t^\varepsilon &= F(t, x_t^\varepsilon, \tilde{A}_1 x_t^\varepsilon, \tilde{A}_2 x_t^\varepsilon), & \overline{G} x_t^\varepsilon &= G(t, x_t^\varepsilon, \tilde{B}_1 x_t^\varepsilon, \tilde{B}_2 x_t^\varepsilon).\end{aligned}$$

Pretpostavimo da postoje i neslučajne funkcije $\alpha_3, \alpha_{33}, \beta_3, \beta_{33}$ definisane na $[0,T] \times R$ sa vrednostima u R, koje zavise od ε, tako da je

$$\begin{aligned}\tilde{F} x_t^\varepsilon &= \alpha_3(t, x_t^\varepsilon, \varepsilon)\, \overline{F} x_t^\varepsilon + \alpha_{ii}(t, x_t^\varepsilon, \varepsilon),\\ \tilde{G} x_t^\varepsilon &= \beta_3(t, x_t^\varepsilon, \varepsilon)\, \overline{G} x_t^\varepsilon + \beta_{ii}(t, x_t^\varepsilon, \varepsilon).\end{aligned}$$

Na osnovu uvedenih oznaka, jednačina (2.3.17) može biti predstavljena u kraćem integralnom obliku

$$x_t^\varepsilon = \eta^\varepsilon + \int_0^t \tilde{F} x_s^\varepsilon\, ds + \int_0^t \tilde{G} x_s^\varepsilon\, dw_s, \quad t \in [0,T]. \tag{2.3.18}$$

Slično, neka je

$$\begin{aligned}A_1 x_t &= \int_0^t f_1(t,s,x_s)\, ds, & A_2 x_t &= \int_0^t f_2(t,s,x_s)\, dw_s,\\ B_1 x_t &= \int_0^t g_1(t,s,x_s)\, ds, & B_2 x_t &= \int_0^t g_2(t,s,x_s)\, dw_s,\\ F x_t &= F(t, x_t, A_1 x_t, A_2 x_t), & G x_t &= G(t, x_t, B_1 x_t, B_2 x_t),\end{aligned}$$

tako da je kraći integralni oblika jednačine (1.6.1)

$$x_t = \eta + \int_0^t F x_s\, ds + \int_0^t G x_s\, dw_s, \quad t \in [0,T]. \tag{2.3.19}$$

Pretpostavimo sledeće:

$\mathcal{A}_1$. Neka postoji pozitivan ceo broj m i neslučajna vrednost $\delta_0(\varepsilon)$, tako da je $E|\eta|^{2m} < \infty$, $E|\eta^\varepsilon|^{2m} < \infty$ i

$$E|\eta^\varepsilon - \eta|^{2m} \leq \delta_0(\varepsilon).$$

$\mathcal{A}_2$. Neka postoje neslučajne vrednosti $\delta_i(\varepsilon), \delta_{ii}(\varepsilon), \gamma_i(\varepsilon), \gamma_{ii}(\varepsilon)$, $i = 1, 2, 3$, ograničene za $\varepsilon \in (0, 1)$, tako da je, za $i = 1, 2$,

$$\sup_{x\in R,(t,s)\in J} |\alpha_i(t, s, x, \varepsilon) - 1| \leq \delta_i(\varepsilon), \qquad \sup_{x\in R,(t,s)\in J} |\alpha_{ii}(t, s, x, \varepsilon)| \leq \delta_{ii}(\varepsilon),$$
$$\sup_{x\in R,(t,s)\in J} |\beta_i(t, s, x, \varepsilon) - 1| \leq \gamma_i(\varepsilon), \qquad \sup_{x\in R,(t,s)\in J} |\beta_{ii}(t, s, x, \varepsilon)| \leq \gamma_{ii}(\varepsilon),$$

i

$$\sup_{x\in R,t\in[0,T]} |\alpha_3(t, x, \varepsilon) - 1| \leq \delta_3(\varepsilon), \qquad \sup_{x\in R,t\in[0,T]} |\alpha_{33}(t, x, \varepsilon)| \leq \delta_{33}(\varepsilon),$$
$$\sup_{x\in R,t\in[0,T]} |\beta_3(t, x, \varepsilon) - 1| \leq \gamma_3(\varepsilon), \qquad \sup_{x\in R,t\in[0,T]} |\beta_{33}(t, x, \varepsilon)| \leq \gamma_{33}(\varepsilon).$$

$\mathcal{A}_3$. Neka postoje jedinstvena skoro izvesno neprekidna i neanticipativna rešenja x_t^ε i x_t jednačina (2.3.18) i (2.3.19) respektivno, koja zadovoljavaju uslove $E\{\sup_{t\in[0,T]} |x_t^\varepsilon|^{2m}\} < \infty$ i $E\{\sup_{t\in[0,T]} |x_t|^{2m}\} < \infty$. Smatra se da su svi Lebesguevi i Itovi integrali koji se ubuduće javljaju dobro definisani.

Pod navedenim pretpostavkama, jasno je da ako su vrednosti $\delta_0(\varepsilon), \delta_i(\varepsilon), \delta_{ii}(\varepsilon), \gamma_i(\varepsilon)$, $\gamma_{ii}(\varepsilon), i = 1, 2, 3$ male za malo ε, rešenja x_t^ε i x_t su bliska u nekom smislu. Slično kao u prethodnim razmatranjima i citiranim radovima, funkcije $\alpha_i(\cdot), \alpha_{ii}(\cdot), \beta_i(\cdot), \beta_{ii}(\cdot), i = 1, 2, 3$ se tretiraju kao *male perturbacije* u *perturbovanoj jednačini* (2.3.18), u odnosu na *neperturbovanu jednačinu* (2.3.19).

Ako su $\alpha_i(\cdot) \equiv \beta_i(\cdot) \equiv 1, i = 1, 2, 3$, tada se oblik perturbacija poklapa sa onim proučavanim u radu [40]. Naravno, problem koji se ovde proučava ne može se u potpunosti svesti na onaj proučavan u [40]. Na primer, ako je $\alpha_1(t, s, x, \varepsilon) = 1 + \nu_1(t, s, x, \varepsilon)$, tada je $|\nu_1(t, s, x, \varepsilon)\cdot f_1(t, s, x)| \leq \delta_1(\varepsilon)\cdot|f_1(t, s, x)|$, što u opštem slučaju ne mora da bude ograničeno u odnosu na $x \in R$.

Potrebno je dobiti globalnu ocenu bliskosti posmatranih rešenja na konačnom fiksiranom intervalu $[0, T]$.

Propozicija 2.3.2. (Sv. Janković, M. Jovanović, [37]) *Neka su x_t^ε i x_t rešenja jednačina (2.3.18) i (2.3.19) respektivno, definisana na konačnom intervalu $[0, T]$, neka važe pretpostavke $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3$ i uslovi (1.6.2) i (1.6.3). Neka je $\theta_t = \sup_{0\leq s\leq t} E|x_s|^{2m}$. Tada, za svako $t \in [0, T]$:*

(i) za $m > 1$,

$$E|x_t^\varepsilon - x_t|^{2m} \leq \left(\phi(\varepsilon)\cdot\xi(t)\cdot e^{\psi(t)}\right)^m, \tag{2.3.20}$$

gde je

$$\phi(\varepsilon) = \max\left\{\delta_0^{\frac{1}{m}}(\varepsilon), \delta_i(\varepsilon), \delta_{ii}(\varepsilon), \gamma_i^2(\varepsilon), \gamma_{ii}^2(\varepsilon), i = 1, 2, 3\right\}, \tag{2.3.21}$$

(2.3.22)
$$
\begin{aligned}
\psi(t) &= a_1 t + a_2 T t + a_3 t^2 + a_4 T^{\frac{3}{2}} + a_5 t^{\frac{3m-2}{2m-1}} + a_6 t^{\frac{3m-2}{m-1}} \\
&\quad + \theta_t^{\frac{1}{2m}} \left(a_7 t + a_8 t^2 + a_9 t^{\frac{3}{2}} \right) \\
\xi(t) &= b_1 + b_2 t + b_3 t^2 + b_4 t^3 + b_5 t^{\frac{3}{2}} + \theta_t^{\frac{1}{2m}} \left(b_6 t + b_7 t^2 + b_8 t^{\frac{3}{2}} \right) \\
&\quad + \theta_t^{\frac{1}{m}} \left(b_9 t + b_{10} t^2 + b_{11} t^3 \right)
\end{aligned}
$$

i $a_1, \dots, a_9, b_1, \dots, b_{11}$ su generisane pozitivne konstante koje ne zavise od ε i T;

(ii) za $m = 1$,

(2.3.23)
$$E|x_t^\varepsilon - x_t|^2 \le \phi(\varepsilon) \cdot [R_1(t) + R_2(t) \cdot \theta_t] \cdot e^{R_3(t)},$$

gde je

(2.3.24)
$$\phi(\varepsilon) = \max \left\{ \delta_0(\varepsilon), \delta_i^2(\varepsilon), \delta_{ii}^2(\varepsilon), \gamma_i^2(\varepsilon), \gamma_{ii}^2(\varepsilon), i = 1, 2, 3 \right\},$$

a $R_1(t), R_2(t), R_3(t)$ su polinomi stepena 4, koji ne zavise od ε i T.

Dokaz. (i) Neka je $m > 1$. Ako se uvedu oznake $z_t^\varepsilon = x_t^\varepsilon - x_t$ i $\Delta_t^\varepsilon = E|x_t^\varepsilon - x_t|^{2m}$ i oduzmu jednačine (2.3.18) i (2.3.19), posle primene Itove formule za stohastičko diferenciranje na $(z_t^\varepsilon)^{2m}$, dobija se (2.1.8), pri čemu je

$$
\begin{aligned}
I_1(t) &= \int_0^t (\tilde{F} x_s^\varepsilon - F x_s)\, (z_s^\varepsilon)^{2m-1}\, ds, \\
I_2(t) &= \int_0^t (\tilde{G} x_s^\varepsilon - G x_s)^2\, (z_s^\varepsilon)^{2m-2}\, ds, \\
I_3(t) &= \int_0^t (\tilde{G} x_s^\varepsilon - G x_s)\, (z_s^\varepsilon)^{2m-1}\, dw_s.
\end{aligned}
$$

Pošto je $EI_3(t) = 0$ za $t \in [0, T]$, tada je

(2.3.25)
$$\Delta_t^\varepsilon = \Delta_0^\varepsilon + 2mEI_1(t) + m(2m-1)EI_2(t), \quad t \in [0, T].$$

Član $EI_1(t)$ se može oceniti na sledeći način

(2.3.26)
$$
\begin{aligned}
EI_1(t) &= E \int_0^t [\, \alpha_3(s, x_s^\varepsilon, \varepsilon) \overline{F} x_s^\varepsilon + \alpha_{33}(s, x_s^\varepsilon, \varepsilon) - F x_s]\, (z_s^\varepsilon)^{2m-1} ds \\
&\le E \int_0^t [\, |\alpha_3(s, x_s^\varepsilon, \varepsilon)(\overline{F} x_s^\varepsilon - F x_s)| + |(\alpha_3(s, x_s^\varepsilon, \varepsilon) - 1) F x_s| \\
&\qquad + |\alpha_{33}(s, x_s^\varepsilon, \varepsilon)|\,]\, |z_s^\varepsilon|^{2m-1} ds.
\end{aligned}
$$

Analogno, primenom elementarne nejednakosti (1.8.1) dolazi se do izraza

(2.3.27)
$$
\begin{aligned}
EI_2(t) &= E \int_0^t [\, \beta_3(s, x_s^\varepsilon, \varepsilon) \overline{G} x_s^\varepsilon + \beta_{33}(s, x_s^\varepsilon, \varepsilon) - G x_s]^2\, (z_s^\varepsilon)^{2m-2} ds \\
&\le 3E \int_0^t [\, |\beta_3(s, x_s^\varepsilon, \varepsilon)(\overline{G} x_s^\varepsilon - G x_s)|^2 + |(\beta_3(s, x_s^\varepsilon, \varepsilon) - 1) G x_s|^2 \\
&\qquad + |\beta_{33}(s, x_s^\varepsilon, \varepsilon)|^2\,]\, |z_s^\varepsilon|^{2m-2} ds.
\end{aligned}
$$

Za konačne ocene integrala (2.3.26) i (2.3.27), zbog složenosti dokaz će biti dat postepeno, pomoću sledećih lema:

Lema 2.3.1.

$$\begin{aligned} &E\int_0^t |\alpha_3(s,x_s^\varepsilon,\varepsilon)(\overline{F}x_s^\varepsilon - Fx_s)|\cdot|z_s^\varepsilon|^{2m-1}ds \\ &\le L\rho\bigg\{\int_0^t\Big(1+\frac{QL\rho}{2m}[(1+B)(t-s)+\,(2m-1)(s+Bs^{\frac{m-1}{2m-1}})]\Big)\Delta_s^\varepsilon\,ds \\ &\qquad + Q\phi(\varepsilon)\int_0^t[\,LA(1+\theta_s^{\frac{1}{2m}})+1](s+Bs^{\frac12})(\Delta_s^\varepsilon)^{\frac{2m-1}{m-1}}ds\bigg\}, \end{aligned}$$

gde je $A=2^{\frac{m-1}{m}}$, $Q=3^{\frac{2m-1}{2m}}$, $B=[m(2m-1)]^{\frac12}$ *i* ρ *je konstanta, za koju je* $\phi(\varepsilon)+1\le\rho$ *za* $\varepsilon\in(0,1)$.

Dokaz. Pošto su vrednosti $\delta_i(\varepsilon),\delta_{ii}(\varepsilon),\gamma_i(\varepsilon),\gamma_{ii}(\varepsilon)$, $i=1,2,3$ ograničene za $\varepsilon\in(0,1)$, tada postoji konstanta $\rho>1$, tako da je $\phi(\varepsilon)+1<\rho$ za $\varepsilon\in(0,1)$. Sada, primenjujući Lipschitzov uslov (1.6.2) na funkciju F i (2.3.21), dobiće se sledeća ocena:

$$\begin{aligned} &E\int_0^t |\alpha_3(s,x_s^\varepsilon,\varepsilon)(\overline{F}x_s^\varepsilon - Fx_s)|\cdot|z_s^\varepsilon|^{2m-1}ds \\ &\le \rho\,E\int_0^t|F(s,x_s^\varepsilon,\tilde A_1x_s^\varepsilon,\tilde A_2x_s^\varepsilon)-F(s,x_s,A_1x_s,A_2x_s)|\cdot|z_s^\varepsilon|^{2m-1}ds \\ &\le L\rho\bigg[\int_0^t\Delta_s^\varepsilon\,ds+\int_0^t E\{|\tilde A_1x_s^\varepsilon-A_1x_s|\cdot|z_s^\varepsilon|^{2m-1}\}ds \\ &\qquad+\int_0^t E\{|\tilde A_2x_s^\varepsilon-A_2x_s|\cdot|z_s^\varepsilon|^{2m-1}\}ds\bigg]. \end{aligned} \tag{2.3.28}$$

Na osnovu Hölderove nejednakosti za $p=2m$, $q=\frac{2m}{2m-1}$, važi

$$E\{|\tilde A_1x_s^\varepsilon-A_1x_s|\cdot|z_s^\varepsilon|^{2m-1}\}\le(E|\tilde A_1x_s^\varepsilon-A_1x_s|^{2m})^{\frac{1}{2m}}\cdot(\Delta_s^\varepsilon)^{\frac{2m-1}{2m}}.$$

Dalje, primenom pretpostavke $\mathcal{A}_2$, nejednakosti (1.8.2) i (1.8.3), Schwarzove nejednakosti, Lipschitzovog uslova (1.6.2) i uslova ograničenog rasta (1.6.3) na funkciju f_1, dobija se

$$\begin{aligned} &(E|\tilde A_1x_s^\varepsilon-A_1x_s|^{2m})^{\frac{1}{2m}} \\ &=\bigg(E\Big|\int_0^s[\alpha_1(s,r,x_r^\varepsilon,\varepsilon)f_1(s,r,x_r^\varepsilon)+\alpha_{11}(s,r,x_r^\varepsilon,\varepsilon)-f_1(s,r,x_r)]dr\Big|^{2m}\bigg)^{\frac{1}{2m}} \\ &\le Q\bigg[\Big(E\Big|\int_0^s\alpha_1(s,r,x_r^\varepsilon,\varepsilon)(f_1(s,r,x_r^\varepsilon)-f_1(s,r,x_r))\,dr\Big|^{2m}\Big)^{\frac{1}{2m}} \\ &+\Big(E\Big|\int_0^s(\alpha_1(s,r,x_r^\varepsilon,\varepsilon)-1)f_1(s,r,x_r))\,dr\Big|^{2m}\Big)^{\frac{1}{2m}}+\Big(E\Big|\int_0^s\alpha_{11}(s,r,x_r^\varepsilon,\varepsilon)\,dr\Big|^{2m}\Big)^{\frac{1}{2m}}\bigg] \\ &\le Q\bigg[(\delta_1(\varepsilon)+1)Ls^{\frac{2m-1}{2m}}\Big(\int_0^s\Delta_r^\varepsilon\,dr\Big)^{\frac{1}{2m}} \\ &\qquad+\delta_1(\varepsilon)LAs^{\frac{2m-1}{2m}}\Big(\int_0^s(1+E|x_r|^{2m})dr\Big)^{\frac{1}{2m}}+\delta_{11}(\varepsilon)\,s\bigg] \\ &\le Q\bigg[L\rho s^{\frac{2m-1}{2m}}\Big(\int_0^s\Delta_r^\varepsilon\,dr\Big)^{\frac{1}{2m}}+\phi(\varepsilon)[LA(1+\theta_s^{\frac{1}{2m}})+1]s\bigg], \end{aligned}$$

pri čemu je $A = 2^{\frac{m-1}{m}}$, $Q = 3^{\frac{2m-1}{2m}}$. Ako se primeni nejednakost (1.8.4), sledi

$$s^{\frac{2m-1}{2m}}\Big(\int_0^s \Delta_r^\varepsilon\,dr\Big)^{\frac{1}{2m}}(\Delta_s^\varepsilon)^{\frac{2m-1}{2m}} \le \frac{1}{2m}\int_0^s \Delta_r^\varepsilon\,dr + \frac{2m-1}{2m}\,s\,\Delta_s^\varepsilon,$$

tako da je konačno

$$\begin{aligned} E\{|\tilde{A}_1 x_s^\varepsilon - A_1 x_s|\cdot|z_s^\varepsilon|^{2m-1}\} &\le \frac{LQ\rho}{2m}\left[\int_0^s \Delta_r^\varepsilon\,dr + (2m-1)\,s\,\Delta_s^\varepsilon\right] \\ &+ Q\phi(\varepsilon)\,[\,LA(1+\theta_s^{\frac{1}{2m}})+1]\,s\,(\Delta_s^\varepsilon)^{\frac{2m-1}{2m}}. \end{aligned} \tag{2.3.29}$$

Ponavljajući prethodni postupak uz korišćenje poznate integralne formule (1.3.7), dobija se

$$\begin{aligned} &(E|\tilde{A}_2 x_s^\varepsilon - A_2 x_s|^{2m})^{\frac{1}{2m}} \\ &\quad = \left(E\Big|\int_0^s [\alpha_2(s,r,x_r^\varepsilon,\varepsilon) f_2(s,r,x_r^\varepsilon) + \alpha_{22}(s,r,x_r^\varepsilon,\varepsilon) - f_1(s,r,x_r)]dw_r\Big|^{2m}\right)^{\frac{1}{2m}} \\ &\quad \le BQ\,s^{\frac{m-1}{2m}}\left[L\rho\Big(\int_0^s \Delta_r^\varepsilon\,dr\Big)^{\frac{1}{2m}} + \phi(\varepsilon)[LA(1+\theta_s^{\frac{1}{2m}})+1]\,s^{\frac{1}{2m}}\right], \end{aligned}$$

gde je $B = [m(2m-1)]^{\frac{1}{2}}$. Ponovna primena nejednakosti (1.8.4) dovodi do ocene

$$s^{\frac{m-1}{2m}}\Big(\int_0^s \Delta_r^\varepsilon\,dr\Big)^{\frac{1}{2m}}(\Delta_s^\varepsilon)^{\frac{2m-1}{2m}} \le \frac{1}{2m}\int_0^s \Delta_r^\varepsilon\,dr + \frac{2m-1}{2m}\,s^{\frac{m-1}{2m-1}}\Delta_s^\varepsilon,$$

tako da je

$$\begin{aligned} E\{|\tilde{A}_2 x_s^\varepsilon - A_2 x_s|\cdot|z_s^\varepsilon|^{2m-1}\} &\le \frac{BLQ\rho}{2m}\left[\int_0^s \Delta_r^\varepsilon\,dr + (2m-1)\,s^{\frac{m-1}{2m-1}}\Delta_s^\varepsilon\right] \\ &+ BQ\phi(\varepsilon)\,[\,LA(1+\theta_s^{\frac{1}{2m}})+1]\,s^{\frac{1}{2}}(\Delta_s^\varepsilon)^{\frac{2m-1}{2m}}. \end{aligned} \tag{2.3.30}$$

Konačno, pošto je $\int_0^t\int_0^s \Delta_r^\varepsilon\,drds = \int_0^t (t-s)\,\Delta_s^\varepsilon\,ds$, relacije (2.3.29) i (2.3.30) zajedno sa (2.3.28) dokazuju ovu lemu. □

Lema 2.3.2.

$$\begin{aligned} &E\int_0^t |\,(\alpha_3(s,x_s^\varepsilon,\varepsilon)-1)\,Fx_s|\cdot|z_s^\varepsilon|^{2m-1}ds \\ &\qquad \le LA^2\phi(\varepsilon)\int_0^t (1+\theta_s^{\frac{1}{2m}})\,[LA(s+Bs^{\frac{1}{2}})+1]\,(\Delta_s^\varepsilon)^{\frac{2m-1}{2m}}ds. \end{aligned}$$

Dokaz. Ako se primeni uslov ograničenog rasta (1.6.3) na funkciju F i prethodni postupak, lako se nalazi da je

$$\begin{aligned} &E\int_0^t |\,(\alpha_3(s,x_s^\varepsilon,\varepsilon)-1)\,Fx_s|\cdot|z_s^\varepsilon|^{2m-1}ds \\ &\quad \le \phi(\varepsilon)\int_0^t (E|Fx_s|^{2m})^{\frac{1}{2m}}(\Delta_s^\varepsilon)^{\frac{2m-1}{2m}}ds \\ &\quad \le L\phi(\varepsilon)\int_0^t \Big(E[1+|x_s|^2+|A_1x_s|^2+|A_2x_s|^2]^m\Big)^{\frac{1}{2m}}(\Delta_s^\varepsilon)^{\frac{2m-1}{2m}}ds \\ &\quad \le LA^2\phi(\varepsilon)\int_0^t \Big[1+\theta_s^{\frac{1}{2m}}+(E|A_1x_s|^{2m})^{\frac{1}{2m}}+(E|A_2x_s|^{2m})^{\frac{1}{2m}}\Big](\Delta_s^\varepsilon)^{\frac{2m-1}{2m}}ds. \end{aligned} \tag{2.3.31}$$

Pošto je

$$
\begin{aligned}
&(E|A_1x_s|^{2m})^{\frac{1}{2m}} + (E|A_2x_s|^{2m})^{\frac{1}{2m}} \\
&= \Big(E\Big|\int_0^s f_1(s,r,x_r)\,dr\Big|^{2m}\Big)^{\frac{1}{2m}} + \Big(E\Big|\int_0^s f_2(s,r,x_r)\,dw_r\Big|^{2m}\Big)^{\frac{1}{2m}} \\
&\le s^{\frac{2m-1}{2m}}\Big(\int_0^s E|f_1(s,r,x_r)|^{2m}dr\Big)^{\frac{1}{2m}} + B\,s^{\frac{m-1}{2m}}\Big(\int_0^s E|f_2(s,r,x_r)|^{2m}dr\Big)^{\frac{1}{2m}} \\
&\le LA(\,s^{\frac{2m-1}{2m}} + Bs^{\frac{m-1}{2m}})\Big(\int_0^s (1+E|x_r|^{2m})\,dr\Big)^{\frac{1}{2m}} \\
&\le LA(s+Bs^{\frac{1}{2}})(1+\theta_s^{\frac{1}{2m}})
\end{aligned}
$$

dokaz leme sledi na osnovu ove ocena i relacije (2.3.31). □

Lema 2.3.3.

$$
E\int_0^t |\alpha_{33}(s,x_s^\varepsilon,\varepsilon)|\cdot|z_s^\varepsilon|^{2m-1}ds \le \phi(\varepsilon)\int_0^t (\Delta_s^\varepsilon)^{\frac{2m-1}{2m}}ds.
$$

Dokaz. Neposredno sledi

$$
\begin{aligned}
E\int_0^t |\alpha_{33}(s,x_s^\varepsilon,\varepsilon)|\cdot|z_s^\varepsilon|^{2m-1}ds &\le \delta_{33}(\varepsilon)\int_0^t (E|z_s^\varepsilon|^{2m})^{\frac{2m-1}{2m}}ds \\
&\le \phi(\varepsilon)\int_0^t (\Delta_s^\varepsilon)^{\frac{2m-1}{2m}}ds.
\end{aligned}
$$

□

Lema 2.3.4.

$$
\begin{aligned}
&E\int_0^t |\beta_3(s,x_s^\varepsilon,\varepsilon)(\overline{G}x_s^\varepsilon - Gx_s)|^2\cdot|z_s^\varepsilon|^{2m-2}ds \\
&\quad\le 6L^2\rho\Big\{\int_0^t\Big(1+\frac{2Q^2L^2\rho}{m}[(1+B^2)(t-s)+(m-1)(s^{\frac{2m-1}{m-1}}+B^2s)]\Big)\Delta_s^\varepsilon\,ds \\
&\qquad + Q^2\phi(\varepsilon)\int_0^t [\,L^2A^2(1+\theta_s^{\frac{1}{m}})+1](s^2+B^2s)\,(\Delta_s^\varepsilon)^{\frac{m-1}{m}}ds\Big\}.
\end{aligned}
$$

Dokaz. Ako se primeni Lipschitzov uslov (1.6.2) na funkciju G, sledi da je

$$
\begin{aligned}
&E\int_0^t |\beta_3(s,x_s^\varepsilon,\varepsilon)(\overline{G}x_s^\varepsilon - Gx_s)|^2\cdot|z_s^\varepsilon|^{2m-2}ds \\
&\quad\le 2\rho\,E\int_0^t |G(s,x_s^\varepsilon,\tilde{B}_1x_s^\varepsilon,\tilde{B}_2x_s^\varepsilon) - G(s,x_s,B_1x_s,B_2x_s)|^2\cdot|z_s^\varepsilon|^{2m-2}ds \\
&\quad\le 6L^2\rho\Big[\int_0^t \Delta_s^\varepsilon\,ds + \int_0^t E\{|\tilde{B}_1x_s^\varepsilon - B_1x_s|^2\cdot|z_s^\varepsilon|^{2m-2}\}ds \\
&\qquad + \int_0^t E\{|\tilde{B}_2x_s^\varepsilon - B_2x_s|^2\cdot|z_s^\varepsilon|^{2m-2}\}ds\Big].
\end{aligned}
\tag{2.3.32}
$$

Analogno dokazu Leme 2.3.1, može se primeniti Hölderova nejednakost za $p=m$, $q=\frac{m-1}{m}$ i prethodno korišćen postupak. Posle odgovarajuće linearizacije u smislu primene nejednakosti

(1.8.4), konačno važi

$$
\begin{aligned}
E\{|\tilde{B}_1 x_s^\varepsilon - B_1 x_s|^2 \cdot |z_s^\varepsilon|^{2m-2}\} &\le (E|\tilde{B}_1 x_s^\varepsilon - B_1 x_s|^{2m})^{\frac{1}{m}} (\Delta_s^\varepsilon)^{\frac{m-1}{m}} \\
&\le \frac{2L^2Q^2\rho}{m} \left[\int_0^s \Delta_r^\varepsilon \, dr + (m-1)\, s^{\frac{2m-1}{m-1}} \Delta_s^\varepsilon \right] \\
&\quad + Q^2 \phi(\varepsilon) \,[\, L^2A^2(1+\theta_s^{\frac{1}{m}}) + 1]\, s^2 (\Delta_s^\varepsilon)^{\frac{m-1}{m}},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E\{|\tilde{B}_2 x_s^\varepsilon - B_2 x_s|^2 \cdot |z_s^\varepsilon|^{2m-2}\} &\le (E|\tilde{B}_2 x_s^\varepsilon - B_2 x_s|^{2m})^{\frac{1}{m}} (\Delta_s^\varepsilon)^{\frac{m-1}{m}} \\
&\le \frac{2B^2L^2Q^2\rho}{m} \left[\int_0^s \Delta_r^\varepsilon \, dr + (m-1)\, s\, \Delta_s^\varepsilon \right] \\
&\quad + B^2Q^2 \phi(\varepsilon) \,[\, L^2A^2(1+\theta_s^{\frac{1}{m}}) + 1]\, s\, (\Delta_s^\varepsilon)^{\frac{m-1}{m}}.
\end{aligned}
$$

Dokaz leme neposredno sledi na osnovu (2.3.32) i poslednjih relacija. □

Lema 2.3.5.

$$
\begin{aligned}
&E\int_0^t |\,(\beta_3(s, x_s^\varepsilon, \varepsilon) - 1)\, G x_s|^2 \cdot |z_s^\varepsilon|^{2m-2} ds \\
&\qquad \le L^2A^4\phi(\varepsilon) \int_0^t (1+\theta_s^{\frac{1}{m}})\,[L^2A^2(s^2+Bs)+1]\,(\Delta_s^\varepsilon)^{\frac{m-1}{m}} ds.
\end{aligned}
$$

Dokaz. U dokazu se koristi uslov linearnog rasta (1.6.3) za funkciju G i Lema 2.3.2. Tada važi sledeća relacija

$$
\begin{aligned}
&E\int_0^t |\,(\beta_3(s, x_s^\varepsilon, \varepsilon) - 1)\, G x_s|^2 \cdot |z_s^\varepsilon|^{2m-2} ds \\
&\quad \le \phi(\varepsilon) \int_0^t (E|Gx_s|^{2m})^{\frac{1}{m}} (\Delta_s^\varepsilon)^{\frac{m-1}{m}} ds \\
&\quad \le L^2A^4\phi(\varepsilon) \int_0^t \Big[1+\theta_s^{\frac{1}{m}} + (E|B_1x_s|^{2m})^{\frac{1}{m}} + (E|B_2x_s|^{2m})^{\frac{1}{m}}\Big] (\Delta_s^\varepsilon)^{\frac{m-1}{m}} ds,
\end{aligned}
$$

kao i

$$
\begin{aligned}
&(E|B_1x_s|^{2m})^{\frac{1}{m}} + (E|B_2x_s|^{2m})^{\frac{1}{m}} \\
&\qquad = \Big(E\Big|\int_0^s g_1(s,r,x_r)\, dr\Big|^{2m}\Big)^{\frac{1}{m}} + \Big(E\Big|\int_0^s g_2(s,r,x_r)\, dw_r\Big|^{2m}\Big)^{\frac{1}{m}} \\
&\qquad \le L^2A^2(\, s^{\frac{2m-1}{m}} + B^2 s^{\frac{m-1}{m}})\Big(\int_0^s (1+E|x_r|^{2m})\, dr\Big)^{\frac{1}{m}} \\
&\qquad \le L^2A^2(1+\theta_s^{\frac{1}{m}})(s^2+B^2 s),
\end{aligned}
$$

