Sadržaj

Predgovor

Ova doktorska disertacija nastala je na osnovu samostalnih objavljenih radova [28], [30] i [31], kao i rada [29] u koautorstvu sa D. Đorđevićem i V. Rakočevićem. Pored toga u tezi su izloženi rezultati iz još ne objavljenih radova [32], [33], [34], [36] i [68], nastalih kao rezultat zajedničkog rada sa D. Đordjevićem, B. Zhengom, J. Kolihom i Y. Weyom. Rad na ovoj doktorskoj tezi posvećen je prvenstveno izučavanju Schurovog komplementa i njegovih uopštenja a usledio je nakon rada na magistarskim studijama (Otvori između Banachovih prostora i primene, Magistarska teza, Univerzitet u Nišu, Prirodno-matematički fakultet, 2000). Pojedini rezultati iz teze su saopšteni i na matematičkim konferencijama: (1) *10th Congress of Yugoslav Mathematicians, 21-24 January, 2001, Belgrade, Yugoslavia;* (2) *5th International Symposium on Mathematical Analysis and its Applications, 2-6 October, 2002, Niška Banja, Serbia and Montenegro;* (3) *The 6th International Symposium on Nonlinear Mechanics - Nonlinear Sciences and Applications, 24-29 August, 2003, Niš, Serbia and Montenegro;* (4) *International Congress MASSEE'2003, 15-21 September, 2003, Borovets, Bulgaria;* (5) *International Workshop on Modern Functional Analysis, Operator Theory, Summability and Applications, 25-28 September, 2003, Niška Banja, Serbia and Montenegro;*(6) *Workshop in Mathematical analysis, 15-21 March, Guanajuato, Mexico.* Osnovna oblast kojoj ova disertacija pripada je *teorija operatora* mada se veoma često koriste i elementi algebre i linearne algebre.

Pojam Schurovog komplementa JE prvi put definisan na skupu blok-matrica. Naime, ako je $M \in C^{(m+p)\times(n+q)}$ blok matrica data sa

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}, \tag{1}$$

gde je $A \in C^{m\times n}$ nesingularna i $D \in C^{p\times q}$, tada se Schurov komplement od A u M, označava sa $S(M)$ ili M/A, a definiše sa:

$$S(M) = M/A = D - CA^{-1}B. \tag{2}$$

Izučavanja u vezi Schurovog komplementa implicirana su u radu J.J. Sylvestera, 1851 godine, mada je formulu (2) prvi put iskoristio I.Schur [88], gde je dokazao:

$$\det(M) = \det(A) \cdot \det(D - CA^{-1}B). \tag{3}$$

Očigledno, matrica M je nesingularna ako i samo ako je Schurov komplement $S(M)$ nesingularna matrica. Pored toga, L.Guttman [54] je dokazao da je

$$r(M) = r(A) + r(S(M)), \tag{4}$$

gde je $r(A)$ rang matrice A.

Od velikog značaja za dalja istraživanja je rad A. Alberta [1], gde je u formuli (2), A^{-1} zamenjen sa $A^\dagger$, tj. Moore-Penroseovim inverzom matrice A. Tako je uveden generalisani (uopšteni) Schurov komplement od A u M,

$$S(M) = M/A = D - CA^\dagger B. \tag{5}$$

D. Carlson, E. Haynsworth i T. Markham [20] su izučavali svojstva generalisanog Schurovog komplementa i dokazali neke od već dobijenih rezultata vezanih za Schurov komplement, ali uz znatno strožije uslove. Na primer, za matricu $M \in C^{(m+n)\times(m+n)}$ oblika (1), Schurova formula (3) važi ako je $N(A) \subseteq N(C)$ ili $N(A^*) \subseteq N(B^*)$, a jednakost (4) važi ako i samo ako je

$$N(M/A) \subseteq N((I - AA^\dagger)B) \quad \text{i} \quad N((M/A)^*) \subseteq N((I - A^\dagger A)C^*). \tag{6}$$

Značajni rezultati dobijeni u tom periodu vezani za generalisani Schurovog komplement blok-matrice, kao i različiti pristupi ovom pojmu mogu se naći u radovima D. Carlsona[19], T. Andoa [5], R. W. Cottlea [27], M.G. Kreina [70], W. N. Andersona i G. E. Trappa [3] i C. A. Buttlera i T. D. Morleya [16].

Ova doktorska disertacija se sastoji iz tri glave a svaka glava iz više poglavlja.

U prvoj glavi izloženi su osnovni pojmovi Teorije oparatora i originalni rezultati radova [32], [33], [36] i [68], u kojima su izučavane neke osobine Drazinovog i generalisanih inverza, kao i neke oparatorske jednačine.

U sekciji 1.1, navedeni su osnovni pojmovi i oznake iz teorije operatora.

Poglavlje 1.2 posvećeno je Drazinovom i Moore–Penroseovom inverzu, kao i pronalaženju uslova za egzistenciju Re-nnd i Re-pd rešenja operatorske jednačine $AXB = C$, sa minimalnim, tj. maksimalnim rangom. Napomenimo da je operator A Re-nnd (Re-pd) ako je njegov realni deo $H(A) = \frac{A+A^*}{2} \geq 0$ $(H(A) = \frac{A+A^*}{2} > 0)$, a da se pod rangom operatora A, u oznaci $r(A)$, smatra dimenzija zatvorenja slike, tj. $r(A) = \dim \overline{R(A)}$. Teorema 1.2.1 i Teorema 1.2.3[36] su originalni rezultati i oni uopštavaju rezultate iz radova L. Wua i B. Caina [104] i J. Grossa [52], a dobijene su u radu [36].

U Poglavlju 1.3 razmatra se Moore–Penroseov inverz u prstenu sa involucijom u kome, kao u C^*-algebrama ili u $*$-redukovanim algebrama, činjenica $a^*a = 0$ povlači da je $a = 0$. Rezultati u ovoj sekciji su originalni rezultati rada [68], nastali kao rezultat zajedničkog rada sa D. Đorđevićem i J. Kolihom. Neki od rezultata uopštavaju rezultate R. E. Hartea i M. Mbekhte [58, 59] u C^*-algebrama i J. Kolihe i P. Patricia [69] u prstenu sa involucijom. Izučavani su elementi sa dobrim nosačem (well-supported element) u prstenu sa involucijom i osobina regularnosti i egzistencija Moore–Penroseovog inverza. Dobijeni rezultati su primenjeni na C^*-algebre i dobijena je karakterizacija stabilnog ranga 1 i realnog ranga 1 (videti [64]). Takođe, u ovoj sekciji je izučavan zakon o inverznom redosledu za MP– inverze u prstenu sa involucijom, čime su uopšteni rezultati za matrice [13] i operatore na Hilbertovom prostoru [11, 12] i [63]. Pored toga, razmatran je zakon o inverznom redosledu za težinske Moore–Penroseove inverze u C^*-algebrama i na taj način uopšten rad Suna i Weia [89] za matrice.

Poglavle 1.4 posvećeno je proučavanju aditivnih osobina generalisanog Drazinovog inverza u Banachovoj algebri. Eksplicitno je izražen generalisani Drazinov inverz sume $a + b$ u funkciji od a, a^d, b i b^d, pod različitim uslovima. Rezultate vezane za ovaj problem, specijalno za linearne ograničene operatore, nalazimo u radu D. Đorđević i Y. Wei [39] i u radu N. Gonzaleza i J. Kolihe [49], za elemente Banachove algebre. Izloženi rezultati su dokazani u [33] a predstavljaju uopštenje radova [39] i [49].

Rezultati iz druge glave predstavljaju originalne rezultate radova [29], [30] i [31].

U poglavlju 2.1 date su definicije Schurovog i generelisanog Schurovog komplementa, kao i pregled nekih ranijih rezultata.

U poglavlju 2.2 definisan je pojam Schurovog komplementa u C^*-algebrama. Takođe, izloženi su i rezultati vezani za mnogobrojne osobine Schurovog komplementa, koji predstavljaju uopštenja prethodno dobijenih rezultata na skupu blok-matrica ili ograničenih linearnih operatora na Hilbertovom prostoru, na elemente C^*-algebre $\mathcal{A}$.

Ako je $a \in \mathcal{A}$ i $s = s^* = s^2 \in \mathcal{A}$, tada je

$$a = sas + sa(1-s) + (1-s)as + (1-s)a(1-s).$$

Neka je

$$a_{11} = sas, \quad a_{12} = sa(1-s), \quad a_{21} = (1-s)as, \quad a_{22} = (1-s)a(1-s).$$

Sada se $a \in \mathcal{A}$ može predstaviti u matričnom obliku

$$a = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}_s .$$

U radu [29] je uveden i izučavan Schurov komplement elementa $a \in \mathcal{A}$ u odnosu na $s \in \mathcal{A}$, definisan sa

$$s(a) = a_{22} - a_{21}{a_{11}}^{\dagger}a_{12}, \tag{7}$$

uz pretpostavku da je a_{11} regularan.

U Teoremi 2.2.1 uopšteni su rezultati Alberta [1], koji dovodi u vezu nenegativnu definitnost hermitskog elementa $a \in \mathcal{A}$ i Scurovog komplementa $s(a)$. U dokazu su korišćene značajno drugačije metode.

U Teoremi 2.2.2 je pokazano da

$$s(a) = a_{22} - a_{21}{a_{11}}^{\dagger}a_{12} = \max\{x \in \mathcal{A} : 0 \le x \le a,\ (1-s)x = x\},$$

gde je $a \geq 0$ i a_{11} regularan element.

Zatim, u Posledici 2.2.2 je dokazano

$$\begin{aligned} s(a) &= \min\{qaq^* : q = z + 1 - s,\ z \in (1-s)\mathcal{A}s\} \\ &= (1 - s - {a_{12}}^*{a_{11}}^{\dagger})a(1 - s - {a_{12}}^*{a_{11}}^{\dagger})^*, \end{aligned}$$

što predstavlja uopštenje rezultata iz [25]. Dokazano je da uz pretpostavke o regularnosti nenegativnog elementa a i a_{11}, Schurov komplement $s(a)$ takođe jeste regularan i pri tome je $a^\dagger$ njegov unutrašnji inverz. Dokazana je nejednakost (Posledica 2.2.4):

$$\inf(\sigma(a) \setminus \{0\}) \leq \inf(\sigma(s(a)) \setminus \{0\}).$$

U Poglavlju 2.3 uopšteni su neki rezultati iz rada [25], kao i određene nejednakosti vezane za Schurov komplement.

Originalni rezultati iz rada [34] čine poglavlje 2.4. U njemu su izučavani potrebni i dovoljni uslovi za predstavljanje težinskih inverza $A^{1,3(M)}$, $A^{1,4(N)}$, $A^\dagger_{M,N}$ i $A^{d,W}$ blok-matrice A u Banachiewicz-Schur formi. Predstavljanje inverza blok-matrice preko blok-matrice čiji su blokovi funkcije od Schurovog komplementa izučavali su Marsaglia i Styan [71], Baksalary i Styan [7] i Y.Weia [96]. Rezultati ovih radova su uopšteni u radu [34].

U Poglavlju 2.5 dato je jedno uopštenje Schurovog komplementa, gde je umesto MP–inverza matrice A korišćen Drazinov inverz, A^d. Teorema 2.5.1 predstavlja uopštenje formule J. Duncana [45], za Drazinov inverz. Rezultati ove sekcije su originalni rezultati rada [32], a za posledicu imaju rezultate rada Y.Weia [97].

Poglavlje 2.6 posvećeno je pronalaženju nekih specijalnih rešenja blok-rang jednačine

$$rank \begin{bmatrix} A & B \\ C & X \end{bmatrix} = rank(A), \tag{8}$$

gde su $A \in C^{n\times n}$, $B \in C^{n\times m}$, $C \in C^{m\times n}$ i $X \in C^{m\times m}$. Marsaglia and Styan [71] su dali potrebne i dovoljne uslove za egzistenciju rešenja jednacine (8). J. Gross [50] je dobio potrebne i dovoljne uslovi da rešenje ove jednačine bude MP–inverz matrice A. N. Thome and Y. Wei [91] su izučavali uslove kada je refleksivni inverz matrice A rešenje jednacine (8) kao i uslove pod kojima je Drazinov inverz matrice A rešenje ove jednačine, ali samo u specijalnom slucaju kada je $ind(A) = 1$. Kao otvoren problem rada [91], ostalo je pitanje kada je Drazinov inverz, A^d rešenje jednacine (8), za matricu A proizvoljnog indeksa? Rešenje ovog problema je sadržano u doktorskoj disertaciji a rezultati su publikovani u radu [31]. Koristeći različite reprezentacije matrica, imajući u vidu da je rešenje ono X za koje je Schurov komplement jednak nuli, dokazani su rezultati koji su vezani za generalisane inverze [30], a koji uopštavaju rezultate iz radova [50], [91] i [20].

U delu Dodatak priloženi su radovi koji su prihvaćeni za publikovanje sa izveštajima recezenata, kao i oni koji su poslati u odgovarajuće matematičke časopise i čije se recenzije očekuju.