čime je lema dokazana. □

Lema 2.3.6.

$$
E\int_0^t |\beta_{33}(s, x_s^\varepsilon, \varepsilon)|^2 \cdot |z_s^\varepsilon|^{2m-2} ds \le \phi(\varepsilon) \int_0^t (\Delta_s^\varepsilon)^{\frac{m-1}{m}} ds.
$$

Dokaz. Dokaz je analogan dokazu Leme 2.3.3. □

Sada je moguće oceniti $EI_1(t)$ na osnovu izraza (2.3.26), korišćenjem Leme 2.3.1, Leme 2.3.2 i Leme 2.3.3. Tada je

$$\begin{aligned} EI_1(t) \le L\rho\int_0^t & \Big(1+\frac{LQ\rho}{2m}[(1+B)(t-s)+(2m-1)(s+Bs^{\frac{m-1}{2m-1}})]\Big)\Delta_s^\varepsilon\,ds \\ & +\phi(\varepsilon)\int_0^t \Big(1+LQ\rho\,(s+Bs^{\frac{1}{2}}) \\ & \qquad + LA(1+\theta_s^{\frac{1}{2m}})[(Q\rho+LA^2)(s+Bs^{\frac12})+A]\Big)(\Delta_s^\varepsilon)^{\frac{2m-1}{2m}}\,ds. \end{aligned}$$

Odavde sledi da postoje pozitivne konstante $l_1,\dots,l_4,k_1,\dots,k_6$, koje ne zavise od ε i T, takve da je

$$EI_1(t) \le \int_0^t \xi_1(s)\,\Delta_s^\varepsilon\,ds + \phi(\varepsilon)\int_0^t \xi_2(s)\,(\Delta_s^\varepsilon)^{\frac{2m-1}{2m}}\,ds, \quad t\in[0,T], \tag{2.3.33}$$

gde je

$$\begin{aligned} \xi_1(s) &= l_1+l_2\,(T-s)+l_3\,s+l_4\,s^{\frac{m-1}{2m-1}} \\ \xi_2(s) &= k_1+k_2\,s+k_3\,s^{\frac12}+\theta_s^{\frac{1}{2m}}(k_4+k_5\,s+k_6\,s^{\frac12}). \end{aligned}$$

Analogno, $EI_2(t)$ se može oceniti na osnovu izraza (2.3.27) primenom Leme 2.3.4, Leme 2.3.5 i Leme 2.3.6. Tada je

$$\begin{aligned} EI_2(t) \le 18L^2\rho\int_0^t & \Big(1+\frac{2L^2Q^2\rho}{m}[(1+B^2)(t-s)+(m-1)(s^{\frac{2m-1}{m-1}}+B^2s)]\Big)\,\Delta_s^\varepsilon\,ds \\ & +3\,\phi(\varepsilon)\int_0^t \Big(1+L^2Q^2\rho\,(s^2+B^2s) \\ & \qquad + L^2A^2(1+\theta_s^{\frac{1}{m}})[(Q^2\rho+L^2A^4)(s^2+B^2s)+A^2]\Big)(\Delta_s^\varepsilon)^{\frac{m-1}{m}}\,ds. \end{aligned}$$

Ponovo, postoje pozitivne konstante $m_1,\dots,m_4,n_1,\dots,n_6$, koje ne zavise od ε i T, tako da je

$$EI_2(t) \le \int_0^t \eta_1(s)\,\Delta_s^\varepsilon\,ds + \phi(\varepsilon)\int_0^t \eta_2(s)\,(\Delta_s^\varepsilon)^{\frac{m-1}{m}}\,ds, \quad t\in[0,T], \tag{2.3.34}$$

pri čemu je

$$\begin{aligned} \eta_1(s) &= m_1+m_2\,(T-s)+m_3\,s+m_4\,s^{\frac{2m-1}{m-1}} \\ \eta_2(s) &= n_1+n_2\,s+n_3\,s^2+\theta_s^{\frac{1}{m}}(n_4+n_5\,s+n_6\,s^2). \end{aligned}$$

Relacija (2.3.25) zajedno sa (2.3.33) i (2.3.34) i pretpostavkom $\mathcal{A}_1$, implicira da je za svako $t\in[0,T]$,

$$\begin{aligned} \Delta_t^\varepsilon \le \delta_0(\varepsilon) + m\int_0^t & [2\xi_1(s)+(2m-1)\eta_1(s)]\,\Delta_s^\varepsilon\,ds \\ & + m\,\phi(\varepsilon)\int_0^t \Big[2\xi_2(s)\,(\Delta_s^\varepsilon)^{\frac{2m-1}{m-1}}+(2m-1)\eta_2(s)\,(\Delta_s^\varepsilon)^{\frac{m-1}{m}}\Big]\,ds. \end{aligned}$$

Ako se u poslednjoj relaciji primeni elementarna nejednakost (1.8.5), pri čemu je $a = \Delta_s^\varepsilon$, $r_1 = \frac{m-1}{m}$, $r_2 = \frac{2m-1}{2m}$, dobiće se $(\Delta_s^\varepsilon)^{\frac{2m-1}{2m}} \le (\Delta_s^\varepsilon)^{\frac{m-1}{m}} + \Delta_s^\varepsilon$, tako da poslednja relacija u tom slučaju postaje

$$\Delta_t^\varepsilon \le \delta_0(\varepsilon) + m\int_0^t a(s)\,\Delta_s^\varepsilon\,ds + \phi(\varepsilon)\cdot m\int_0^t b(s)\,(\Delta_s^\varepsilon)^{\frac{m-1}{m}}\,ds, \quad t\in[0,T],$$

gde je

$$\begin{aligned} a(s) &= 2\xi_1(s) + (2m-1)\eta_1(s) + 2(\rho-1)\xi_2(s), \\ b(s) &= 2\xi_2(s) + (2m-1)\eta_2(s). \end{aligned}$$

Pošto je poslednja nejednakost oblika (1.8.8), može se primeniti uopštena Gronwall-Bellmanova nejednakost, tako da, imajući u vidu (2.3.21), važi

$$\begin{aligned} (\Delta_t^\varepsilon)^{\frac{1}{m}} &\le \delta_0^{\frac{1}{m}}(\varepsilon)\cdot e^{\int_0^t a(s)\,ds} + \phi(\varepsilon)\int_0^t b(s)\cdot e^{\int_s^t a(u)\,du} ds \\ &\le \phi(\varepsilon)\cdot e^{\int_0^t a(s)\,ds}\left[1 + \int_0^t b(s)\,ds\right], \quad t\in[0,T]. \end{aligned}$$

Odavde sledi da postoje pozitivne konstante $a_1,\dots,a_9, b_1,\dots,b_{11}$, koje ne zavise od ε i T, takve da je

$$(\Delta_t^\varepsilon)^{\frac{1}{m}} \le \phi(\varepsilon)\cdot\xi(t)\cdot e^{\psi(t)}, \quad t\in[0,T],$$

a funkcije $\xi(t)$ i $\psi(t)$ su date izrazom (2.3.22). Ovim je dokaz prvog dela teoreme kompletan.

(ii) Neka je $m=1$. Ako se označi sa $\Delta_t^\varepsilon = E|x_t^\varepsilon - x_t|^2$, tada, za svako $t\in[0,T]$,

$$\begin{aligned} \Delta_t^\varepsilon &\le 3\left[\delta_0(\varepsilon) + E\Big(\int_0^t (\tilde F x_s^\varepsilon - F x_s)\,ds\Big)^2 + E\Big(\int_0^t (\tilde G x_s^\varepsilon - G x_s)\,dw_s\Big)^2\right] \\ &\le 3\left[\phi(\varepsilon) + t\int_0^t E|\tilde F x_s^\varepsilon - F x_s|^2\,ds + \int_0^t E|\tilde G x_s^\varepsilon - G x_s|^2\,ds\right]. \end{aligned} \tag{2.3.35}$$

Ako se primeni (1.6.2) i (1.6.3), dobija se

$$\begin{aligned} \int_0^t E|\tilde F x_s^\varepsilon - F x_s|^2\,ds &= \int_0^t E|\alpha_3(s,x_s^\varepsilon,\varepsilon)\,\overline{F} x_s^\varepsilon + \alpha_{33}(s,x_s^\varepsilon,\varepsilon) - F x_s|^2 ds \\ &\le 3\int_0^t E[\,|\alpha_3(s,x_s^\varepsilon,\varepsilon)(\overline{F} x_s^\varepsilon - F x_s)|^2 + |(\alpha_3(s,x_s^\varepsilon,\varepsilon)-1)\,F x_s|^2 + |\alpha_{33}(s,x_s^\varepsilon,\varepsilon)|^2\,]\,ds \\ &\le 3\int_0^t [\,6\,L^2\rho\,(\Delta_s^\varepsilon + E|\tilde A_1 x_s^\varepsilon - A_1 x_s|^2 + E|\tilde A_2 x_s^\varepsilon - A_2 x_s|^2) + \phi(\varepsilon)\,E|F x_s|^2 + \phi(\varepsilon)\,]\,ds. \end{aligned}$$

Sada je lako dokazati sledeće ocene, gde je uvedena oznaka $\sigma_s = E|x_s|^2$:

$$\begin{aligned} E|\tilde A_1 x_s^\varepsilon - A_1 x_s|^2 &\le s\cdot E|\tilde A_2 x_s^\varepsilon - A_2 x_s|^2, \\ E|\tilde A_2 x_s^\varepsilon - A_2 x_s|^2 &\le 3\Big[\,2L^2\rho\int_0^s \Delta_r^\varepsilon\,dr + \phi(\varepsilon)(L^2+1)\,s + \phi(\varepsilon)L^2\int_0^t \sigma_r\,dr\,\Big], \\ E|F x_s|^2 &\le L^2[\,1 + \sigma_s + E|A_1 x_s|^2 + E|A_2 x_s|^2] \\ &\le L^2\Big[1 + \sigma_s + L^2(s+1)\Big(s + \int_0^s \sigma_r\,dr\Big)\Big]. \end{aligned}$$

Pošto $\int_0^t E|\tilde{G}x_s^\varepsilon - Gx_s|^2\,ds$ ima istu ocenu kao i $\int_0^t E|\tilde{F}x_s^\varepsilon - Fx_s|^2\,ds$, prethodna relacija zajedno sa (2.3.35) daje ocenu

$$\Delta_t^\varepsilon \leq \phi(\varepsilon)\cdot[\,R_1(t)+R_2(t)\cdot\theta_t\,]+3(t+1)\int_0^t k(t,s)\,\Delta_s^\varepsilon\,ds,\;\; t\in[0,T], \tag{2.3.36}$$

gde je

$$\begin{aligned}
R_1(t) &= 3+9\,(t+1)\left\{[3\,L^2\rho\,(L^2+1)+L^4](2t^3+3t^2)+(L^2+1)\,t\right\},\\
R_2(t) &= 9\,L^2(t+1)\,\left[L^2\,(6\rho+1)\left(\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}\right)+1\right],\\
k(t,s) &= 18L^2\rho\,[\,3L^2\rho\,(t^2-s^2+2t-2s)+1\,].
\end{aligned}$$

Pošto je (2.3.36) oblika (1.8.7), primenom citiranog oblika Gronwall-Bellmanove nejednakosti dobija se

$$\Delta_t^\varepsilon \leq \phi(\varepsilon)\cdot[\,R_1(t)+R_2(t)\cdot\theta_t\,]\cdot e^{3(t+1)\int_0^t k(t,s)\,ds},\;\; t\in[0,T],$$

čime je dokaz teoreme kompletan. □

Kako relacije (2.3.20) i (2.3.23) zavise od θ_t, potrebno je naći ocenu te veličine. Sledeće tvrđenje može biti tretirano i nezavisno od prethodno proučavanog problema.

Propozicija 2.3.3. (Sv. Janković, M. Jovanović, [37]) *Neka uslov* (1.6.3) *i pretpostavke* $\mathcal{A}_1$ *i* $\mathcal{A}_3$ *važe za jednačinu (2.3.19). Tada je:*

(*i*) *za* $m>1$,

$$(E|x_t|^{2m})^{\frac{1}{m}} \leq \left[\,(E|\eta|^{2m})^{\frac{1}{m}}+d_1\,T^{\frac{2}{m}}+d_2\,\right]\cdot e^{\varphi(t)},\quad t\in[0,T],$$

pri čemu je $\varphi(t)=d_3t+d_4T\,t+d_5t^2+d_6t^{\frac{3m-2}{2m-1}}+d_7t^{\frac{3m-2}{m-1}}$, *a* $d_1,\ldots,d_7$ *su pozitivne konstante koje ne zavise od* T*;*

(*ii*) *za* $m=1$,

$$E|x_t|^2 \leq 3\,[\,E|\eta|^2+S_1(t)\,]\cdot e^{S_2(t)},\quad t\in[0,T],$$

gde su $S_1(t)$ *i* $S_2(t)$ *polinomi stepena* 4, *koji ne zavise od* T.

Dokaz. Polazeći od jednačine (2.3.19), i primenjujući Itovu formulu na $(x_t)^{2m}$, dobija se

$$\sigma_t = E|x_t|^{2m} = E|\eta|^{2m}+2m\,EJ_1(t)+m(2m-1)\,EJ_2(t),\quad t\in[0,T], \tag{2.3.37}$$

gde je $J_1(t)=\int_0^t Fx_s\,(x_s)^{2m-1}ds,\; J_2(s)=\int_0^t G^2x_s\,(x_s)^{2m-2}ds$. Za ocenu člana $EJ_1(t)$ koristi se postupak primenjen u dokazu Leme 2.3.2. Na taj način se dolazi do ocene

$$\begin{aligned}
EJ_1(t) &\leq \int_0^t (E|Fx_s|^{2m})^{\frac{1}{2m}}\,(\sigma_s)^{\frac{2m-1}{2m}}\,ds\\
&\leq LA^2\int_0^t \left[\,1+(\sigma_s)^{\frac{1}{2m}}+(E|A_1x_s|^{2m})^{\frac{1}{2m}}+(E|A_2x_s|^{2m})^{\frac{1}{2m}}\right]\,(\sigma_s)^{\frac{2m-1}{2m}}ds.
\end{aligned}$$

Sada je

$$\begin{aligned}
\int_0^t (E|A_1x_s|^{2m})^{\frac{1}{2m}} (\sigma_s)^{\frac{2m-1}{2m}} ds &\le \int_0^t s^{\frac{2m-1}{2m}} \Big(\int_0^t E|f_1(s,r,x_r)|^{2m} dr \Big)^{\frac{1}{2m}} (\sigma_s)^{\frac{2m-1}{2m}} ds \\
&\le LA \int_0^t s^{\frac{2m-1}{2m}} \Big(\int_0^s (1+\sigma_r)\, dr \Big)^{\frac{1}{2m}} (\sigma_s)^{\frac{2m-1}{2m}} ds \\
&\le \frac{LA}{2m} \int_0^t \Big[(2m-1)\, s\, \sigma_s + \int_0^s (1+\sigma_r)\, dr \Big] ds \\
&\le \frac{LA}{2m} \left[\frac{t^2}{2} + \int_0^t [\, (2m-1)\, s + t - s]\, \sigma_s\, ds \right].
\end{aligned}$$

Slično, važi i

$$\int_0^t (E|A_2x_s|^{2m})^{\frac{1}{2m}} (\sigma_s)^{\frac{2m-1}{2m}} ds \le \frac{BLA}{2m} \left[\frac{t^2}{2} + \int_0^t [\, (2m-1)\, s^{\frac{m-1}{2m-1}} + t - s]\, \sigma_s\, ds \right],$$

tako da je

$$EJ_1(t) \le l_1 t^2 + l_2 \int_0^t (\sigma_s)^{\frac{2m-1}{2m}} ds + \int_0^t p_1(s)\, \sigma_s\, ds, \tag{2.3.38}$$

pri čemu je $p_1(s) = l_3 + l_4 T + l_5 s + l_6 s^{\frac{m-1}{2m-1}}$, a $l_1, \ldots, l_6$ su pozitivne konstante koje ne zavise od T. Slično dokazu Leme 2.3.5, dokazuje se da je

$$EJ_2(t) \le k_1 t^2 + k_2 \int_0^t (\sigma_s)^{\frac{m-1}{m}} ds + \int_0^t p_2(s)\, \sigma_s\, ds, \tag{2.3.39}$$

pri čemu je $p_2(s) = k_3 + k_4 T + k_5 s + k_6 s^{\frac{2m-1}{2m}}$, a $k_1, \ldots, k_6$ su pozitivne konstante koje ne zavise od T. Zamenjujući (2.3.38) i (2.3.39) u (2.3.37) i primenjujući nejednakost (1.8.5) na osnovu koje je $(\sigma_s)^{\frac{2m-1}{2m}} \le (\sigma_s)^{\frac{m-1}{m}} + \sigma_s$, sledi

$$\sigma_t \le E|\eta|^{2m} + c_1 T^2 + \int_0^t p(s)\, \sigma_s\, ds + c_2 \int_0^t (\sigma_s)^{\frac{m-1}{m}} ds, \quad t \in [0,T],$$

gde je $p(s) = c_3 + c_4 T + c_5 s + c_6 s^{\frac{m-1}{2m-1}} + c_7 s^{\frac{2m-1}{m-1}}$, a $c_1, \ldots, c_7$ su pozitivne konstante koje ne zavise od T. Pošto je poslednja nejednakost oblika (1.8.8), primenom uopštene nejednakosti Gronwall-Bellmana dobija se

$$(\sigma_t)^{\frac{1}{m}} \le (E|\eta|^{2m} + c_1 T^2)^{\frac{1}{m}} \cdot e^{\frac{1}{m}\int_0^t p(s)\, ds} + \frac{c_2}{m} \int_0^t e^{\frac{1}{m}\int_s^t p(u)\, du} ds, \; t \in [0,T].$$

Kako je $\int_s^t p(u)\, du \le p(t)(t-s)$, ako se na drugi integral primeni parcijalna integracija, dolazi se do ocene

$$(\sigma_t)^{\frac{1}{m}} \le \Big[(E|\eta|^{2m})^{\frac{1}{m}} + c_1^{\frac{1}{m}} T^{\frac{2}{m}} + \frac{c_2}{c_3} \Big] \cdot e^{\frac{1}{m} p(t)\, t}, \; t \in [0,T],$$

čime je završen dokaz provog dela ovog tvrđenja.

(ii) Za $m = 1$, ocena za $E|x_t|^2$, koja se može dobiti iz poslednje relacije, zavisi od T. Zbog toga je neophodno naći odgovarajuću ocenu koja neće zavisiti od T.

Ako se označi $\sigma_t = E|x_t|^2$, lako je zaključiti da je

$$\sigma_t \leq 3\Big[E|\eta|^2 + E\Big(\int_0^t Fx_s\,ds\Big)^2 + E\Big(\int_0^t Gx_s\,dw_s\Big)^2\Big]$$
$$\leq 3\Big[E|\eta|^2 + L^2(t+1)\Big(t + \frac{L^2}{2}\,t^2 + \frac{L^2}{3}\,t^3\Big)\Big]$$
$$+ 3\,L^2(t+1)\int_0^t \Big[1 + L^2\Big(\frac{t^2-s^2}{2} + t - s\Big)\Big]\,\sigma_s\,ds,\ t\in[0,T].$$

S obzirom da je poslednja nejednakost oblika (1.8.7), primenom Gronwall-Bellmanove nejednakosti tvrđenje je dokazano. □

Cilj ovog proučavanja je naći uslove pri kojima $\sup E|x_t^\varepsilon - x_t|^{2m} \to 0$ kada $\varepsilon \to 0$ na konačnim intervalima ili na intervalima čija dužina teži beskonačnosti kad $\varepsilon \to 0$. U vezi sa tim zahtevom i prethodnom diskusijom, logično je zahtevati da $\delta_0(\varepsilon), \delta_i(\varepsilon), \delta_{ii}(\varepsilon), \gamma_i(\varepsilon), \gamma_{ii}(\varepsilon)$, $i = 1, 2, 3$ teže nuli kada $\varepsilon \to 0$. Sledeća teorema neposredno sledi iz Propozicije 2.3.2.

Teorema 2.3.3. (Sv. Janković, M. Jovanović, [37]) *Neka su zadovoljeni uslovi Propozicije 2.3.2 i neka $\delta_0(\varepsilon), \delta_i(\varepsilon)$, $\delta_{ii}(\varepsilon), \gamma_i(\varepsilon)$, $\gamma_{ii}(\varepsilon), i = 1, 2, 3$, teže nuli kada ε teži nuli. Tada*

$$\sup_{t\in[0,T]} E|x_t^\varepsilon - x_t|^{2m} \to 0 \quad \text{kada} \quad \varepsilon \to 0.$$

Dokaz. Neka je $m > 1$. Na osnovu navedenih pretpostavki i iz (2.3.21) sledi da $\phi(\varepsilon) \to 0$ kada $\varepsilon \to 0$. Pošto je vremenski interval konačan, na osnovu Propozicije 2.3.3 može se zaključiti da je $\sup_{t\in[0,T]} \theta_t = \text{const} < \infty$, tako da je iz (2.3.22) očigledno $\sup_{t\in[0,T]} \psi(t) = \psi(T) < \infty$, $\sup_{t\in[0,T]} \xi(t) = \xi(T) < \infty$. Iz (2.3.20) sledi

$$\sup_{t\in[0,T]} E|x_t^\varepsilon - x_t|^{2m} \leq \Big(\phi(\varepsilon)\cdot\xi(T)\cdot e^{\psi(T)}\Big)^m \to 0 \quad \text{kada} \quad \varepsilon \to 0.$$

Slično, za $m = 1$ iz (2.3.24) sledi da $\phi(\varepsilon) \to 0$ kada $\varepsilon \to 0$. Tako, na osnovu (2.3.23) može se zaključiti da je

$$\sup_{t\in[0,T} E|x_t^\varepsilon - x_t|^2 \leq \phi(\varepsilon)\cdot[R_1(T) + R_2(T)\cdot\theta_T]\cdot e^{R_3(T)} \to 0 \quad \text{kada} \quad \varepsilon \to 0. \qquad \square$$

Sva prethodna razmatranja i dobijene ocene za $E|x_t|^{2m}$ i $E|x_t^\varepsilon - x_t|^{2m}$ posmatrane su na proizvoljnom fiksiranom konačnom vremenskom intervalu $[0,T]$. Ako je $T = \infty$, tada prethodna tvrđenja generalno ne važe. Kao i u prethodnim poglavljima, sledeća teorema omogućava konstrukciju konačnih intervala koji zavise od ε i čija dužina teži beskonačnosti kada ε teži nuli, tako da rešenja x_t^ε i x_t budu bliska u smislu momenta $(2m)$-tog reda na tim intervalima. Potrebno je napomenuti da je za dokaz ovog tvrđenja važno da sve konstante dobijene u prethodnim ocenama ne zavise od ε i T.

Teorema 2.3.4. (Sv. Janković, M. Jovanović, [37]) *Neka su zadovoljeni uslovi Teoreme 2.3.3 za $t \in [0,\infty)$. Tada postoji segment $[0, T_\varepsilon]$, tako da*

$$\sup_{t\in[0,T_\varepsilon]} E|x_t^\varepsilon - x_t|^{2m} \to 0 \quad \text{kada} \quad \varepsilon \to 0,$$

pri čemu je za proizvoljan broj $r \in (0,1)$ i dovoljno malo ε, T_ε definisano sa:

(i) za $m > 1$,

$$T_\varepsilon = \left[\frac{1}{a}\cdot\Big(\left[\ln(-r\ln\phi(\varepsilon))\right]^{\frac{1}{2m(3m-2)(2m-1)}} - b\Big)\right]^{2m(2m-1)(m-1)}, \tag{2.3.40}$$

gde je $\phi(\varepsilon)$ dato sa (2.3.21), dok su a i b pozitivne konstante koje ne zavise od ε;

(ii) za $m = 1$,

$$T_\varepsilon = \frac{1}{\overline{a}}\cdot\left[(-r\ln\phi(\varepsilon))^{\frac{1}{4}} - \overline{b}\right], \tag{2.3.41}$$

gde je $\phi(\varepsilon)$ dato sa (2.3.24), dok su $\overline{a}$ i $\overline{b}$ pozitivne konstante koje ne zavise od ε.

Dokaz. Iz činjenice da $\phi(\varepsilon) \to 0$ kada $\varepsilon \to 0$ sledi da postoji vrednost $\varepsilon_0 \in (0,1)$, tako da je $\phi(\varepsilon) < 1$ za $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$. Osnovna ideja u dokazu je uočavanje konačnog intervala $[0,T_\varepsilon]$, $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$, i efektivno izračunavanje veličine T_ε tako da $E|x_t^\varepsilon - x_t|^{2m} \to 0$ kada $\varepsilon \to 0$ za svako $t \in [0,T_\varepsilon]$.

(i) Neka je $m > 1$. Pošto je $E|\eta|^{2m} < \infty$, na osnovu Propozicije 2.3.3 i nejednakosti (2.1.6), postoje konstante e_1, e_2, f_1, f_2, tako da je

$$\begin{aligned} \theta_t^{\frac{1}{m}} &\le [e_1 + e_2\,T_\varepsilon^{\frac{2}{m}}]\cdot e^{\varphi(t)}, \quad t\in[0,T_\varepsilon],\\ \theta_t^{\frac{1}{2m}} &\le [f_1 + f_2\,T_\varepsilon^{\frac{1}{m}}]\cdot e^{\frac{1}{2}\varphi(t)}, \quad t\in[0,T_\varepsilon], \end{aligned} \tag{2.3.42}$$

gde je $\varphi(t) = d_3t + d_4T_\varepsilon\, t + d_5t^2 + d_6t^{\frac{3m-2}{2m-1}} + d_7t^{\frac{3m-2}{m-1}}$. Pošto je $[0,T_\varepsilon]$ konačan interval, može se primeniti Teorema 2.3.3 za ocenu bliskosti rešenja x_t^ε i x_t na tom intervalu. Tada je,

$$\Big(\sup_{t\in[0,T_\varepsilon]} E|x_t^\varepsilon - x_t|^{2m}\Big)^{\frac{1}{m}} \le \phi(\varepsilon)\cdot\xi(T_\varepsilon)\cdot e^{\psi(T_\varepsilon)},$$

gde su $\psi(T_\varepsilon)$ i $\xi(T_\varepsilon)$ date sa (2.3.22), stavljajući $T = T_\varepsilon$ i $t = T_\varepsilon$. Imajući u vidu da važi (2.3.42), lako je zaključiti da je

$$\begin{aligned} \Big(\sup_{t\in[0,T_\varepsilon]} E|x_t^\varepsilon - x_t|^{2m}\Big)^{\frac{1}{m}} &\le \phi(\varepsilon)\cdot\Big[P_1(T_\varepsilon) + P_2(T_\varepsilon)\cdot e^{\frac{1}{2}\varphi(T_\varepsilon)} + P_3(T_\varepsilon)\cdot e^{\varphi(T_\varepsilon)}\Big]\\ &\quad\times e^{Q_1(T_\varepsilon) + Q_2(T_\varepsilon)\cdot e^{\frac{1}{2}\varphi(T_\varepsilon)}}, \end{aligned} \tag{2.3.43}$$

gde su

$$\begin{aligned} P_1(u) &= b_1 + b_2u + b_3u^2 + b_4u^3 + b_5u^{\frac{3}{2}},\\ P_2(u) &= (f_1 + f_2u^{\frac{1}{m}})(b_6u + b_7u^2 + b_8u^{\frac{3}{2}}),\\ P_3(u) &= (e_1 + e_2u^{\frac{2}{m}})(b_9u + b_{10}u^2 + b_{11}u^3),\\ Q_1(u) &= a_1u + (a_2 + a_3)u^2 + a_4u^{\frac{3}{2}} + a_5u^{\frac{3m-2}{2m-1}} + a_6u^{\frac{3m-2}{m-1}},\\ Q_2(u) &= (f_1 + f_2u^{\frac{1}{m}})(a_7u + a_8u^2 + a_9u^{\frac{3}{2}}), \end{aligned}$$

polinomi sa argumentima $u^{\frac{1}{2}}, u^{\frac{1}{2m}}, u^{\frac{1}{m}}, u^{\frac{1}{2(2m-1)(m-1)}}, u^{\frac{1}{2m}}$, respektivno.

Potrebno je izračunati T_ε u odnosu na $\phi(\varepsilon), \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, tako da član sa najvećom brzinom rasta na desnoj strani nejednakosti (2.3.43) teži nuli kada $\varepsilon \to 0$. Pošto je $e^{Q_2(T_\varepsilon)\cdot e^{\frac{1}{2}\varphi(T_\varepsilon)}}$ član sa najvećom brzinom rasta, a $Q_2(T_\varepsilon)$ polinom sa argumentom $T_\varepsilon^{\frac{1}{2m}}$, postoji pozitivna konstanta c_1 za koju je

$$Q_2(T_\varepsilon) < e^{c_1 T_\varepsilon^{\frac{1}{2m}}}.$$

Dalje, potrebno je izračunati vrednosti a i b tako da je

$$\begin{aligned} c_1 T_\varepsilon^{\frac{1}{2m}} + \frac{1}{2}\varphi(T_\varepsilon) &\equiv c_1 T_\varepsilon^{\frac{1}{2m}}(\varepsilon) + c_2 T_\varepsilon + c_3 T_\varepsilon^2 + c_4 T_\varepsilon^{\frac{3m-2}{2m-1}} + c_5 T_\varepsilon^{\frac{3m-2}{m-1}} \\ &\le \left[a \cdot T_\varepsilon^{\frac{1}{2m(2m-1)(m-1)}} + b \right]^{2m(3m-2)(2m-1)}, \end{aligned} \tag{2.3.44}$$

gde su $c_2, \ldots, c_5$ neke pozitivne konstante. Vrednosti a i b moraju biti izabrane tako da je

$$c_i \le C_{2m(3m-2)(2m-1)}^{k_i} \cdot a^{k_i} \cdot b^{2m(3m-2)(2m-1)-k_i},$$

gde su konstante $k_1 = (2m-1)(m-1)$, $k_2 = 2m(2m-1)(m-1)$, $k_3 = 2m(3m-2)(2m-2)$, $k_4 = 2m(3m-2)(m-1)$, $k_5 = 2m(3m-2)(2m-1)$. Pošto je član sa najvećom brzinom rasta $c_5 T_\varepsilon^{\frac{3m-2}{2m-1}}$, vrednost a se izračunava iz jednakosti

$$c_5 = a^{2m(3m-2)(2m-1)},$$

dok je

$$b = \max_{1\le i\le 4} \left\{ \left[\frac{c_i}{C_{2m(3m-2)(2m-1)}^{k_i} \cdot c_5^{\frac{1}{2m(3m-2)(2m-1)}}} \right]^{\frac{1}{2m(3m-2)(2m-1)-k_i}} \right\}.$$

Za ovako izabrane vrednosti a i b, T_ε se izračunava iz jednakosti

$$\left[a \cdot T_\varepsilon^{\frac{1}{2m(2m-1)(m-1)}} + b \right]^{2m(3m-2)(2m-1)} = \ln(-r \ln \phi(\varepsilon)),$$

za proizvoljan broj $r \in (0,1)$ i $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Tada je T_ε oblika (2.3.40) i $T_\varepsilon \to \infty$ kada $\varepsilon \to 0$.