Zadovoljstvo mi je i čast da se zahvalim mentoru prof. dr Draganu Đorđeviću, na velikoj i svesrdnoj pomoći koju mi je pružio u toku izrade ove disertacije, prateći ceo tok njene izrade, procenjujući rezultate do kojih sam dolazila i korisnim primedbama i sugestijama dao veliki doprinos konačnoj verziji disertacije.

Takođe se zahvaljujem prof. dr Vladimiru Rakočeviću na podršci, korisnim sugestijama i savetima u mom naučnom radu, kao i na strpljenju i pomoći koju mi je pružio tokom izrade ove doktorske disertacije.

Posebno bih se zahvalila mojoj porodici na razumevanju, odricanju i podršci koju mi je nesebično pružala sve vreme.

Glava 1

Uvod

1.1 Neke oznake i pojmovi iz teorije operatora

U ovoj glavi navedeni su osnovni pojmovi i oznake iz teorije operatora i funkcionalne analize. Izložena teorija je preuzeta iz dobro poznate i bogate literature [9], [10], [13], [14], [18], [56], [62], [75], [80], [86], [94].

Ako su $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ kompleksni beskonačno dimenzionalni Banachovi prostori, sa $\mathcal{B}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ je označen Banachov prostor svih *ograničenih operatora* iz $\mathcal{X}$ u $\mathcal{Y}$, a sa $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ Banachova algebra svih ograničenih operatora na $\mathcal{X}$. Za $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ neka je $N(A) = \{x \in \mathcal{X} : Ax = 0\}$ *jezgro*, a $R(A) = \{Ax : x \in \mathcal{X}\}$ *slika* operatora A. Zatvoren potprostor M prostora $\mathcal{X}$ je komplementaran u $\mathcal{X}$, ako postoji zatvoren potprostor N od $\mathcal{X}$, tako da važi

$$\mathcal{X} = M \oplus N.$$

U tom slučaju postoji jedinstvena projekcija $P \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ sa $\mathcal{X}$ na M, paralelno sa N, odnosno $P^2 = P$, $R(P) = M$ i $N(P) = N$. Ako su prostori M i N međusobno ortogonalni, tada se ovakva dekompozicija prostora naziva ortogonalnom.

Sa $\mathcal{B}(\mathcal{X})^{-1}$, $\mathcal{B}_l(\mathcal{X})^{-1}$ i $\mathcal{B}_r(\mathcal{X})^{-1}$, označavamo redom, skup svih invertibilnih, levo invertibilnih i desno invertibilnih operatora na $\mathcal{X}$. Dobro je poznato da je $A \in \mathcal{B}_l(\mathcal{X})$ ako i samo ako je $N(A) = \{0\}$ a $R(A)$ je zatvoren i komplementaran potprostor od $\mathcal{X}$. Takođe, $A \in \mathcal{B}_r(\mathcal{X})^{-1}$ ako i samo ako je $R(A) = \mathcal{X}$ i $N(A)$ je komplementaran potprostor od $\mathcal{X}$.

Spektar operatora A je

$$\sigma(A) = \{\lambda \in C : A - \lambda \notin \mathcal{B}(\mathcal{X})^{-1}\},$$

a *rezolventni skup* je $\rho(A) = C \setminus \sigma(A)$.

Ako je $\mathcal{X}$ Hilbertov prostor i $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ tada je sa

$$H(A) = \frac{A + A^*}{2},$$

definisan *realni deo operatora* A. Operator A je *Re-pd* (*Re-nnd*) ako je $H(A) > 0$ ($H(A) \geq 0$). Dimenzija zatvorenja od $R(A)$, naziva se *rang operatora* A, tj.

$$r(A) = dim\overline{R(A)}.$$

Neka je $\mathcal{A}$ Banachova algebra sa jedinicom. Sa $\dot{\mathcal{A}}$, $\mathcal{A}^{-1}$, $\mathcal{A}_h$, $\dot{\mathcal{A}}_h$ označavamo redom, skup svih idempotenata, invertibilnih elemenata, hermitskih elemenata i projektora. $s \in \mathcal{A}$ je projektor ako je $s = s^2 = s^*$.

Za matricu $M \in C^{m\times n}$, $r(M)$ označava njen rang. Skup svih matrica prostora $C^{n\times n}$ čini je rang jednak r označen je sa $C_r^{m\times n}$. Ako je matrica M hermitska, tada se sa $\mathrm{In}(M)$ označava uređena trojka $\mathrm{In}(M) = (\pi, \nu, \delta)$, gde je π broj pozitivnih, ν broj negativnih a δ broj sopstvenih vrednosti koji su jednaki 0. Dakle, $\pi + \nu = r(M)$.

Najmanji broj $n \geq 0$ (ako postoji) za koji važi $N(A^n) = N(A^{n+1})$, naziva se *uspon* (rast) operatora T i u tom slučaju je $\mathrm{asc(A) = n}$. Ukoliko takvo n ne postoji, tada je A beskonačnog rasta i $\mathrm{asc(A)} = \infty$. Analogno, najmanji broj $n \geq 0$, (ako postoji), za koji važi $R(A^n) = R(A^{n+1})$, naziva se *pad* operatora A i označava se sa $\mathrm{des(A) = n}$. Ukoliko takvo n ne postoji, tada je A beskonačnog pada i $\mathrm{des(A)} = \infty$.

Ako je $\mathrm{asc(A)} < \infty$ i $\mathrm{des(A)} < \infty$, onda je $\mathrm{asc(A) = des(A) = p}$. U tom slučaju je $\mathcal{X} = R(A^p) \oplus N(A^p)$ i ova dekompozicija redukuje operator A. Takođe, $\mathrm{asc(A) = des(A) = p} < \infty$ ako i samo ako je tačka $\lambda = 0$ pol reda p rezolvente $\lambda \to (\lambda - A)^{-1}$. Ova činjenica je posebno relevantna kada je u pitanju Drazinov inverz operatora A.

Ako je $\mathcal{X}$ Banachov prostor i $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$, tada se *redukovani minimum moduo* operatora A, u oznaci $\gamma(T)$, definiše sa

$$\gamma(A) = \inf\{\|Az\|/\mathrm{dist}\,(z, N(A)) : \mathrm{dist}\,(z, N(A)) > 0\}.$$

Poznato je da je $R(A)$ zatvoren u $\mathcal{X}$ ako i samo ako je $\gamma(A) > 0$. Ako je operator A relativno regularan, pri čemu je A^- unutrašnji inverz od A, tada je $R(A)$ zatvoren i $\gamma(A) \geq 1/\|A^-\|$.

Ako je $\mathcal{A}$ C^*-algebra i $a \in \mathcal{A}^\dagger$, tada je

$$\|a^\dagger\| = 1/\gamma(L_a),$$

gde je L_a leva regularna reprezentacija od a, tj. $L_a(x) = ax, x \in \mathcal{A}$.

Ako je $a \in \mathcal{A}$ i $a > 0$, tada je

$$\gamma(L_a) = \mathrm{dist}\Big(\sigma(a) \setminus \{0\}, \{0\}\Big). \tag{1.1}$$

1.2 Drazinov i Moore-Penroseov inverz

Neka je $\mathcal{A}$ Banachova algebra sa jedinicom e. Za $a \in \mathcal{A}$, Drazinov inverz od a je elemenat $b \in \mathcal{A}$ koji zadovoljava jednačine:

$$bab = b, \quad ab = ba, \quad a^{k+1}b = a^k, \tag{1.2}$$

za neki nenegativan ceo broj k. Najmanji k u prethodnoj definiciji jeste Drazinov indeks elementa a, označen sa ind(a). Drazinov inverz elementa a, a^d postoji ako i samo ako je $\lambda = 0$ pol rezolvente $\lambda \to (\lambda - a)^{-1}$ i tada je ind(a) red tog pola. Ako Drazinov inverz od a postoji, onda je on jedinstven i označava se sa a^d. Skup svih Drazin invertibilnih elemenata algebre $\mathcal{A}$ označen je sa $\mathcal{A}^d$. Ako je ind(a) $= 0$, onda je a invertibilan i $a^d = a^{-1}$. Ako je ind(a) $= 1$, onda se a^d često naziva grupni inverz od a i označava $a^\#$.

Treća jednačina iz (1.2) ekvivalentna je sa $a(e - ab) \in \mathcal{A}^{nil}$, gde je sa A^{nil} označen skup svih nilpotentnih elemenata algebre $\mathcal{A}$. Pri tome je indeks nilpotentnosti elementa $a(e-ab)$ jednak ind(a). Takođe, sa A^{qnil} označavamo skup svih kvazinilpotentnih elemenata iz $\mathcal{A}$, pri čemu je elemenat a kvazinilpotentan ako $\|a^n\|^{1/n} \to 0,\ (n \to \infty)$, tj. ako je njegov spektralni poluprečnik $\varrho(a) = 0$. Zamenom uslova $a(e - ab) \in \mathcal{A}^{nil}$ uslovom $a(e - ab) \in \mathcal{A}^{qnil}$ dobija se pojam generalisanog Drazinovog (g-Drazinovog) inverza.

Dakle, ako postoji $b \in \mathcal{A}$ tako da važi

$$bab = b, \quad ab = ba, \quad a(e - ab) \in \mathcal{A}^{qnil}, \tag{1.3}$$

tada je a g-Drazin invertibilan a elemenat b je g-Drazinov inverz od a, u oznaci a^D. Skup svih g-Drazin invertibilnih elemenata algebre $\mathcal{A}$ označava se sa $\mathcal{A}^D$. Poznato je da je $a \in \mathcal{A}^D$ ako i samo ako postoji idempotent p koji komutira sa a i važi da je $ap \in \mathcal{A}^{qnil}$ i $a + p \in \mathcal{A}^{-1}$. U tom slučaju se p naziva spektralni idempotent od a i označava sa $p = a^\pi$ i važi

$$a^D = (a + p)^{-1}(e - p), \quad p = e - a^D a.$$

Drazinov inverz za matrice uvek postoji. Međutim, ako je $\mathcal{X}$ beskonačno dimenzionalan Banachov prostor i $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$, tada postoji Drazinov inverz od A ako i samo ako A ima konačan uspon i pad, i tada je $p = \text{asc(A)} = \text{des(A)} =$

ind(A). U tom slučaju postoji dekompozicija prostora $\mathcal{X} = N(A^p) \oplus R(A^p)$ i u odnosu na nju matrično predstavljanje operatora A je

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix},$$

pri čemu je $A_1 = A|_{N(A^p)} : N(A^p) \to N(A^p)$ nilpotentan operator, a $A_2 = A|_{R(A^p)} : R(A^p) \to R(A^p)$ je invertibilan operator. Tada je,

$$A^D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_2^{-1} \end{bmatrix}.$$

Takođe, za $a, w \in \mathcal{A}$ definisan je težinski Drazinov inverz od a u oznaci $a^{d,w}$ kao jedinstveno rešenje sisitema:

$$(aw)^{k+1}xw = (aw)^k, \quad xwawx = x, \quad awx = xwa, \tag{1.4}$$

gde je $k = \text{ind(aw)}$.

Važi $a^{d,w} = [(aw)^d]^2 a$.

Operator $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ je g-invertibilan (relativno regularan) ako postoji operator $B \in \mathcal{B}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$, tako da je $ABA = A$. U tom slučaju je B unutrašnji inverz (ili g-inverz) operatora A, označen sa A^- ili A^g. Skup svih unutrašnjih inverza operatora A označen je sa $A\{1\}$. Dobro je poznato da je A g-invertibilan ako i samo ako je $R(A)$ zatvoren i $N(A)$ i $R(A)$ su komplementarni potprostori od $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ redom. Specijalno, ako su $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ Hilbertovi prostori, onda je $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ g-invertibilan ako i samo ako je $R(A)$ zatvoren potprosor od $\mathcal{Y}$. Ako je B unutrašnji inverz operatora A, onda je AB projekcija na $R(A)$, a $I - BA$ je projekcija na $N(A)$.

Operator B je refleksivni inverz (g_2-inverz) operatora A, ako važi $ABA = A$ i $BAB = B$. Refleksivni inverz operatora A označen je sa A^r ili $A^{(1,2)}$, a skup svih refleksivnih inverza operatora A sa $A\{1, 2\}$. Ako je B unutrašnji inverz od A, onda je BAB refleksivni inverz od A.

Kada se razmatraju operatori na Hilbertovim prostorima $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$, od posebnog značaja je Moore-Penroseov inverz operatora $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, označen sa $A^\dagger$, koji je definisan kao jedinstveno rešenje jednačina

$$AA^\dagger A = A, \ A^\dagger AA^\dagger = A^\dagger, \ (AA^\dagger)^* = AA^\dagger, \ (A^\dagger A)^* = A^\dagger A. \tag{1.5}$$

Poznato je da Moore–Penroseov inverz operatora $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ postoji ako i samo ako je $R(A)$ zatvoren potprostor. MP inverz pravougaone matrice uvek postoji.

Jednačine iz (1.5) definišu između ostalog i neke druge vrste generalisanih inverza operatora A, pri čemu se sa $A\{i,j\}$ označava skup svih onih operatora $X \in \mathcal{B}(\mathcal{Y},\mathcal{X})$ koji zadovoljavaju i-tu i j-tu jednačinu u (1.5), $i,j = 1,2,3,4$. Odgovarajući generalisani inverz iz skupa $A\{i,j\}$ označava se sa $A^{(i,j)}$. Tako je na primer

$$A\{1,3\} = \{X \in \mathcal{B}(\mathcal{Y},\mathcal{X}) : AXA = A,\ (AX)^* = (AX)\},$$

pri čemu je poznata sledeća karakterizacija ovog skupa:

$$A\{1,3\} = \{(A^{(1,3)} - I - A^{(1,3)}A)Z : Z \in \mathcal{B}(\mathcal{Y},\mathcal{X})\},$$

gde je $A^{(1,3)}$ proizvoljan elemenat iz $A\{1,3\}$.

Analogno pojmu običnog MP–inverza, definisan je pojam težinskog MP–inverza.

Ako je $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$, gde su $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ Hilbertovi prostori i $M \in \mathcal{B}(\mathcal{X},\mathcal{X})$ i $N \in \mathcal{B}(\mathcal{Y},\mathcal{Y})$ pozitivni operatori, jedinstveno rešenje jednačina

$$AXA = A, \quad XAX = X, \quad (MAX)^* = MAX, \quad (NXA)^* = NXA \tag{1.6}$$

naziva se težinski Moore-Penroseov inverz od A i označava sa $A^\dagger_{M,N}$.

Skup svih generalisanih težinskih inverza koji zadovoljavaju recimo prvu i treću jednačinu iz (1.6) označava se sa $A\{1,3(M)\}$.

Očigledno za $M = I$ i $N = I$ težinski MP–inverz od A je običan MP–inverz od A. Poznato je da važi

$$A^\dagger_{M,N} = N^{-1/2}(M^{1/2}AN^{-1/2})^\dagger M^{1/2}.$$

Neka su nadalje $\mathcal{X},\mathcal{Y},\mathcal{Z}$ i $\mathcal{W}$ Banachovi prostori nad istim poljem skalara i $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$, $B \in \mathcal{B}(\mathcal{Z},\mathcal{W})$ i $C \in \mathcal{B}(\mathcal{Z},\mathcal{Y})$ dati operatori, pri čemu su A i B g-invertibilni operatori. Operatorska jednačina

$$AXB = C \tag{1.7}$$

ima rešenje, $X \in \mathcal{B}(\mathcal{W}, \mathcal{X})$ ako i samo ako je

$$AA^{-}CB^{-}B = C, \tag{1.8}$$

za proizvoljne unutrašnje generalisane inverze A^{-} i B^{-} od A i B, redom. U tom slučaju rešenje X dato je sa

$$X = A^{-}CB^{-} + Y - A^{-}AYBB^{-}, \quad \text{za} \quad Y \in \mathcal{B}(\mathcal{W}, \mathcal{X}). \tag{1.9}$$

U nastaku ovog poglavlja, razmatraju se potrebni i dovoljni uslovi za postojanje Re-nnd i Re-pd rešenja ove jednačine u slučaju kada su $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ Hilbertovi prostori i $\mathcal{Z} = \mathcal{W} = \mathcal{X}$. Među njima izdvojićemo one sa minimalnim, tj. maksimalnim rangom realnog dela. Kao posledicu za slučaj kada je $A = I$ ili $B = I$, slede rezultati radova [50], [96], [104].

Naredna teorema daje potrebne i dovoljne uslove za postojanje Re-nnd rešenja jednačine (1.7), pod određenim uslovima. Takođe, od svih Re-nnd rešenja nađeno je rešenje sa najmanjim rangom.

Teorema 1.2.1 *Neka je $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, $B \in \mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{X})$, $C \in \mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ i A, B su g-invertibilni, tako da je $(A^{\dagger}A)B^{\dagger} = B^{\dagger}(A^{\dagger}A)$ i $(A^{\dagger}A)B = B(A^{\dagger}A)$. Tada, postoji Re-nnd rešenje $X \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ jednačine $AXB = C$ ako i samo ako je $AA^{\dagger}CB^{\dagger}B = C$ i $B^{*}A^{\dagger}CA^{\dagger}A$ je Re-nnd.*

U tom slučaju jedno Re-nnd rešenje X_0 dato je sa

$$X_0 = A^{\dagger}CB^{\dagger} - (A^{\dagger}CB^{\dagger})^{*} + A^{\dagger}A(A^{\dagger}CB^{\dagger})^{*}BB^{\dagger} \tag{1.10}$$

i pri tome važi

$$r(H(X_0)) = r(H(B^{*}A^{\dagger}CA^{\dagger}A)).$$

Dokaz: Ako postoji Re-nnd rešenje X jednačine $AXB = C$, tada je

$$AA^{\dagger}CB^{\dagger}B = C.$$

Takođe, iz (1.9) sledi

$$\begin{aligned} A^{\dagger}AB^{*}XBA^{\dagger}A &= A^{\dagger}AB^{*}A^{\dagger}CB^{\dagger}BA^{\dagger}A + A^{\dagger}AB^{*}YBA^{\dagger}A \\ &\quad - A^{\dagger}AB^{*}A^{\dagger}AYBA^{\dagger}A \\ &= B^{*}A^{\dagger}CA^{\dagger}A. \end{aligned}$$

Dakle,

$$H(B^*A^\dagger CA^\dagger A) = (A^\dagger AB^*)H(X)(A^\dagger AB^*)^* \geq 0.$$

Sa druge strane, pretpostavimo da je $AA^\dagger CB^\dagger B = C$ i $B^*A^\dagger CA^\dagger A$ je Re-nnd. Zamenom $Y = -(A^\dagger CB^\dagger)^*$, $A^- = A^\dagger$ i $B^- = B^\dagger$ u (1.9), dobijamo da je

$$X_0 = A^\dagger CB^\dagger - (A^\dagger CB^\dagger)^* + A^\dagger A(A^\dagger CB^\dagger)^* BB^\dagger,$$

rešenje jednačine (1.7). Sada je,

$$\begin{aligned} H(X_0) &= H(A^\dagger CB^\dagger) - H((A^\dagger CB^\dagger)^*) + H(A^\dagger A(A^\dagger CB^\dagger)^* BB^\dagger) \\ &= H(BB^\dagger A^\dagger CB^\dagger A^\dagger A) \\ &= H((B^\dagger)^* B^* A^\dagger CA^\dagger AB^\dagger) \\ &= (B^\dagger)^* H(B^*A^\dagger CA^\dagger A)B^\dagger \geq 0. \end{aligned}$$

Dokažimo da je $r(H(X_0)) = r(H(B^*A^\dagger CA^\dagger A))$. U odnosu na sledeće dekompozicije prostora $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$,

$$\mathcal{X} = R(A^*) \oplus N(A) \quad \text{i} \quad \mathcal{Y} = R(A) \oplus N(A^*).$$

operator A ima matričnu dekompoziciju:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} R(A^*) \\ N(A) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} R(A) \\ N(A^*) \end{bmatrix},$$

gde je $A_1 : R(A^*) \to R(A)$ invertibilan. Sada je,

$$A^\dagger = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{R}(A) \\ N(A^*) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} R(A^*) \\ \mathcal{N}(A) \end{bmatrix}.$$

Slično,

$$B = \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} R(B^*) \\ N(B) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} R(B) \\ N(B^*) \end{bmatrix},$$

gde je $B_1 : R(B^*) \to R(B)$ invertibilan operator i

$$B^\dagger = \begin{bmatrix} B_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} R(B) \\ N(B^*) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} R(B^*) \\ N(B) \end{bmatrix}.$$

Uzimajući u obzir spomenute dekompozicije prostora $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$, pretpostavimo da je operator C oblika

$$C = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} R(B^*) \\ N(B) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} R(A) \\ N(A^*) \end{bmatrix}.$$

Iz $A^\dagger C B^\dagger = \begin{bmatrix} A_1^{-1} C_1 B_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, proizilazi da je

$$X_0 = \begin{bmatrix} A_1^{-1} C_1 B_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad B^* A^\dagger C A^\dagger A = \begin{bmatrix} B_1^* A_1^{-1} C_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sada je očigledno

$$R(H(B^* A^\dagger C A^\dagger A)) = R(H({B_1}^* {A_1}^{-1} C_1))$$

i

$$R(H(X_0)) = R(H({A_1}^{-1} C_1 {B_1}^{-1})).$$

Kako je

$$A_1^{-1} C_1 B_1^{-1} + (B_1^*)^{-1} C_1^* (A_1^*)^{-1} = (B_1^*)^{-1} (B_1^* A_1^{-1} C_1 + C_1^* (A_1^*)^{-1} B_1) B_1^{-1}.$$

sledi

$$(A_1^{-1} C_1 B_1^{-1} + (B_1^*)^{-1} C_1^* (A_1^*)^{-1}) B_1 = (B_1^*)^{-1} (B_1^* A_1^{-1} C_1 + C_1^* (A_1^*)^{-1} B_1)$$

i

$$\begin{aligned} \dim \overline{R(B_1^* A_1^{-1} C_1 + C_1^* (A_1^*)^{-1} B_1)} &= \dim (B_1^*)^{-1} (\overline{R(B_1^* A_1^{-1} C_1 + C_1^* (A_1^*)^{-1} B_1)}) \\ &\leq \dim \overline{R((B_1^*)^{-1} (B_1^* A_1^{-1} C_1 + C_1^* (A_1^*)^{-1} B_1))} \\ &= \dim \overline{R(A_1^{-1} C_1 B_1^{-1} + (B_1^*)^{-1} C_1^* (A_1^*)^{-1})}. \end{aligned}$$

Dakle, $r(H(B^* A^\dagger C A^\dagger A)) \leq r(H(X_0))$. Nejednakost u drugom smeru sledi na sličan način.

Na osnovu Teoreme 1.2.1, proizilazi da je proizvoljno rešenje X jednačine (1.7) predstavljeno u obliku

$$X = X_0 + \begin{bmatrix} 0 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix},$$

pri čemu su X_2, X_3 i X_4 proizvoljno dati operatori iz odgovarajućih prostora. Dakle,

$$r(H(X_0)) \leq r(H(X)) \leq r(H(X_0)) + dim N(B^*),$$

te je rešenje X_0 dato sa (1.10) ujedno i ono sa najmanjim rangom realnog dela.

Uslov $AA^\dagger CB^\dagger B = C$ je ekvivalentan uslovu $AA^- CB^- B = C$ za proizvoljan unutrašnji generalisani inverz A^- od A, što sledi iz jednakosti:

$$AA^- CB^- B = AA^- AA^\dagger CB^\dagger BB^- B = AA^\dagger CB^\dagger B.$$

Kao posledica, dokazani su rezultati L. Wua i B. Caina [104] i J. Grossa [52].

Teorema 1.2.2 *Neka je $B, C \in \mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ i B je g-invertibilan. Jednačina*

$$XB = C \tag{1.11}$$

ima Re-nnd rešenje $X \in \mathcal{B}(\mathcal{Y})$ ako i samo ako je $CB^\dagger B = C$ i $B^* C$ je Re-nnd.

U tom slučaju jedno Re-nnd rešenje X_0 jednačine (1.11) *dato je sa*

$$X_0 = CB^\dagger - (CB^\dagger)^*(I - CB^\dagger)$$

i $r(H(X_0)) = r(H(B^* C))$.

Nasuprot Teoremi 1.2.1, u sledećoj posledici ukazano je na neke od oblika rešenja jednačine (1.7) sa maksimalnim rangom realnog dela.

Posledica 1.2.1 *Neka je $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, $B \in \mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{X})$, $C \in \mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ i A, B su g-invertibilni tako da je $(A^\dagger A)B^\dagger = B^\dagger(A^\dagger A)$ i $(A^\dagger A)B = B(A^\dagger A)$. Ako je jednačina* (1.7) *rešiva i $Y \in \mathcal{B}(\mathcal{W}, \mathcal{X})$ ima sledeću reprezentaciju*

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_3 & Y_4 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} R(B) \\ N(B^*) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} R(A^*) \\ N(A) \end{bmatrix},$$

gde je Y_4 pozitivan operator, tada je

$$X = X_0 + (I - A^\dagger A)Y(I - BB^\dagger)$$

Re-nnd rešenje jednačine (1.7) *i $r(H(X)) = r(H(X_0)) + dim N(B^*)$, gde je X_0 rešenje jednačine dato sa* (1.10).

Dokaz: Očigledno, $X = X_0 + (I - A^\dagger A)Y(I - BB^\dagger)$ je rešenje jednačine $AXB = C$ i $H(X) = H(X_0) + Y_4 \geq 0$. Na osnovu dekompozicija iz Teoreme 1.2.1 sledi:

$$X = \begin{bmatrix} A_1^{-1}C_1B_1^{-1} & 0 \\ 0 & Y_4 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad H(X) = \begin{bmatrix} H(A_1^{-1}C_1B_1^{-1}) & 0 \\ 0 & Y_4 \end{bmatrix}.$$

Dakle, $r(H(X)) = r(H(X_0)) + dimN(B^*)$.

Slučaj $A = Y = I$ iz Posledice 1.2.1 razmatran je u [52].

U sledećoj teoremi dati su potrebni i dovoljni uslovi za postojanje Re-pd rešenja jednačine (1.7). Samim tim uopšteni su rezultati iz [52].