Na osnovu (2.3.40), (2.3.43) i (2.3.44), sledi da je

$$\begin{aligned} &\Big(\sup_{t\in[0,T_\varepsilon]} E|x_t^\varepsilon - x_t|^{2m} \Big)^{\frac{1}{m}} \\ &\quad \le (\phi(\varepsilon))^{1-r} \cdot \Big[P_1(T_\varepsilon) + P_2(T_\varepsilon) \cdot e^{\frac{1}{2}\varphi(T_\varepsilon)} + P_3(T_\varepsilon) \cdot e^{\varphi(T_\varepsilon)} \Big] \cdot e^{Q_1(T_\varepsilon)}. \end{aligned} \tag{2.3.45}$$

Pošto su $P_1(u), P_2(u), P_3(u), Q_1(u), Q_2(u)$ polinomi, desna strana poslednje nejednakosti je oblika

$$\zeta(\varepsilon) = (\phi(\varepsilon))^{1-r} \cdot (-r \ln \phi(\varepsilon))^{m_1} \cdot (\ln(-r \ln \phi(\varepsilon)))^{m_2},$$

pri čemu su $m_1, m_2 \ge 0$. Prema tome, dokaz prvog dela ove teoreme direktno sledi jer $\zeta(\varepsilon) \to 0$ kada $\varepsilon \to 0$.

(ii) Neka je $m = 1$. Na osnovu Propozicije 2.3.3 sledi

$$\theta_t = \sup_{0\le s\le t} E|x_s|^2 \le 3\,[E|\eta|^2 + S_1(t)] \cdot e^{S_2(t)},$$

gde su $S_1(t)$ i $S_2(t)$ polinomi četvrtog stepena. Iz ocene (2.3.23) date u Propoziciji 2.3.2, sledi

$$\begin{aligned}&\sup_{t\in[0,T_\varepsilon]} E|x_t^\varepsilon - x_t|^2\\ &\qquad \le \phi(\varepsilon)\cdot\Big(R_1(T_\varepsilon) + R_2(T_\varepsilon)\cdot 3\,[E|\eta|^2 + S_1(T_\varepsilon)]\cdot e^{S_2(T_\varepsilon)}\Big)\cdot e^{R_3(T_\varepsilon)}.\end{aligned}$$

Pošto je $e^{S_2(T_\varepsilon)+R_3(T_\varepsilon)}$ član sa najvećom brzinom rasta, analogno dokazu prvog dela mogu se izračunati vrednosti $\overline{a}$ i $\overline{b}$, a zatim i T_ε, tako da je

$$S_2(T_\varepsilon) + R_3(T_\varepsilon) \le [\,\overline{a}\cdot T_\varepsilon + \overline{b}\,]^4 = -r\ln\phi(\varepsilon).$$

Dakle, T_ε je oblika (2.3.40) i, naravno, $\sup_{t\in[0,T_\varepsilon]} E|x_t^\varepsilon - x_t|^2 \to 0$ kada $\varepsilon\to 0$. Time je dokaz ove teoreme završen. $\square$

Primer 2.3.2. Prethodni rezultati se mogu primeniti da bi se ocenila bliskost rešenja sledeće perturbovane jednačine

$$\begin{aligned}x_t^\varepsilon &= \eta+\varepsilon\\ &+\int_0^t \frac{1}{\varepsilon+\ln(e+|x_s^\varepsilon|)}\cdot\left[\frac{\sinh\varepsilon}{1+s}\cdot\cos\left(1+\left|\int_0^s x_r^\varepsilon\, e^{\frac{\varepsilon}{1+r}}\,dw_r\right|\right)+e^{-\frac{1+s}{e^2}}\right]ds\\ &+\int_0^t\int_0^s x_r^\varepsilon\, e^{-r+\frac{\varepsilon}{1+|x_r^\varepsilon|}}\,dr\,dw_s,\quad t\ge 0,\end{aligned}$$

sa rešenjem odgovarajuće neperturbovane jednačine

$$x_t = \eta + \int_0^t \cos\left(1+\left|\int_0^s x_r\,dw_r\right|\right)ds + \int_0^t\int_0^s e^{-r}x_r\,dr\,dw_s,\quad t\ge 0$$

u smislu momenta $(2m)$-tog reda. Uzimajući u obzir prethodno uvedeno označavanje, može se zaključiti da je

$$F(t,x,y,z) = \cos(1+|z|\,),\ G(t,x,y,s) = y,\ f_2(t,s,x) = x,\ g_1(t,s,x) = e^{-s}x,$$

dok su perturbacije

$$\begin{aligned}&\eta_0^\varepsilon = \eta+\varepsilon,\quad \alpha_2(t,s,x,\varepsilon) = e^{\frac{\varepsilon}{1+s}},\quad \beta_1(t,s,x,\varepsilon) = e^{\frac{\varepsilon}{1+|x|}},\\ &\alpha_3(t,x,\varepsilon) = \frac{\sinh\varepsilon}{(1+t)(\varepsilon+\ln(e+|x|))},\quad \alpha_{33}(t,x,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon+\ln(e+|x|)}\cdot e^{-\frac{1+t}{\varepsilon^2}}.\end{aligned}$$

Svi koeficijenti ovih jednačina zadovoljavaju Lipschitzov uslov i uslov ograničenog rasta. Tako, ako je $E|\eta|^{2m} < \infty$, postoje jedinstvena, skoro izvesno neprekidna rešenja x_t^ε i x_t tih jednačina koja zadovoljavaju uslove $\sup_{t\geq 0} E|x_t^\varepsilon|^{2m} < \infty$ i $\sup_{t\geq 0} E|x_t|^{2m} < \infty$. Pretpostavke $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3$ su takođe zadovoljene, tako da se za $m > 1$, iz (2.3.21) lako nalazi

$$\phi(\varepsilon) = \max\left\{\varepsilon^2,\ \frac{\sinh\varepsilon}{\varepsilon} - 1,\ \frac{1}{\varepsilon}\, e^{-1/\varepsilon^2},\ e^\varepsilon - 1,\ (e^\varepsilon - 1)^2\right\} = e^\varepsilon - 1, \quad \varepsilon \in (0, \ln 2).$$

Iz relacije (2.3.40) Teoreme 2.3.4, sledi da se mogu naći intervali $[0, T_\varepsilon]$ na kojima kada $\varepsilon \to 0$, $\sup_t E|x_t^\varepsilon - x_t|^{2m} \to 0$, a u isto vreme dužina tih intervala teži beskonačnosti.

Slično, za $m = 1$ na osnovu (2.3.24) nalazi se $\phi(\varepsilon) = (e^\varepsilon - 1)^2$, a zatim i T_ε iz (2.3.41). $\triangle$

Napomena 2.3.1. Nejednakost (2.3.45) predstavlja važan rezultat, jer daje veličinu bliskosti rešenja x_t^ε i x_t na intervalu $[0, T_\varepsilon]$, za fiksirani mali parametar ε. Pored toga, ako je vremenski interval beskonačan, rezultat dobijen u ovom poglavlju se može primeniti za proučavanje uslova asimtotske stabilnosti u smislu momenta $(2m)$-tog reda rešenja perturbovane jednačine, tako što bi se proučavali uslovi asimptotske stabilnosti, u nekom smislu, rešenja odgovarajuće neperturbovane jednačine.

2.4. Funkcionalno perturbovane stohastičke diferencijalne jednačine

U poglavljima 2.1, 2.2 i 2.3 su izloženi rezultati radova [75], [29], [40], [34], [33], [28] i [36] u kojima je predstavljena jedna analitička metoda za nalaženje približnog rešenja aditivno i linearno perturbovanih stohastičkih diferencijalnih i integrodiferencijalnih jednačina Itoa različitog tipa, u smislu momenta $(2m)$-tog reda, gde je $m \in N$. U ovom poglavlju se pokazuje da se ta metoda može uopštiti na mnogo širu klasu stohastičkih diferencijalnih jednačina Itoa koje zavise od malog parametra, tj. na funkcionalno perturbovane stohastičke diferencijalne jednačine Itoa. Pri tome se funkcionalno perturbovane jednačine samo u specijalnom slučaju mogu svesti na aditivno perturbovane, dok se u specijalnom slučaju mogu svesti samo na jednu užu klasu linearno perturbovanih jednačina. Svi rezultati iz ovog poglavlja su još uvek neobjavljeni.

U prvom delu ovog poglavlja zadati su uslovi koje je neophodno da zadovoljavaju koeficijenti funkcionalno perturbovane jednačine, kao i uslovi bliskosti koeficijenata perturbovane i neperturbovane jednačine, koji obezbeđuju bliskost rešenja tih jednačina u smislu momenta $(2m)$-tog reda, kako na konačnim fiksiranim intervalima, tako i na intervalima čija dužina teži beskonačnosti kada mali parametar teži nuli.

Neke ideje primene rezultata iz prvog dela ovog poglavlja date su u nastavku poglavlja. Zbog numeričkog izračunavanja dužine intervala bliskosti rešenja zadate funkcionalno perturbovane stohastičke diferencijalne jednačine sa rešenjem odgovarajuće neperturbovane jednačine istog tipa, sve konstante koje su se u radu javljaju su precizno izračunate. Pored toga, grafički su predstavljene trajektorije rešenja jednačina koje su zadate u primeru, kao i interval bliskosti rešenja i greška aproksimacije rešenja perturbovane jednačine rešenjem odgovarajuće neperturbovane jednačine.

2.4.1. Ocene bliskosti i intervali bliskosti rešenja

Sledeći primer predstavlja jednu od osnovnih motivacija za ovaj rad.

Primer 2.4.1. Neka je data stohastička diferencijalna jednačina Itoa koja zavisi od malog parametra $\varepsilon \in (0,1)$

$$
\begin{aligned}
(2.4.1)\quad dx_t^\varepsilon &= \left[\frac{1}{3}(1-\varepsilon)x_t^\varepsilon + \frac{\sqrt{1+(x_t^\varepsilon)^2}}{8(1+t)}\sin\varepsilon\right]dt + \left[x_t^\varepsilon + e^{-\frac{1}{\varepsilon}}\ln\left(1+\frac{|x_t^\varepsilon|}{1+\varepsilon}\right)\right]dw_t,\ t\geq 0,\\
x_0^\varepsilon &= e^\varepsilon \eta, \quad \text{s.i.},
\end{aligned}
$$

gde je $w=(w_t,\, t\geq 0)$ jednodimenzionalni Wienerov proces, η slučajna promenljiva nezavisna od w, a x_t je jednodimenzionalni slučajni proces. Ova nelinearna stohastička diferencijalna jednačina, zbog složenosti svojih koeficijenata, nije efektivno rešiva. Pored toga, ona ne pripada ni jednoj od prethodno proučavanih klasa perturbovanih stohastičkih diferencijalnih jednačina. Ako se pretpostavi da početna vrednost ove jednačine zadovoljava uslov $E|\eta^\varepsilon|^{2m}$, na osnovu teoreme egzistencije i jedinstvenosti rešenja važi da je $E\{\sup_{t\in[0,T]}|x_t^\varepsilon|^{2m}\}<\infty$. Kako je ε mali parametar, cilj je uporediti rešenje ove jednačine, u smislu momenta $(2m)$-tog reda, sa rešenjem linearne stohastičke diferencijalne jednačine

$$
(2.4.2)\qquad dx_t = \frac{1}{3}x_t\,dt + x_t\,dw_t, \quad t\geq 0, \quad x_0=\eta,
$$

koja je rešiva i čije je rešenje $x_t=\eta e^{w_t-\frac{1}{6}t}$. Problem je utvrditi bliskost koeficijenata ovih jednačina tako da se obezbedi tražena bliskost rešenja x^ε i x na nekom konačnom intervalu.$\triangle$

Stohastička diferencijalna jednačina Itoa iz Primera 2.4.1 zavisi od malog parametra (*perturbovana jednačina*) i oblika je

$$
\begin{aligned}
(2.4.3)\qquad dx_t^\varepsilon &= F(a(t,x_t^\varepsilon),\zeta(t,x_t^\varepsilon,\varepsilon))\,dt + G(b(t,x_t^\varepsilon),\chi(t,x_t^\varepsilon,\varepsilon))\,dw_t, \quad t\in[0,T],\\
x_0^\varepsilon &= \eta^\varepsilon \ \text{ s.i.},
\end{aligned}
$$

gde su

$$
\begin{aligned}
&a:[0,T]\times R\to R, && b:[0,T]\times R\to R,\\
&\zeta:[0,T]\times R\times(0,1)\to R, && \chi:[0,T]\times R\times(0,1)\to R,\\
&F:R\times R\to R, && G:R\times R\to R,
\end{aligned}
$$

proizvoljne funkcije koje su Borel merljive na svojim domenima, a $w=(w_t,t\geq 0)$ jednodimenzionalni Wienerov proces saglasan sa familijom σ-polja $\{\mathcal{F}_t, t\geq 0\}$, η^ε je slučajna promenljiva nezavisna od w, a rešenje x_t^ε je jednodimenzionalni slučajni proces.

Rešenje perturbovanje jednačine (2.4.3) se upoređuje sa rešenjem stohastičke diferencijalne jednačine istog tipa (*neperturbovana jednačina*)

$$
\begin{aligned}
(2.4.4)\qquad dx_t &= a(t,x_t)\,dt + b(t,x_t)\,dw_t, \quad t\in[0,T],\\
x_0 &= \eta \ \text{ s.i.}
\end{aligned}
$$

Za početnu vrednost i koeficijente jednačine (2.4.4) važe sve pretpostavke navedene u Poglavlju 1.4, tj. zadovoljeni su uslovi Teoreme 1.4.1 egzistencije i jedinstvenosti rešenja sa konstantom L', pa jednačina (2.4.4) ima jedinstveno skoro izvesno neprekidno i $\mathcal{F}_t$-merljivo rešenje x_t koje zadovoljava uslov $E\{\sup_{t\in[0,T]}|x_t|^2\}<\infty$. Osim toga, ako je $E|\eta|^{2m}<\infty$, za $m\in N$, tada je $E\{\sup_{t\in[0,T]}|x_t|^{2m}\}<\infty$ i $E|x_t|^{2m}\leq(1+E|\eta|^{2m})\cdot e^{Ct}$, gde je C konstanta koja zavisi od m, L' i T.

Pored polaznih pretpostavki da funkcije a i b zadovoljavaju uniformni Lipschitzov uslov (1.4.3) i uslov ograničenog rasta (1.4.4), da je $E|\eta|^{2m} < \infty$, uvode se nove pretpostavke za koeficijente perturbovane jednačine (2.4.3), kao i uslovi bliskosti koeficijenata perturbovane i neperturbovane jednačine:

$\mathcal{A}_1$. Funkcije ζ i χ zadovoljavaju uniformni Lipschitzov uslov, tj. postoji konstanta $L' > 0$, tako da za svako $t \in [0,T]$ i $\varepsilon \in (0,1)$ važi

$$|\zeta(t,x,\varepsilon) - \zeta(t,y,\varepsilon)| \leq L'|x-y|, \quad |\chi(t,x,\varepsilon) - \chi(t,y,\varepsilon)| \leq L'|x-y|. \tag{2.4.5}$$

Funkcije F i G zadovoljavaju Lipschitzov uslov po obe promenljive sa konstantom L_1, tj. za svako $u_1, u_2, v_1, v_2 \in R$

$$\begin{aligned} |F(u_1,v_1) - F(u_2,v_2)| &\leq L_1(|u_1-u_2| - |v_1-v_2|), \\ |G(u_1,v_1) - G(u_2,v_2)| &\leq L_1(|u_1-u_2| + |v_1-v_2|). \end{aligned} \tag{2.4.6}$$

$\mathcal{A}_2$. Postoje funkcije $\alpha(t,x,\varepsilon)$, $\beta(t,x,\varepsilon) : [0,T] \times R \times (0,1) \to R^+$, constante $\mu, \nu \in R^+$ i $M_i, N_i \in R^+$, $i = 1,2$, tako da je

$$\begin{aligned} |F(a(t,x),\zeta(t,x,\varepsilon)) - a(t,x)| &\leq (M_1 + M_2|x|^{\mu})\alpha(t,x,\varepsilon), \\ |G(b(t,x),\chi(t,x,\varepsilon)) - b(t,x)\,| &\leq (N_1 + N_2|x|^{\nu})\beta(t,x,\varepsilon). \end{aligned} \tag{2.4.7}$$

$\mathcal{A}_3$. Za $i_1 = \mu \vee \nu$ neka je $E|\eta|^{2m(i_1 \vee 1)} < \infty$ i $E|\eta^{\varepsilon}|^{2m} < \infty$. Postoji neslučajna vrednost $\delta_0(\varepsilon)$, tako da je

$$E|\eta^{\varepsilon} - \eta|^{2m} \leq \delta_0(\varepsilon).$$

$\mathcal{A}_4$. Postoje neprekidne funkcije $\delta : [0,T] \times (0,1) \to R^+$ i $\gamma : [0,T] \times (0,1) \to R^+$, tako da je

$$\sup_{x\in R} \alpha(t,x,\varepsilon) \leq \delta(t,\varepsilon), \qquad \sup_{x\in R} \beta(t,x,\varepsilon) \leq \gamma(t,\varepsilon). \tag{2.4.8}$$

$\mathcal{A}_5$. Postoji skoro izvesno neprekidno i neanticipativno rešenje x^{ε} jednačine (2.4.3) koje zadovoljava uslov $E\{\sup_{t\in[0,T]} |x_t^{\varepsilon}|^{2m}\} < \infty$.

Napomena 2.4.1. Jednačina (2.4.3) predstavlja uopštenje u odnosu na jednačine razmatrane, na primer, u radovima [28], [40]. U slučaju kada je $F(a,\zeta) = a + \zeta$, $G(b,\chi) = b + \chi$, pri tome su ζ i χ male perturbacije, problem se može svesti na onaj proučavan u radovima [75], [34], [33]. S druge strane, jednačina (2.4.3) nije u potpunosti uopštenje rada [28], već uopštenje važi samo u slučajevima kada je $F(a,\zeta) = (1+\zeta)a + \zeta$, $G(b,\chi) = (1+\chi)b + \chi$.

S obzirom na uvedene pretpostavke $\mathcal{A}_1$–$\mathcal{A}_5$, potrebno je naći globalnu ocenu bliskosti rešenja x^{ε} i x, u smislu momenta $(2m)$-tog reda. Ta ocena je data u sledećoj propoziciji.

Propozicija 2.4.1. *Neka su x^{ε} i x rešenja jednačina (2.4.3) i (2.4.4) respektivno i neka su zadovoljene pretpostavke $\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_5$ i uslovi (1.4.3) i (1.4.4). Označimo sa $\varphi_t^{\mu} = E|x_t|^{2m\mu}$ i $\varphi_t^{\nu} = E|x_t|^{2m\nu}$. Tada je za $t \in [0,T]$*
(i) za $m > 1$,

$$E|x_t^{\varepsilon} - x_t|^{2m} \leq \left[\delta_0^{\frac{1}{m}}(\varepsilon) e^{\int_0^t \psi(s,\varepsilon,\mu)ds} + \int_0^t [p(s,\varepsilon,\mu) + q(s,\varepsilon,\nu)] e^{\int_s^t \psi(r,\varepsilon,\mu)dr} ds\right]^m, \tag{2.4.9}$$

gde je

$$\begin{aligned} &\psi(t,\varepsilon,\mu) = D + p(t,\varepsilon,\mu),\ D = 2L(1+(2m-1)L),\ L = L'L_1, \\ (2.4.10)\qquad &p(t,\varepsilon,\mu) = 2\left(M_1 + M_2\,(\varphi_t^{\mu})^{\frac{1}{2m}}\right)\delta(t,\varepsilon), \\ &q(t,\varepsilon,\nu) = 4(2m-1)\left(N_1^2 + N_2^2\,(\varphi_t^{\nu})^{\frac{1}{m}}\right)\gamma^2(t,\varepsilon); \end{aligned}$$

(ii) *za* $m = 1$,

$$(2.4.11)\qquad E|x_t^{\varepsilon} - x_t|^2 \le 3\left[\delta_0(\varepsilon) + 3\int_0^t [tp_1(s,\varepsilon,\mu) + q_1(s,\varepsilon,\nu)]\,ds\right] e^{3L^2(t+1)t},$$

gde je

$$(2.4.12)\qquad p_1(t,\varepsilon,\mu) = \left[M_1^2 + M_2^2\varphi_t^{\mu}\right]\delta^2(t,\varepsilon), \qquad q_1(t,\varepsilon,\nu) = \left[N_1^2 + N_2^2\varphi_t^{\nu}\right]\gamma^2(t,\varepsilon).$$

Dokaz. Uvedimo oznake $z_t^{\varepsilon} = x_t^{\varepsilon} - x_t$ i $\Delta_t^{\varepsilon} = E|z_t^{\varepsilon}|^{2m}$, kao u prethodnim poglavljima.

(i) Neka je $m > 1$. Ako se od jednačine (2.4.3) oduzme jednačina (2.4.4) i primeni Itova formula za stohastičko diferenciranje na $(z_t^{\varepsilon})^{2m}$, dobija se

$$(z_t^{\varepsilon})^{2m} = (z_0^{\varepsilon})^{2m} + 2mI_1(t) + m(2m-1)I_2(t) + 2mI_3(t), \quad t \in [0,T],$$

gde je

$$\begin{aligned} I_1(t) &= \int_0^t [F(a(s,x_s^{\varepsilon}),\zeta(s,x_s^{\varepsilon},\varepsilon)) - a(s,x_s)]\,(z_s^{\varepsilon})^{2m-1}\,ds, \\ I_2(t) &= \int_0^t [G(b(s,x_s^{\varepsilon}),\chi(s,x_s^{\varepsilon},\varepsilon)) - b(s,x_s)]^2\,(z_s^{\varepsilon})^{2m-2}\,ds, \\ I_3(t) &= \int_0^t [G(b(s,x_s^{\varepsilon}),\chi(s,x_s^{\varepsilon},\varepsilon)) - b(s,x_s)]\,(z_s^{\varepsilon})^{2m-1}\,dw_s. \end{aligned}$$

Za svako $t \in [0,T]$ je $EI_3(t) = 0$, pa je

$$(2.4.13)\qquad \Delta_t^{\varepsilon} = \delta_0(\varepsilon) + 2mEI_1(t) + m(2m-1)EI_2(t), \quad t \in [0,T].$$

Potrebno je oceniti sabirke $EI_1(t)$ i $EI_2(t)$.

$$\begin{aligned} EI_1(t) &= E\int_0^t [\,F(a(s,x_s^{\varepsilon}),\zeta(s,x_s^{\varepsilon},\varepsilon)) - a(s,x_s)]\,(z_s^{\varepsilon})^{2m-1}ds \\ &\le E\int_0^t [|F(a(s,x_s^{\varepsilon}),\zeta(s,x_s^{\varepsilon},\varepsilon)) - F(a(s,x_s),\zeta(s,x_s,\varepsilon))| \\ (2.4.14)\qquad &\qquad + |F(a(s,x_s),\zeta(s,x_s,\varepsilon)) - a(s,x_s)|]\,|z_s^{\varepsilon}|^{2m-1}ds. \end{aligned}$$

Analogno, primenom nejednakosti (1.8.2) dobija se

$$\begin{aligned} (2.4.15)\qquad EI_2(t) \le 2E\int_0^t \Big[\,&|G(b(s,x_s^{\varepsilon}),\chi(s,x_s^{\varepsilon},\varepsilon)) - G(b(s,x_s),\chi(s,x_s,\varepsilon))|^2 \\ &+ |G(b(s,x_s),\chi(s,x_s,\varepsilon)) - b(s,x_s)|^2\Big]\,|z_s^{\varepsilon}|^{2m-2}ds. \end{aligned}$$

Ako se u izrazu (2.4.14) primeni Lipschitzov uslov (2.4.6), a zatim (1.4.3) i (2.4.5) i nejednakost (2.4.7), važi

$$EI_1(t) \leq L\int_0^t \Delta_s^\varepsilon\, ds + E\int_0^t (M_1 + M_2|x_s|^\mu)\,\alpha(s,x_s,\varepsilon)\cdot|z_s^\varepsilon|^{2m-1}ds,$$

gde je $L = L'L_1$. Korišćenjem pretpostavke (2.4.8) i Hölderove nejednakosti za $p = 2m$, $q = \frac{2m}{2m-1}$, može se zaključiti da je

$$\begin{aligned} EI_1(t) &\leq L\int_0^t \Delta_s^\varepsilon\, ds + \int_0^t \left[M_1 + M_2\left(E|x_s|^{2m\mu}\right)^{\frac{1}{2m}}\right]\delta(s,\varepsilon)\,(\Delta_s^\varepsilon)^{\frac{2m-1}{2m}}\, ds \\ &= L\int_0^t \Delta_s^\varepsilon\, ds + \int_0^t \left[\,M_1 + M_2\,(\varphi_s^\mu)^{\frac{1}{2m}}\right]\delta(s,\varepsilon)\,(\Delta_s^\varepsilon)^{\frac{2m-1}{2m}}\, ds. \end{aligned} \tag{2.4.16}$$

Slično, na osnovu pretpostavke $\mathcal{A}_1$, tj. nejednakosti (2.4.6) i (2.4.5), zatim Lipschitzovog uslova (1.4.3), pretpostavke (2.4.8) kao i Hölderove nejednakosti za $p = m$, $q = \frac{m}{m-1}$, dobija se ocena za (2.4.15),

$$\begin{aligned} EI_2(t) &\leq 2L^2\int_0^t \Delta_s^\varepsilon\, ds + 2\int_0^t E\,(N_1 + N_2|x_s|^\nu)^2\,\gamma^2(s,\varepsilon)\cdot|z_s^\varepsilon|^{2m-2}ds \\ &\leq 2L^2\int_0^t \Delta_s^\varepsilon\, ds + 4\int_0^t \left[\,N_1^2 + N_2^2\,(\varphi_s^\nu)^{\frac{1}{m}}\right]\gamma^2(s,\varepsilon)\,(\Delta_s^\varepsilon)^{\frac{m-1}{m}}\, ds. \end{aligned} \tag{2.4.17}$$

Izraz (2.4.13) zajedno sa (2.4.16) i (2.4.17) implicira da je za svako $t \in [0,T]$,

$$\Delta_t^\varepsilon \leq \delta_0(\varepsilon) + mD\int_0^t \Delta_s^\varepsilon\, ds + m\int_0^t \left[\,p(s,\varepsilon,\mu)\,(\Delta_s^\varepsilon)^{\frac{2m-1}{2m}} + q(s,\varepsilon,\nu)\,(\Delta_s^\varepsilon)^{\frac{m-1}{m}}\right] ds,$$

pri čemu je $D = 2L(1 + (2m-1)L)$, dok su funkcije $p(t,\varepsilon,\mu)$ i $q(t,\varepsilon,\nu)$ date sa (2.4.10).

Ako se na poslednju nejednakost primeni nejednakost (1.8.5) za $a = \Delta_s^\varepsilon$, $r_1 = \frac{m-1}{m}$, $r_2 = \frac{2m-1}{2m}$, dobija se $(\Delta_s^\varepsilon)^{\frac{2m-1}{2m}} \leq (\Delta_s^\varepsilon)^{\frac{m-1}{m}} + \Delta_s^\varepsilon$, tako da ona postaje

$$\Delta_t^\varepsilon \leq \delta_0(\varepsilon) + m\int_0^t [D + p(s,\varepsilon,\mu)]\Delta_s^\varepsilon\, ds + m\int_0^t [\,p(s,\varepsilon,\mu) + q(s,\varepsilon,\nu)]\,(\Delta_s^\varepsilon)^{\frac{m-1}{m}}\, ds.$$

Kako je ova nejednakost oblika (1.8.8), posle primene uopštene Gronwall–Bellmanove nejednakosti direktno se dobija (2.4.9), čime je dokazan prvi deo propozicije.