Teorema 1.2.3 *Re-pd rešenje $X \in \mathcal{B}(\mathcal{W}, \mathcal{X})$ jednačine* (1.7) *postoji ako i samo ako je $AA^\dagger CB^\dagger B = C$, $B^*A^\dagger CA^\dagger A$ je Re-nnd i važi da je*

$$r(H(B^*A^\dagger CA^\dagger A)) = r(BA^\dagger A).$$

Dokaz: Pretpostavimo da postoji Re-pd rešenje X jednačine (1.7). Sada je, $AA^\dagger CB^\dagger B = C$ i $B^*A^\dagger CA^\dagger A$ je Re-nnd. Takođe,

$$r(H(B^*A^\dagger CA^\dagger A)) = r(A^\dagger AB^*X(A^\dagger AB^*)^*) = r(BA^\dagger A).$$

Sa druge strane, neka je $AA^\dagger CB^\dagger B = C$ i $B^*A^\dagger CA^\dagger A$ je Re-nnd tako da je

$$r(H(B^*A^\dagger CA^\dagger A)) = r(BA^\dagger A).$$

Na osnovu dekompozicija iz Teoreme 1.2.1, sledi da je

$$BA^\dagger A = \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

gde je $B_1 : R(B^*) \to R(B)$ invertibilan operator. Dakle,

$$r(BA^\dagger A) = \overline{dim(R(B^*))}.$$

Sada iz Posledice 1.2.1 sledi da je $X = X_0 + (I - A^\dagger A)Y(I - BB^\dagger)$ Re-pd rešenje jednačine (1.7).

Iz Teoreme 1.2.1 u specijalnom slučaju dobijamo rezultat iz [103].

Posledica 1.2.2 *Neka su $B, C \in \mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ i B je g-invertibilan. Jednačina $XB = C$ ima Re-pd rešenje $X \in \mathcal{B}(\mathcal{Y})$ ako i samo ako je $CB^\dagger B = C$ i B^*C je Re-nnd. U tom slučaju je $r(H(B^*C)) = r(B)$.*

1.3 MP–inverz u prstenu sa involucijom

U ovoj sekciji razmatramo Moore–Penroseov inverz u prstenu sa involucijom u kome, kao u C^*-algebrama ili u $*$-redukovanim algebrama, činjenica $a^*a = 0$ povlači da je $a = 0$. Osobina $a^*ax = a^*ay \Rightarrow ax = ay$ koja se naziva $*$-skrativost ($*$-cancellability), posmatra se samo na lokalnom nivou.

Rezultati u ovoj sekciji su originalni rezultati rada [68], nastali kao rezultat zajedničkog rada sa D. Đorđevićem i J. Kolihom. Neki od rezultata uopštavaju rezultate R. Hartea i M. Mbekhte [58, 59] u C^*-algebrama i J. Kolihe i P. Patricia [69] u prstenu sa involucijom. Slični ali manje opšti rezultati od spomenutih, mogu se naći u radu M. Ferniez-Miria i J. Labroussea [46]. Povezani su elementi sa dobrim nosačem (well-supported element) u prstenu sa involucijom i osobina regularnosti i egzistencije Moore–Penroseovog inverza.

Dobijeni rezultati su primenjeni na C^*-algebre i dobijena je karakterizacija stabilnog ranga 1 i realnog ranga 1 (videti [64]).

Neka je $\mathcal{R}$ prsten sa jedinicom $1 \neq 0$. Preslikavanje $a \mapsto a^*$, za koje važi

$$(a^*)^* = a, \quad (a+b)^* = a^* + b^*, \quad (ab)^* = b^*a^*,$$

naziva se involucija. Sa $\mathcal{R}^{-1}$ označen je skup svih invertibilnih elemenata iz prstena $\mathcal{R}$ a sa $\mathcal{R}_h$ skup svih samo-adjungovanih elemenata prstena $\mathcal{R}$. Elemenat $a \in \mathcal{R}$ je *regularan* (u smislu Von Neumanna) ako je $a \in a\mathcal{R}a$. Skup svih regularnih elemenata iz $\mathcal{R}$ označen je sa $\mathcal{R}^\dagger$.

Elemenat $f \in \mathcal{R}$ je *idempotent* ako je $f^2 = f$. Samo-adjungovani idempotent naziva se *projekcija*. Idempotenti $f, g \in \mathcal{A}$ su *ekvivalentni*, u oznaci $f \sim g$, ako postoje $a, b \in \mathcal{A}$ tako da je $f = ba$ i $g = ab$. Svaki regularni element a generiše ekvivalentne idempotente, jer ako je $a = aba$, tada su $f = ba$ i $g = ab$ ekvivalentni idempotenti. Idempotenti $f, g \in \mathcal{R}$ su *međusobno ortogonalni*, u oznaci $f \perp g$, ako je $fg = 0 = gf$.

Komutator elemenata u i v definisan je sa: $[u, v] = uv - vu$. Proizvod dva samo-adjungovana elementa u i v je samo-adjungovan ako i samo ako je $[u, v] = 0$.

Definicija 1.3.1 [77] *Elemenat $a \in \mathcal{R}$ je* Moore–Penrose invertibilan *(ili MP–*

invertibilan*), ako postoji $b \in \mathcal{R}$ tako da je :*

$$aba = a,\ bab = b,\ (ab)^* = ab,\ (ba)^* = ba. \tag{1.12}$$

Elemenat b za koji važi (1.12), *naziva se* Moore–Penroseov inverz *od a.*

Dobro je poznato da je MP–inverz od a jedinstven, ukoliko postoji. MP–inverz od a označava se sa $a^\dagger$. Elemenat a je MP–invertibilan ako i samo ako je a^* MP–invertibilan i u tom slučaju je

$$(a^*)^\dagger = (a^\dagger)^*.$$

Takođe, ako je a MP–invertibilan, tada su i a^*a i aa^* MP–invertibilni i važi

$$(a^*a)^\dagger = a^\dagger(a^*)^\dagger, \quad (aa^*)^\dagger = (a^*)^\dagger a^\dagger.$$

Definicija 1.3.2 *Elemenat $a \in \mathcal{R}$ je* levo $*$-skrativ *ako $a^*ax = a^*ay$ povlači da je $ax = ay$. Elemenat a je* desno $*$-skrativ *ako $xaa^* = yaa^*$ povlači da je $xa = ya$. Ako je elemenat a levo $*$-skrativ i desno $*$-skrativ onda je $*$-skrativ.*

Očigledno, a je levo $*$-skrativ ako i samo ako je a^* desno $*$-skrativ.

U C^*-algebri, svaki element je $*$-skrativ, jer ako je $a^*az = 0$, tada je

$$\|az^2\| = \|(az)^*az\| = \|z^*a^*az\| = 0.$$

Ako je $zaa^* = 0$, na sličan način sledi da je $za = 0$.

Prsten $\mathcal{R}$ je $*$-*redukovan*, ako je svaki element iz $\mathcal{R}$ $*$-skrativ, što je ekvivalentno sa

$$a^*a = 0 \Rightarrow a = 0, \quad \text{za svako} \quad a \in \mathcal{R}.$$

Definicija 1.3.3 *Elemenat $c \in \mathcal{R}$ je* grupni inverz *od $a \in \mathcal{R}$, ako je*

$$aca = a, \quad cac = c, \quad ac = ca. \tag{1.13}$$

Ako su c i d grupni inverzi od a, tada je

$$c = c^2a = c^2a^2d = cad = ca^2d^2 = ad^2 = d.$$

Dakle, grupni inverz od a je jedinstven ukoliko postoji i označava se sa $a^{\#}$. Grupni inverz od a dvostruko komutira sa a, tj. $[a,x]=0 \Rightarrow [a^{\sharp},x]=0$.

Sledeća teorema predstavlja jedan od osnovnih rezultata u vezi egzistencije Moore–Penroseovog inverza u prstenu sa involucijom i dokazana je u [86, Theorem 8.25] i [69, Theorem 5.3]:

Teorema 1.3.1 *Neka je R prsten sa involucijom i $a \in \mathcal{R}$. Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(1) *a je MP–invertibilan.*

(2) *a je levo $*$-skrativ i a^*a ima grupni inverz.*

(3) *a je desno $*$-skrativ i aa^* ima grupni inverz.*

(4) *a je $*$-skrativ i a^*a i aa^* imaju grupne inverze.*

Ukoliko važi neki od prethodnih uslova, tada je MP–inverz od a dat sa

$$a^{\dagger} = (a^*a)^{\sharp}a^* = a^*(aa^*)^{\sharp}.$$

Definicija 1.3.4 *Prsten $\mathcal{R}$ sa involucijom ima* Gelfand–Naimarkovu osobinu *(*GN-osobinu*) ako je*

$$1 + x^*x \in \mathcal{R}^{-1}, \quad \textit{za svako } x \in \mathcal{R}. \tag{1.14}$$

C^*-algebre imaju GN-osobinu.

Sledeća definicija predstavlja uopštenje [10, Definition 6.5.3], gde je uvedena za C^*-algebre, na prstene sa involucijom.

Definicija 1.3.5 *Elemenat $a \in \mathcal{R}$ ima* dobar nosač *ako postoji samo-adjungovani idempotent p tako da je*

$$ap = a, \quad a^*a + 1 - p \in \mathcal{R}^{-1}. \tag{1.15}$$

U tom slučaju idempotent p je nosač *od a.*

Nosač p od $a \in \mathcal{R}$ zadovoljava $p^0 = a^0$, gde je

$$a^0 = \{x \in \mathcal{R} : \; ax = 0\}.$$

Zaista, ako je $ax = 0$, tada je $a^*apx = 0$ i $(a^*a + 1 - p)px = 0$, odakle je $px = 0$. Obrnuto, ako je $px = 0$ tada je $ax = apx = 0$. Iz $p^0 = a^0$ sledi da je nosač elementa a jedinstven:

Pretpostavimo da su p i q nosači od a. Tada je $p^0 = a^0 = q^0$. Iz $1 - p \in p^0 \subset q^0$ dobijamo da je $q = qp$. Analogno, $p = pq$. Dakle, $p = p^* = qp = q$.

Nosač p od a je u dvostrukom komutantu od $\{a, a^*\}$, tj.

$$[a, x] = 0 = [a^*, x] \Rightarrow [p, x] = 0.$$

Teorema 1.3.2 *Neka je $\mathcal{R}$ prsten sa involucijom. Elemenat $a \in \mathcal{R}$ je MP–invertibilan ako i samo ako je a levo $*$-skrativ i sa dobrim nosačem. Tada je nosač p od a dat sa $p = a^\dagger a$.*

Dokaz: Pretpostavimo da je a levo $*$-skrativ i sa dobrim nosačem, pri čemu je p nosač od a. Važi $[a^*a, p] = 0$ i $a^*ap = a^*a$. Neka je

$$b = (a^*a + 1 - p)^{-1}p.$$

Tada je $a^*ab = ba^*a = p$, $a^*ab^2 = (a^*ab)b = pb = b$ i $(a^*a)^2b = a^*a(a^*ab) = a^*ap = a^*a$. Dakle, $b = (a^*a)^\sharp$. Na osnovu Teoreme 1.3.1, sledi da je a MP–invertibilan i

$$a^\dagger = (a^*a + 1 - p)^{-1}p.$$

Sa druge strane, pretpostavimo da je a MP–invertibilan i neka je $p = a^\dagger a$. Tada je $ap = aa^\dagger a = a$. Iz Teoreme 1.3.1 sledi da je a^*a grupno invertibilan. Takođe,

$$((a^*a)^\sharp + 1 - p)(a^*a + 1 - p) = (a^*a)^\sharp a^*a + 1 - p = a^\dagger a + 1 - p = 1,$$

odakle sledi da je $a^*a + 1 - p$ invertibilan. Dakle, a je sa dobrim nosačem i nosač od a je $p = a^\dagger a$.

Analogno pojmu nosača definisan je *ko-nosač* elementa a, kao projekcija $q \in \mathcal{R}$ za koju važi

$$qa = a, \quad aa^* + 1 - q \in \mathcal{R}^{-1}. \tag{1.16}$$

Dakle, imamo sledeći rezultat:

Posledica 1.3.1 *Neka je $\mathcal{R}$ prsten sa involucijom. Elemenat $a \in \mathcal{R}$ je MP–invertibilan ako i samo ako ima ko-nosač q i desno je $*$-skrativ. U tom slučaju je $q = aa^\dagger$.*

Teorema 1.3.3 *Neka prsten $\mathcal{R}$ sa involucijom ima GN-osobinu. Elemenat $a \in \mathcal{R}$ je MP–invertibilan ako i samo ako je regularan.*

Dokaz: Svaki MP–invertibilan element a je regularan jer je $a = aa^\dagger a$. Pretpostavimo da je a regularan i neka je $aba = a$, za neko $b \in \mathcal{R}$. Elementi $f = ba$ i $g = ab$ su idempotenti i

$$s = 1 + (g^* - g)^*(g^* - g) \in \mathcal{R}^{-1}, \quad t = 1 + (f^* - f)^*(f^* - f) \in \mathcal{R}^{-1}$$

u smislu GN–osobine. Ako je

$$p = gg^*s^{-1} \quad \text{i} \quad q = f^*ft^{-1}.$$

onda važi

$$\begin{aligned} &p^2 = p = p^*, \quad pg = g, \quad gp = p, \\ &q^2 = q = q^*, \quad fq = f, \quad qf = q. \end{aligned}$$

Iz $af = a$ i $ga = a$ sledi $aq = a$ i $pa = a$. Neka je $c = qbp$. Tada je

$$\begin{aligned} &ac = aqbp = abp = gp = p \in \mathcal{R}_h, \\ &ca = qbpa = qba = qf = q \in \mathcal{R}_h, \\ &aca = (ac)a = pa = a, \\ &cac = (ca)c = qc = c. \end{aligned}$$

Prema tome, c je Moore–Penroseov inverz od a.