(ii) Neka je $m = 1$. Ako se na izraz

$$\begin{aligned} z_t^\varepsilon = \eta^\varepsilon - \eta &+ \int_0^t [F(a(s,x_s^\varepsilon),\zeta(s,x_s^\varepsilon,\varepsilon)) - a(s,x_s)]\, ds \\ &+ \int_0^t [G(b(s,x_s^\varepsilon),\chi(s,x_s^\varepsilon,\varepsilon)) - b(s,x_s)]\, dw_s \end{aligned}$$

primeni nejednakost (1.8.3), Schwarzova nejednakost i osobine izometrije Itovog integrala, dobiće se

$$\Delta_t^\varepsilon \leq 3\left[\delta_0(\varepsilon) + E\left(\int_0^t [\,F(a(s,x_s^\varepsilon),\zeta(s,x_s^\varepsilon,\varepsilon)) - a(s,x_s)]\ ds\right)^2\right.$$

$$
\begin{aligned}
&\qquad\qquad +E\left(\int_0^t \left[\, G(b(s,x_s^\varepsilon),\chi(s,x_s^\varepsilon,\varepsilon)) - b(s,x_s)\right] dw_s\right)^2\Bigg]\\
&\le 3\left[\delta_0(\varepsilon) + t\int_0^t E\left[\,|\, F(a(s,x_s^\varepsilon),\zeta(s,x_s^\varepsilon,\varepsilon)) - F(a(s,x_s),\zeta(s,x_s,\varepsilon))|\right.\right.\\
&\qquad\qquad \left. +|\, F(a(s,x_s),\zeta(s,x_s,\varepsilon)) - a(s,x_s)|\,\right]^2 ds\\
&\qquad + \int_0^t E\left[\,|\, G(b(s,x_s^\varepsilon),\chi(s,x_s^\varepsilon,\varepsilon)) - G(b(s,x_s),\chi(s,x_s,\varepsilon))|\right.\\
&\qquad\qquad \left.\left. +|\, G(b(s,x_s),\chi(s,x_s,\varepsilon)) - b(s,x_s)|\,\right]^2 ds\right].
\end{aligned}
$$

Sada se mogu primeniti pretpostavke (2.4.6) i (2.4.5), Lipshitzov uslov (1.4.3), a zatim (1.8.3) i (2.4.8), tako da važi

$$
\begin{aligned}
\Delta_t^\varepsilon &\le 3\left\{\delta_0(\varepsilon) + t\int_0^t E\left[\,(M_1 + M_2|x_s|^\mu)\,\alpha(s,x_s,\varepsilon) + L|x_s^\varepsilon - x_s|\,\right]^2 ds\right.\\
&\qquad \left. + \int_0^t E\left[\,(N_1 + N_2|x_s|^\nu)\,\beta(s,x_s,\varepsilon) + L|x_s^\varepsilon - x_s|\,\right]^2 ds\right\}\\
&\le 3\left\{\delta_0(\varepsilon) + 3L^2(t+1)\int_0^t \Delta_s^\varepsilon ds + 3t\int_0^t \left[\, M_1^2 + M_2^2\varphi_s^\mu\right]\delta^2(s,\varepsilon)ds\right.\\
&\qquad \left. +3\int_0^t \left[\, N_1^2 + N_2^2\varphi_s^\nu\right]\gamma^2(s,\varepsilon)ds\right\}.
\end{aligned}
$$

Neka su izrazima (2.4.12) uvedene funkcije $p_1(t,\varepsilon,\mu)$ i $q_1(t,\varepsilon,\nu)$, za $t\in[0,T]$. Tada prethodna nejednakost postaje

$$
\Delta_t^\varepsilon \le 3\left\{\delta_0(\varepsilon) + 3\int_0^t \left[\, tp_1(s,\varepsilon,\mu) + q_1(s,\varepsilon,\nu)\,\right] ds\right\} + 9L^2(t+1)\int_0^t \Delta_s^\varepsilon ds.
$$

Kako je ova nejednakost oblika (1.8.7), ocena (2.4.11) se jednostavno dobija primenom Gronwall–Bellmanove nejednakosti.

Ovim je dokaz propozicije kompletan. □

Pošto ocene (2.4.9) i (2.4.11) zavise od φ_t^μ, odnosno φ_t^ν, potrebno je oceniti ove veličine. Kao što je ranije istaknuto, u literaturi se može naći ocena momenta $(2m)$-tog reda rešenja stohastičke diferencijalne jednačine Itoa (videti, na primer, [56], [17]). Analogno se može naći ocena momenta $(2m\mu)$-tog reda, gde je μ proizvoljan pozitivan broj, ali će u tom slučaju konstante, koje se u toj oceni javljaju, zavisiti od T. Kako je za nalaženje intervala bliskosti rešenja x_t^ε i x_t neophodno oceniti $E|x_t^\varepsilon - x_t|^{2m\mu}$ konstantama koje ne zavise od T, ovde je ocenjen moment $2m\mu$-tog reda rešenja neperturbovane jednačine, konstantama koje ne zavise od T.

Propozicija 2.4.2. *Neka je x rešenje jednačine (2.4.4) i neka su zadovoljene pretpostavke (1.4.3), (1.4.4) i $\mathcal{A}_3$. Tada, za svako $t\in[0,T]$ važi:*

(i) za $m>1,\ \mu\ge 1$, kao i za $m=1,\ \mu>1$, važi ocena

(2.4.18) $$E|x_t|^{2m\mu} \le H_\mu^{m\mu}\cdot e^{m\mu B_\mu t},$$

gde je

$$a_\mu = 2^{\frac{m\mu-1}{2m\mu}}, \quad H_\mu = \left(E|\eta|^{2m\mu}\right)^{\frac{1}{m\mu}} + \frac{C_\mu}{B_\mu}, \tag{2.4.19}$$
$$B_\mu = L'(4a_\mu + (2m\mu-1)L'), \quad C_\mu = L'(2a_\mu + (2m\mu-1)L');$$

(ii) *za* $m > 1$ *i* $0 < \mu < 1$, *važi ocena (2.4.18) sa konstantama (2.4.19) za* $\mu = 1$;

(iii) *za* $m = 1$ *i* $0 < \mu \le 1$, *važi*

$$E|x_t|^{2\mu} \le D_\mu \left[G_\mu + L'^{2\mu}(t^{2\mu} + t^\mu)\right] \cdot e^{3\mu L'^2(t^2+t)}, \tag{2.4.20}$$

gde je $D_\mu = 3^\mu$, $G_\mu = \left(E|\eta|^2\right)^\mu$.

Dokaz. (i) Neka je $m > 1$ i $\mu \ge 1$. Polazeći od jednačine (2.4.3) uz pretpostavku da važi $\mathcal{A}_3$, primenjujući Itovu formulu za stohastičko diferenciranje na $(x_t)^{2m\mu}$, dobija se

$$\varphi_t^\mu = E|x_t|^{2m\mu} = E|\eta|^{2m\mu} + 2m\mu\, EJ_1(t) + m\mu(2m\mu-1)\, EJ_2(t), \quad t \in [0,T], \tag{2.4.21}$$

gde je $J_1(t) = \int_0^t a(s,x_s)\,(x_s)^{2m\mu-1}ds$, $J_2(s) = \int_0^t b^2(s,x_s)\,(x_s)^{2m\mu-2}ds$. Za ocenu $EJ_1(t)$ primenjuje se Hölderova nejednakost za $p = 2m\mu$, $q = \frac{2m\mu}{2m\mu-1}$ a zatim uslov ograničenog rasta funkcije a, dakle (1.4.4), i nejednakost (1.8.2). U tom slučaju je

$$\begin{aligned} EJ_1(t) &\le \int_0^t (E|\,a(s,x_s)|^{2m\mu})^{\frac{1}{2m\mu}}\,(\varphi_s^\mu)^{\frac{2m\mu-1}{2m\mu}}ds \\ &\le a_\mu L' \int_0^t \left[1 + (\varphi_s^\mu)^{\frac{1}{2m\mu}}\right](\varphi_s^\mu)^{\frac{2m\mu-1}{2m\mu}}ds \\ &= a_\mu L' \left[\int_0^t \varphi_s^\mu ds + \int_0^t (\varphi_s^\mu)^{\frac{2m\mu-1}{2m\mu}}ds\right], \end{aligned} \tag{2.4.22}$$

gde je $a_\mu = 2^{\frac{m\mu-1}{2m\mu}}$. Slično, primenom Hölderove nejednakosti za $p = m\mu$, $q = \frac{m\mu}{m\mu-1}$, istim postupkom se dobija ocena

$$EJ_2(t) \le L'^2 \left(\int_0^t \varphi_s^\mu ds + \int_0^t (\varphi_s^\mu)^{\frac{m\mu-1}{m\mu}}ds\right). \tag{2.4.23}$$

Ako se (2.4.21) majorira sa (2.4.22) i (2.4.23), pa potom primeni nejednakost (1.8.5), pri čemu je $(\varphi_s^\mu)^{\frac{2m\mu-1}{2m\mu}} \le (\varphi_s^\mu)^{\frac{m\mu-1}{m\mu}} + \varphi_s^\mu$, dobija se

$$\varphi_t^\mu \le E|\eta|^{2m\mu} + m\mu B_\mu \int_0^t \varphi_s^\mu\, ds + m\mu C_\mu \int_0^t (\varphi_s^\mu)^{\frac{m\mu-1}{m\mu}}ds, \quad t \in [0,T],$$

gde je $B_\mu = L'(4a_\mu + (2m\mu-1)L')$, $C_\mu = L'(2a_\mu + (2m\mu-1)L')$. S obzirom da je poslednja nejednakost oblika (1.8.8), posle primene uopštene nejednakosti Gronwall–Bellmana sledi ocena

$$(\varphi_t^\mu)^{\frac{1}{m\mu}} \le (E|\eta|^{2m\mu})^{\frac{1}{m\mu}} \cdot e^{B_\mu t} + \int_0^t C_\mu e^{B_\mu(t-s)}ds, \; t \in [0,T],$$

tako da je

$$\varphi_t^\mu \le \left[\left(E|\eta|^{2m\mu}\right)^{\frac{1}{m\mu}} + \frac{C_\mu}{B_\mu}\right]^{m\mu} \cdot e^{m\mu B_\mu t}. \tag{2.4.24}$$

Za $m = 1$ i $\mu > 1$ primenom istog postupka dobiće se ocena (2.4.18), čime je završen dokaz za navedeni slučaj.

(ii) Neka je $m > 1$ i $0 < \mu < 1$. Potrebno je primeniti nejednakost Ljapunova [49] koja glasi: Ako postoji $E|X|^p$ za neko $p > 0$, tada za svako $0 < q \le p$ važi

$$(E|X|^q)^{\frac{1}{q}} \le (E|X|^p)^{\frac{1}{p}},$$

za $q = 2m\mu$ i $p = 2m$, pa se dobija

$$\varphi_t^\mu \le \Big(E|x_t|^{2m}\Big)^\mu.$$

Tada na osnovu ocene (2.4.18) za $m > 1$ i $\mu = 1$, važi

$$\varphi_t^\mu \le H_1^{m\mu} e^{m\mu B_1 t},$$

što dokazuje tvrđenje za navedeni slučaj.

(iii) Neka je $m = 1$ i $0 < \mu \le 1$. Označimo sa $\sigma_t = E|x_t|^2$. Posle primene nejednakosti Lyapunova za $q = 2\mu$, $p = 2$, sledi

$$\varphi_t^\mu \le (\sigma_t)^\mu. \tag{2.4.25}$$

Međutim, kako je

$$\begin{aligned}\sigma_t &\le 3\left[E|\eta|^2 + E\Big(\int_0^t a(s,x_s)\,ds\Big)^2 + E\Big(\int_0^t b(s,x_s)\,dw_s\Big)^2\right]\\ &\le 3\left[E|\eta|^2 + L'^2 t(t+1) + L'^2(t+1)\int_0^t \sigma_s\,ds\right],\end{aligned}$$

poslednja nejednakost je oblika (1.8.7), tako da se primenom nejednakosti Gronwall–Bellmana jednostavno dobija ocena

$$\sigma_t \le 3\left[E|\eta|^2 + L'^2 t(t+1)\right] e^{3L'^2 t(t+1)},$$

što uz izraz (2.4.25) dokazuje tvrđenje. $\square$

Primetimo da se u Propoziciji 2.4.2, u slučaju kada je $m > 1$, ocena (2.4.18) može zapisati na sledeći način:

$$\varphi_t^\mu = E|x_t|^{2m\mu} \le H_{\mu\vee 1}^{m\mu} \cdot e^{m\mu B_{\mu\vee 1} t}, \quad t \in [0,T]. \tag{2.4.26}$$

Kako je osnovna ideja da se postave uslovi pri kojima $\sup E|x_t^\varepsilon - x_t|^{2m} \to 0$ kada $\varepsilon \to 0$ na konačnim intervalima ili na intervalima čija dužina teži beskonačnosti, logično je pretpostaviti da funkcije $\delta_0(\varepsilon), \delta(\varepsilon), \gamma(\varepsilon)$ teže nuli kada $\varepsilon \to 0$. Otuda i ime *male perturbacije* za funkcije $\eta^\varepsilon, \alpha(\cdot), \beta(\cdot)$. Sledeća teorema sledi neposredno iz Propozicije 2.4.1.

Teorema 2.4.1. *Neka su zadovoljeni uslovi Propozicije 2.4.1 i neka funkcije* $\delta_0(\cdot)$, $\delta(\cdot)$, $\gamma(\cdot)$ *monotono teže nuli kada* ε *teži nuli, uniformno na intervalu* $[0,T]$. *Tada*

$$\sup_{t\in[0,T]} E|x_t^\varepsilon - x_t|^{2m} \to 0 \quad \text{kada} \quad \varepsilon \to 0.$$

Dokaz. S obzirom na pretpostavke ove teoreme,

$$\overline{\delta}(\varepsilon) = \sup_{t\in[0,T]} \delta(t,\varepsilon), \qquad \overline{\gamma}(\varepsilon) = \sup_{t\in[0,T]} \gamma(t,\varepsilon).$$

Za $m>1$ neka je

$$\phi(\varepsilon) = \max\left\{\delta_0^{\frac{1}{m}}, \overline{\delta}(\varepsilon), \overline{\gamma}^2(\varepsilon)\right\}. \tag{2.4.27}$$

Tada postoji pozitivna konstanta $\varepsilon_0 \in (0,1)$, takva da je $\phi(\varepsilon) < 1$ za svako $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$. Pri navedenim pretpostavkama, na osnovu (2.4.27) sledi da $\phi(\varepsilon) \to 0$ kada $\varepsilon \to 0$, pa postoji pozitivan broj $\rho \in (0,1)$, tako da je $\phi(\varepsilon) \le \rho$ za $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$. Pošto je vremenski interval konačan, a μ,ν su konačne konstante, iz (2.4.26) i pretpostavke $\mathcal{A}_3$ sledi $\sup_{t\in[0,T]}(\varphi_t^\mu)^{\frac{1}{2m}} = \text{const} < \infty$. Tada na osnovu (2.4.10) sledi

$$\sup_{t\in[0,T]} p(t,\varepsilon,\mu) \le \phi(\varepsilon) P(T,\mu) = \text{const} < \infty,$$
$$\sup_{t\in[0,T]} q(t,\varepsilon,\nu) \le \phi(\varepsilon) Q(T,\nu) = \text{const} < \infty,$$

i

$$\psi(t,\varepsilon,\mu) \le D + 2\rho\left(M_1 + M_2 \sup_{t\in[0,T]} (\varphi_t^\mu)^{\frac{1}{2m}}\right) = \Psi(T,\mu).$$

Sada se za (2.4.9) može zaključiti sledeće:

$$\left\{\sup_{t\in[0,T]} E|x_t^\varepsilon - x_t|^{2m}\right\}^{\frac{1}{m}} \le \phi(\varepsilon)\left[1 + (P(T,\mu) + Q(T,\nu))T\right] \cdot e^{\Psi(T,\mu)T} \to 0 \quad \text{kada} \quad \varepsilon \to 0.$$

Slično, za $m = 1$ neka je

$$\phi(\varepsilon) = \max\left\{\delta_0(\varepsilon), \overline{\delta}^2(\varepsilon), \overline{\gamma}^2(\varepsilon)\right\}, \tag{2.4.28}$$

pri čemu postoji pozitivna konstanta $\varepsilon \in (0,1)$, takva da je $\phi(\varepsilon) < 1$ za svako $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$. Kako $\phi(\varepsilon) \to 0$ kada $\varepsilon \to 0$, na osnovu (2.4.11) sledi

$$\sup_{t\in[0,T]} E|x_t^\varepsilon - x_t|^2 \le 3\phi(\varepsilon)\cdot\left[1 + 3T^2\left(M_1^2 + M_2^2 \sup_{t\in[0,T]} \varphi_t^\mu\right) + 3T\left(N_1^2 + N_2^2 \sup_{t\in[0,T]} \varphi_t^\nu\right)\right]$$
$$\times e^{3L^2(T^2+T)} \to 0 \text{ kada } \varepsilon \to 0,$$

čime je dokaz završen. □

Ocene dobijene za $E|x_t|^{2m\mu}$ i $E|x_t^\varepsilon - x_t|^{2m}$ važe na konačnom intervalu $[0,T]$, pri čemu sve konstante koje se u tim ocenama javljaju ne zavise od T i ε. Očigledno, ako je $T=\infty$, tada prethodna razmatranja generalno ne važe. Kao u prethodnim poglavljima, potrebno je kontruisati konačne intervale koji zavise od ε, čija će dužina težiti beskonačnosti kada ε teži nuli, tako da rešenja x_t^ε i x_t budu bliska u smislu momenta $(2m)$-tog reda na tim intervalima.

Teorema 2.4.2. *Neka su zadovoljeni uslovi Teoreme 2.4.1 za $t \in [0,\infty)$. Tada postoji segment $[0,T_\varepsilon]$, tako da*

$$\sup_{t\in[0,T_\varepsilon]} E|x_t^\varepsilon - x_t|^{2m} \to 0 \quad \text{kada} \quad \varepsilon \to 0,$$

gde je, za proizvoljan broj $r\in(0,1)$ i dovoljno malo ε:

(i) za $m>1$,

$$T_\varepsilon = \frac{2}{\mu B_{\mu\vee 1}} \cdot \ln\left(-\frac{r}{d_{\mu\vee 1}} \ln\phi(\varepsilon)\right), \tag{2.4.29}$$

pri čemu je $d_{\mu\vee 1} = \dfrac{4M_2 H_{\mu\vee 1}^{\frac{\mu}{2}}\rho}{\mu B_{\mu\vee 1}}$, a $\phi(\varepsilon)$ je dato sa (2.4.27);

(ii) za $m=1$ i $i_2 = \mu\wedge\nu$,

$$T_\varepsilon = \sqrt{\frac{-r\ln\phi(\varepsilon)}{3(L^2+l)}} - \frac{3L^2+k}{6(L^2+l)}, \tag{2.4.30}$$

gde je

$$k = \begin{cases} i_1 B_{i_1}, & i_2 > 1, \\ \max\{i_1 B_{i_1}, 3 i_2 L'^2\}, & i_2 \le 1 < i_1, \\ i_1 L'^2, & i_1 \le 1 \end{cases}, \qquad l = \begin{cases} i_2 L'^2, & i_2 \le 1 < i_1, \\ 0, & \textit{inače} \end{cases},$$

pri čemu je $\phi(\varepsilon)$ dato sa (2.4.28).

Dokaz. Potrebno je efektivno odrediti konačan interval $[0,T_\varepsilon]$, tako da $E|x_t^\varepsilon - x_t|^{2m} \to 0$ kada $\varepsilon\to 0$ za svako $t\in[0,T_\varepsilon]$.

(i) Neka je $m>1$. Na osnovu (2.4.10), (2.4.26) i (2.4.27), a na osnovu činjenice da je $\phi(\varepsilon)\le\rho$ za svako $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$, sledi

$$\begin{aligned}\int_0^t \psi(s,\varepsilon,\mu)ds &\le \int_0^t \left[D + 2\rho\left(M_1 + M_2(\varphi_t^\mu)^{\frac{1}{2m}}\right)\right] ds \\ &\le Rt + 2\rho M_2 H_{\mu\vee 1}^{\frac{\mu}{2}} \int_0^t e^{\frac{\mu}{2}B_{\mu\vee 1}s} ds \\ &\le Rt + d_{\mu\vee 1} e^{\frac{\mu}{2}B_{\mu\vee 1}t},\end{aligned} \tag{2.4.31}$$

pri čemu je $R = D + 2M_1\rho$ i $d_{\mu\vee 1} = \dfrac{4M_2 H_{\mu\vee 1}^{\frac{\mu}{2}}\rho}{\mu B_{\mu\vee 1}}$.

S druge strane, na osnovu (2.4.10), (2.4.27) i Propozicije 2.4.2 važi sledeća ocena:

$$\int_0^t (p(s,\varepsilon,\mu)+q(s,\varepsilon,\nu))\, e^{\int_s^t \psi(r,\varepsilon,\mu)dr} \le \frac{2}{R}\phi(\varepsilon)\cdot e^{Rt+d_{\mu\vee 1}e^{\frac{\mu}{2}B_{\mu\vee 1}t}}$$
$$\times\left(M_1+2(2m-1)N_1^2+M_2H_{\mu\vee 1}^{\frac{\mu}{2}}e^{\frac{\mu}{2}B_{\mu\vee 1}t}+2(2m-1)N_2^2H_{\nu\vee 1}^{\nu}e^{\nu B_{\nu\vee 1}t}\right). \tag{2.4.32}$$

Na osnovu ocena (2.4.31) i (2.4.32), iz (2.4.9) se lako dobija

$$\left\{\sup_{t\in[0,T_\varepsilon]} E|x_t^\varepsilon - x_t|^{2m}\right\}^{\frac{1}{m}} \le \phi(\varepsilon)\cdot e^{RT_\varepsilon+d_{\mu\vee 1}e^{\frac{\mu}{2}B_{\mu\vee 1}T_\varepsilon}} \tag{2.4.33}$$
$$\times\left[1+\frac{2}{R}\left(M_1+2(2m-1)N_1^2+M_2H_{\mu\vee 1}^{\frac{\mu}{2}}e^{\frac{\mu}{2}B_{\mu\vee 1}T_\varepsilon}+2(2m-1)N_2^2H_{\nu\vee 1}^{\nu}e^{\nu B_{\nu\vee 1}T_\varepsilon}\right)\right].$$

Cilj je da se efektivno izračuna T_ε u odnosu na $\phi(\varepsilon)$, za $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$, tako da (2.4.33) teži nuli kada $\varepsilon\to 0$. Pošto je član sa najvećom brzinom rasta u ovom izrazu $e^{d_{\mu\vee 1}\cdot e^{\frac{\mu}{2}B_{\mu\vee 1}T_\varepsilon}}$, zahtevaćemo da za bilo koje $r\in(0,1)$ važi

$$d_{\mu\vee 1}\cdot e^{\frac{\mu}{2}B_{\mu\vee 1}T_\varepsilon} = -r\ln\phi(\varepsilon),$$

Tako T_ε ima oblik (2.4.29) i $T_\varepsilon\to\infty$ kada $\varepsilon\to 0$. Ako se ima u vidu (2.4.33) i (2.4.29), sledi da je

$$\sup_{t\in[0,T_\varepsilon]} E|x_t^\varepsilon - x_t|^{2m} \le (\phi(\varepsilon))^{(1-r)m}\left(-\frac{r}{d_{\mu\vee 1}}\ln\phi(\varepsilon)\right)^{\frac{2Rm}{\mu B_{\mu\vee 1}}}$$
$$\times\left\{1+\frac{2}{R}\left[M_1+M_2H_{\mu\vee 1}^{\frac{\mu}{2}}\left(-\frac{r\ln\phi(\varepsilon)}{d_{\mu\vee 1}}\right)\right.\right. \tag{2.4.34}$$
$$\left.\left.+2(2m-1)\left(N_1^2+N_2^2H_{\nu\vee 1}^{\nu}\left(-\frac{r\ln\phi(\varepsilon)}{d_{\mu\vee 1}}\right)^{\frac{2\nu B_{\nu\vee 1}}{\mu B_{\mu\vee 1}}}\right)\right]\right\}^m.$$

Kako za $k>0$, $(\phi(\varepsilon))^{1-r}(\ln\phi(\varepsilon))^k\to 0$ kada $\varepsilon\to 0$, očigledno je da iz (2.4.34) direktno sledi dokaz prvog dela teoreme.

(ii) Neka je $m=1$. U ovom slučaju ocena T_ε zavisi od i_1 i i_2.

(a) Ako je $i_2>1$, na osnovu Propozicije 2.4.2 sledi

$$\varphi_t^\mu \le H_\mu^\mu\cdot e^{\mu B_\mu t}, \qquad \varphi_t^\nu \le H_\nu^\nu\cdot e^{\nu B_\nu t}.$$

Imajući u vidu ocenu (2.4.11) iz Propozicije 2.4.1 i (2.4.28), dobija se da je

$$\sup_{t\in[0,T_\varepsilon]} E|x_t^\varepsilon - x_t|^2$$
$$\le 3\phi(\varepsilon)\cdot e^{3L^2(T_\varepsilon^2+T_\varepsilon)}\left(1+3M_1^2T_\varepsilon^2+3N_1^2T_\varepsilon+3\frac{M_2^2H_\mu^\mu}{\mu B_\mu}T_\varepsilon\cdot e^{\mu B_\mu T_\varepsilon}+3\frac{N_2^2H_\nu^\nu}{\nu B_\nu}\cdot e^{\nu B_\nu T_\varepsilon}\right).$$

Pošto je član sa najvećom brzinom rasta $e^{3L^2T_\varepsilon^2+(i_1B_{i_1}+3L^2)T_\varepsilon}$ i pošto važi nejednakost

$$3L^2T_\varepsilon^2+(i_1B_{i_1}+3L^2)T_\varepsilon \le \left[\sqrt{3}L\cdot T_\varepsilon+\frac{\sqrt{3}L}{2}+\frac{i_1B_{i_1}}{2\sqrt{3}L}\right]^2,$$

za proizvoljno $r \in (0,1)$ se može zahtevati da bude

$$\left[\sqrt{3}L \cdot T_\varepsilon + \frac{\sqrt{3}L}{2} + \frac{i_1 B_{i_1}}{2\sqrt{3}L}\right]^2 = -r \ln \phi(\varepsilon).$$

Odatle T_ε ima oblik (2.4.30) i tada je

$$(2.4.35)\quad \sup_{t\in[0,T_\varepsilon]} E|x_t^\varepsilon - x_t|^2 \le 3(\phi(\varepsilon))^{1-r} e^{-i_1 B_{i_1} T_\varepsilon} \cdot \left[1 + 3M_1^2 T_\varepsilon^2 + 3N_1^2 T_\varepsilon\right]$$
$$+ 9(\phi(\varepsilon))^{1-r}\, \frac{M_2^2 H_\mu^\mu}{\mu B_\mu} T_\varepsilon \cdot e^{(\mu B_\mu - i_1 B_{i_1})T_\varepsilon} + 9(\phi(\varepsilon))^{1-r}\, \frac{N_2^2 H_\nu^\nu}{\nu B_\nu} \cdot e^{(\nu B_\nu - i_1 B_{i_1})T_\varepsilon}.$$

Iz (2.4.35) sledi da $\sup_{t\in[0,T_\varepsilon]} E|x_t^\varepsilon - x_t|^2 \to 0$ kada $\varepsilon \to 0$.

(b) Neka je $i_2 \le 1 < i_1$. Tada je

$$\varphi_t^{i_1} \le H_{i_1}^{i_1} \cdot e^{i_1 B_{i_1} t}, \qquad \varphi_t^{i_2} \le D_{i_2}\Big[G_{i_2} + L^{2i_2}(t^{2i_2} + t^{i_2})\Big] \cdot e^{3i_2 L^2(t^2+t)}.$$

Zaključivanje je slično prethodnom, tako da je

$$\sup_{t\in[0,T_\varepsilon]} E|x_t^\varepsilon - x_t|^2 \le 3\phi(\varepsilon) \cdot e^{3L^2(T_\varepsilon^2+T_\varepsilon)} \left(1 + 3M_1^2 T_\varepsilon^2 + 3N_1^2 T_\varepsilon + 3\frac{M_2^2 H_{i_1}^{i_1}}{i_1 B_{i_1}} T_\varepsilon \cdot e^{i_1 B_{i_1} T_\varepsilon}\right)$$
$$+ 9N_2^2 D_{i_2}\phi(\varepsilon) \cdot e^{3(L^2+L'^2 i_2)(T_\varepsilon^2+T_\varepsilon)} \left[G_{i_2} T_\varepsilon + L'^{2i_2}\left(\frac{T_\varepsilon^{2i_2+1}}{2i_2+1} + \frac{T_\varepsilon^{i_2+1}}{i_2+1}\right)\right].$$

Pošto je u ovom slučaju član sa najvećom brzinom rasta $e^{3(L^2+L'^2 i_2)T_\varepsilon^2 + (3L^2+k)T_\varepsilon}$, pri čemu je $k = \max\{i_1 B_{i_1}, 3i_2 L'^2\}$, T_ε se ocenjuje iz izraza

$$3(L^2 + L'^2 i_2)T_\varepsilon^2 + (3L^2 + k)T_\varepsilon \le \left[\sqrt{3(L^2 + L'^2 i_2)}T_\varepsilon + \frac{3L^2 + k}{2\sqrt{3(L^2 + L'^2 i_2)}}\right]^2$$
$$= -r \ln \phi(\varepsilon).$$

Odatle sledi da je T_ε oblika (2.4.30), pri čemu se bliskost rešenja u smislu momenta $(2m)$-tog reda može odrediti iz izraza

$$\sup_{t\in[0,T_\varepsilon]} E|x_t^\varepsilon - x_t|^2 \le 3(\phi(\varepsilon))^{1-r} e^{-3L'^2 i_2 T_\varepsilon^2 - kT_\varepsilon} \cdot \left[1 + 3M_1^2 T_\varepsilon^2 + 3N_1^2 T_\varepsilon\right]$$
$$(2.4.36)\qquad + 9(\phi(\varepsilon))^{1-r} \frac{M_2^2 H_{i_1}^{i_1}}{i_1 B_{i_1}} T_\varepsilon \cdot e^{-3L'^2 i_2 T_\varepsilon^2 - (k - i_1 B_{i_1})T_\varepsilon}$$
$$+ 9N_2^2 D_{i_2}(\phi(\varepsilon))^{1-r}\left[G_{i_2} T_\varepsilon + L'^{2i_2}\left(\frac{T_\varepsilon^{2i_2+1}}{2i_2+1} + \frac{T_\varepsilon^{i_2+1}}{i_2+1}\right)\right] \cdot e^{-(k-3i_2 L'^2)T_\varepsilon},$$

iz koga sledi da $\sup_{t\in[0,T_\varepsilon]} E|x_t^\varepsilon - x_t|^2 \to 0$ kada $\varepsilon \to 0$.