U opštem slučaju regularni elementi u prstenu sa involucijom ne moraju biti $*$-skrativi. Teorema 1.3.3 i Teorema 1.3.1 pokazuju da u prstenu sa GN–osobinom regularnost povlači $*$-skrativost.

Prethodno pomenuti rezultati odnosili su se na elemente prstena sa involucijom. Precizniji rezultati važe u C^*-algebrama.

C^*-algebra $\mathcal{A}$ je $*$-redukovani prsten sa GN-osobinom, te važe prethodno navedeni rezultati. Na osnovu Teoreme 1.3.2 i Teoreme 1.3.3 proizilazi sledeći rezultat:

Teorema 1.3.4 *Neka je $\mathcal{A}$ C^*-algebra sa jedinicom. Za elemenat $a \in \mathcal{A}$ sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(1) *a je sa dobrim nosačem,*

(2) *a je Moore–Penrose invertibilan,*

(3) *a je regularan.*

Definicija 1.3.6 Stabilan rang *algebre $\mathcal{A}$ je najmanji pozitivan ceo broj n za koji je $cl\{(x_1,\dots,x_n) \in \mathcal{A}^n : \sum_{i=1}^n x_i^* x_i \in \mathcal{A}^{-1}\} = \mathcal{A}^n$.*

Paralelno sa pojmom stabilnog ranga, uveden je i pojam *realnog ranga* [14]:

Definicija 1.3.7 *Realni rang je najmanji pozitivan ceo broj n za koji važi $cl\{(x_0,x_1,\dots,x_n) \in (\mathcal{A}_h)^{n+1} : \sum_{i=1}^n x_i^2 \in \mathcal{A}^{-1}\} = (\mathcal{A}_h)^{n+1}$.*

Na primer, $\mathcal{A}$ ima stabilan rang 1 ako je skup invertibilnih elemenata gust u $\mathcal{A}$, dok je realni rang 0, ako invertibilni i samo-adjungovani elementi čine gust skup u $\mathcal{A}_h$. Realni rang je manji ili jednak od 1, ako je skup elemenata $x \in \mathcal{A}$ za koje je $x^*x + xx^* \in \mathcal{A}^{-1}$ gust u $\mathcal{A}$.

Neka je ex(A) skup svih ekstremnih tačaka zatvorene jedinične sfere u $\mathcal{A}$. C^*-algebra $\mathcal{A}$ je *ekstremno bogata* (videti [14]), ako je skup $A^{-1}ex(\mathcal{A})\mathcal{A}^{-1}$ gust u $\mathcal{A}$. Iz Teoreme 1.3.4 sledi

Teorema 1.3.5 *Ako je $\mathcal{A}$ ekstremno bogata C^*-algebra, tada je skup svih regularnih elemenata algebre $\mathcal{A}$ gust u $\mathcal{A}$.*

Dokaz: Iz [14, Teorema 1.1] sledi da ako je x ekstremna tačka od $\mathcal{A}$, tada je x^*x invertibilan, ili je 0 izolovana tačka spektra elementa x^*x. Elemenat x je

Moore–Penrose invertibilan na osnovu [66, Teorema 1.1] i regularan na osnovu Teoreme 1.3.4. Dakle, $\mathcal{A}^{-1}ex(\mathcal{A})\mathcal{A}^{-1} \subset \mathcal{A}^{\dagger}$, te rezultat sledi neposredno.

Sledeći rezultat proizilazi na osnovu Teoreme 1.3.4 i [10, Teorema 6.5.6].

Teorema 1.3.6 *Skup regularnih i samo-adjungovanih elemenata iz $\mathcal{A}$ je gust u $\mathcal{A}_h$ ako i samo ako je realni rang od $\mathcal{A}$ jednak* 0.

Algebra $\mathcal{A}$ ima *skrative idempotente* ako važi implikacija:

$$f \perp h \quad g \perp h, \quad f + h \sim g + h \Rightarrow f \sim g.$$

Iz Teoreme 1.3.4 i [64, Theorem 3.8] sledi naredni rezultat.

Teorema 1.3.7 *Neka je $\mathcal{A}$ C^*-algebra sa jedinicom. Sledeća tvrđenja su ekvivalentna:*

(1) *$\mathcal{A}$ ima stabilan rang* 1.

(2) *Skup regularnih elemenata iz $\mathcal{A}$ je gust u $\mathcal{A}$ i $\mathcal{A}$ ima skrative idempotente.*

Iz Teoreme 1.3.4 i [64, Proposition 3.6] sledi rezultat:

Teorema 1.3.8 *Ako je skup regularnih elemenata iz $\mathcal{A}$ gust u $\mathcal{A}$, tada $\mathcal{A}$ ima realni rang manji ili jednak od* 1.

Nadalje ćemo izučavati zakon o inverznom redosledu za MP–inverze u prstenu sa involucijom i za težinske Moore–Penroseove inverze u C^*-algebrama. Ako su a, b invertibilni elementi u polugrupi sa jedinicom, tada je pravilo

$$(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$$

poznato kao zakon o inverznom redosledu. U slučaju Moore–Penroseovog inverza u prstenu sa involucijom, pravilo $(ab)^{\dagger} = b^{\dagger}a^{\dagger}$, nije uvek ispunjeno. Greville [50] je pokazao da $(ab)^{\dagger} = b^{\dagger}a^{\dagger}$ važi za kompleksne matrice ako i samo ako $a^{\dagger}a$ komutira sa bb^*, a $bb^{\dagger}$ komutira sa aa^*.

Bouldin [11, 12] i Izumino [63] su uopštili rezultate Grevilla [50] za operatore sa zatvorenim rangom na Hilbertovim prostorima. Njihovi dokazi koriste neke operatorske metode, a bazirani su pre svega na vezi između ranga operatora i otvora između potprostora. Interesantni rezultati vezani za zakon o inverznom redosledu za različite vrste generalisanih inverza mogu se naći u [37], [102]. Takođe, postoje radovi [66], [67], [69] u kojima je ovaj problem posmatran za generalisane inverze u prstenu i u Banachovim i C^*-algebrama, ali pod dosta strogim uslovima.

Sledeći rezultati koji se odnose na MP–inverze u prstenu sa involucijom, uopštavaju rezultate za matrice [13] i operatore na Hilbertovom prostoru [11, 12] i [63]. Takođe rezultati za težinske Moore–Penroseove inverze u C^*-algebrama predstavljaju uopštenje rada Suna i Weia [89], za matrice.

Sledeći rezultat, ujedno i najvažniji, daje potrebne i dovoljne uslove pod kojima zakon o inverznom redosledu važi za Moore–Penroseov inverz u prstenu sa involucijom. Dokaz je algebarski i u suštini veoma različit od dokaza koji su dali Boullion i Odell [13] za matrice.

Teorema 1.3.9 *Neka je $\mathcal{R}$ prsten sa involucijom i $a, b \in \mathcal{R}$ MP–invertibilni elementi za koje je $(1 - a^\dagger a)b$ levo $*$-skrativ. Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(1) *ab je MP–invertibilan i $(ab)^\dagger = b^\dagger a^\dagger$,*

(2) *$[a^\dagger a, bb^*] = 0$ i $[bb^\dagger, a^* a] = 0$.*

Dokaz: (2)⇒(1): Pretpostavimo da (2) važi. Tada je

$$[a^\dagger a, (bb^*)^\dagger] = 0, \quad [bb^\dagger, (a^* a)^\dagger] = 0 \quad \text{i} \quad [a^\dagger a, bb^\dagger] = [a^\dagger a, (bb^*)(bb^*)^\dagger] = 0$$

Dakle,

$$abb^\dagger a^\dagger ab = a(bb^\dagger)(a^\dagger a)b = a(a^\dagger a)(bb^\dagger)b = ab$$

i

$$b^\dagger a^\dagger abb^\dagger a^\dagger = b^\dagger (a^\dagger a)(bb^\dagger)a^\dagger = b^\dagger (bb^\dagger)(a^\dagger a)a^\dagger = b^\dagger a^\dagger.$$

Prema tome, $b^\dagger a^\dagger$ je refleksivni generalisani inverz od ab. Takođe,

$$abb^\dagger a^\dagger = abb^\dagger (a^* a)^\dagger a^* = a(a^* a)^\dagger bb^\dagger a^* = (a^*)^\dagger bb^\dagger a^* = (abb^\dagger a^\dagger)^*$$

i

$$b^\dagger a^\dagger ab = b^* (bb^*)^\dagger a^\dagger ab = b^* a^\dagger a (bb^*)^\dagger b = b^* a^\dagger a (b^\dagger)^* = (b^\dagger a^\dagger ab)^*.$$

(1)⇒(2): Leva strana jednakosti

$$b^\dagger a^\dagger ab = (b^*b)^\dagger(b^*a^\dagger ab)$$

je samo-adjungovan elemenat i stoga važi

$$[(b^*b)^\dagger, b^*a^\dagger ab] = 0.$$

Sada je

$$\begin{aligned} abb^*b &= abb^\dagger a^\dagger abb^*b = ab(b^*b)^\dagger(b^*a^\dagger ab)b^*b \\ &= ab(b^*a^\dagger ab)(b^*b)^\dagger b^*b = abb^*a^\dagger abb^\dagger b \\ &= abb^*a^\dagger ab, \end{aligned}$$

jer je $(b^*b)^\dagger b^*b = b^\dagger b$. Dakle, $abb^*(1-a^\dagger a)b = 0$ i

$$abb^*(1-a^\dagger a)(1-a^\dagger a)b = ab((1-a^\dagger a)b)^*(1-a^\dagger a)b = 0.$$

Na osnovu činjenice da je $(1-a^\dagger a)b$ levo $*$-skrativ, sledi

$$abb^*(1-a^\dagger a) = 0 \quad \text{i} \quad abb^* = abb^*a^\dagger a.$$

Dakle, elemenat

$$a^\dagger abb^* = a^\dagger abb^*a^\dagger a = a^\dagger ab(a^\dagger ab)^*$$

je samo-adjungovan, tj.

$$[a^\dagger a, bb^*] = 0.$$

Dokazaćemo i drugu jednakost u (2). Adjungovanjem $(ab)^\dagger = b^\dagger a^\dagger$ proizilazi

$$(b^*a^*)^\dagger = (a^*)^\dagger(b^*)^\dagger.$$

Iz prvog dela dokaza (1)⇒(2) sledi

$$[(b^*)^\dagger b^*, a^*a] = 0,$$

što je ekvivalentno sa

$$[bb^\dagger, a^*a] = 0. \tag{1.17}$$

Drugi uslov iz prethodne teoreme može biti predstavljen na više ekvivalentnih načina, što je i urađeno u [13].

Neka je $\mathcal{R} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ prostor svih ograničenih linearnih operatora na Hilbertovom prostoru H. Operator $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ je Moore–Penrose invertibilan ako i samo ako je slika od A zatvorena. Ako su $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, operatori sa zatvorenom slikom i

$$[A^\dagger A, BB^*] = 0 \quad \text{i} \quad [B^\dagger B, A^* A] = 0,$$

tada je na osnovu Teoreme 1.3.9, AB operator sa zatvorenom slikom.

Prethodna teorema važi i u $*$-redukovanom prstenu, bez pretpostavke da je $(1 - a^\dagger a)b$ levo $*$-skrativ, koja je tamo inače zadovoljena . Dakle, dobijamo rezultate R. Bouldina [11, 12] i S. Izumina [63] za operatore na Hilbertovom prostoru. Rezultati T. Grevilla [50] su specijalan slučaj Teoreme 1.3.9, bez pretpostavke o Moore–Penrose invertibilnosti i $*$-skrativosti, koje su uvek zadovoljene za matrice.

Dobijeni rezultat je primenjen za težinski MP–inverz. Težinski MP–inverz uveo je J. Chipman [22] za matrice, koristeći pozitivno definitne matrice kao težine, a uopštili su ga Prasad i Bapat [78] uključujući invertibilne, ne obavezno pozitivno definitne težine.

Definicija 1.3.8 *Neka je $\mathcal{R}$ prsten sa ivolucijom i e, f invertibilni elementi u R. Element $a \in \mathcal{R}$ ima* težinski MP–inverz *sa težinama e i f ako postoji $b \in \mathcal{R}$ tako da je*

$$aba = a, \quad bab = b, \quad (eba)^* = eba, \quad (fab)^* = fab. \tag{1.18}$$

Element $a \in \mathcal{R}$ može imati najviše jedan MP–inverz za date težine e i f:

Pretpostavimo da je $c \in \mathcal{R}$ takođe težinski MP–inverz od a. Tada je $(ab)^* = eabe^{-1}$ i $(ac)^* = eace^{-1}$. Takođe važi $abac = ac$ i $acab = ab$. Dakle, $ca = ba$ i $b = bab = bac = cac = c$.

Jedinstveni težinski MP–inverz sa težinama e i f označen je sa $a^\dagger_{e,f}$, ukoliko postoji.

Prasad i Bapat [78, Theorem 3, Theorem 8] su našli potrebne i dovoljne uslove za egzistenciju težinskog MP–inverza za matrice. Uslovi da su a^*ea i $af^{-1}a^*$ samo-adjungovani su neophodni za egzistenciju $a^\dagger_{e,f}$. Upravo zbog toga ima smisla pretpostaviti da su e i f samo-adjungovani.

Sledeća teorema obezbeđuje egzistenciju težinskog MP–inverza u C^*-algebri $\mathcal{A}$ uz pretpostavku da su e i f pozitivni invertibilni elementi iz $\mathcal{A}$.

Neka je $e \in \mathcal{A}$ pozitivan i invertibilan. Preslikavanje

$$x \mapsto x^{*e} = e^{-1}x^*e$$

je involucija na $\mathcal{A}$. Za svaki $x \in \mathcal{A}$ definiše se veličina

$$\|x\| = \|e^{1/2}xe^{-1/2}\|.$$

Sada je $\mathcal{A}_e = (\mathcal{A}, {}^{*e}, \|\cdot\|)$ C^*-algebra sa jedinicom, involucijom $x \mapsto x^{*e}$ i normom $\|\cdot\|$. Uslovi (1.18) predstavljeni su kao

$$aba = a, \quad bab = b, \quad (ba)^{*e} = ba, \quad (ab)^{*f} = ab. \tag{1.19}$$

Teorema 1.3.10 *Neka su e i f pozitivni invertibilni elementi iz $\mathcal{A}$. Ako je $a \in \mathcal{A}$ regularan, tada postoji težinski MP–inverz $a^\dagger_{e,f}$ od a.*

Dokaz: Elemenat a je regularan u C^*-algebri i postoji $a^\dagger = u \in \mathcal{A}_e$ i važi

$$aua = a, \quad uau = u, \quad (ua)^{*e} = ua, \quad (au)^{*e} = au.$$

Slično, a poseduje MP–inverz v u C^*-algebri $\mathcal{A}_f$ i važi

$$ava = a, \quad vav = v, \quad (va)^{*f} = va, \quad (av)^{*f} = av.$$

Lako se proverava da $b = uav$ zadovoljava (1.19), tj. $b = a^\dagger_{e,f}$.

Sledeća teorema predstavlja vezu između težinskog MP–inverza i običnog MP–inverza.

Teorema 1.3.11 *Neka je $\mathcal{A}$ C^*-algebra sa jedinicom i $e, f \in \mathcal{A}$ pozitivni i invertibilni elementi u $\mathcal{A}$. Ako je $a \in \mathcal{A}$ regularan, tada je*

$$a^\dagger_{e,f} = e^{-1/2}(f^{1/2}ae^{-1/2})^\dagger f^{1/2}. \tag{1.20}$$

Dokaz: Neka je a^- unutrašnji inverz od a. Elemenat $a_1 = f^{1/2}ae^{-1/2}$ je regularan i njegov unutrašnji inverz je $e^{1/2}a^-f^{-1/2}$. Dakle, $a_1^\dagger$ postoji. Označimo sa $b = e^{-1/2}a_1^\dagger f^{1/2}$. Sada je

$$a = f^{-1/2}a_1e^{1/2}, \quad ba = e^{-1/2}a_1^\dagger a_1 e^{1/2} \quad \text{i} \quad bab = e^{1/2}a_1^\dagger a_1 a_1^\dagger f^{1/2} = b.$$

Slično,

$$ab = f^{-1/2}a_1a_1^\dagger e^{1/2} \quad \text{i} \quad aba = f^{-1/2}a_1a_1^\dagger a_1e^{1/2} = a.$$

Dakle,

$$\begin{aligned}(ba)^{*e} &= e^{-1}e^{1/2}(a_1^\dagger a_1)^*e^{-1/2}e = e^{-1/2}a_1^\dagger a_1e^{1/2} = ba,\\ (ab)^{*f} &= f^{-1}f^{1/2}(a_1a_1^\dagger)^*f^{-1/2}f = f^{-1/2}a_1a_1^\dagger f^{1/2} = ab,\end{aligned}$$

odakle sledi da je $b = a_{e,f}^\dagger$.

Za pozitivne i invertibilne elemente $e, f \in \mathcal{A}$, definišemo težinsku "involuciju":

$$x \mapsto x^{*e,f} = e^{-1}x^*f.$$

Teorema 1.3.12 *Neka je $\mathcal{A}$ C^*-algebra sa jedinicom i e, f pozitivni invertibilni elementi u $\mathcal{A}$. Ako su $a, b \in \mathcal{A}$ regularani, sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(1) *ab je regularan i $(ab)_{e,h}^\dagger = b_{e,f}^\dagger a_{f,h}^\dagger$.*

(2) $[a_{f,h}^\dagger\, a, bb^{*e,f}] = 0$.

Dokaz: Neka je

$$a_1 = h^{1/2}af^{-1/2} \quad \text{i} \quad b_1 = f^{1/2}be^{-1/2}.$$

Tada je $a_1b_1 = h^{1/2}abe^{-1/2}$. Na osnovu Teoreme 1.3.11, proizilazi

$$(ab)_{e,h}^\dagger = e^{-1/2}(a_1b_1)^\dagger h^{1/2} \qquad \text{i} \quad b_{e,f}^\dagger a_{f,h}^\dagger = e^{-1/2}b_1^\dagger a_1^\dagger h^{1/2}.$$

Prema tome a_1, b_1, a_1b_1 su regularni ako i samo ako su a, b, ab regularni, redom. Dakle jednačina $(ab)_{e,h}^\dagger = b_{e,f}^\dagger a_{f,h}^\dagger$ važi ako i samo ako je $(a_1b_1)^\dagger = b_1^\dagger a_1^\dagger$. Iz Teoreme 1.3.9 sledi traženi rezultat.

Na osnovu jednačina:

$$\begin{aligned}a_1^\dagger a_1 &= (h^{1/2}af^{-1/2})^\dagger h^{1/2}af^{-1/2} = f^{1/2}a_{f,h}^\dagger\, af^{-1/2},\\ b_1b_1^* &= (f^{1/2}be^{-1/2})(e^{-1/2}b^*f^{1/2}) = f^{1/2}bb^{*e,f}f^{-1/2},\end{aligned}$$

proizilazi da je (2) ekvivalentno sa $[a_1^\dagger a_1, b_1b_1^*] = 0$. Sada, dokaz sledi iz Teoreme 1.3.9.

1.4 Aditivni rezultati za generalisani Drazinov inverz

U ovoj sekciji proučavaju se aditivne osobine generalisanog Drazinovog inverza u Banachovoj algebri. Eksplicitno je izražen generalisani Drazinov inverz sume $a+b$ u funkciji od a, a^d, b i b^d, pod različitim uslovima. Neki od rezultata vezani za ovaj problem, specijalno za linearne ograničene operatore, mogu se naći u radu D. Đorđevića i Y. Weia [39] i u radu N. Gonzaleza i J. Kolihe [49] za elemente Banachove algebre.

Izloženi rezultati su dokazani u [33].

Elemenat $a \in \mathcal{A}^D$ ima sledeću matričnu reprezentaciju:

$$a = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix}_p,$$

gde je $a_1 = pap$, $a_2 = (1-p)a(1-p)$ i $p = aa^d = 1 - a^\pi$, pri čemu je a_1 invertibilan u algebri $p\mathcal{A}p$ a a_2 je kvazinilpotentan u algebri $(1-p)\mathcal{A}(1-p)$. U ovom slučaju generalisani Drazinov inverz je dat sa

$$a^d = \begin{bmatrix} a_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_p.$$

Sledeći rezultat su dokazali C. D. Meyer i N. J. Rose [74] za matrice, D. Đorđević i P. Stanimirović [38] su dali uopštenje za ograničene linearne operatore, a N. Gonzalez i J. Koliha [49], za elemente Banachove algebre.

Teorema 1.4.1 *Neka je $x \in \mathcal{A}$ oblika*

$$x = \begin{bmatrix} a & c \\ 0 & b \end{bmatrix}_p$$

u odnosu na idempotent $p \in \mathcal{A}$.

(1) *Ako su $a \in (p\mathcal{A}p)^d$ i $b \in ((1-p)\mathcal{A}(1-p))^d$, tada je x g-Drazin invertibilan i*

$$x^d = \begin{bmatrix} a^d & u \\ 0 & b^d \end{bmatrix}_p, \tag{1.21}$$

gde je $u = \sum_{n=0}^{\infty}(a^d)^{n+2}cb^n b^\pi + \sum_{n=0}^{\infty} a^\pi a^n c(b^d)^{n+2} - a^d c b^d$.

(2) *Ako su $x \in \mathcal{A}^d$ i $a \in (p\mathcal{A}p)^d$, tada je $b \in ((1-p)\mathcal{A}(1-p))^d$ i x^d je dat sa* (1.21).

Sledeća lema se često koristi.

Lema 1.4.1 *Neka su $a, b \in \mathcal{A}^{qnil}$ i $ab = ba$ ili $ab = 0$. Tada je $a + b \in \mathcal{A}^{qnil}$.*

Dokaz: Ako je $ab = ba$, onda sledi $r(a+b) \leq r(a)+r(b)$, odakle je $a+b \in \mathcal{A}^{qnil}$. Slučaj kada je $ab = 0$ sledi iz jednačine $(\lambda - a)(\lambda - b) = \lambda(\lambda - (a + b))$.

N. Gonzalez i J. Koliha [49] su razmatrali sledeće simetrične uslove za $a, b \in \mathcal{A}^D$,

$$a^\pi b = b, \quad ab^\pi = a, \quad b^\pi aba^\pi = 0, \tag{1.22}$$

u cilju pronalaženja formule za $(a + b)^d$ u funkciji od a, b, a^d i b^d, čime su uopštili neke od rezultata iz [39].

U ovoj sekciji razmatraćemo sledeće uslove za $a, b \in \mathcal{A}^D$:

$$b^\pi a^\pi ba = b^\pi a^\pi ab, \quad b^\pi ba^\pi = b^\pi b \quad \text{i} \quad a = ab^\pi, \tag{1.23}$$

u cilju izračunavanja $(a + b)^d$.

Uslovi (1.22) i (1.23) su nezavisni, iako u oba slučaja sledi isto predstavljanje za $(a + b)^d$. Neka je $\mathcal{A}$ algebra svih kompleksnih 3×3 matrica i neka su matrice $a, b \in \mathcal{A}$ date sa,

$$a = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tada je

$$a^d = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad a^\pi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Iz $b^2 = 0$ sledi $b^d = 0$ i $b^\pi = 1$. Prema tome (1.22) važi, a (1.23) ne važi.

Sledeći primer predstavlja obrnuti slučaj. Konstruisane su matrice a, b koje pripadaju algebri $\mathcal{A}$ svih kompleksnih 3×3 matrica, za koje (1.23) važi ali (1.22) ne važi.

Primer. Neka je

$$a = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad b = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sada je

$$a^\pi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

i $b^\pi = 1$. Dakle, $a = ab^\pi$, $a^\pi ab = a^\pi ba$ i $ba^\pi = b$, tj. (1.23) važi. Takođe $a^\pi b = 0 \neq b$, te (1.22) ne važi.

Teorema 1.4.2 *Neka je $a \in \mathcal{A}^{qnil}$, $b \in \mathcal{A}^D$ i važi da je $b^\pi ab = b^\pi ba$ i $a = ab^\pi$. Tada je uslov* (1.23) *zadovoljen, $a + b \in \mathcal{A}^D$ i*

$$(a+b)^d = b^d + \sum_{n=0}^{\infty} (b^d)^{n+2} a(a+b)^n. \tag{1.24}$$

Dokaz: Pretpostavimo najpre da je $b \in \mathcal{A}^{qnil}$. Tada je $b^\pi = 1$, a iz $b^\pi ab = b^\pi ba$ sledi $ab = ba$. Na osnovu Leme 1.4.1, imamo da je $a + b \in \mathcal{A}^{qnil}$ i (1.24) važi. Sada, pretpostavimo da b nije kvazinilpotentan i posmatrajmo sledeću matričnu reprezentaciju od a i b u odnosu na $p = 1 - b^\pi$. Važi

$$b = \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix}_p \quad \text{i} \quad a = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}_p,$$

gde je $b_1 \in (p\mathcal{A}p)^{-1}$ i $b_2 \in ((1-p)\mathcal{A}(1-p))^{qnil} \subset \mathcal{A}^{qnil}$.