(c) Neka je $0 < i_1 \leq 1$. Na osnovu ocene (2.4.20) iz Propozicije 2.4.2, sledi

$$E|x_t|^{2\mu} \leq D_\mu\Big(G_\mu + L^{'2\mu}(t^{2\mu} + t^\mu)\Big) \cdot e^{3\mu L^{'2}(t^2+t)},$$
$$E|x_t|^{2\nu} \leq D_\nu\Big(G_\nu + L^{'2\nu}(t^{2\nu} + t^\nu)\Big) \cdot e^{3\nu L^{'2}(t^2+t)},$$

tako da je

$$\begin{aligned}\sup_{t\in[0,T_\varepsilon]} E|x_t^\varepsilon - x_t|^2 &\leq 3\phi(\varepsilon) \cdot e^{3L^2(T_\varepsilon^2+T_\varepsilon)} \\ &\times \Bigg\{1 + 3M_1^2T_\varepsilon^2 + 3N_1^2T_\varepsilon + 3M_2^2D_\mu\left[G_\mu T_\varepsilon + L^{'2\mu}\left(\frac{T_\varepsilon^{2\mu+1}}{2\mu+1} + \frac{T_\varepsilon^{\mu+1}}{\mu+1}\right)\right] e^{3\mu L^2(T_\varepsilon^2+T_\varepsilon)} \\ &+3N_2^2D_\nu\left[G_\nu T_\varepsilon + L^{'2\nu}\left(\frac{T_\varepsilon^{2\nu+1}}{2\nu+1} + \frac{T_\varepsilon^{\nu+1}}{\nu+1}\right)\right] e^{3\nu L^{'2}(T_\varepsilon^2+T_\varepsilon)}\Bigg\}.\end{aligned}$$

Član sa najvećom brzinom rasta je $e^{3(L^2+L^{'2}i_1)(T_\varepsilon^2+T_\varepsilon)}$, pa je

$$\begin{aligned}3(L^2 + L^{'2}i_1)(T_\varepsilon^2 + T_\varepsilon) &\leq 3(L^2 + L^{'2}i_1)\left[T_\varepsilon + \frac{1}{2}\right]^2 \\ &= -r\ln\phi(\varepsilon).\end{aligned}$$

Odavde T_ε ima oblik (2.4.30), pri čemu je

$$\begin{aligned}\sup_{t\in[0,T_\varepsilon]} E|x_t^\varepsilon - x_t|^2 &\leq 3(\phi(\varepsilon))^{1-r} e^{3L^{'2}i_1\left(\frac{r\ln\phi(\varepsilon)}{3(L^2+L^{'2}i_1)}+\frac{1}{4}\right)} \cdot \left[1 + 3M_1^2T_\varepsilon^2 + 3N_1^2T_\varepsilon\right] \\ &+ 9M_2^2D_\mu(\phi(\varepsilon))^{1-r}\left[G_\mu T_\varepsilon + L^{'2\mu}\left(\frac{T_\varepsilon^{2\mu+1}}{2\mu+1} + \frac{T_\varepsilon^{\mu+1}}{\mu+1}\right)\right] e^{3L^{'2}(i_1-\mu)\left(\frac{r\ln\phi(\varepsilon)}{3(L^2+L^{'2}i_1)}+\frac{1}{4}\right)} \\ &+ 9N_2^2D_\nu(\phi(\varepsilon))^{1-r}\left[G_\nu T_\varepsilon + L^{'2\nu}\left(\frac{T_\varepsilon^{2\nu+1}}{2\nu+1} + \frac{T_\varepsilon^{\nu+1}}{\nu+1}\right)\right] \cdot e^{3L^{'2}(i_1-\nu)\left(\frac{r\ln\phi(\varepsilon)}{3(L^2+L^{'2}i_1)}+\frac{1}{4}\right)},\end{aligned} \tag{2.4.37}$$

i $\sup_{t\in[0,T_\varepsilon]} E|x_t^\varepsilon - x_t|^2 \to 0$ kada $\varepsilon \to 0$. Time je teorema u potpunosti dokazana. $\square$

Napomena 2.4.2. Mera bliskosti rešenja x^ε i x jednačina (2.4.3) i (2.4.4) može se predstaviti sa $\overline{\Delta}^\varepsilon(T) = E\{\sup_{t\in[t_0,T]}|x_t^\varepsilon - x_t|^{2m}\}$, a do njene ocene se dolazi ako se umesto izometrije stohastičkih integrala primeni nejednakost Burkholder–Davis–Gundy (1.3.5). Analogno se mogu naći uslovi pri kojima $\overline{\Delta}^\varepsilon(T) \to 0$ kada $\varepsilon \to 0$ na konačnim intervalima ili na intervalima čija dužina teži beskonačnosti.

2.4.2. Neka numerička izračunavanja i grafičko predstavljanje intervala bliskosti rešenja

Desne strane izraza (2.4.34), (2.4.35), (2.4.36) i (2.4.37) mogu se označiti sa $Q_\varepsilon(r)$ i predstavljaju grešku aproksimacije rešenja perturbovane jednačine (2.4.3) rešenjem odgovarajuće neperturbovane jednačine (2.4.4), u smislu momenta $(2m)$-tog reda.

Primer 2.4.1. Na slici 1. prikazane su trajektorije rešenja jednačina (2.4.1) i (2.4.2), sa početka ovog poglavlja, za $t \in [0,5]$, $x \in [0,3]$ i $\eta \equiv 1$, pri čemu je na prvom grafiku punom linijom predstavljena jedna od trajektorija rešenja neperturbovane jednačine (2.4.2), a tačkastom linijom trajektorija tačnog rešenja neperturbovane jednačine (2.4.1). Na drugom grafiku punom linijom je predstavljena trajektorija rešenja perturbovane jednačine (2.4.1), a tačkastom linijom neperturbovane jednačine (2.4.2). Sve trajektorije su dobijene numerički, primenom aproksimacije Euler-Maruyama, po uzoru na program koji se može naći kao sastavni deo literature [49], [50].

Slika 1: Trajektorije rešenja stohastičkih diferencijalnih jednačina (2.4.1) i (2.4.2)

Koeficijenti jednačina (2.4.1) i (2.4.2) zadovoljavaju uslove (1.4.3), (1.4.4), (2.4.5) i (2.4.6) sa konstantama $L' = L_1 = 1$, a s obzirom da je $E|\eta|^{2m} = 1$, dobija se i da je $E|\eta^\varepsilon|^{2m} = e^{2m}E|\eta|^{2m} < \infty$. Dakle, zadovoljeni su uslovi teoreme egzistencije i jedinstvenosti rešenja, pa važi da je $E\{\sup_{t\in[0,T]}|x_t|^{2m}\} < \infty$ i $E\{\sup_{t\in[0,T]}|x_t^\varepsilon|^{2m}\} < \infty$. Pored toga, kako je

$$\begin{aligned}
&a(t,x) = \frac{1}{3}x, &&\zeta(t,x,\varepsilon) = -\frac{\varepsilon|x|}{3} + \frac{\sqrt{1+x^2}}{8(1+t)}\sin\varepsilon,\\
&b(t,x) = x, &&\chi(t,x,\varepsilon) = e^{-\frac{1}{\varepsilon}}\ln\left(1+\frac{x}{1+\varepsilon}\right),\\
&F(a,\zeta) = a+\zeta, &&G(b,\chi) = b+\chi,
\end{aligned}$$

to je

$$\begin{aligned}
F(a(t,x),\zeta(t,x,\varepsilon)) &= \frac{1}{3}(1-\varepsilon)x + \frac{\sqrt{1+x^2}}{8(1+t)}\sin\varepsilon\\
G(b(t,x),\chi(t,x,\varepsilon)) &= x + e^{-\frac{1}{\varepsilon}}\ln\left(1+\frac{|x|}{1+\varepsilon}\right).
\end{aligned}$$

Pošto je

$$
\begin{aligned}
&|F(a(t,x),\zeta(t,x,\varepsilon)) - a(t,x)| \le (1+|x|)\alpha(t,x,\varepsilon),\\
(2.4.38)\qquad &\alpha(t,x,\varepsilon) = \frac{\varepsilon|x|}{3\sqrt{1+x^2}} + \frac{\sin\varepsilon}{8(1+t)},\\
&|G(b(t,x),\chi(t,x,\varepsilon)) - b(t,x)| \le |x|\beta(t,x,\varepsilon),\\
(2.4.39)\qquad &\beta(t,x,\varepsilon) = \frac{e^{-\frac{1}{\varepsilon}}}{1+\varepsilon},
\end{aligned}
$$

zadovoljeni su uslovi (2.4.7) iz pretpostavke $\mathcal{A}_2$, sa konstantama $M_1 = M_2 = 1$, $N_1 = 0$, $N_2 = 1$ i $\mu = \nu = 1$. Na osnovu pretpostavke $\mathcal{A}_3$ sledi $i_1 = 1$, odakle je $E|\eta|^{2m} < \infty$, $E|\eta^\varepsilon|^{2m} < \infty$ i $E|\eta^\varepsilon - \eta|^{2m} \le (e^\varepsilon - 1)^{2m} E|\eta|^{2m}$, pa je $\delta_0(\varepsilon) = (e^\varepsilon - 1)^{2m}$. Iz relacija (2.4.8) se dobijaju funkcije

$$\delta(t,\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\sin\varepsilon}{8(1+t)}, \qquad \gamma(t,\varepsilon) = \frac{e^{-\frac{1}{\varepsilon}}}{1+\varepsilon}.$$

Pored toga, funkcije $\delta(t,x)$ i $\gamma(t,x)$, $t \in [0,T]$, $x \in R$ su ograničene po t, tj.

$$\overline{\delta}(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\sin\varepsilon}{8}, \qquad \overline{\gamma}(\varepsilon) = \frac{e^{-\frac{1}{\varepsilon}}}{1+\varepsilon}.$$

Ako pretpostavimo da je $m > 1$, na osnovu (2.4.27) sledi

$$\phi(\varepsilon) = \max\left\{(e^\varepsilon - 1)^2,\ \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\sin\varepsilon}{8},\ \frac{e^{-\frac{2}{\varepsilon}}}{(1+\varepsilon)^2}\right\}.$$ [1]

Sa slike je očigledno da je $\phi(\varepsilon) = \dfrac{\varepsilon}{3} + \dfrac{\sin\varepsilon}{8}$, za $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$, pri čemu je ε_0 rešenje jednačine $(e^{\varepsilon_0} - 1)^2 = \dfrac{\varepsilon_0}{3} + \dfrac{\sin\varepsilon_0}{8}$, dok je $\rho = \dfrac{\varepsilon_0}{3} + \dfrac{\sin\varepsilon_0}{8}$. Tada je

$$\varepsilon_0 = 0.326, \qquad \rho = 0.149.$$

Interval $[0,T_\varepsilon]$ na kome su rešenja jednačina (2.4.1) i (2.4.2) bliska u smislu momenta $(2m)$-tog reda, ima desni kraj oblika (2.4.29), tj.

$$T_\varepsilon = \frac{2}{B_1} \cdot \ln\left(-\frac{r}{d_1}\ln\left(\frac{\varepsilon}{3} + \frac{\sin\varepsilon}{8}\right)\right), \qquad \varepsilon \in (0, 0.326),$$

[1] Za sva dalja izračunavanja i crtanje grafika korišćen je programski paket MATHEMATICA (vidi [77], [78]), pri čemu radi preglednosti grafika merne jedinice duž koordinatnih osa nisu jednake.

pri čemu je

$$
\begin{aligned}
&a_1 = 2^{\frac{m-1}{2m}}, \qquad B_1 = 4a_1 + 2m - 1, \qquad C_1 = 2a_1 + 2m - 1,\\
&H_1 = 1 + \frac{C_1}{B_1}, \qquad d_1 = \frac{4H_1^{\frac{1}{2}}\rho}{B_1}.
\end{aligned} \tag{2.4.40}
$$

Ako se fiksira vrednost za m, npr. $m = 2$, tada se eksplicitno može naći interval $[0, T_\varepsilon]$ na kome su rešenja posmatranih jednačina bliska u smislu momenta četvrtog reda, kao i greška aproksimacije rešenja na intervalu $[0, T_\varepsilon]$. S obzirom da $\varepsilon \to 0$, a iz činjenice da su pretpostavljeni široki uslovi bliskosti koeficijenata perturbovane i neperturbovane jednačine, očigledno je da se moraju uzimati veoma male vrednosti za ε, da bi procene koje se vrše bile efikasne. Neka je zbog toga ε, na primer, 10^{-10}. U tom slučaju, na osnovu (2.4.29) $T_{10^{-10}}$ je funkcija od r, tj $T_{10^{-10}}(r)$. S druge strane, potrebno je da greška aproksimacije rešenja $Q_{10^{-10}}(r)$, koja se procenjuje iz izraza (2.4.34), bude što manja. Treba, dakle, naći ono rešenje za r, za koje je maksimalna dužina intervala na kome su rešenja bliska, u smislu momenta četvrtog reda, a greška aproksimacije je miminalna. Funkcije $T_{10^{-10}}(r)$ i $Q_{10^{-10}}(r)$ predstavljene su sledećim graficima:

Slika 2: Grafici funkcija $T_{10^{-10}}(r)$ i $Q_{10^{-10}}(r)$

Sa slike 2. se može primetiti da je dužina intervala bliskosti rešenja sporo rastuća funkcija po r, dok greška aproksimacije rešenja raste veoma brzo za vrednosti $r \geq 0.6$. Jasno, ako je zadata greška aproksimacije rešenja, može se odrediti dužina intervala bliskosti rešenja. Na primer, za grešku aproksimacije rešenja $Q_{10^{-10}}(r) = 10^{-5}$, dobija se $r = 0.13$, pa za fiksirano $\varepsilon = 10^{-10}$ dužina intervala bliskosti rešenja, u smislu momenta četvrtog reda, iznosi $T_{10^{-10}}(0.13) = 0.885$.

Ako se dužina intervala bliskosti rešenja posmatra kao funkcija od ε, gde je $\varepsilon \in (0, 0.326)$, tada se, na primer, za $r = 0.13$ dobijaju sledeće dužine intervala bliskosti rešenja:

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon = 10^{-5} \quad T_\varepsilon(0.13) = 0.715, &&\varepsilon = 10^{-1000} \quad T_\varepsilon(0.13) = 2.064,\\
&\varepsilon = 10^{-10} \quad T_\varepsilon(0.13) = 0.885, &&\varepsilon = 10^{-5000} \quad T_\varepsilon(0.13) = 2.479,\\
&\varepsilon = 10^{-100} \quad T_\varepsilon(0.13) = 1.471, &&\varepsilon = 10^{-10000} \quad T_\varepsilon(0.13) = 2.658,
\end{aligned}
$$

odnosno, dobiće se sledeći grafik:

U Teoremi 2.4.2 je dokazano da dužina intervala bliskosti rešenja teži beskonačnosti kada $\varepsilon \to 0$. Međutim, ako se uzmu konkretne vrednosti za ε, npr. $\varepsilon = 10^{-1000}$, dužina intervala bliskosti rešenja je

$$T_{10^{-1000}}(0.13) = 2.064,$$

pri čemu je sada greška aproksimacije manja i iznosi

$$Q_{10^{-1000}}(0.13) = 10^{-1710}.$$

Sa drugog grafika slike 1. se vidi da sa porastom vrednosti za t i fiksirano ε raste greška aproksimacije rešenja, pa se na intervalu $[0,1]$ rešenje perturbovane jednačine (2.4.1) može aproksimirati, u smislu momenta četvrtog reda, rešenjem odgovarajuće neperturbovane jednačine (2.4.2).

Napomena 2.4.3. Rezultati iz primera dobijeni su iz ocena koje važe za opšte jednačine (2.4.3) i (2.4.4), i mogu se poboljšati u konkretnim slučajevima, za konkretno zadate koeficijente jednačina, jer se neke majoracije iz Teorema 2.4.1 i 2.4.2 mogu preciznije oceniti. U slučaju jednačina (2.4.1) i (2.4.2), ako se ponovi postupak korišćen u Teoremama 2.4.1 i 2.4.2 za nalaženje intervala na kome su rešenja ovih jednačina bliska u smislu momenta četvrtog reda, za fiksiranu grešku aproksimacije rešenja $Q_{10^{-10}}(r) = 10^{-5}$ dobija se $r = 0.085$, odakle je $T_{10^{-10}}(0.085) = 1.375$.

Za $m = 1$,

$$\phi(\varepsilon) = \max\left\{(e^{\varepsilon}-1)^2,\ \left(\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\sin\varepsilon}{8}\right)^2,\ \frac{e^{-\frac{2}{\varepsilon}}}{(1+\varepsilon)^2}\right\} = (e^{\varepsilon}-1)^2,$$

za svako $\varepsilon \in (0,1)$. Međutim, $\phi(\varepsilon) < 1$ za $\varepsilon \in (0, 0.693)$. Na osnovu (2.4.38) i (2.4.39) je $\mu = \nu = 1$, pa je T_ε oblika (2.4.30), tj.

$$T_\varepsilon = \sqrt{-\frac{r\ln(e^{\varepsilon}-1)}{3}} - \frac{1}{2}, \qquad \varepsilon \in (0, 0.693).$$

Slično slučaju $m = 2$, za fiksiranu grešku aproksimacije rešenja $Q_{10^{-10}}(r) = 10^{-5}$ dobija se $r = 0.63$, pa je $T_{10^{-10}}(0.63) = 1.699$. Ako smanjujemo vrednost za ε, npr. ako je $\varepsilon = 10^{-100}$, dobiće se $T_{10^{-100}}(0.63) = 6.454$, pa bi interval na kome se perturbovana jednačina može aproksimirati neperturbovanom, u srednje kvadratnom smislu, bio veći nego za slučaj $m = 2$.

Napomena 2.4.4. Naglasimo da ocena dobijena u (2.4.38) nije jedinstvena, tj. kao što važi (2.4.38), tako važi i

$$|F(a(t,x),\zeta(t,x,\varepsilon)) - a(t,x)| \le c\left(1+|x|^{2a}\right)\left(\frac{\varepsilon|x|}{3(1+|x|^2)^a} + \frac{\sin\varepsilon}{8(1+t)(1+|x|^2)^{a-\frac{1}{2}}}\right),$$

pri čemu je $c = 2^{a-1} \vee 1$, za $a \geq \frac{1}{2}$. U tom slučaju postavlja se pitanje izbora konstante μ za koju je interval T_ε najveći. Ako se ima u vidu formula (2.4.29) za izračunavanje T_ε, pa ako se T_ε posmatra kao funkcija od μ, nije jednostavno ispitati monotonost ove složene funkcije. Zbog toga se za konkretne vrednosti m i r, numeričkim metodama može pokazati da je T_ε monotono opadajuća funkcija po μ. Otuda je najbolje ono rešenje dobijeno za najmanju vrednost μ. Dakle, ocena (2.4.38) bi bila najbolja ocena za posmatrani primer.

Teorijski rezultati dobijeni u ovom poglavlju mogu se praktično primeniti za opisivanje realnih sistema sa malim perturbacijama koji imaju kratak vek trajanja. Rezultati dobijeni u predhodnim poglavljima, tj. u slučajevima aditivno i linearno perturbovanih diferencijalnih jednačina Itoa, nisu ograničeni samo na sisteme koji kratko traju, zbog toga što su same perturbacije jednostavnije, pa se dobijaju mnogo veći intervali bliskosti rešenja perturbovane i neperturbovane jednačine.

Glava 3

Perturbovane nasledne stohastičke diferencijalne jednačine

Nasledni fenomen igra veoma važnu ulogu u mehanici fluida i kod materijala sa memorijom (videti, na primer, [11], [12], [55], [47], [54]). Matematički modeli u teoriji viskoelastičnosti su predstavljeni evolucionim jednačinama koje se zovu nasledne funkcionalne diferencijalne jednačine, a proučavane su u radovima [11], [12], [18], [59], [62]. Osamdesetih godina, Mizel i Trutzer [61] proučavaju uticaj Gaussovog belog šuma na nelinearni nasledni fenomen kao stohastičku perturbaciju determinističkog slučaja, pri čemu su, uopšteno, matematički modeli predstavljeni naslednim stohastičkim integrodiferencijalnim jednačinama Itoa. U radovima [61], [41], [42] proučavani su problemi egzistencije i jedinstvenosti rešenja tih jednačina.

U Poglavlju 3.1, polazeći od rada [61] posmatra se nasledna stohastička integrodiferencijalna jednačina Itoa sa "malim" perturbacijama i upoređuje njeno rešenje sa rešenjem neperturbovane nasledne stohastičke diferencijalne jednačine. Postupak primenjen u ovoj analizi je proširenje postupka korišćenog u radovima [75], [33], [34] za perturbovanu stohastičku diferencijalnu jednačinu Itoa. Rezultati su publikovani u radu Sv. Janković, M. Jovanović, [36], 2002.

Asimptotsko ponašanje rešenja perturbovane nasledne stohastičke diferencijalne jednačine Itoa, tema je Poglavlja 3.2, tako što se to rešenje upoređuje sa rešenjem odgovarajuće neperturbovane jednačine, u smislu momenta $(2m)$-tog reda, na konačnim intervalima ili na intervalima čija dužina teži beskonačnosti. Ti problemi su posmatrani pri uslovima bitno različitim od prethodnih, korišćenjem koncepta ograničenog slučajnog kontraktora, koji uključuje Lipschitzov uslov kao specijalan slučaj. Rezultati ovog poglavlja publikovani su u radu Sv. Janković, M. Jovanović, [35], 2001.

3.1. Perturbovane nasledne stohastičke diferencijalne jednačine sa Lipschitzovim uslovom

U ovom poglavlju proučava se rešenje nasledne stohastičke integrodiferencijalne jednačine Itoa sa "malim" perturbacijama, koje nije proces Markova, i upoređuje sa rešenjem jednostavnije jednačine, tj. sa neperturbovanom naslednom stohastičnom diferencijalnom jednačinom, čije je rešenje proces Markova. Preciznije, ocenjuje se bliskost tih rešenja u smislu momenta $(2m)$-tog reda. Ako su rešenja definisana na neograničenim intervalima, daju se dovoljni uslovi koji obezbeđuju njihovu bliskost na intervalima čija dužina teži beskonačnosti.

Napomenimo, da važe sve pretpostavke koje su uvedene u Poglavlju 1.7 u kome su izloženi rezultati rada [61]. U ovom radu su detaljno proučavani problemi egzistencije, jedinstvenosti i stabilnosti nasledne stohastičke diferencijalne jednačine Itoa oblika (1.7.3), kao i nasledne stohastičke integrodiferencijalne jednačine Itoa oblika (1.7.6).

Uporedo sa naslednom stohastičkom diferencijalnom jednačinom (1.7.3) u integralnom obliku, tj.

$$x(t) = \varphi(t_0) + \int_{t_0}^{t} a(s, x^s)\, ds + \int_{t_0}^{t} b(s, x^s)\, dw(s), \quad t \in [t_0, T], \tag{3.1.1}$$

posmatra se sledeća skalarna nasledna stohastička integrodiferencijalna jednačina

$$\begin{aligned} x_\varepsilon(t) = \varphi_{\varepsilon_0}(t_0) &+ \int_{t_0}^{t} \Big[a(s, x_\varepsilon^s) + \alpha_1(s, x_\varepsilon^s, \varepsilon_1) + \int_{t_0}^{s} \alpha_2(s, r, x_\varepsilon^r, \varepsilon_2)\, dr \\ &+ \int_{t_0}^{s} \alpha_3(s, r, x_\varepsilon^r, \varepsilon_3)\, dw(r)\Big]\, ds \\ &+ \int_{t_0}^{t} \Big[b(s, x_\varepsilon^s) + \beta_1(s, x_\varepsilon^s, \mu_1) + \int_{t_0}^{s} \beta_2(s, r, x_\varepsilon^r, \mu_2)\, dr \\ &+ \int_{t_0}^{s} \beta_3(s, r, x_\varepsilon^r, \mu_3)\, dw(r)\Big]\, dw(s), \quad t \in [t_0, T], \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

gde su $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \mu_1, \mu_2, \mu_3$ *mali parametri* iz intervala $(0, 1)$, pri čemu ε zavisi od njih, a početni uslov i funkcionali a, b, α_i, β_i, $i = 1, 2, 3$ su definisani kao u jednačini (1.7.6) za $n = k = 1$, a w je isti jednodimenzionalni Wiener proces. Pored toga, neka postoji fiksirani prirodan broj m tako da je $E||\varphi^{t_0}||_X^{2m} < \infty$ i $E||\varphi_{\varepsilon_0}^{t_0}||_X^{2m} < \infty$.

Saglasno radu [75], članovi α_i, β_i, $i = 1, 2, 3$ se zovu *perturbacije* koeficijenata a i b; jednačina (3.1.2) se zove *perturbovana jednačina* u odnosu na *neperturbovanu jednačinu* (3.1.1). Pretpostavlja se, takođe, da je za svako $(t, s) \in J$

$$E||\varphi^{t_0} - \varphi_{\varepsilon_0}^{t_0}||_X^{2m} \le \delta_0(\varepsilon_0), \tag{3.1.3}$$

$$\begin{aligned} &\sup_{x\in X} |\alpha_1(t, x, \varepsilon_1)| \le \delta_1(t, \varepsilon_1), \quad \sup_{x\in X} |\alpha_i(t, s, x, \varepsilon_i)| \le \delta_i(t, s, \varepsilon_i),\ i = 2, 3, \\ &\sup_{x\in X} |\beta_1(t, x, \mu_1)| \le \gamma_1(t, \mu_1), \quad \sup_{x\in X} |\beta_i(t, s, x, \mu_i)| \le \gamma_i(t, s, \mu_i),\ i = 2, 3, \end{aligned} \tag{3.1.4}$$

gde su $\delta_0(\cdot), \delta_i(\cdot), \gamma_i(\cdot)$, $i = 1, 2, 3$ neslučajne nenegativne ograničene neprekidne funkcije. Ako se zahteva da one budu male za male parametre ε_i, μ_i, prirodno je očekivati da su rešenja x_ε i x bliska u nekom smislu.

Pretpostavimo da postoje jedinstvena rešenja jednačina (3.1.1) i (3.1.2) i svi slučajni i neslučajni integrali koji se ubuduće javljaju. Sledeća teorema daje globalnu ocenu bliskosti tih rešenja u smislu momenta $(2m)$-tog reda.

Teorema 3.1.1. (Sv. Janković, M. Jovanović, [36], 2002.) *Neka su zadovoljeni uslovi (1.7.7), (1.7.8), (3.1.3) i (3.1.4) za jednačine (3.1.1) i (3.1.2) na intervalu* $[t_0, T]$, $T < \infty$.

Neka je

$$p(t,\varepsilon_i) = \delta_1^2(t,\varepsilon_1) + (t-t_0)\int_{t_0}^t \delta_2^2(t,s,\varepsilon_2)\,ds + B(t-t_0)^{\frac{m-1}{m}}\Big(\int_{t_0}^t \delta_3^{2m}(t,s,\varepsilon_3)\,ds\Big)^{\frac{1}{m}},$$

$$q(t,\mu_i) = \gamma_1^4(t,\mu_1) + (t-t_0)^3\int_{t_0}^t \gamma_2^4(t,s,\mu_2)\,ds + B^2(t-t_0)^{\frac{2m-2}{m}}\Big(\int_{t_0}^t \gamma_3^{2m}(t,s,\mu_3)\,ds\Big)^{\frac{2}{m}},$$

$$v(t,\mu_i) = \gamma_1^2(t,\mu_1) + (t-t_0)\int_{t_0}^t \gamma_2^2(t,s,\mu_2)\,ds + B(t-t_0)^{\frac{m-1}{m}}\Big(\int_{t_0}^t \gamma_3^{2m}(t,s,\mu_3)\,ds\Big)^{\frac{1}{m}},$$

$$w(t,\varepsilon_i) = \delta_1^4(t,\varepsilon_1) + (t-t_0)^3\int_{t_0}^t \delta_2^4(t,s,\varepsilon_2)\,ds + 36(t-t_0)\int_{t_0}^t \delta_3^4(t,s,\varepsilon_3)\,ds.$$

Tada:

(i) za $m>2$,

$$E|x_\varepsilon(t)-x(t)|^{2m} \le \Big[(N\delta_0(\varepsilon_0))^{\frac{2}{m}}\, e^{\frac{2}{m}N_1\int_{t_0}^t \eta(s,\varepsilon_i,\mu_i)\,ds} + \frac{2}{m}N_1 A\int_{t_0}^t \theta(s,\varepsilon_i,\mu_i)\, e^{\frac{2}{m}N_1\int_s^t \eta(r,\varepsilon_i,\mu_i)\,dr}ds\Big]^{\frac{m}{2}}, \tag{3.1.5}$$

gde je

$\eta(t,\varepsilon_i,\mu_i) = L^2[M(T-t_0)+4] + A(T-t_0)p(t,\varepsilon_i) + 4Av(t,\mu_i)$,

$\theta(t,\varepsilon_i,\mu_i) = (T-t_0)p(t,\varepsilon_i) + (m-1)^2A(T-t_0)q(t,\mu_i) + 4v(t,\mu_i)$;

(ii) za $m=2$,

$$E|x_\varepsilon(t)-x(t)|^4 \le [N_2\delta_0(\varepsilon_0) + N_3\zeta(t,\varepsilon_i,\mu_i)]\, e^{N_3L^4[(t-t_0)^4+c_4(t-t_0)^2]}, \tag{3.1.6}$$

gde je $\zeta(t,\varepsilon_i,\mu_i) = (t-t_0)^3\int_{t_0}^t w(s,\varepsilon_i)\,ds + c_4(t-t_0)\int_{t_0}^t q(s,\mu_i)\,ds$;

(iii) za $m=1$,

$$E|x_\varepsilon(t)-x(t)|^2 \le [N_4\delta_0(\varepsilon_0) + N_5\sigma(t,\varepsilon_i,\mu_i)]\, e^{N_5L^2(t-t_0+4)(t-t_0)}, \tag{3.1.7}$$

gde je $\sigma(t,\varepsilon_i,\mu_i) = (t-t_0)\int_{t_0}^t p(s,\varepsilon_i)\,ds + 4\int_{t_0}^t v(s,\mu_i)\,ds$;
a $c_4, L, M, A, B, N, N_1, N_2, N_3, N_4, N_5$ *su generisane pozitivne konstante koje ne zavise od* $\varepsilon_0, \varepsilon_i, \mu_i$, $i=1,2,3$.

Dokaz. Označimo sa

$$z_\varepsilon(t) = x_\varepsilon(t) - x(t), \quad z_\varepsilon^t = x_\varepsilon^t - x^t, \quad \Delta_\varepsilon(t) = E||z_\varepsilon^t||_X^{2m}.$$

Primenom nejednakosti (1.7.2) za $l=2m$, tj. za $\nu = 2m/p$ dobiće se

$$||\,z_\varepsilon^t||_X^{2m} \le \tilde{k}_\nu\left[|z_\varepsilon(t)|^{2m} + \overline{\overline{K}}^\nu||\,z_\varepsilon^{t_0}||_X^{2m} + \left(\int_{t_0}^t |\,z_\varepsilon(s)|^p\rho(t-s)\,ds\right)^\nu\right].$$

Na osnovu (1.7.1) i pretpostavke (3.1.3), sledi

$$\Delta_\varepsilon(t) \le \tilde{k}_\nu(1+||\rho||_{L_1}^\nu)\,E\{\sup_{s\in[t_0,t]}|z_\varepsilon(s)|^{2m}\} + \tilde{k}_\nu\overline{\overline{K}}^\nu\delta_0(\varepsilon_0). \tag{3.1.8}$$

Za ocenu $E\{\sup_{s\in[t_0,t]}|z_\varepsilon(s)|^{2m}\}$, koriste se različiti postupci za slučajeve $m=1, m=2$ i $m>2$.