Iz $a = ab^\pi$ sledi $a_{11} = 0$ i $a_{21} = 0$. Neka je $a_1 = a_{12}$ i $a_2 = a_{22}$. Sada je

$$a + b = \begin{bmatrix} b_1 & a_1 \\ 0 & a_2 + b_2 \end{bmatrix}_p.$$

Uslov $b^\pi ab = b^\pi ba$ implicira da je $a_2 b_2 = b_2 a_2$. Na osnovu Leme 1.4.1 sledi $a_2 + b_2 \in ((1-p)\mathcal{A}(1-p))^{qnil}$. Na osnovu Teoreme 1.4.1 proizilazi

$$\begin{aligned} (a+b)^d &= \begin{bmatrix} b_1^{-1} & \sum_{n=0}^{\infty} b_1^{-(n+2)} a_1 (a_2+b_2)^n \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_p \\ &= b^d + \sum_{n=0}^{\infty} (b^d)^{n+2} a(a+b)^n. \ \square \end{aligned}$$

Posledica 1.4.1 *Neka je $a \in \mathcal{A}^{qnil}$, $b \in \mathcal{A}^D$ i neka važi $ab = ba$ i $a = ab^\pi$. Tada je $a + b \in \mathcal{A}^D$ i*

$$(a+b)^d = b^d.$$

Teorema 1.4.3 *Ako je za $a, b \in \mathcal{A}^D$ uslov* (1.23) *zadovoljen, tada je $a + b \in \mathcal{A}^D$ i*

$$\begin{aligned}(a+b)^d &= (b^d + \sum_{n=0}^{\infty}(b^d)^{n+2}a(a+b)^n)a^\pi \\ &+ b^\pi(a^d + \sum_{n=0}^{\infty}(a^d)^{n+2}b(a+b)^n) \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty}(b^d)^{n+2}a(a+b)^n a^d b \\ &- \sum_{n=0}^{\infty} b^d a(a^d)^{n+2}b(a+b)^n \\ &- \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}(b^d)^{n+2}a(a+b)^n(a^d)^{k+2}b(a+b)^{k+1}\end{aligned} \tag{1.25}$$

Dokaz: Ako je b kvazinilpotentan, dokaz sledi neposredno iz Teoreme 1.4.2. Pretpostavimo da b nije kvazinilpotentan. Posmatramo sledeće matrične reprezentacije od a i b u odnosu na $p = 1 - b^\pi$:

$$b = \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix}_p \quad \text{i} \quad a = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}_p,$$

gde su $b_1 \in (p\mathcal{A}p)^{-1}$ i $b_2 \in ((1-p)\mathcal{A}(1-p))^{qnil}$. Kao u dokazu Teoreme 1.4.2, iz $a = ab^\pi$ sledi

$$a = \begin{bmatrix} 0 & a_1 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix}_p \quad \text{i} \quad a + b = \begin{bmatrix} b_1 & a_1 \\ 0 & a_2 + b_2 \end{bmatrix}_p.$$

Na osnovu uslova $b^\pi a^\pi ba = b^\pi a^\pi ab$ i $b^\pi ba^\pi = b^\pi b$, sledi da je $a_2^\pi b_2 a_2 = a_2^\pi a_2 b_2$ i $b_2 = b_2 a_2^\pi$. Prema Teoremi 1.4.2, važi $(a_2 + b_2) \in ((1-p)\mathcal{A}(1-p))^d$ i

$$(a_2 + b_2)^d = a_2^d + \sum_{n=0}^{\infty}(a_2^d)^{n+2}b_2(a_2+b_2)^n. \tag{1.26}$$

Iz Teoreme 1.4.1 sledi

$$(a+b)^d = \begin{bmatrix} b_1^{-1} & u \\ 0 & (a_2+b_2)^d \end{bmatrix}_p, \tag{1.27}$$

gde je $u = \sum_{n=0}^{\infty} b_1^{-(n+2)} a_1 (a_2+b_2)^n (a_2+b_2)^\pi - b_1^{-1} a_1 (a_2+b_2)^d$.

Na osnovu (1.26), važi

$$\begin{aligned} u = & \sum_{n=0}^{\infty} b_1^{-(n+2)} a_1 (a_2+b_2)^n a_2^\pi \\ & - \sum_{n=0}^{\infty} b_1^{-(n+2)} a_1 (a_2+b_2)^n a_2^d b_2 \\ & + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} (b_1)^{-(n+2)} a_1 (a_2+b_2)^n (a_2^d)^{k+2} b_2 (a_2+b_2)^{k+1} \\ & - b_1^{-1} a_1 a_2^d - \sum_{n=0}^{\infty} b_1^{-1} a_1 (a_2^d)^{n+2} b_2 (a_2+b_2)^n. \end{aligned} \tag{1.28}$$

Iz Teoreme 1.4.1, dobijamo da je

$$b^d = \begin{bmatrix} b_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_p \quad \text{i} \quad a^d = \begin{bmatrix} 0 & a_1 (a_2^d)^2 \\ 0 & a_2^d \end{bmatrix}_p, \tag{1.29}$$

Označimo sa

$$\begin{aligned} A_1 &= (b^d + \sum_{n=0}^{\infty} (b^d)^{n+2} a (a+b)^n) a^\pi, \\ A_2 &= b^\pi (a^d + \sum_{n=0}^{\infty} (a^d)^{n+2} b (a+b)^n), \\ A_3 &= \sum_{n=0}^{\infty} (b^d)^{n+2} a (a+b)^n a^d b, \\ A_4 &= \sum_{n=0}^{\infty} b^d a (a^d)^{n+2} b (a+b)^n, \\ A_5 &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} (b^d)^{n+2} a (a+b)^n (a^d)^{k+2} b (a+b)^{k+1}. \end{aligned}$$

Korišćenjem metoda matematičke indukcije, sledi da je

$$(b^d)^n = \begin{bmatrix} b_1^{-n} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_p \quad \text{i} \quad (a^d)^n = \begin{bmatrix} 0 & a_1(a_2^d)^{n+1} \\ 0 & (a_2^d)^n \end{bmatrix}_p . \tag{1.30}$$

Takođe je,

$$(a^d)^{n+2}b = \begin{bmatrix} 0 & a_1(a_2^d)^{n+3}b_2 \\ 0 & (a_2^d)^{n+2}b_2 \end{bmatrix}_p , \quad a(a+b)^n = \begin{bmatrix} 0 & a_1(a_2+b_2)^n \\ 0 & a_2(a_2+b_2)^n \end{bmatrix}_p \tag{1.31}$$

i

$$(a^d)^n b(a+b)^k = \begin{bmatrix} 0 & a_1(a_2^d)^{n+1}b_2(a_2+b_2)^k \\ 0 & (a_2^d)^n b_2(a_2+b_2)^k \end{bmatrix}_p . \tag{1.32}$$

Neposrednim korišćenjem formula (1.30), (1.31) i (1.32), dobijamo da je

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} b_1^{-1} & \sum_{n=0}^{\infty} b_1^{-(n+2)} a_1(a_2+b_2)^n a_2^{\pi} - b_1^{-1}a_1a_2^d \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_p , \\ A_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a_2^d + \sum_{n=0}^{\infty} (a_2^d)^{n+2} b_2(a_2+b_2)^n \end{bmatrix}_p , \\ A_3 &= \begin{bmatrix} 0 & \sum_{n=0}^{\infty} b_1^{-(n+2)} a_1(a_2+b_2)^n a_2^d b_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_p , \\ A_4 &= \begin{bmatrix} 0 & \sum_{n=0}^{\infty} b_1^{-1} a_1(a_2^d)^{n+2} b_2(a_2+b_2)^n \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_p , \\ A_5 &= \begin{bmatrix} 0 & z \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_p , \end{aligned} \tag{1.33}$$

gde je

$$z = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (b_1)^{-(n+2)} a_1(a_2+b_2)^n (a_2^d)^{k+2} b_2(a_2+b_2)^{k+1},$$

Iz (1.26), sledi

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (a_2+b_2)^d \end{bmatrix}_p . \tag{1.34}$$

Dakle, na osnovu (1.27), (1.28), (1.33) i (1.34),

$$(a+b)^d = A_1 + A_2 + A_3 - A_4 - A_5,$$

što je i trebalo pokazati.

Posledica 1.4.2 *Neka su* $a, b \in \mathcal{A}^D$ *i neka važi da je* $ab = ba$, $a = ab^\pi$ *i* $b^\pi ba^\pi = b^\pi b$. *Tada je* $a + b \in \mathcal{A}^D$ *i*

$$(a+b)^d = b^d.$$

Sledeća teorema predstavlja uopštenje Teoreme 3.3 [49].

Teorema 1.4.4 *Neka je* $a \in \mathcal{A}^{qnil}$, $b \in \mathcal{A}^D$ *i neka važi* $c = (1-b^\pi)(a+b)(1-b^\pi) \in \mathcal{A}^D$ *i* $b^\pi ab = 0$. *Tada je* $a + b \in \mathcal{A}^D$ *i*

$$(a+b)^d = c^d + \sum_{n=0}^{\infty} (c^d)^{n+2} ab^\pi (a+b)^n.$$

Dokaz: Ako je $b \in \mathcal{A}^{qnil}$, tvrđenje neposredno sledi na osnovu Leme 1.4.1. Dakle, pretpostavimo da b nije kvazinilpotentan. Tada je

$$b = \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix}_p \quad \text{i} \quad a = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}_p,$$

gde je $p = 1 - b^\pi$. Iz uslova $b^\pi ab = 0$, sledi da je $b^\pi a(1-b^\pi) = 0$, tj. $a_{21} = 0$. Označimo sa $a_{11} = a_1$, $a_{22} = a_2$ i $a_{12} = a_3$. Sada je,

$$a + b = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 & a_3 \\ 0 & a_2 + b_2 \end{bmatrix}_p.$$

Takođe, iz $b^\pi ab = 0$ proizilazi da je $a_2 b_2 = 0$. Na osnovu Leme 1.4.1, $a_2 + b_2 \in ((1-p)\mathcal{A}(1-p))^{qnil}$. Primenom Teoreme 1.4.1, sledi

$$(a+b)^d = \begin{bmatrix} (a_1+b_1)^d & u \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_p,$$

gde je $u = \sum_{n=0}^{\infty} ((a_1+b_1)^d)^{(n+2)} a_3 (a_2+b_2)^n$. Neposrednim izračunavanjem proizilazi

$$(a+b)^d = c^d + \sum_{n=0}^{\infty} (c^d)^{n+2} ab^\pi (a+b)^n.$$

Posledica prethodnog rezultata je Teorema 3.3 iz [49].

Posledica 1.4.3 *Neka su $b \in \mathcal{A}^D$, $a \in \mathcal{A}^{qnil}$ i $ab^\pi = a$, $b^\pi ab = 0$. Tada je $a + b \in \mathcal{A}^D$ i*

$$(a+b)^d = b^d + \sum_{n=0}^{\infty} (b^d)^{n+2} a(a+b)^n.$$

U cilju jednostavnog zapisa, neka je $c = (1 - b^\pi)(a + b)(1 - b^\pi)$, $d = (1 - a^\pi)(a + b)(1 - a^\pi)$, $\mathcal{A}_1 = (1 - a^\pi)\mathcal{A}(1 - a^\pi)$ i $\mathcal{A}_2 = (1 - b^\pi)\mathcal{A}(1 - b^\pi)$.

Teorema 1.4.5 *Neka su $a, b \in \mathcal{A}^D$ i neka važi da je $(1 - a^\pi)b(1 - a^\pi) \in \mathcal{A}^d$, $d \in \mathcal{A}_1^{-1}$ i $c \in \mathcal{A}_2^d$. Ako je*

$$(1 - a^\pi)ba^\pi = 0, \quad b^\pi aba^\pi = 0, \quad a^\pi a(1 - b^\pi)a^\pi = 0,$$

tada je $a + b \in \mathcal{A}^D$ i

$$\begin{aligned}(a+b)^d = {} & (b^d + \sum_{n=0}^{\infty} (b^d)^{n+2} a(a+b)^n)a^\pi + \sum_{n=0}^{\infty} b^\pi (a+b)^n a^\pi b d^{-(n+2)} \\ & - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (b^d)^{k+1} a(a+b)^{n+k} a^\pi b(d)^{-(n+2)} - b^d a^\pi b d^{-1} \\ & - \sum_{n=0}^{\infty} (b^d)^{n+2} a(a+b)^n a^\pi b d^{-1} + d^{-1}\end{aligned}$$

Dokaz: Očigledno, ako je a invertibilan, tvrđenje teoreme važi. Ako je a kvazinilpotentan, dokaz sledi na osnovu Teoreme 1.4.4. Dakle, pretpostavimo da a nije invertibilan ni kvazinilpotentan. Analogno dokazu Teoreme 1.4.3, važi

$$a = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix}_p \quad \text{i} \quad b = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}_p,$$

gde je $p = 1 - a^\pi$, $a_1 \in (p\mathcal{A}p)^{-1}$ i $a_2 \in ((1 - p)\mathcal{A}(1 - p))^{qnil}$.