(i) Neka je $m>2$. Oduzimanjem jednačina (3.1.1) i (3.1.2) i primenom Itove formule za stohastičko diferenciranje na $(z_\varepsilon(t))^m$, dobija se

$$(z_\varepsilon(t))^m = (z_{\varepsilon_0}(t_0))^m + mI_1(t) + \frac{m}{2}(m-1)I_2(t) + mI_3(t),$$

gde je

$$\begin{aligned} I_1(t) = \int_{t_0}^t \Big[& a(s,x_\varepsilon^s) + \alpha_1(s,x_\varepsilon^s,\varepsilon_1) + \int_{t_0}^s \alpha_2(s,r,x_\varepsilon^r,\varepsilon_2)\,dr \\ & + \int_{t_0}^s \alpha_3(s,r,x_\varepsilon^r,\varepsilon_3)\,dw(r) - a(s,x^s)\Big](z_\varepsilon(s))^{m-1}\,ds \\ I_2(t) = \int_{t_0}^t \Big[& b(s,x_\varepsilon^s) + \beta_1(s,x_\varepsilon^s,\mu_1) + \int_{t_0}^s \beta_2(s,r,x_\varepsilon^r,\mu_2)\,dr \\ & + \int_{t_0}^s \beta_3(s,r,x_\varepsilon^r,\mu_3)\,dw(r) - b(s,x^s)\Big]^2 (z_\varepsilon(s))^{m-2}\,ds, \\ I_3(t) = \int_{t_0}^t \Big[& b(s,x_\varepsilon^s) + \beta_1(s,x_\varepsilon^s,\mu_1) + \int_{t_0}^s \beta_2(s,r,x_\varepsilon^r,\mu_2)\,dr \\ & + \int_{t_0}^s \beta_3(s,r,x_\varepsilon^r,\mu_3)\,dw(r) - b(s,x^s)\Big](z_\varepsilon(s))^{m-1}\,dw(s). \end{aligned}$$

Tada je

$$\begin{aligned} (3.1.9)\quad E\{\sup_{s\in[t_0,t]}|z_\varepsilon(s)|^m\}^2 &\le 4d_0(\varepsilon_0) + 4m^2E\{\sup_{s\in[t_0,t]}|I_1(s)|^2\} \\ &+ m^2(m-1)^2E\{\sup_{s\in[t_0,t]}|I_2(s)|^2\} + 4m^2E\{\sup_{s\in[t_0,t]}|I_3(s)|^2\}. \end{aligned}$$

S obzirom da funkcional a zadovoljava Lipschitzov uslov (1.7.7), posle njegove primene i primene Schwarzove nejednakosti, može se zaključiti

$$\begin{aligned} E\{\sup_{s\in[t_0,t]}|I_1(s)|^2\} \le 2(t-t_0)\Big(L^2\int_{t_0}^t E\{\|z_\varepsilon^s\|_X^2\cdot(z_\varepsilon(s))^{2m-2}\}\,ds + \int_{t_0}^t E\Big[\alpha_1(s,x_\varepsilon^s,\varepsilon_1) \\ + \int_{t_0}^s \alpha_2(s,r,x_\varepsilon^r,\varepsilon_2)\,dr + \int_{t_0}^s \alpha_3(s,r,x_\varepsilon^r,\varepsilon_3)\,dw(r)\Big]^2(z_\varepsilon(s))^{2m-2}\,ds\Big). \end{aligned}$$

Za ocenu drugog člana potrebno je iskoristiti Hölderovu nejednakosti za $p=m$, $q=\frac{m}{m-1}$, kao i elementarnu nejednakost (1.8.3), a zatim uslov (3.1.4). Tada je za svako $t\in[t_0,T]$

$$\begin{aligned} E\{\sup_{s\in[t_0,t]}|I_1(s)|^2\} &\le 2(t-t_0)\Big\{L^2\int_{t_0}^t \Delta_\varepsilon(s)\,ds + \int_{t_0}^t \Big(E\Big[\alpha_1(s,x_\varepsilon^s,\varepsilon_1) \\ &+ \int_{t_0}^s \alpha_2(s,r,x_\varepsilon^r,\varepsilon_2)dr + \int_{t_0}^s \alpha_3(s,r,x_\varepsilon^r,\varepsilon_3)dw(r)\Big]^{2m}\Big)^{\frac{1}{m}}\Big(E(z_\varepsilon(s))^{2m}\Big)^{\frac{m-1}{m}}\,ds\Big\} \\ &\le 2(T-t_0)\Big\{L^2\int_{t_0}^t \Delta_\varepsilon(s)\,ds + 3^{\frac{2m-1}{m}}\int_{t_0}^t\Big[\delta_1^{2m}(s,\varepsilon_1) \\ &+ \Big(\int_{t_0}^s \delta_2(s,r,\varepsilon_2)\,dr\Big)^{2m} + E\Big(\int_{t_0}^s \delta_3(s,r,\varepsilon_3)\,dw(r)\Big)^{2m}\Big]^{\frac{1}{m}}(\Delta_\varepsilon(s))^{\frac{m-1}{m}}\,ds\Big\}. \end{aligned}$$

Ako se primeni dobro poznata Itova integralna formula (1.3.7), elementarna nejednakost (1.8.3) za $r = 1/(2m)$, i Schwarzova nejednakost na osnovu koje je $\big(\int_{t_0}^{s} \delta_2(s,r,\varepsilon_2)\,dr\big)^2 \leq (s-t_0)\int_{t_0}^{s} \delta_2^2(s,r,\varepsilon_2)\,dr$, konačno se dobija

(3.1.10)
$$E\{\sup_{s\in[t_0,t]} |I_1(s)|^2\} \leq 2L^2(T-t_0)\int_{t_0}^{t} \Delta_\varepsilon(s)\,ds + 2A(T-t_0)\int_{t_0}^{t} p(s,\varepsilon_i)(\Delta_\varepsilon(s))^{\frac{m-1}{m}}\,ds,$$

gde je

(3.1.11)
$$p(s,\varepsilon_i) = \delta_1^2(s,\varepsilon_1) + (s-t_0)\int_{t_0}^{s} \delta_2^2(s,r,\varepsilon_2)\,dr + B(s-t_0)^{\frac{m-1}{m}}\left(\int_{t_0}^{s} \delta_3^{2m}(s,r,\varepsilon_3)\,dr\right)^{\frac{1}{m}}$$

i $A = 3^{(2m-1)/m}$, $B = m(2m-1)$.

Slično, ako se primeni elementarna nejednakost (1.8.2) za $r = 4$, prethodni postupak i Hölderova nejednakost za $p = m/2$, $q = m/(m-2)$, sledi

$$E\{\sup_{s\in[t_0,t]} |I_2(s)|^2\} \leq 8L^4(T-t_0)\int_{t_0}^{t} \Delta_\varepsilon(s)\,ds + 8A^2(T-t_0)\int_{t_0}^{t} \Big[\gamma_1^4(s,\mu_1) + \Big(\int_{t_0}^{s} \gamma_2(s,r,\mu_2)dr\Big)^4 + \Big(E\Big(\int_{t_0}^{s} \gamma_3(s,r,\mu_3)\,dw(r)\Big)^{2m}\Big)^{\frac{2}{m}}\Big](\Delta_\varepsilon(s))^{\frac{m-2}{m}}\,ds.$$

Dvostrukom primenom Schwarzove nejednakosti se dobija

$$\Big(\int_{t_0}^{s} \gamma_2(s,r,\mu_2)\,dr\Big)^4 \leq (s-t_0)^3\int_{t_0}^{s} \gamma_2^4(s,r,\mu_2)\,dr,$$

pa se, primenom integralne nejednakosti (1.3.7) na poslednji član, dolazi do sledećeg zaključka:

(3.1.12)
$$E\{\sup_{s\in[t_0,t]} |I_2(s)|^2\} \leq 8L^4(T-t_0)\int_{t_0}^{t} \Delta_\varepsilon(s)\,ds + 8A^2(T-t_0)\int_{t_0}^{t} q(s,\mu_i)(\Delta_\varepsilon(s))^{\frac{m-2}{m}}\,ds,$$

gde je

(3.1.13)
$$q(s,\mu_i) = \gamma_1^4(s,\mu_1) + (s-t_0)^3\int_{t_0}^{s} \gamma_2^4(s,r,\mu_2)\,dr + B^2(s-t_0)^{\frac{2m-2}{m}}\left(\int_{t_0}^{s} \gamma_3^{2m}(s,r,\mu_3)\,dr\right)^{\frac{2}{m}}.$$

Za ocenu izraza $E\{\sup_{s\in[t_0,t]} |I_3(s)|^2\}$ treba primeniti poznatu nejednakost Dooba ili nejednakost Burkholder-Davis-Gundy (1.3.5) za $c_2 = 4$, pa ponoviti prethodnu proceduru. Tada je

$$
\begin{aligned}
E\{\sup_{s\in[t_0,t]}|I_3(s)|^2\} &\le 4\int_{t_0}^{t} E\Big[b(s,x_\varepsilon^s)+\beta_1(s,x_\varepsilon^s,\mu_1)+\int_{t_0}^{s}\beta_2(s,r,x_\varepsilon^r,\mu_2)\,dr \\
&\quad + \int_{t_0}^{s}\beta_3(s,r,x_\varepsilon^r,\mu_3)\,dw(r)-b(s,x^s)\Big]^2 (z_\varepsilon(s))^{2m-2}\,ds \\
&\le 8L^2\int_{t_0}^{t}\Delta_\varepsilon(s)\,ds + 8A\int_{t_0}^{t} v(s,\mu_i)\,(\Delta_\varepsilon(s))^{\frac{m-1}{m}}\,ds,
\end{aligned}
\tag{3.1.14}
$$

gde je

$$
\begin{aligned}
v(s,\mu_i) &= \gamma_1^2(s,\mu_1)+(s-t_0)\int_{t_0}^{s}\gamma_2^2(s,r,\mu_2)\,dr \\
&\quad + B(s-t_0)^{\frac{m-1}{m}}\left(\int_{t_0}^{s}\gamma_3^{2m}(s,r,\mu_3)\,dr\right)^{\frac{1}{m}}.
\end{aligned}
\tag{3.1.15}
$$

Sada, koristeći (3.1.10), (3.1.12) i (3.1.14), iz (3.1.8) sledi

$$
\begin{aligned}
\Delta_\varepsilon(t) &\le N\delta_0(\varepsilon_0)+N_1L^2\int_{t_0}^{t}[M(T-t_0)+4]\Delta_\varepsilon(s)\,ds \\
&\quad + N_1A\int_{t_0}^{t}[(T-t_0)p(s,\varepsilon_i)+4v(s,\mu_i)]\,(\Delta_\varepsilon(s))^{\frac{m-1}{m}}ds \\
&\quad + N_1A^2(m-1)^2(T-t_0)\int_{t_0}^{t} q(s,\mu_i)\,(\Delta_\varepsilon(s))^{\frac{m-2}{m}}ds,
\end{aligned}
\tag{3.1.16}
$$

gde je $N=\tilde{k}_\nu[\overline{\overline{K}}^{\nu}+4(1+||\rho||_{L_1}^{\nu})]$, $N_1=8m^2\tilde{k}_\nu(1+||\rho||_{L_1}^{\nu})$, $M=L^2(m-1)^2+1$. Ako se primeni elementarna nejednakost (1.8.5), pri čemu je $a=\Delta_\varepsilon(t)$, $r_1=(m-2)/m$, $r_2=(m-1)/m$, dobija se

$$(\Delta_\varepsilon(s))^{\frac{m-1}{m}} \le (\Delta_\varepsilon(s))^{\frac{m-2}{m}}+\Delta_\varepsilon(s).$$

Uvođenjem novih funkcija η i θ na sledeći način,

$$
\begin{aligned}
\eta(s,\varepsilon_i,\mu_i) &= L^2[M(T-t_0)+4]+A(T-t_0)p(s,\varepsilon_i)+4Av(s,\mu_i), \\
\theta(s,\varepsilon_i,\mu_i) &= (T-t_0)p(s,\varepsilon_i)+(m-1)^2A(T-t_0)q(s,\mu_i)+4v(s,\mu_i),
\end{aligned}
$$

(3.1.16) postaje

$$\Delta_\varepsilon(t)\le N\delta_0(\varepsilon_0)+N_1\int_{t_0}^{t}\eta(s,\varepsilon_i,\mu_i)\,\Delta_\varepsilon(s)\,ds+N_1A\int_{t_0}^{t}\theta(s,\varepsilon_i,\mu_i)\,(\Delta_\varepsilon(s))^{\frac{m-2}{m}}ds.$$

Konačno, kako je poslednja nejednakost oblika (1.8.8), primenom uopštene Gronwall-Bellmanove nejednakosti, pri čemu je $u(t)=\Delta_\varepsilon(t)$, $\gamma=(m-2)/m$, dobija se

$$
\begin{aligned}
\Delta_\varepsilon(t) \le \Big[&(N\delta_0(\varepsilon_0))^{\frac{2}{m}}\,e^{\frac{2}{m}N_1\int_{t_0}^{t}\eta(s,\varepsilon_i,\mu_i)\,ds} \\
&+\frac{2}{m}N_1A\int_{t_0}^{t}\theta(s,\varepsilon_i,\mu_i)\,e^{\frac{2}{m}N_1\int_s^t\eta(r,\varepsilon_i,\mu_i)\,dr}\,ds\Big]^{\frac{m}{2}},\ t\in[t_0,T].
\end{aligned}
$$

Pošto iz (1.7.1) sledi

$$E|x_\varepsilon(t)-x(t)|^{2m}\le E||x_\varepsilon^t-x^t||_X^{2m}=\Delta_\varepsilon(t),\quad t\in[t_0,T],$$

jednostavno se dolazi do ocene (3.1.5).

(ii) Neka je $m=2$. Tada, na osnovu elementarne nejednakosti (1.8.1) nalazimo

$$\begin{aligned}E\{\sup_{u\in[t_0,t]}|z_\varepsilon(u)|^4\}&\le 9^3\delta_0(\varepsilon_0)\\&+9^3E\left\{\sup_{u\in[t_0,t]}\left[\left(\int_{t_0}^u[a(s,x_\varepsilon^s)+a(s,x^s)]\,ds\right)^4+\left(\int_{t_0}^u\alpha_1(s,x_\varepsilon^s,\varepsilon_1)\,ds\right)^4\right.\right.\\&\left.\left.+\cdots+\left(\int_{t_0}^u\int_{t_0}^s\beta_3(s,r,x_\varepsilon^r,\mu_3)\,dw(r)dw(s)\right)^4\right]\right\}.\end{aligned}$$

Za ocenu ovih integrala potrebno je iskoristiti nejednakost Burkholder-Davis-Gundy (1.3.5) i izometriju stohastičkih integrala. Na primer,

$$\begin{aligned}E\left\{\sup_{u\in[t_0,t]}\left(\int_{t_0}^s\int_{t_0}^s\beta_3(s,r,x_\varepsilon^r,\mu_3)\,dw(r)dw(s)\right)^4\right\}&\le c_4E\left(\int_{t_0}^t\left|\int_{t_0}^s\beta_3(s,r,x_\varepsilon^r,\mu_3)\,dw(r)\right|^2ds\right)^2\\&\le c_4(t-t_0)\int_{t_0}^tE\left|\int_{t_0}^s\beta_3(s,r,x_\varepsilon^r,\mu_3)dw(r)\right|^4ds\\&\le c_46^2(t-t_0)\int_{t_0}^t(s-t_0)\int_{t_0}^s\gamma_3^4(s,r,\mu_3)\,drds,\end{aligned}$$

i analogno za ostale integrale. Konačno, dolazi se do relacije

$$\begin{aligned}E\{\sup_{u\in[t_0,t]}|z_\varepsilon(s)|^4\}&\le 9^3\left(\delta_0(\varepsilon_0)+(t-t_0)^3\int_{t_0}^tw(s,\varepsilon_i)ds+c_4(t-t_0)\int_{t_0}^tq(s,\mu_i)ds\right)\\&+9^3L^4[(t-t_0)^3+c_4(t-t_0)]\int_{t_0}^t\Delta_\varepsilon(s)\,ds,\end{aligned}$$

gde je

$$w(t,\varepsilon_i)=\delta_1^4(t,\varepsilon_1)+(t-t_0)^3\int_{t_0}^t\delta_2^4(t,s,\varepsilon_2)\,ds+36(t-t_0)\int_{t_0}^t\delta_3^4(t,s,\varepsilon_3)\,ds,$$

a funkcija $q(t,\mu_i)$ je data sa (3.1.13) za $m=2$. Sada, iz (3.1.8) sledi

$$\Delta_\varepsilon(t)\le N_2\delta_0(\varepsilon_0)+N_3\zeta(t,\varepsilon_i,\mu_i)+N_3L^4[(t-t_0)^3+c_4(t-t_0)]\int_{t_0}^t\Delta_\varepsilon(s)\,ds,$$

gde je

$$\zeta(t,\varepsilon_i,\mu_i)=(t-t_0)^3\int_{t_0}^tw(s,\varepsilon_i)\,ds+c_4(t-t_0)\int_{t_0}^tq(s,\mu_i)\,ds,$$

$N_2=\tilde{k}_\nu[\overline{\overline{K}}^\nu+9^3(1+||\rho||_{L_1}^\nu)]$, $N_3=9^3\tilde{k}_\nu(1+||\rho||_{L_1}^\nu)$, $\nu=4/p$. S obzirom da je poslednja nejednost oblika (1.8.7), posle primene odgovarajuće nejednakosti Gronwall-Bellmana, lako se dolazi do ocene (3.1.6).

(iii) Neka je $m = 1$. Primenom prethodnog postupka i nejednakosti Dooba, dobija se relacija

$$\Delta_\varepsilon(t) \leq [N_4\delta_0(\varepsilon_0) + N_5\sigma(t,\varepsilon_i,\mu_i)]\, e^{N_5 L^2(t-t_0+4)(t-t_0)},$$

gde je

$$\sigma(t,\varepsilon_i,\mu_i) = (t-t_0)\int_{t_0}^{t} p(s,\varepsilon_i)\,ds + 4\int_{t_0}^{t} v(s,\mu_i)\,ds,$$

$N_4 = \tilde{k}_\nu[\overline{\overline{K}}^\nu + 9(1+||\rho||_{L_1}^\nu)]$, $N_5 = 9\tilde{k}_\nu(1+||\rho||_{L_1}^\nu)$, $\nu = 2/p$. Time je dokaz teoreme kompletan. $\square$

Ako je $T < \infty$, Teorema 3.1.1 daje globalnu ocenu za $E|x_\varepsilon(t) - x(t)|^{2m}$ za proizvoljne perturbacije $\alpha_i(\cdot)$, $\beta_i(\cdot)$, $i = 1,2,3$, koje zadovoljavaju uslove (3.1.3) i (3.1.4). Pored toga, ako se zahteva da $\delta_0(\cdot) \to 0$ kada $\varepsilon_0 \to 0$, $\delta_i(\cdot) \to 0$ kada $\varepsilon_i \to 0$, $\gamma_i(\cdot) \to 0$ kada $\mu_i \to 0$, $i = 1,2,3$, onda se može očekivati da $\sup_{t\in[t_0,T]} E|x_\varepsilon(t) - x(t)|^{2m} \to 0$ kada $\varepsilon \to 0$. Sledeća teorema daje dovoljne uslove pri kojima važe navedeni zaključci .

Teorema 3.1.2. (Sv. Janković, M. Jovanović, [36], 2002.) *Neka su zadovoljeni uslovi Teoreme* 3.1.1. *Pored toga neka su funkcije $\delta_0(\cdot)$, $\delta_i(\cdot)$, $\gamma_i(\cdot)$, $i = 1,2,3$ neopadajuće u odnosu na zadati mali parametar i neka one teže nuli kada mali parametar teži nuli Ako je $\varepsilon = \max\{\varepsilon_0,\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\mu_1,\mu_2,\mu_3\}$, tada*

$$\sup_{t\in[t_0,T]} E|x_\varepsilon(t) - x(t)|^{2m} \to 0 \quad \text{kada} \quad \varepsilon \to 0.$$

Dokaz. Uvedimo sledeće oznake:

$$\overline{\delta}_1(\varepsilon) = \sup_{t\in[t_0,T]} \delta_1(t,\varepsilon), \quad \overline{\delta}_i(\varepsilon) = \sup_{(t,s)\in J} \delta_i(t,s,\varepsilon),\ i = 2,3$$

$$\overline{\gamma}_1(\varepsilon) = \sup_{t\in[t_0,T]} \gamma_1(t,\varepsilon), \quad \overline{\gamma}_i(\varepsilon) = \sup_{(t,s)\in J} \gamma_i(t,s,\varepsilon),\ i = 2,3. \tag{3.1.17}$$

Za $m > 2$ označimo

$$\phi(\varepsilon) = \max\left\{(\delta_0(\varepsilon))^{\frac{2}{m}}, \overline{\delta_1}^2(\varepsilon), \overline{\delta_2}^2(\varepsilon), \overline{\delta_3}^2(\varepsilon), \overline{\gamma}_1^2(\varepsilon), \overline{\gamma}_2^2(\varepsilon), \overline{\gamma}_3^2(\varepsilon)\right\}. \tag{3.1.18}$$

Pošto $\phi(\varepsilon) \to 0$ kad $\varepsilon \to 0$, postoje neke konstante $\rho > 0$ i $0 < \theta < 1$ tako da je $\phi(\varepsilon) \leq \theta$ za $\varepsilon \in (0,\rho)$. Tada je $\overline{\delta}_i^4(\varepsilon) \leq \overline{\delta}_i^2(\varepsilon)$ i $\overline{\gamma}_i^4(\varepsilon) \leq \overline{\gamma}_i^2(\varepsilon)$ za $\varepsilon \in (0,\rho)$, $i = 1,2,3$.

Pošto su funkcije $\delta_0(\cdot)$, $\delta_i(\cdot)$, $\gamma_i(\cdot)$ neopadajuće u odnosu na ε, imajući u vidu (3.1.17) i (3.1.18), funkcije $p(t,\varepsilon_i), q(t,\mu_i), v(t,\mu_i)$ iz Teoreme 3.1.1 se mogu majorirati sa

$$\begin{aligned}
p(t,\varepsilon_i) &\leq \phi(\varepsilon)[1 + B(t-t_0) + (t-t_0)^2],\\
q(t,\mu_i) &\leq \phi(\varepsilon)[1 + B^2(t-t_0)^2 + (t-t_0)^4]\\
v(t,\mu_i) &\leq \phi(\varepsilon)[1 + B(t-t_0) + (t-t_0)^2].
\end{aligned}$$

Tako eksponent u (3.1.5) postaje $2/m\, N_1 \int_{t_0}^{t} \eta(s,\varepsilon_i,\mu_i)\,ds < (t-t_0)\xi(t-t_0)$, gde je funkcija $\xi(r)$ $r \in [0, T-t_0]$, definisana kao

$$\xi(r) = \frac{2}{m} N_1\Big[L^2[M(T-t_0)+4] + A\theta(T-t_0+4)(1+Br+r^2)\Big]. \tag{3.1.19}$$

Za funkciju $\theta(\cdot)$ iz (3.1.5) važi

$$\begin{aligned}\theta(t,\varepsilon_i,\mu_i) \le \phi(\varepsilon)\Big[&(T-t_0+4)[1+B(t-t_0)+(t-t_0)^2]\\ &+(m-1)^2 A(T-t_0)[1+B^2(t-t_0)^2+(t-t_0)^4]\Big]\\ :=\ & \phi(\varepsilon)\,\overline{\theta}(t-t_0).\end{aligned}$$

Na osnovu ovoga i iz (3.1.5) dobija se sledeća ocena: za svako $t\in[t_0,T]$,

$$\begin{aligned}(3.1.20)\quad & E|x_\varepsilon(t)-x(t)|^{2m}\\ &\le \left\{N^{\frac{2}{m}}\phi(\varepsilon)\,e^{(t-t_0)\xi(t-t_0)}+\frac{2}{m}N_1A\phi(\varepsilon)\int_{t_0}^{t}\overline{\theta}(s-t_0)\,e^{(t-s)\xi(t-t_0)}\,ds\right\}^{\frac{m}{2}}.\end{aligned}$$

Pošto je T konačno, postoji konstanta $C>0$ koja zavisi od $M,A,B,N,N_1,T-t_0$ i ne zavisi od ε, tako da je za svako $t\in[t_0,T]$,

$$E|x_\varepsilon(t)-x(t)|^{2m}\le C(\phi(\varepsilon))^{\frac{m}{2}}.$$

Tada $\sup_{t\in[t_0,T]}E|x_\varepsilon(t)-x(t)|^{2m}\to 0$ kada $\varepsilon\to 0$.

Za $m=2$, imajući u vidu (3.1.17), neka je

$$\phi(\varepsilon)=\max\left\{\delta_0(\varepsilon),\overline{\delta_1}^4(\varepsilon),\overline{\delta_2}^4(\varepsilon),\overline{\delta_3}^4(\varepsilon),\overline{\gamma}_1^4(\varepsilon),\overline{\gamma}_2^4(\varepsilon),\overline{\gamma}_3^4(\varepsilon)\right\}.$$

Iz (3.1.6) sledi

$$(3.1.21)\qquad E|x_\varepsilon(t)-x(t)|^4\le\phi(\varepsilon)\,P_4((t-t_0)^2)\,e^{N_3L^4\left[(t-t_0)^4+c_4(t-t_0)^2\right]},\ t\in[t_0,T],$$

gde je $P_4(r),r\ge 0$ polinom. Jasno, $\sup_{t\in[t_0,T]}E|x_\varepsilon(t)-x(t)|^4\to 0$ kada $\varepsilon\to 0$.

Slično, za $m=1$, imajući u vidu (3.1.17), neka je

$$\phi(\varepsilon)=\max\left\{\delta_0(\varepsilon),\overline{\delta_1}^2(\varepsilon),\overline{\delta_2}^2(\varepsilon),\overline{\delta_3}^2(\varepsilon),\overline{\gamma}_1^2(\varepsilon),\overline{\gamma}_2^2(\varepsilon),\overline{\gamma}_3^2(\varepsilon)\right\}.$$

Tada iz (3.1.7) sledi

$$(3.1.22)\qquad E|x_\varepsilon(t)-x(t)|^2\le\phi(\varepsilon)\,P_4(t-t_0)\,e^{N_5L^2(t-t_0+4)(t-t_0)},\ t\in[t_0,T],$$

gde je $P_4(r),r\ge 0$ odgovarajući polinom. Dokaz tvrđenja sada neposredno sledi ako se primeni zaključivanje kao u slučaju $m=2$. $\square$

Ako se pretpostavi da postoje jedinstvena rešenja $x(t)$ i $x_\varepsilon(t)$ jednačina (3.1.1) i (3.1.2) respektivno, definisana na $[t_0,\infty)$, potrebno je ispitati bliskost rešenja tih jednačina u smislu momenta $(2m)$-tog reda. Pošto Teorema 3.1.1 i Teorema 3.1.2 generalno ne važe za slučaj $T=\infty$, sledeća teorema pokazuje da $\sup_t E|x_\varepsilon(t)-x(t)|^{2m}\to 0$ kada $\varepsilon\to 0$ na intervalima čija dužina teži beskonačnosti.

Teorema 3.1.3. (Sv. Janković, M. Jovanović, [36], 2002.) *Neka su zadovoljeni uslovi Teoreme* 3.1.2 *za* $t \geq t_0$. *Tada, postoji broj* $T(\varepsilon) > 0$ *tako da*

$$\sup_{t\in[t_0,t_0+T(\varepsilon)]} E|x_\varepsilon(t) - x(t)|^{2m} \to 0 \text{ kada } \varepsilon \to 0 \text{ i } T(\varepsilon) \to \infty \text{ kada } \varepsilon \to 0. \tag{3.1.23}$$

Dokaz. Zaista, $\sup_t E|x_\varepsilon(t) - x(t)|^{2m} \to 0$ kada $\varepsilon \to 0$ na svakom konačnom intervalu $[t_0, T] \subset [t_0, \infty)$ za fiksirano $T > t_0$. Tada se može staviti $T = t_0 + T(\varepsilon)$ i efektivno izračunati $T(\varepsilon)$ tako da važi (3.1.23).

Neka je $m > 2$. Za svako $t \in [t_0, t_0 + T(\varepsilon)]$ iz (3.1.20) sledi

$$\begin{aligned}\{E|x_\varepsilon(t) - x(t)|^{2m}\}^{\frac{2}{m}} &\leq \phi(\varepsilon)\left[N^{\frac{2}{m}}\, e^{(t-t_0)\xi(t-t_0)} + \frac{2}{m} N_1 A\,\overline{\theta}(T(\varepsilon)) \int_{t_0}^t e^{(t-s)\xi(t-t_0)}\, ds\right] \\ &\leq \phi(\varepsilon)\, P_6(T(\varepsilon))\, e^{(t-t_0)\xi(t-t_0)},\end{aligned}$$

gde je $P_6(r), r \geq 0$ odgovarajući polinom sa pozitivnim članovima.

Da bi se dobio vremenski interval na kome $E \sup_t |x_\varepsilon(t) - x(t)|^{2m} \to 0$ kada $\varepsilon \to 0$, dovoljno je zahtevati da

$$\phi(\varepsilon)\, P_6(T(\varepsilon))\, e^{T(\varepsilon)\xi(T(\varepsilon))} \to 0 \quad \text{kada} \quad \varepsilon \to 0.$$

Odatle, primenom elementarne nejednakosti $a_1^4 + 4a_1^3 a_2 + 6a_1^2 a_3^2 + 4a_1 a_4^3 \leq \left(\sum_{i=1}^4 a_i\right)^4$ za $a_i \geq 0$, gde su

$$\begin{aligned}&a_1 = (A\theta)^{1/4} \cdot T(\varepsilon), \quad a_2 = (A\theta)^{1/4}\,(B/4 + 1), \\ &a_3 = (36A\theta)^{-1/4}(A\theta + 4A\theta B + ML^2)^{1/2}, \quad a_4 = (A\theta)^{-1/12}(A\theta + L^2)^{1/3},\end{aligned}$$

za svako $t \in [t_0, t_0 + T(\varepsilon)]$ i proizvoljan broj $r \in (0, 1)$, važi

$$\begin{aligned}(t - t_0)\,\xi(t - t_0) \leq T(\varepsilon)\,\xi(T(\varepsilon)) &\leq \frac{2}{m} N_1 \left[(A\theta)^{1/4}\, T(\varepsilon) + \beta\right]^4 \\ &= \ln(\phi(\varepsilon))^{-r},\end{aligned}$$

pri čemu je $\beta = a_2 + a_3 + a_4$. Tada je

$$T(\varepsilon) = \left(\frac{-mr\ln\phi(\varepsilon)}{2A\theta N_1}\right)^{1/4} - \left(\frac{1}{A\theta}\right)^{1/4} \beta. \tag{3.1.24}$$

Zaista, $T(\varepsilon) > 0$ za svako dovoljno malo ε i $T(\varepsilon) \to \infty$ kada $\varepsilon \to 0$.

Na osnovu (3.1.24), za svako $t \in [t_0, t_0 + T(\varepsilon)]$ važi

$$\{E|x_\varepsilon(t) - x(t)|^{2m}\}^{\frac{2}{m}} \leq (\phi(\varepsilon))^{1-r}\, P_6\left(\left(\frac{-mr\ln\phi(\varepsilon)}{2A\theta N_1}\right)^{1/4} - \left(\frac{1}{A\theta}\right)^{1/4} \beta\right).$$

Pošto $(\phi(\varepsilon))^{1-r}(-r\ln\phi(\varepsilon))^{k/4} \to 0$ kada $\varepsilon \to 0$ za $k = 0, 1, \ldots, 6$, može se zaključiti da $\sup_{t\in[t_0,t_0+T(\varepsilon)]} E|x_\varepsilon(t) - x(t)|^{2m} \to 0$ kada $\varepsilon \to 0$.

Za $m = 2$ i $t \in [t_0, t_0 + T(\varepsilon)]$, iz (3.1.21) sledi

$$E|x_\varepsilon(t) - x(t)|^4 \leq \phi(\varepsilon)\, P_4(T^2(\varepsilon))\, e^{N_3 L^4 [T^4(\varepsilon) + c_4 T^2(\varepsilon)]}.$$

Iz relacije $N_3 L^4[T^4(\varepsilon) + c_4 T^2(\varepsilon)] = -r \ln \phi(\varepsilon)$, gde je $r \in (0,1)$ neki dati broj, nalazi se

$$T(\varepsilon) = \left[\left(\frac{c_4^2}{4} - \frac{r \ln \phi(\varepsilon)}{N_3 L^4} \right)^{1/2} - \frac{c_4}{2} \right]^{1/2} \tag{3.1.25}$$

Slično prethodnoj diskusiji, može se zaključiti da važi (3.1.23).

Analogno, za $m = 1$ i $t \in [t_0, t_0 + T(\varepsilon)]$, iz (3.1.22) sledi

$$E|x_\varepsilon(t) - x(t)|^2 \le \phi(\varepsilon)\, P_4(T(\varepsilon))\, e^{N_5 L^2 [T^2(\varepsilon) + 4T(\varepsilon)]},$$

pa se iz $N_5 L^2 [T^2(\varepsilon) + 4T(\varepsilon)] = -r \ln \phi(\varepsilon)$ dolazi do

$$T(\varepsilon) = \left(4 - \frac{r \ln \phi(\varepsilon)}{N_5 L^2} \right)^{1/2} - 2, \tag{3.1.26}$$

Dakle, važi (3.1.23). Time je dokaz teoreme kompletan. $\square$

Primer 3.1.1. Kao ilustracija izložene teorije, može se posmatrati perturbovana jednačina

$$\begin{aligned} x_\varepsilon(t) = \varphi(t_0) + \varepsilon_0^{\frac{1}{2m}} &+ \int_{t_0}^{t} \left[a(s, x_\varepsilon^s) + \varepsilon_1 + \int_{t_0}^{s} \frac{r^{-\frac{1}{\varepsilon_2}}}{1 + ||x_\varepsilon^r||_X}\, dr \right] ds \\ &+ \int_{t_0}^{t} \left[b(s, x_\varepsilon^s) + \frac{\mu_1}{1 + ||x_\varepsilon^s||_X} + \int_{t_0}^{s} e^{-\frac{r}{\mu_3}} \sin ||x_\varepsilon^r||_X \, dw(r) \right] dw(s), \end{aligned}$$

gde je $1 < t_0 \le t$, i uporediti njeno rešenje sa rešenjem odgovarajuće neperturbovane jednačine

$$x(t) = \varphi(t_0) + \int_{t_0}^{t} a(s, x^s)\, ds + \int_{t_0}^{t} b(s, x^s)\, dw(s), \ \ t \ge t_0 > 1.$$

Ne umanjujući opštost, pretpostavimo da postoje jedinstvena rešenja $x_\varepsilon(t)$ i $x(t)$ jednačina iz Primera 3.1.1, definisana na $[t_0, \infty)$. Sve perturbacije zadovoljavaju globalni Lipscthizov uslov i uslov linearnog rasta. Na osnovu (3.1.3) i (3.1.4) sledi:

$$\begin{aligned} \delta_0(\varepsilon_0) = \varepsilon_0, \quad \delta_1(t, \varepsilon_1) = \varepsilon_1, \quad \delta_2(t, s, \varepsilon_i) &= s^{-\frac{1}{\varepsilon_2}}, \quad \delta_3(t, s, \varepsilon_3) = 0, \\ \gamma_1(t, \mu_1) = \mu_1, \quad \gamma_2(t, s, \mu_i) &= 0, \qquad \gamma_3(t, s, \mu_i) = e^{-\frac{s}{\mu_3}}. \end{aligned}$$

Pored toga, kako važe svi uslovi Teoreme 3.1.3, mogu se naći vremenski intervali na kojima $\sup_t E|x_\varepsilon(t) - x(t)|^{2m} \to 0$ kada $\varepsilon \to 0$ i u isto vreme dužina tih intervala teži beskonačnosti.

Za $m > 2$, iz (3.1.17) i (3.1.18) je

$$\phi(\varepsilon) = \max \left\{ \varepsilon^{\frac{2}{m}}, \varepsilon^2, t_0^{-\frac{2}{\varepsilon}}, e^{-\frac{2t_0}{\varepsilon}} \right\}.$$

Iz pretpostavke $t_0 > 1$, lako je zaključiti da je $\phi(\varepsilon) = \varepsilon^{\frac{2}{m}}$. Pošto $\varepsilon \to 0$, postoji pozitivna konstanta $\rho < 1$ tako da za svako $\varepsilon \in (0, \rho)$ važi da je $\varepsilon^{\frac{2}{m}} \le \rho^{\frac{2}{m}} = \theta < 1$. Tada se za proizvoljno izabrani broj $r \in (0,1)$, iz (3.1.24) dobija

$$T(\varepsilon) = \left(\frac{-r \ln \varepsilon}{A \rho^{\frac{2}{m}} N_1} \right)^{1/4} - \left(\frac{1}{A \rho^{\frac{2}{m}}} \right)^{1/4} \beta.$$

Slično, $\phi(\varepsilon) = \varepsilon$ za $m = 2$ i $m = 1$. U tim slučajevima vrednosti $T(\varepsilon)$ se biraju iz (3.1.25) i (3.1.26), respektivno. $\triangle$

Napomena 3.1.1. Zbog jednostavnijeg zapisa diskutovan je jednodimenzionalan slučaj, pri čemu proširenje na višedimenzionalan, samo po sebi, nije komplikovano i može se razmatrati analogno. Jedina razlika je u tome da je potrebno primeniti vektorsku Itovu formulu, a u relaciji (3.1.4) funkcije δ_i, γ_i moraju biti posmatrane u odnosu na odgovarajuće norme, kako bi funkcija $\phi(\varepsilon)$ bila dobro definisana.

Napomena 3.1.2. Ako se primeni uobičajena stohastička izometrija, korišćena u radovima [40] i [61], može se oceniti $\overline{\Delta}_\varepsilon(T) = E\{\sup_{t\in[t_0,T]}|x_\varepsilon(t) - x(t)|^{2m}\}$ kao mera bliskosti između rešenja x_ε i x, kao i uslovi pri kojima $\overline{\Delta}_\varepsilon(T) \to 0$ kada $\varepsilon \to 0$ na konačnim fiksiranim intervalima ili na intervalima čija dužina teži beskonačnosti. Pored toga, u slučaju $T = \infty$, dobijeni rezultati mogu biti korišćeni za proučavanje uslova stabilnosti rešenja perturbovane jednačine u smislu momenta $(2m)$-tog reda i to tako što bi se proučavali uslovi stabilnosti rešenja odgovarajuće neperturbovane jednačine, tadođe u smislu momenta $(2m)$-tog reda.

3.2. Perturbovane nasledne stohastičke diferencijalne jednačine sa integralnim kontraktorima

Tema ovog poglavlja su problemi perturbacija, za nasledņu stohastičku diferencijalnu jednačinu, potpuno drugačiji od onih proučavanih u radu Marcusa i Mizela [59], bez pretpostavke da njeni koeficijenti zadovoljavaju Lipschitzov uslov. Polazeći od rada Mizela i Trutzera [61] i osnovnih ideja rada Stoyanova i Boteva [75], proučavane su nasledne stohastičke diferencijalne jednačine sa perturbacijama najopštijeg tipa, koje zavise od malog realnog parametra. Njihova rešenja upoređivana su sa rešenjima odgovarajućih neperturbovanih jednačina u smislu momenta $(2m)$-tog reda kada koeficijenti ovih jednačina imaju ograničeni slučajni integralni kontraktor Altmanovog [1] i Kuovog [53] tipa. U radu M. Jovanović, Sv. Janković, [42], 2001, je pokazano da Lipschitzov uslov implicira egzistenciju klase ograničenih integralnih kontraktora; s druge strane, funkcije koje imaju ograničeni slučajni integralni kontraktor u opštem slučaju ne zadovoljavaju Lipschitzov uslov. Rezultati ovog poglavlja objavljeni su u radu Sv. Janković, M. Jovanović, [37], 2001.

Neka važe sve pretpostavke o Banachovom prostoru $(X, ||x||_X)$ i prostoru merljivih slučajnih procesa $\mathcal{X}_0$ uvedene u Poglavlju 1.8.

Za nasledņu stohastičku diferencijalnu jednačinu Itoa

$$
\begin{aligned}
dx(t) &= a(t,x^t)dt + b(t,x^t)dw(t), \quad t \in [0,T] \\
x^0 &= \varphi^0,
\end{aligned}
\tag{3.2.1}
$$

neka je w je jednodimenzionalan standardni Wienerov proces definisan na prostoru verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ i saglasan sa familijom $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$, početna vrednost $\varphi^0 \in X$ ne zavisi od w i element je $\mathcal{X}_0$, dok su funkcionali a i b Borel merljivi i definisani na $[0,T] \times X$ sa vrednostima u R.

U Poglavlju 1.8 su dati dovoljni uslovi za egzistenciju i jedinstvenost rešenja jednačine (3.2.1) u slučaju kada funkcionali a, b zadovoljavaju globalni Lipschitzov uslov (1.7.4) i uslov ograničenog rasta po poslednjem argumentu (1.7.5), a početna vrednost za $l \geq 1$ zadovoljava uslov $E||x^0||_X^l \leq \infty$ za $x^0 \in \mathcal{X}_l$. U tom slučaju za jedinstveno i skoro izvesno neprekidno rešenje x jednačine (3.2.1), važi $E\sup_{0\leq s\leq t}|x(s)|^l < \infty$ za $t \in [0,T]$.

Prateći osnovne ideje Altmana [1] i Kua [53], koncept ograničenog slučajnog integralnog kontraktora, koji se razlikuje od prethodno navedenog uslova (1.7.4), definisan je u Poglavlju 1.8.1, kao i u radu [41], za dokaz egzistencije i jedinstvenosti rešenja nelinearne nasledne stohastičke integrodiferencijalne jednačine, koja obuhvata i jednačinu (3.2.1) kao specijalan slučaj. Ovde će, zbog preglednosti, biti navedene samo osnovne definicije i označavanja vezane za pojam ograničenog slučajnog integralnog kontraktora prilagođene za jednačinu (3.2.1).

Neka su $\Gamma : [0,T]\times X \to R$, $\Phi : [0,T]\times X \to R$ merljiva i ograničena preslikavanja i neka je $((Ax)y)^t$ element prostora X, tj. $((Ax)y)^t = (((Ax)y)(t), y_r^t)$, gde je

$$(3.2.2) \qquad ((Ax)y)(t) = y(t) + \int_0^t \Gamma(s,x^s)y(s)\,ds + \int_0^t \Phi(s,x^s)y(s)\,dw(s),$$

i y_r^t je neki element prostora L_p^ρ.

Neka postoji pozitivna konstanta K tako, da za svako x^t, y^t iz X i $t \in [0,T]$, sledeće nejednakosti važe skoro izvesno:

$$(3.2.3) \qquad \begin{aligned} &|a(t,x^t + ((Ax)y)^t) - a(t,x^t) - \Gamma(t,x^t)y(t)| \leq K||\,y||_t,\\ &|b(t,x^t + ((Ax)y)^t) - b(t,x^t) - \Phi(t,x^t)y(t)| \leq K||\,y||_t, \end{aligned}$$

pri čemu je $||\,y||_t = \sup_{0\leq s\leq t}||\,y^s||_X$. U tom slučaju funkcionali a i b imaju ograničeni slučajni integralni kontraktor

$$(3.2.4) \qquad \Big\{ I + \int_0^t \Gamma\,ds + \int_0^t \Phi\,dw(s) \Big\}.$$

Ograničeni slučajni integralni kontraktor je regularan ako linearna jednačina

$$(3.2.5) \qquad (Ax)y = z$$

ima rešenje y iz X za svako x i z iz X.

Funkcional $h : [0,T]\times X \to R$ je stohastički zatvoren ako za svako x i x_n iz X, za koje $x_n \to x$ i $h(\cdot, x_n^{\cdot}) \to y$ u $L^2([0,T]\times\Omega)$, važi $y(t) = h(t,x^t)$ skoro izvesno, za svako $t \in [0,T]$.

Teorema 3.2.1. *Neka su funkcionali a i b stohastički zatvoreni i imaju ograničeni slučajni integralni kontraktor (3.2.4), i neka je $\int_0^T E|a(t,\varphi^0)|^2dt < \infty$, $\int_0^T Eb|(t,\varphi^0)|^2dt < \infty$. Tada, jednačina (3.2.1) ima skoro izvesno neprekidno rešenje. Pored toga, ako je ograničeni slučajni integralni kontraktor regularan, tada je rešenje jedinstveno.*

Ako funkcionali a i b zadovoljavaju Lipschitzov uslov (1.7.4), tada su oni stohastički zatvoreni i imaju trivijalan ograničeni slučajni integralni kontraktor za $\Gamma = \Phi = 0$. Kao što je već naglašeno, u radu [41] je dokazano da Lipschitzov uslov implicira postojanje klase ograničenih slučajnih integralnih kontraktora u kojima je Γ proizvoljno preslikavanje definisano sa (3.2.2) i $\Phi = 0$. Pored toga, dokazano je da ako jednačina (3.2.1) ima regularan ograničen slučajni integralni kontraktor, Lipschitzov uslov u opštem slučaju nije zadovoljen. Ta činjenica predstavlja osnovu motivacije za proučavanje jednačine (3.2.1) korišćenjem koncepta ograničenog slučajnog integralnog kontraktora umesto uslova (1.7.4).

Neka je data stohastička nasledna diferencijalna jednačina koja zavisi od malog parametra

$$x_\varepsilon(t) = \varphi_\varepsilon(0) + \int_0^t [a(s, x_\varepsilon^s) + \alpha(s, x_\varepsilon^s, \varepsilon)]\, ds + \int_0^t [b(s, x_\varepsilon^s) + \beta(s, x_\varepsilon^s, \varepsilon)]\, dw(s), \quad t \in [0, T], \tag{3.2.6}$$

čije se rešenje upoređuje u smislu momenta $(2m)$-tog reda sa rešenjem odgovarajuće jednačine (3.2.1) u integralnom obliku

$$x(t) = \varphi(0) + \int_0^t a(s, x^s)\, ds + \int_0^t b(s, x^s)\, dw(s), \quad t \in [0, T]. \tag{3.2.7}$$

Ovde je ε *mali parametar* iz intervala $(0, 1)$. Funkcije α i β se zovu *perturbacije* koeficijenata a i b respektivno; jednačina (3.2.6) je *perturbovana jednačina*, dok je (3.2.7) *neperturbovana jednačina*. Ako se pretpostavi da su perturbacije male za malo ε i da je φ_ε^0 blisko φ^0, tada se može očekivati da rešenja x_ε i x budu bliska u nekom smislu.

Dokažimo najpre sledeće tvrđenje:

Propozicija 3.2.1. (Sv. Janković, M. Jovanović, [35], 2001.) *Neka su funkcionali a i b stohastički zatvoreni i imaju regularan ograničen slučajni integralni kontraktor (3.2.4). Neka je početna vrednost $\varphi^0 \in X$ neslučajna i neka su zadovoljeni uslovi $||\varphi^0||_X < \infty$, $\int_0^T |a(t, \varphi^0)|\, dt < \infty$, $\int_0^T |b(t, \varphi^0)|^2\, dt < \infty$. Tada, za svaki prirodan broj m, jednačina (3.2.7) ima jedinstveno skoro izvesno neprekidno rešenje $x(t)$, za koje važi*

$$E \sup_{0 \le s \le t} |x(s)|^{2m} < \infty \quad \textit{for} \quad t \in [0, T]. \tag{3.2.8}$$

Dokaz. Kako je početna vrednost $\varphi^0 \in X$ neslučajna, Teorema 3.2.1 važi pod uslovom $\int_0^T |a(t, \varphi^0)|\, dt < \infty$ umesto uslova $\int_0^T |a(t, \varphi^0)|^2\, dt < \infty$, tako da jednačina (3.2.7) ima jedinstveno skoro izvesno neprekidno strogo rešenje $x(t)$. U tom slučaju potrebno je dokazati da važi (3.2.8).

Pošto je ograničeni slučajni integralni kontraktor (3.2.4) regularan, jednačina

$$((Ax)y)^t = \varphi^0 - x^t, \quad t \in [0, T], \tag{3.2.9}$$

ima rešenje $y^t \in X$, pri čemu je $(((Ax)y)(t), y_r^t) = (\varphi(0) - x(t), \varphi_r^0 - x_r^t)$. Tada, na osnovu (3.2.2) važi

$$y(t) + \int_0^t \Gamma(s, x^s) y(s)\, ds + \int_0^t \Phi(s, x^s) y(s)\, dw(s) = \varphi(0) - x(t), \quad t \in [0, T]. \tag{3.2.10}$$

Pored toga, y^t je skoro izvesno neprekidno, zbog toga što je x^t skoro izvesno neprekidno.

Ako se sa $I_N(t) = I_{\{||y||_t \le N\}}$ označi indikator, tada je $I_N(t) = I_N(t) \cdot I_N(s)$ za $0 \le s \le t \le T$. Ako se desna strana u izrazu (3.2.10) zameni sa (3.2.7), dobiće se

$$\begin{aligned} I_N(s) y(s) = & - I_N(s) \int_0^s I_N(u) \, [a(u, x^u) + \Gamma(u, x^u) y(u)]\, du \\ & - I_N(s) \int_0^s I_N(u) \, [b(u, x^u) + \Phi(u, x^u) y(u)]\, dw(u), \quad s \in [0, T]. \end{aligned}$$

Iz (3.2.9) se dobija $a(s, x^u + ((Ax)y)^u) = a(u, \varphi^0)$ skoro izvesno, $b(u, x^u + ((Ax)y)^u) = b(u, \varphi^0)$ skoro izvesno, tako da se primenom elementarne nejednakosti (1.8.1), za $n = 4, k = 2m$ zaključuje

$$\begin{aligned}
E \sup_{0\le s\le t} |I_N(s)y(s)|^{2m} &\le 4^{2m-1} \\
&\times \Bigg[E \sup_{0\le s\le t} \Bigg(I_N(s) \int_0^s I_N(u)[a(s, x^u + ((Ax)y)^u) - a(u, x^u) - \Gamma(u, x^u)y(u)]du \Bigg)^{2m} \\
&+ \left(\int_0^t |a(s, \varphi^0)|\, ds \right)^{2m} \\
&+ E \sup_{0\le s\le t} \left(\int_0^s I_N(u)[b(s, x^u + ((Ax)y)^u) - b(u, x^u) - \Phi(u, x^u)y(u)]\, dw(u) \right)^{2m} \\
&+ E \sup_{0\le s\le t} \left(\int_0^s I_N(u) b(u, \varphi^0)\, dw(u) \right)^{2m} \Bigg], \quad t \in [0, T].
\end{aligned}$$

Za ocenu tih integrala potrebno je primeniti (3.2.3), Schwarzovu nejednakost i nejednakost Burkholder-Davis-Gundy (1.3.5). Odatle je

$$\begin{aligned}
E \sup_{0\le s\le t} |I_N(s)y(s)|^{2m} &\le 4^{2m-1} \left[K^{2m} t^{2m-1} \int_0^t E I_N(u) ||y||_u^{2m}\, du + \left(\int_0^t |a(s, \varphi^0)|\, ds \right)^{2m} \right. \\
&\left. + K^{2m} c_{2m} t^{m-1} \int_0^t E I_N(u) ||y||_u^{2m}\, du + c_{2m} \left(\int_0^t |b(s, \varphi^0)|^2\, ds \right)^m \right] \\
&\le 4^{2m-1} \left[K^{2m} (t^{2m-1} + c_{2m} t^{m-1}) \int_0^t E I_N(u) ||y||_u^{2m}\, du \right. \\
&\left. + \left(\int_0^t |a(s, \varphi^0)|\, ds \right)^{2m} + c_{2m} \left(\int_0^t |b(s, \varphi^0)|^2\, ds \right)^m \right] \\
&\equiv \theta(t) + \xi(t) \int_0^t E I_N(u) ||y||_u^{2m}\, du, \quad t \in [0, T],
\end{aligned}$$

gde su θ i ξ odgovarajuće funkcije, ograničene na $[0, T]$.

Pošto je $||y^0||_r = 0$, iz nejednakosti (1.7.2) za $\nu = 2m/p$, ako se označi $||\rho||_{L_1} = \int_0^\infty \rho(s)\, ds$, sledi

$$\begin{aligned}
E I_N(t) ||y||_t^{2m} &\le \tilde{k}_\nu (1 + ||\rho||_{L_1}^\nu) E \sup_{0\le s\le t} I_N(s) |y(s)|^{2m} \\
&\le \tilde{k}_\nu (1 + ||\rho||_{L_1}^\nu) \left[\theta(T) + \xi(T) \int_0^t E I_N(u) ||y||_u^{2m}\, du \right], \quad t \in [0, T].
\end{aligned}$$

Kako je poslednja nejednakost oblika (1.8.6), primenom uobičajene nejednakosti Gronwall-Bellmana, dobija se

$$E I_N(t) ||y||_t^{2m} \le \tilde{k}_\nu (1 + ||\rho||_{L_1}^\nu)\, \theta(T)\, e^{\tilde{k}_\nu (1 + ||\rho||_{L_1}^\nu) \xi(T)\, t} < \infty, \quad t \in [0, T],$$

pa na osnovu Fatouove leme sledi

$$E ||y||_t^{2m} < \infty, \quad t \in [0, T]. \tag{3.2.11}$$

Konačno, polazeći od relacije (3.2.10), može se oceniti moment $(2m)$-tog reda rešenja x jednačine (3.2.7). Merljiva preslikavanja Γ i Φ su ograničena u smislu (1.7.10), tj. postoje pozitivne konstante λ i μ, tako da je,

$$|\Gamma(t,x)| \le \lambda, \quad |\Phi(t,x)| \le \mu, \quad (t,x) \in [0,T] \times X. \tag{3.2.12}$$

Na osnovu (3.2.11) i osnovne osobine norme, $||\cdot||_X$, odakle je $E\sup_{s\le t}|y(s)|^{2m} \le E||y||_t^{2m}$, sledi

$$\begin{aligned} E\sup_{0\le s\le t}|x(s)|^{2m} &\le 4^{2m-1}(|\varphi(0)|^{2m} + E||y||_t^{2m}) \\ &\quad + 4^{2m-1}(\lambda^{2m}t^{2m-1} + \mu^{2m}c_{2m}t^{m-1})\int_0^t E||y||_s^{2m}\,ds < \infty, \quad t\in[0,T], \end{aligned}$$

čime je dokaz kompletan. $\square$

Napomena 3.2.1. Propozicija 3.2.1 se može dokazati i u slučaju kad je početna vrednost $\varphi^0 \in X$ slučajna, uz uslove $E||\varphi^0||_X^{2m} < \infty$ i $\int_0^T E|a(t,\varphi^0)|^{2m}\,dt < \infty$, $\int_0^T E|b(t,\varphi^0)|^{2m}\,dt < \infty$.

Pretpostavimo da postoje jedinstvena skoro izvesno neprekidna rešenja x_ε i x jednačina (3.2.6) i (3.2.7), koja zadovoljavaju uslove $E\sup_{0\le s\le t}|x_\varepsilon(s)|^{2m} < \infty$ i $E\sup_{0\le s\le t}|x(s)|^{2m} < \infty$ za $t\in[0,T]$, ne ističući posebno uslove za egzistenciju i jedinstvenost tih rešenja. Biće pretpostavljeni samo oni uslovi koji se neposredno koriste.

Potrebno je postaviti uslove za globalnu ocenu bliskosti rešenja x_ε i x, u smislu momenta $(2m)$-tog reda. Pri tome će se pokazati da su ti uslovi slični uslovima iz rada [36], a predstavljaju uopštenje uslova definisanih u radu [75], dok je postupak primenjen u ovom ocenjivanju drugačiji od postupka u tim radovima.

Teorema 3.2.2. (Sv. Janković, M. Jovanović, [35], 2001.) *Neka su $x_\varepsilon(t)$ i $x(t)$ rešenja jednačina* (3.2.6) *i* (3.2.7) *respektivno, definisana na konačnom fiksiranom intervalu* $[0,T]$, *i neka funkcionali a i b imaju ograničeni slučajni integralni kontraktor (3.2.4). Neka takođe postoji neslučajna nenegativna vrednost $\delta_0(\varepsilon)$ i nenegativne ograničene funkcije $\delta_1(\cdot)$ i $\delta_2(\cdot)$, definisane na $[0,T]$ koje zavise od ε, tako da je*

$$E||\varphi_\varepsilon^0||_X^{2m} < \infty, \quad E||\varphi^0||_X^{2m} < \infty, \quad E||\varphi_\varepsilon^0 - \varphi^0||_X^{2m} \le \delta_0(\varepsilon), \tag{3.2.13}$$

$$\sup_{x\in X}|\alpha(t,x,\varepsilon)| \le \delta_1(t,\varepsilon), \quad \sup_{x\in X}|\beta(t,x,\varepsilon)| \le \delta_2(t,\varepsilon). \tag{3.2.14}$$

Neka je

$$\begin{aligned} \xi(t) &= (A + \tilde{k}_\nu \overline{\overline{K}}^\nu)\delta_0(\varepsilon) + A\left[t^{2m-1}\int_0^t \delta_1^{2m}(s,\varepsilon)\,ds + c_{2m}t^{m-1}\int_0^t \delta_2^{2m}(s,\varepsilon)\,ds\right], \\ \eta(t) &= 3^{2m-1}(1 + \lambda^{2m}t^{2m} + \mu^{2m}c_{2m}t^m), \end{aligned} \tag{3.2.15}$$

gde su A, c_{2m}, λ, μ generisane konstante, koje ne zavise od ε i T. Tada je

$$E\sup_{0\le s\le t}|x_\varepsilon(s) - x(s)|^{2m} \le \xi(t)\,\eta(t)\,e^{AK^{2m}(t^{2m} - c_{2m}t^m)}, \quad t\in[0,T]. \tag{3.2.16}$$

Dokaz. Pošto je $z^s = x^s_\varepsilon - x^s \in X$ za $s \in [0,T]$ i pošto je ograničen slučajni integralni kontraktor (3.2.4) regularan, jednačina

$$((Ax)y)^s = x^s_\varepsilon - x^s, \quad s \in [0,T], \tag{3.2.17}$$

ima rešenje $y^s \in X, s \in [0,T]$. Odatle i iz (3.2.3) sledi da je, za svako $s \in [0,T]$,

$$\begin{aligned} & y(s) + \int_0^s \Gamma(u,x^u)y(u)\,du + \int_0^s \Phi(u,x^u)y(u)\,dw(u) = x_\varepsilon(u) - x(u), \\ & y^s_r = (x^s_\varepsilon)_r - x^s_r\,. \end{aligned} \tag{3.2.18}$$

Iz tih relacija može se oceniti moment $(2m)$-tog reda za $x_\varepsilon(t) - x(t)$.

Jednačine (3.2.6) i (3.2.7) zajedno sa (3.2.18) impliciraju

$$\begin{aligned} y(s) \;&=\; \varphi_\varepsilon(0) - \varphi(0) + \int_0^s [a(u,x^u_\varepsilon) - a(u,x^u) - \Gamma(u,x^u)y(u)]\,du \\ &\quad + \int_0^b [a(u,x^u_\varepsilon) - b(u,x^u) - \Phi(u,x^u)y(u)]\,dw(u) \\ &\quad + \int_0^s \alpha(u,x^u_\varepsilon,\varepsilon)\,du + \int_0^s \beta(u,x^u_\varepsilon,\varepsilon)\,dw(u), \quad s \in [0,T]. \end{aligned}$$

Odatle je

$$\begin{aligned} E \sup_{0\le s\le t} |y(s)|^{2m} \le 5^{2m-1} \Big[& E|\varphi_\varepsilon(0) - \varphi(0)|^{2m} \\ & + E \sup_{0\le s\le t} \left(\int_0^s [a(u,x^u_\varepsilon) - a(u,x^u) - \Gamma(u,x^u)y(u)]\,du \right)^{2m} \\ & + E \sup_{0\le s\le t} \left(\int_0^s [b(u,x^u_\varepsilon) - b(u,x^u) - \Phi(u,x^u)y(u)]\,dw(u) \right)^{2m} \\ & + E \sup_{0\le s\le t} \left(\int_0^s \alpha(u,x^u_\varepsilon,\varepsilon)\,du \right)^{2m} \\ & + E \sup_{0\le s\le t} \left(\int_0^s \beta(u,x^u_\varepsilon,\varepsilon)\,dw(u) \right)^{2m} \Big], \quad t \in [0,T]. \end{aligned}$$

Pošto iz (3.2.17) sledi da je $x^u_\varepsilon = ((Ax)y)^u + x^u$, na drugi i treći član se može primeniti nejednakost (3.2.3). Tada, primenom Schwarzove nejednakosti i nejednakosti Burkholder-Davis-Gundy (1.3.5), kao i pretpostavki (3.2.13) i (3.2.14), konačno se dobija, za svako $t \in [0,T]$,

$$\begin{aligned} E \sup_{0\le s\le t} |y(s)|^{2m} \le 5^{2m-1} \Big[& \delta_0(\varepsilon) + t^{2m-1} \int_0^t \delta_1^{2m}(u,\varepsilon)\,du \\ & + c_{2m} t^{m-1} \int_0^t \delta_2^{2m}(u,\varepsilon)\,du + K^{2m}(t^{2m-1} + c_{2m}t^{m-1}) \int_0^t E||y||^{2m}_u\,du \Big]. \end{aligned} \tag{3.2.19}$$

Kako iz druge relacije u (3.2.18) sledi $||y^0||_r = ||\varphi^0_\varepsilon - \varphi^0||_r \le ||\varphi^0_\varepsilon - \varphi^0||_X$, primenom nejednakosti (1.7.2) za normu $||\cdot||_X$ za $\nu = 2m/p$, je

$$E||y||^{2m}_t \le \tilde{k}_\nu(1 + ||\rho||^\nu_{L_1}) E \sup_{0\le s\le t} |y(s)|^{2m} + \tilde{k}_\nu \overline{\overline{K}}^\nu E||\varphi^0_\varepsilon - \varphi^0||^{2m}_X.$$

Tada, na osnovu (3.2.13) i (3.2.19), poslednja nejednakost postaje

$$(3.2.20) \qquad E||y||_t^{2m} \le \xi(t) + AK^{2m}(t^{2m-1} + c_{2m}t^{m-1}) \int_0^t E||y||_u^{2m}\, du, \quad t \in [0,T],$$

gde je $A = 5^{2m-1}\tilde{k}_\nu(1 + ||\rho||_{L_1}^\nu)$ i

$$\xi(t) = (A + \tilde{k}_\nu \overline{\overline{K}}^\nu)\delta_0(\varepsilon) + A\left[t^{2m-1}\int_0^t \delta_1^{2m}(s,\varepsilon)\, ds + c_{2m}t^{m-1}\int_0^t \delta_2^{2m}(s,\varepsilon)\, ds\right].$$

Pošto je nejednakost (3.2.20) oblika (1.8.7), primenom nejednakosti Gronwall-Bellmana dobija se ocena

$$(3.2.21) \qquad E||y||_t^{2m} \le \xi(t)\, e^{AK^{2m}(t^{2m}+c_{2m}t^m)}, \quad t \in [0,T].$$

Konačno, na osnovu (3.2.18) se može oceniti $E\sup_{0\le s\le t}|x_\varepsilon(s) - x(s)|^{2m}$. Pošto su preslikavanja Γ i Φ ograničena u smislu (3.2.12), sledi

$$\begin{aligned} E\sup_{0\le s\le t}|x_\varepsilon(s) - x(s)|^{2m} &\le 3^{2m-1}\left[E\sup_{0\le s\le t}|y(s)|^{2m} + E\sup_{0\le s\le t}\left(\int_0^s \Gamma(u,x^u)y(u)\, du\right)^{2m}\right.\\ &\qquad \left. + E\sup_{0\le s\le t}\left(\int_0^s \Phi(u,x^u)y(u)\, dw(u)\right)^{2m}\right]\\ &\le 3^{2m-1}\left[E\sup_{0\le s\le t}|y(s)|^{2m}\right.\\ &\qquad \left. + (\lambda^{2m}t^{2m-1} + \mu^{2m}c_{2m}t^{m-1})\int_0^t E|y(u)|^{2m}\, du\right]. \end{aligned}$$

Pošto je $|y(s)| \le ||y^s||_X \le ||y||_s$, tada je

$$E\sup_{0\le s\le t}|x_\varepsilon(s) - x(s)|^{2m} \le 3^{2m-1}(1 + \lambda^{2m}t^{2m} + \mu^{2m}c_{2m}t^m)\, E||y||_t^{2m}, \quad t \in [0,T],$$

tako da ako se primeni dobijena ocena za $E||y||_t^{2m}$, tj. relacija (3.2.21), lako se dolazi do ocene (3.2.16). Time je dokaz teoreme završen. $\square$

U vezi sa prethodnom diskusijom, može se očekivati da $\delta_0(\cdot)$, $\delta_1(\cdot)$, $\delta_2(\cdot)$ iz (3.2.13) i (3.2.14) teže nuli kada ε teži nuli, uniformno na $t \in [0,T]$. U tom slučaju naziv *male perturbacije* je logično zadržati za perturbacije α i β.

Osnovni zadatak je zadati uslove pri kojima $E\sup_{s\in[0,T]}|x_\varepsilon(s) - x(s)|^{2m} \to 0$ kada $\varepsilon \to 0$ na konačnim intervalima ili na intervalima čija dužina teži beskonačnosti. Polazeći od ocene (3.2.16), lako je dokazati sledeće teoreme.

Teorema 3.2.3. (Sv. Janković, M. Jovanović, [35], 2001.) *Neka su zadovoljeni uslovi Propozicije 3.2.1 i neka $\delta_0(\cdot)$, $\delta_1(\cdot)$, $\delta_2(\cdot)$ teže nuli kada ε teži nuli za $t \in [0,T]$. Tada*

$$E\sup_{s\in[0,T]}|x_\varepsilon(s) - x(s)|^{2m} \to 0 \quad \text{kada} \quad \varepsilon \to 0.$$

Dokaz. Neka je

$$\overline{\delta_1}(\varepsilon) = \sup_{t\in[0,T]} \delta_1(t,\varepsilon), \quad \overline{\delta_2}(\varepsilon) = \sup_{t\in[0,T]} \delta_2(t,\varepsilon), \tag{3.2.22}$$

$$\phi(\varepsilon) = \max\left\{\delta_0(\varepsilon), \overline{\delta_1}(\varepsilon)^{2m}, \overline{\delta_2}(\varepsilon)^{2m}\right\}. \tag{3.2.23}$$

Tada se iz (3.2.15) i (3.2.16) dobija

$$E \sup_{s\in[0,t]} |x_\varepsilon(s) - x(s)|^{2m} \le \Phi(\varepsilon)\, P_4(t^m)\, e^{AK^{2m}(t^{2m}+c_{2m}t^m)}, \quad t \in [0,T], \tag{3.2.24}$$

gde je $P_4(\cdot)$ polinom četvrtog stepena. Pošto je T konačno i $\Phi(\varepsilon) \to 0$ kada $\varepsilon \to 0$, neposredno sledi da $E\sup_{s\in[0,T]} |x_\varepsilon(s) - x(s)|^{2m} \to 0$ kada $\varepsilon \to 0$. □

Kao što je poznato, osnovna pretpostavka u svim prethodnim razmatranjima je da su rešenja $x_\varepsilon(t)$ i $x(t)$ definisana na konačnim fiksiranim intervalima $[0,T]$. Ali, ako je $T = \infty$, tada prethodna tvrđenja generalno ne važe. Sledeća teorema, koja predstavlja glavni rezultat ovog poglavlja i koja je u neposrednoj vezi sa Teoremom 3.2.3, omogućava konstrukciju konačnog intervala koji zavisi od ε i čija dužina teži beskonačnosti kada ε teži nuli, tako da rešenja $x_\varepsilon(t)$ i $x(t)$ budu bliska u smislu momenta $(2m)$-tog reda na tim intervalima.

Teorema 3.2.4. (Sv. Janković, M. Jovanović, [35], 2001.) *Neka su zadovoljeni uslovi Teoreme 3.2.3 za $t \in [0,\infty)$. Tada, za proizvoljan broj $r \in (0,1)$ i dovoljno malo ε, postoji broj $T(\varepsilon)$,*

$$T(\varepsilon) = \left(\sqrt{\frac{c_{2m}^2}{4} - \frac{r}{AK^{2m}}\ln\phi(\varepsilon)} - \frac{c_{2m}}{2}\right)^{1/m}, \tag{3.2.25}$$

pri čemu je $\phi(\varepsilon)$ dato sa (3.2.23), a c_{2m}, A, K su generisane pozitivne konstante koje ne zavise od ε, tako da

$$E \sup_{s\in[0,T(\varepsilon)]} |x_\varepsilon(s) - x(s)|^{2m} \to 0 \quad \text{kada} \quad \varepsilon \to 0.$$

Dokaz. Neka je $T = T(\varepsilon)$. Potrebno je efektivno izračunati $T(\varepsilon)$ tako da važi (3.2.25). Relacija (3.2.24) implicira

$$E \sup_{s\in[0,T(\varepsilon)]} |x_\varepsilon(s) - x(s)|^{2m} \le \Phi(\varepsilon)\, P_4(T^m(\varepsilon))\, e^{AK^{2m}\left(T^{2m}(\varepsilon)+c_{2m}T^m(\varepsilon)\right)}.$$

Potrebno je da desna strana ove nejednakosti teži nuli kada ε teži nuli. Pošto $\Phi(\varepsilon) \to 0$ kada $\varepsilon \to 0$, postoji $\varepsilon_0 < 1$ tako da je $\Phi(\varepsilon) < 1$ za $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$. Sada, se može staviti da je

$$AK^{2m}(T^{2m}(\varepsilon) + c_{2m}T^m(\varepsilon)) = -r\ln\Phi(\varepsilon)$$

za proizvoljan broj $r \in (0,1)$ i za $\varepsilon < \varepsilon_0$. Na osnovu toga lako je izraziti $T(\varepsilon)$ u obliku (3.2.25).

Pored toga, $T(\varepsilon) \to \infty$ kada $\varepsilon \to 0$. Pošto $(\Phi(\varepsilon))^{1-r}(-r\ln\Phi(\varepsilon))^{k/2m} \to 0$ kada $\varepsilon \to 0$ za $k = 0,1,\dots,4$, tada

$$E \sup_{s\in[0,T(\varepsilon)]} |x_\varepsilon(s) - x(s)|^{2m} \le (\Phi(\varepsilon))^{1-r} P_4(T^m(\varepsilon)) \to 0 \quad \text{kada} \quad \varepsilon \to 0,$$

što dokazuje teoremu. □

Primer 3.2.1. Primenimo prethodno dobijene rezultate na ocenu bliskosti rešenja perturbovane i neperturbovane jednačine u smislu momenta $(2m)$-tog reda. Posmatrajmo sledeću perturbovanu jednačinu

$$\begin{aligned} x_\varepsilon(t) &= \varphi(0) + \sqrt{\varepsilon} + \int_0^t \left[a(s, x_\varepsilon^s) + \sin \frac{\varepsilon}{\sqrt{1 + s + ||x_\varepsilon^s||_X}} \right] ds \\ &\quad + \int_0^t \left[b(s, x_\varepsilon^s) - \frac{||x_\varepsilon^s||_X}{1 + ||x_\varepsilon^s||_X + e^{(1+s)/\varepsilon}} \right] dw(s), \quad t \geq 0, \end{aligned}$$

dok je odgovarajuća neperturbovana jednačina

$$x(t) = \varphi(0) + \int_0^t a(s, x^s)\, ds + \int_0^t b(s, x^s)\, dw(s), \quad t \geq 0.$$

Neka početna vrednost φ^0 i funkcionali a i b zadovoljavaju uslove Propozicije 3.2.1, dok perturbacije

$$\alpha(t, x, \varepsilon) = \sin \frac{\varepsilon}{1 + t + ||x||_X}\,, \quad \beta(t, x, \varepsilon) = -\frac{||x||_X}{1 + ||x||_X + e^{(1+t)/\varepsilon}}\,,$$

zadovoljavaju Lipschitzov uslov, pa imaju trivijalan ograničen slučajni integralni kontraktor. Tada funkcionali u perturbovanoj jednačini imaju isti integralni kontraktor kao i funkcionali a i b.

Iz (3.2.13), (3.2.14) i (3.2.22) dobija se $\delta_0(\varepsilon) = \varepsilon^m$, $\overline{\delta_1}(\varepsilon) = \sin \varepsilon$, $\overline{\delta_2}(\varepsilon) = e^{-1/\varepsilon}$, i na osnovu (3.2.23),

$$\Phi(\varepsilon) = \max\{\, \varepsilon^m, (\sin \varepsilon)^{2m}, e^{-2m/\varepsilon}\,\} = \varepsilon^m.$$

Sada se jednostavno iz (3.2.25) Teoreme 3.2.4 mogu naći intervali $[0, T(\varepsilon)]$ čija dužina teži beskonačnosti kada ε teži nuli, tako da $E \sup_{s \in [0, T(\varepsilon)]} |x_\varepsilon(s) - x(s)|^{2m} \to 0$ kada $\varepsilon \to 0$. $\triangle$

Napomena 3.2.2. Početni uslov φ_ε^0 i perturbacije $\alpha(\cdot)$ i $\beta(\cdot)$ iz jednačine (3.2.6) mogu zavisiti od različitih malih parametara $\varepsilon_0, \varepsilon_1$ i ε_2 respektivno, što implicira da funkcije $\delta_0(\cdot)$, $\delta_1(\cdot)$ i $\delta_2(\cdot)$ takođe zavise od njih. Ako se pretpostavi da su te funkcije neopadajuće u odnosu na male parametre, tada važe sva prethodna tvrđenja iz ovog poglavlja, ako se označi $\varepsilon = \max\{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2\}$.

Literatura

[1] M. Altman, *Inverse differentiability contractors and equations in Banach space*, Studia mathematica, **46** 1–15, (1973).

[2] S.T. Ariaratnam, *Stabilty of Mechanical Systems under Stochastic Parametric Excitation*, In Proceedings IYTAM Symposium on Stochastic Dynamic Systems (R.V. Curtain Editor), Lecture Notes in Mathematics, 294, Springer Verlag, Berlin, pp. 291-302, (1972).

[3] S.T. Ariaratnam, *Birfurcation in Non-linear Stochastic Systems*, SIAM, Philadelphia, 470-474, (1980).

[4] L. Arnold, Stochastic Differential Equations, Theory and Applications. New York: John Wiley & Sons 1974.

[5] D. Bainov, P. Simeonov, Integral Inequalities and Applications. Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers 1992.

[6] A.T. Bharucha-Reid, Random Integral Equations, Academic Press, New York, 1972.

[7] G.K. Baxter, The Non-linear Response of Mechanical Systems to Parametric Random Excitation, Ph. D. Thesis, University of Siracuse, (1971).

[8] M. A. Berger, V.J. Mizel, *Volterra equations with Ito integrals I*, Journal of Integral Equations, **2**, 187–245 (1980).

[9] D. Burkholder, B. Davis, R. Gundy, *Integral inequalities for convex functions of operators on martingales*, Proc. 6th Berley Symp. Math. Statis. Prob, Berkley, Univ. of California Press, **2** (1972), 223-240.

[10] T.K. Caughey, *Non-linear Theory of Random Vibration*, Academic Press, New York, Vol. 11, 209-243, (1971).

[11] B.D. Coleman, V.J. Mizel, *Norms and semigroups in the theory of fading memory*, Arch. Rational Mech. Anal, **23**, 87–123, (1966).

[12] B.D. Coleman, V.J. Mizel, *On the general theory of fading memory*, Arch. Rational Mech. Anal, **29**, 18–31, (1968).

[13] B.D. Coleman, D.R. Owen, *On the initial value problem for a class of functional-differential equations*, Arch. Rational Mech. Anal, **55**, 275–299, (1974).

[14] J.L. Doob, Stochastic processes, John Wiley, New York, (1953).

[15] A. Fridman, Stochastic Differential Equations and Applications, Academic Press, New York, 1975.

[16] T. Gard, Introduction to Stochastic Differential Equations, Marcel Dekker, New York, 1988.

[17] I.I. Gihman, A.V. Skorohod, Stochastic Differential Equations and Their Applications. Kiev: Naukova Dumka, (1982) (In Russian).

[18] J. Hale, Theory of Functional Differential Equations, Springer, 1977.

[19] A.R. Ibrahim, Parametric Random Vibration, John Wiley & Sons Inc, New York, (1985).

[20] N. Ikeda, S. Watanabe, Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes, North Holland, 1981.

[21] K. Itô, *On Stochastic Differential Equations*, Memorial Mathematical Society, 4 (1951), 1–51.

[22] K. Itô, *On a Formula Concerning Stochastic Differentials, Nagoya*, Mathematical Journal, No 3, 55-65, (1951).

[23] Sv. Janković, *Some limit theorems for one type of stochastic integrodifferential equations*, Publications Mathematique, 41(55), 137-141, (1987).

[24] Sv. Janković, *Iterative procedure for solving stochastic differential equations*, Mathematica Balkanica, Nev Series, 1(1), (1987) 64–71.

[25] Sv. Janković, *One general iterative method treating stochastic integrodifferential equations*, Zbornik radova Filozofskog fakulteta u Nišu, Serija Mat., 1(11) (1987), 31–39.

[26] Sv. Janković, *Some special iterative procedure for solving stochastic differential equations of Ito type*, Mathematica Balkanica, New Series, 3(1), (1989), 44–50.

[27] Sv. Janković, *A General Method for a Mean Square Estimation of Nonlinear Oscillator Amlitude Subjected to Random Excitations*, Facta Universitatis, Series Mechanics, Automatic Control and Robotics, University of Niš, Vol. 1, No 3, 293-304, (1993).

[28] Sv. Janković, M. Jovanović, $(2m)$*-th mean behavior of stochastic differential equations under parametric perturbations*, Novi Sad Journal of Mathematics, Vol. 30, No.1, 2000, 133-142.

[29] Sv. Janković, M. Jovanović, *Convergence in* $(2m)$*-th mean for perturbed stochastic integrodifferential equations*, Publications Mathématique, 68(82), (2000), 133-144.

[30] Sv. Janković, M. Jovanović, *On a general iterative method for solving hereditary differential equations* (I), Filomat, 10(1996), 149-158.

[31] Sv. Janković, M. Jovanović, *On a general iterative method for solving hereditary differential equations* (II), Filomat, 11(1997), 7–18.

[32] Sv. Janković, M. Jovanović, *A general algorithm for solving stochastic hereditary integrodifferential equations*, Facta Universistatis, Serija: Mathematica and Informatika, 13(1998), 109-126.

[33] Sv. Janković, M. Jovanović, *Stochastic differential equations depending of small parameters*, Sym-op-is 2000, Zbornik radova.

[34] Sv. Janković, M. Jovanović, *Asymptotic behavior of non-linear dynamic systems subjected to parametric and random excitations*, Facta Universitatis, Series: Mechanics, Automatic Control and Robotics, Vol. 2, No 10, 2000, 1137-1148.

[35] Sv. Janković, M. Jovanović, *Perturbed stochastic hereditary differential equations with integral contractors*, Computers and Mathematics with Applications, 42, (2001), 871-881.

[36] Sv. Janković, M. Jovanović, *Perturbed stochastic hereditary differential equations*, Stochastic Analysis and Applications, 20 (3), 597-589, (2002).

[37] Sv. Janković, M. Jovanović, *Generalized stochastic perturbation-depending differential equations*, Stochastic Analysis and Applications, Marsel Dekker, New York, (assepted for publication).

[38] M. Janković, *Random integral contractor of stochastic integrodifferential equation of Ito type*, Filomat, 8,(1994), 103-114.

[39] M. Jovanović, Slučajni integralni kontraktor slučajnih naslednih integrodiferencijalnih jednačina Itoa, Magistarski rad, Filozofski fakultet, Univerzitet u Nišu, 1995.

[40] M. Jovanović, Sv. Janković, *On perturbed nonlinear Itô type stochastic integrodifferential equations*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, New York.

[41] M. Jovanović, Sv. Janković, *On a class of nonlinear stochastic hereditary integrodifferential equations*, Indian J. Pure Appl. Math. **28** (8), 1062–1082, (1997).

[42] M. Jovanović, Sv. Janković, *Existence and uniqueness problems for nonlinear stochastic hereditary integrodifferental equations*, Indian J. Pure Appl. Math., **32** (5), 695-710, (2001).

[43] Yu.M. Kabanov, S. M. Pergamenshchikov, *On singulary perturbed stochastic differential equations and partial differential equations*, Soviet. Math. Dokl. **311** (1990), 1039-1042. (In Russian).

[44] Yu.M. Kabanov, S.M. Pergamenshchikov, J.M. Stoyanov, *Asymptotic expansions for singulary perturbed stochastic differential equations*, In: New Trends in Probability and Statistics — In Honor of Yu. Prohorov (V. Sazanov, T. Shervashidze, eds.), pp. 413–435. Utrecht (NL): VSP 1991.

[45] G. Kallianpur, Stochastic Filtering Theory, Springer-Verlag, New York, 1980.

[46] S. Kanagawa, *The rate of convergence for approximate solutions of stochastic differential equations*, Tokyo J. Math., 12(1) (1989), 31–48.

[47] R. Khasminskii, *On stochastic processes defined by differential equations with a small parameter*, Theory Probab. Appl., 11 (1966), 211–228.

[48] R. Khasminskii, *The Averaging Principle for Stochastic Differential Equations of the Ito type*, Kybernetika, Moscow, Vol. 4, No 3, 260-279, (1967).

[49] P.E. Kloeden, E. Platen, Numerical Solution of Stochastic Differential Equations, Springer Verlag, Berlin, (1999).

[50] P.E. Kloeden, E. Platen, H. Schyrz, Numerical Solution of SDE Through Computer Experiments, Springer Verlag, Berlin, (1997).

[51] A.N. Kolmogorov, *Ob analitititičeskih metodah v teorii verojatnostej*, Uspehi matem. nauk, 5-41, 1938.

[52] F. Kozin, *Stability of the Linear Stochastic Systems*, In Proceedings IUTAM Symposium on Stability of Dynamical Systems, (R.F. Curtain, Editor), Lecture Notes in Mathematics, Springer Verlag, Berlin, 186-229, (1972).

[53] H.H. Kuo, *On integral contractors*, J. of Integral Equations **1**, 35–46, (1979).

[54] G. Ladde, V. Lakshmikantham, Random Differential Inequalities, Academic Press, New York (1980).

[55] M. J. Leitman, V. Mizel, *Hereditary laws and nonlinear integral equations on the line*, Adv. in Math., 22 (1976), 220–266.

[56] R. Liptser, A. Shiryaev, Statistics of Random Processes I. New York: Springer 1977.

[57] R. Liptser, J. Stoyanov, *Stochastic version of the averaging principle for diffusion type processes*, Stochastics & Stochastics Reports **32** (1990), 145-163.

[58] P.A. Mayer, Probability and Potentials, Blaisdell, Waltham, 1966.

[59] M. Marcus, V.J. Mizel, *Stochastic functional differential equations modelling materials with selective recall*, *Stochastics*, **25** (4), 195–232, (1988).

[60] D.S. Mitrinović, J.E. Pečarić, A.M. Fink, Inequalities Involving Functions and Their Integrals and Derivatives, Kluwer Academic Publishers, 1991.

[61] V.J. Mizel, V. Trutzer, *Asymptotic stability for stochastic hereditary equations, Phycical Mathematics and Nonlinear Partial Differential Equations*, Marcel Dekker Inc., New York and Basel, 1985.

[62] V.J. Mizel, V. Trutzer, *On stochastic hereditary equations: existence and asymptotic stability*, J. of Integral Equations 7 (1984), 1–72.

[63] M.G. Murge, B.G. Pachpatte, *On generalized Itô type stochastic integral equations*, Yokohama Mathematical Journal, **34**, 23–33 (1986).

[64] M.G. Murge, B.G. Pachpatte, *Explosion and asymptotic behavior of nonlinear Itô type stochastic integrodifferential equations*, Kodai Mathematical Journal, **9**, 1–18 (1986).

[65] M.G. Murge, B.G. Pachpatte, *Sucessive approximations for solutions of second order stochastic integrodifferential equations of Itô type*, Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, **21** (3), 260–274 (1990).

[66] M.G. Murge, B.G. Pachpatte, *Existence and uniqueness of solutions of nonlinear Ito type stochastic integral equations*, Math. Acta Scientia, 7(1987), 2, 207–216.

[67] B. Oksendal, Stochastic Differential Equations, Berlin: Springer–Verlag 1992.

[68] J. Picard, *Convergence in probability for perturbed stochastic integral equations*, Probab. Th. Rel. Fields **81** (1989), 383-451.

[69] V. Popescu, A. Rascanu, *On bounded deterministic and stochastic integral contractors*, Anale stiintifice ale Universitatii "Al. I. Cuza", Iasi, Tomui XXXIV. s. I a. Mathematica, (1988), f. 1, 37–51.

[70] A.N.V. Rao, W.J. Padgett, *Stability for a class of stochastic nonlinear feedback systems*, J. of Integral Equations, 6 (1984), 159–173.

[71] A.N. Shiryaev, Basis of Stochastic Financial Mathematics, I, II. Moscow: Phasys 1998 (in Russian).

[72] A.B. Skorohod, Asimptotičeskie metodi teorii stohastičeskih differencialjnih uravnenij, Naukova Dumka, Kiev, 1987.

[73] J. Stoyanov, *Usrednenie v stohastičeskih integrodifferencialjnih uravnenijah*, Mathematica Balkanica, 3, Beograd, 1973.

[74] J. Stoyanov, *Regurarly perturbed stochastic differential systems with an internal random noise*, Proc. 2^{nd} Word Congress Nonlin. Anal. (Athens, July '96), 1996.

[75] J. Stoyanov, D. Botev, *Quantitative results for perturbed stochastic differential equations*, J. Appl. Math. and Stoch. Analysis **9** (3), 255–261, (1996).

[76] C.P. Tsokos, W.J. Padgett, Random Integral Equations with Applications to Life Sciences and Engineering, Academic Press, New York, 1974.

[77] S. Wolfram, Mathematica: a system for doing mathematics by computer, Addison-Wesley Publishing Co, Redwood City, California, (1991)

[78] S. Wolfram, Mathematica Book, Version 3.0, Wolfram Media and Cambridge University Press, (1996).

[79] E. Wong, Stochastic Processes in Information and Dynamical System, McGraw Hill, New York, 1971.

[80] W.F. Wu, Y.K. Lin, *Cumulant-neglect Closure for Non-linear Oscillator under Parametric and External Excitations*, International Journal on Non-linear Mechanics, Vol. 19, No 4, 349-362, (1984).

[81] B.G. Zhang, W.J. Padgett, *The existence and uniqueness of solutions to stochastic differential–difference equations*, Stochastic Analysis and Appl., 2(3)(1984), 335–345.

[82] R. Zuber, *About one algorithm for solving of first order differential equations I*, Zastosow. Mat. VIII, 4, 1966., 351-363, (in Polish).

[83] R. Zuber, *About one algorithm for solving of first order differential equations II*, Zastosow. Mat. IX, 1, 1966., 85-97, (in Polish).

Index

Preface

The presented thesis *Perturbed stochastic differential equations* consists of original results in study of the different classes of stochastic differential equations which depend on small parameters. One part of this thesis arose as the consequence of the investigation started at the postgraduate studies [39] in the field of the hereditary stochastic differential equations.

Stochastic differential equations which depend on deterministic and random perturbations are the goal of the investigation of many researchers. The development of the theory of perturbed ordinary differential equations started in 1970's in the papers of many mathematicians as well as mechanicians, first of all Soviet mathematicians Hasminski and Mitropoljski, in order to solve some concrete problems in mechanics, physics and engineering. Starting from these results which do not contain the stochastic elements, in many papers from mechanics, engineering as well as recently in financial mathematics, mathematical models represented by perturbed stochastic differential equations have been investigated. For example, in papers Hasminski [47] 1966; Picard [68], 1989; Kabanov and Pergamenshchikov [43], 1990; [44], 1991; Stoyanov [73], 1973; [74] 1996; Stoyanov and Botev [75], 1997; Stoyanov and Liptser [57], 1990, and first of all in monograph of Skorohod [72], 1987.

In the theory of stochastic differential equations there is a small number of nonlinear equations which are effectively solvable. It means that, generally, analytic form of the solutions could not be found. Analytic and numerical methods of approximative solving of these equations are often used in this case. Investigation of the different types of perturbed stochastic differential equations is motivated by the most recent contributions concerning one of the analytic methods for approximative solving of the perturbed stochastic differential equations given in paper Stoyanov and Botev *Quantitative results for perturbed stochastic differential equations*, Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis, 9 (3), (1996), 255–261.

The basic idea in this thesis is the investigation of the influence of small perturbations on the solutions of different classes of perturbed stochastic differential equations, in which the perturbations are more general then the ones investigated by Stoyanov and Botev. In the thesis the comparison of the solutions of perturbed and corresponding unperturbed equations of the same or simpler type is also given.

All results in this thesis are presented in three chapters:

In the first chapter, some basic notions and results from the theory of stochastic processes and stochastic differential equations, basic theorems of existence and uniqueness of the solutions of different types of stochastic differential and integrodifferential equations of the Ito type are given.

In the second chapter the perturbed stochastic differential equations of the Ito type are considered. Likewise, the results for special types of perturbations for stochastic differential equations by [75] Stoyanov and Botev are presented. This chapter holds some original results in the study of additive perturbed linear and general stochastic integrodifferential equations. Conditions for the closeness in the $(2m)$-th moment sense of solutions of perturbed and corresponding unperturbed equations on finite intervals or on intervals whose length tends to infinity, when small parameters tends to zero, are given. Similar problems are considered for a linear and functional perturbed stochastic differential and general integrodifferential equations. Majority of these results in this chapter are published in the papers: Sv. Janković, M. Jovanović, [29], 2000; M. Jovanović, Sv. Janković, [40], 2002; Sv. Janković, M. Jovanović, [28], 2000; Sv. Janković, M. Jovanović, [37], 2002.

In Chapter 3 the perturbed hereditary stochastic differential and integrodifferential equations are studied under different assumptions for coefficients of the equations which are Lipschitzian or have a bounded random integral contractor. Mentioned results have been published in the papers: Sv. Janković, M. Jovanović, [36], 2002; Sv. Janković, M. Jovanović, [35], 2001.

Obtained results can be generalized for stochastic differential equations which include square integrable martingales instead of Wiener processes. The method which is used in this thesis can be combined with stochastic average technique of Hasminskii, which was applied in papers [56] and [74], and can be a subject of future investigations.

Results given in this thesis can be applied for the investigation of the asymptotic stability of the solutions in the $(2m)$-th moment sense of the perturbed equation, by studying the asymptotic stability, in the same sense, of the corresponding simpler unperturbed equation.

R. Zuber [82] treated one general analytic iterative procedure for solving deterministic ordinary differential equation of first order. The generality of this method is in the sense that many well-known, historically important iterative methods, are its special cases, for example: Picard-Lindelöf method successive approximations, Chaplygin methods of secants and tangents, Newton-Kantorovich method and some interpolation methods [83]. Later, this approach was appropriately extended to the study of special classes of stochastic differential and integrodifferential equations of the Ito type (for example, see [23], [24], [25], [26]) and directly used, for example in [46], in which the rate of convergence of an approximate solution is estimated. An analogous iterative procedure for solving one very general stochastic integrodifferential equation, which includes different classes of stochastic equations of the Ito type as its special cases is constructed in the paper Sv. Janković, M. Jovanović, [32], 1996. Under some assumptions for discrete perturbations, with probability one, closeness of solutions of perturbed and corresponding unperturbed equations of the Ito type can be proved.

I want to express my gratitude for great support during my work on this thesis, in everyday life and work, to my professor Ph. D. Svetlana Janković, whose enormous energy and enthusiasm represent a real stimulus for work.

I give special acknowledgement to professor Ph. D. Slobodan Janković for useful comments and help in preparation of the thesis concerning graphic support.

Dedicated to my parents Ljiljana and Dragan.

Contents