Iz $(1 - a^\pi)ba^\pi = 0$, sledi $b_{12} = 0$. Neka je $b_1 = b_{11}$, $b_{22} = b_2$ i $b_{21} = b_3$. Sada je

$$a + b = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 & 0 \\ b_3 & a_2 + b_2 \end{bmatrix}_p.$$

Uslov $a^\pi b^\pi aba^\pi = 0$ prikazan u matričnoj formi glasi:

$$\begin{aligned} a^\pi b^\pi aba^\pi &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b_2^\pi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b_2^\pi a_2 b_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Slično, iz $a^\pi a(1-b^\pi) = 0$ sledi $a_2 b_2^\pi = a_2$. Na osnovu Posledice 1.4.3, proizilazi da je $a_2 + b_2 \in \mathcal{A}^D$ i

$$(a_2+b_2)^d = b_2^d + \sum_{n=0}^{\infty} (b_2^d)^{n+2} a_2 (a_2+b_2)^n.$$

Iz Teoreme 1.4.1 sledi $a + b \in \mathcal{A}^D$ i

$$(a+b)^d = \begin{bmatrix} (a_1+b_1)^d & 0 \\ u & (a_2+b_2)^d \end{bmatrix}_p,$$

gde je

$$\begin{aligned} u = &\sum_{n=0}^{\infty} b_2^\pi (a_2+b_2)^n b_3 d^{-(n+2)} \\ &- \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} (b_2^d)^{k+1} a_2 (a_2+b_2)^{n+k} b_3 d^{-(n+2)} - b_2^d b_3 d^{-1} \\ &- \sum_{n=0}^{\infty} (b_2^d)^{n+2} a_2 (a_2+b_2)^n b_3 d^{-1}. \end{aligned}$$

Neposrednim izračunavanjem sledi da (1.25) važi.

Posledica 1.4.4 *Ako* $a, b \in \mathcal{A}^D$ *zadovoljavaju uslov* (1.22), *tada je* $a+b \in \mathcal{A}^D$ *i*

$$\begin{aligned} (a+b)^d = &(b^d + \sum_{n=0}^{\infty} (b^d)^{n+2} a(a+b)^n) a^\pi + \sum_{n=0}^{\infty} b^\pi (a+b)^n b d^{-(n+2)} \\ &- \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} (b^d)^{k+1} a(a+b)^{n+k} b(d)^{-(n+2)} + b^\pi a^d \\ &- \sum_{n=0}^{\infty} (b^d)^{n+2} a(a+b)^n b d^{-1}. \end{aligned}$$

Glava 2

Schurov komplement

2.1 Uvod

Schurov komplement prvi put je definisan na skupu blok-matrica. Naime, ako je $M \in R^{(m+n)\times(m+n)}$ blok matrica data sa

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}, \tag{2.1}$$

gde je $A \in C^{m\times m}$ nesingularna i $D \in C^{n\times n}$, tada je Schurov komplement od A u M, u oznaci $S(M)$ ili M/A definisan na sledeći način:

$$S(M) = M/A = D - CA^{-1}B. \tag{2.2}$$

Analogno formuli (2.2), ako se pretpostavka o nesingularnosti matrice A zameni pretpostavkom o nesingularnosti matrice D, moguće je definisati Schurov komplement od D u M, u oznaci $S(M)$ ili M/D kao

$$S(M) = M/D = A - BD^{-1}C. \tag{2.3}$$

Ideja o potrebi uvođenja pojma Schurovog komplementa potekla je od J.J. Sylvestera, 1851 godine iako je samu formulu (2.2) prvi put upotrebio I.Schur [88] u dokazu sledeće teoreme

Teorema 2.1.1 [*88*] *Ako je matrica* M *data sa* (2.1) *nesingularna, tada je*

$$\det(M) = \det(A) \cdot \det(D - CA^{-1}B).$$

Dakle, za nesingularnu matricu M važi:

$$\det(M/A) = \det(M)/\det(A), \tag{2.4}$$

odakle potiče i oznaka M/A.

Uz pretpostavku da je A nesingularna matrica, na osnovu Teoreme 2.1.1 sledi da je matrica M singularna ako i samo ako je M/A singularna matrica. Takođe, na osnovu zapisa

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ CA^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & M/A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & A^{-1}B \\ 0 & I \end{bmatrix},$$

proizilazi osobina rang–aditivnosti matrice M u odnosu na A i M/A:

$$r(M) = r(A) + r(M/A),$$

što je prvi put izloženo u radu L. Guttmana [54].

T. Banachiewicz [8] se smatra autorom prvih rezultata vezanih za inverze nesingularnih blok-matrica. Iako je Schur prvi razmatrao uslove inverstibilnosti blok-matrice, Banachiewicz je prvi dao eksplicitnu formu inverza nesingularne blok-matrice M, predstavljajući blokove inverzne matrice u funkciji od Schurovog komplementa.

Teorema 2.1.2 [*8*] *Neka su nesingularne matrice* M *i* A *date sa* (2.1)*. Tada je* M/A *nesingularna matrica i*

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} + A^{-1}B(M/A)^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}B(M/A)^{-1} \\ -(M/A)^{-1}CA^{-1} & (M/A)^{-1} \end{bmatrix}. \tag{2.5}$$

Izraz (2.5) naziva se Banachiewicz-Schurova forma inverza matrice M.

Nekoliko godina kasnije, J. Duncan [45] je uz pretpostavku da su matrice M i D date sa (2.1) nesingularne, dokazao da je

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} M/D & -(M/D)^{-1}BD^{-1} \\ -D^{-1}C(M/D)^{-1} & D^{-1} + D^{-1}C(M/D)^{-1}BD^{-1} \end{bmatrix}. \tag{2.6}$$

Na osnovu formula (2.5) i (2.6) sledi,

$$(D - CA^{-1}B)^{-1} = D^{-1} + D^{-1}C(A - BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1},$$

tj.

$$(M/A)^{-1} = D^{-1} + D^{-1}C(M/D)^{-1}BD^{-1}. \tag{2.7}$$

Schurov komplement koristi se i prilikom rešavanja sistema jednačina Gaussovim metodom eliminacije. Na primer, neka je dat sistem linearnih jednačina

$$Mz = 0,$$

gde je M blok-matrica data u (2.1) a $z = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in C^{(n+q)\times 1}$. Sledi

$$\begin{aligned} Ax + By &= 0, \\ Cx + Dy &= 0. \end{aligned}$$

Eliminacijom x iz druge jednačine, proizilazi

$$(D - CA^{-1}B)y = 0.$$

A. Albert [1] je zamenom običnog inverza matrice A MP–inverzom $A^\dagger$ u formuli (2.2), definisao Schurov komplement ne samo za matrice sa invertibilnim dijagonalnim blokom, već za sve blok-matrice. Tako je Schurov komplement od A u M dat sa

$$S(M) = M/A = D - CA^\dagger B, \tag{2.8}$$

što predstavlja uopštenje formule (2.2). Od velikog značaja je i sledeći rezultat Alberta [1] koji dovodi u vezu nenegativnu i pozitivnu definitnost blok matrice M i Schurovog komplementa M/A.

Teorema 2.1.3 [*1*] *Neka je* $M \in C^{(m+n)\times(m+n)}$ *hermitska matrica data sa*

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ B^* & D \end{bmatrix},$$

gde su $A \in C^{n\times n}$ *i* $D \in C^{m\times m}$. *Tada je*

(1) *$M \geq 0$ ako i samo ako je $A \geq 0$, $AA^{\dagger}B = B$ i $D - B^*A^{\dagger}B \geq 0$.*

(2) *$M > 0$ ako i samo ako je $A > 0$, $A - BD^{\dagger}B^* > 0$ i $D - B^*A^{\dagger}B > 0$.*

U periodu od 1952 do 1967 godine ne nalazimo objavljene radove sa rezultatima vezanim za Schurov komplement. Sam naziv Schurov komplement prvi put je uvela Emilie V. Haynsworth [61] 1968 godine, inspirisana formulom (2.4), u to vreme poznatoj kao Schurova formula za determinante. Izraz (5) nazvala je generalisanim Schurovim komplementom. Proučavajući unutrašnjost realne simetrične matrice, slično rezultatu vezanom za rang matrice, E. Haynsworth je pokazala sledeće :

Teorema 2.1.4 [*61*] *Neka je matrica $M \in R^{(m+n)\times(m+n)}$ oblika* (2.1) *hermitska i $A \in R^{m\times m}$ nesingularna. Tada je*

$$\mathrm{In}M = \mathrm{In}A + \mathrm{In}(M/A).$$

D. Carlson, E. Haynsworth i T. Markham [20] su izučavali svojstva generalisanog Schurovog komplementa i dokazali neke od već dobijenih rezultata vezanih za Schurov komplement ali uz znatno strožije uslove. Na primer, za matricu $M \in C^{(m+n)\times(m+n)}$ oblika (2.1), Schurova formula (2.4) važi ako je $N(A) \subseteq N(C)$ ili $N(A^*) \subseteq N(B^*)$. Slično,

$$r(M) \geq r(A) + r(M/A),$$

pri čemu jednakost važi ako i samo ako je

$$N(M/A) \subseteq N((I - AA^{\dagger})B) \quad \text{i} \quad N((M/A)^*) \subseteq N((I - A^{\dagger}A)C^*).$$

G.Marsaglia i G.P.H.Styan [71] su uopštili Banachiewichev rezultat dat u Teoremi 2.1.2 za generalisani Schurov komplement.

Teorema 2.1.5 [*71*] *Za matricu M datu sa* (2.1)*, važi da je*

$$M^{\dagger} = \begin{bmatrix} A^{\dagger} + A^{\dagger}B(M/A)^{\dagger}CA^{\dagger} & -A^{\dagger}B(M/A)^{\dagger} \\ -(M/A)^{\dagger}CA^{\dagger} & (M/A)^{\dagger} \end{bmatrix} \tag{2.9}$$

ako i samo ako je

$$r\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} = r(A) \quad i \quad r\begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix} = r(M/A), \tag{2.10}$$

gde je M/A generalisani Schurov komplement.

Teorema 2.1.4, bi u slučaju kada M/A predstavlja generalisani Schurov komplement, glasila:

Teorema 2.1.6 [*20*] *Za hermitsku matricu $M \in R^{(m+n)\times(m+n)}$ oblika* (2.1), *važi*

$$\mathrm{In}M \geq \mathrm{In}A + \mathrm{In}(M/A).$$

Jednakost važi ako i samo ako je

$$N(M/A) = N((I - AA^\dagger)B) \quad i \quad (I - AA^\dagger)B(M/A)^\dagger B^*(I - AA^\dagger) = 0.$$

Interesantno je primetiti da je, uz pretpostavke

$$N(A) \subseteq N(C) \quad \text{i} \quad N(A^*) \subseteq N(B^*)$$

koje su ekvivalentne sa $AA^\dagger B = B$ i $CA^\dagger A = C$, generalisani Schurov komplement nezavisan od izbora generalisanog inverza za A. Dakle, ako $A^\dagger$ zamenimo proizvoljnim unutrašnjim inverzom A^- od A, M/A se neće promeniti jer je

$$M/A = D - CA^\dagger B = D - CA^\dagger AA^\dagger B = D - CA^\dagger AA^- AA^\dagger B = D - CA^- B.$$

Interesantnu interpretaciju Schurovog komplementa dao je W.N. Anderson [2]. On je za hermitsku matricu M datu sa (2.1), definisao pojam skraćene matrice, kao

$$S(M) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D - B^*A^\dagger B \end{bmatrix}.$$

Ovaj pojam su M.G. Krein [70] i W.N. Anderson i G.E. Trapp [3], nezavisno jedni od drugih, uopštili definišući skraćeni operator na skupu ograničenih operatora na Hilbertovom prostoru.

Teorema 2.1.7 [*3*] *Neka je A pozitivan i ograničen operator definisan na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ i S potprostor od $\mathcal{H}$. Skup $\mathcal{M}(A,S)$, pozitivnih i ograničenih operatora, definisan sa*

$$\mathcal{M}(A,S) = \{X \ : \ 0 \leq X \leq A, \quad \mathcal{R}(X) \subseteq S^{\perp}\}$$

ima maksimalni element.

Maksimalni element skupa $\mathcal{M}(A,S)$, garantovan prethodnom teoremom, naziva se skraćeni operator i označava sa $S(A)$. U oznaci $S(A)$, slovo S vezano je sa simbolom potprostora koji smo u ovom slučaju označili sa S. Sledeći rezultati predstavljaju samo neke od osobina skraćenih operatora:

Lema 2.1.1 [*3*] *Ako su A i B pozitivni operatori i $A \leq B$, tada je $S(A) \leq S(B)$.*

Lema 2.1.2 [*3*] *Ako je A pozitivan operator i S, T potprostori od $\mathcal{H}$, tada je*

$$(S \cap T)(A) = S(T(A)).$$

Lema 2.1.3 [*3*] *Ako je A ortogonalna projekcija na potprostor T, tada je $S(A)$ projekcija na $S \cap T$.*

Schurov komplement i generalisani Schurov komplement proučavani su od strane brojnih autora i imaju primene kako u matematici tako i u njoj srodnim naukama. Veoma česte primene sreću se u statistici, teoriji operatora, električno-mrežnoj teoriji, diskretno-vremenskim regulacionim problemima, sofističkim teorijama, itd. (videti [27], [79], [24], [23], [4], [5]).

2.2 Schurov komplement u C^*-algebri

U ovoj sekciji razmatran je Schurov komplement u C^*-algebri. Dokazana je ekvivalentnost 6 različitih interpretacija Schurovog komplementa i dokazana su ekstremalna svojstva. Rezultati dati u ovoj sekciji su originalni i objavljeni u radu [29].

Neka je $a \in \mathcal{A}$ i $s \in \dot{\mathcal{A}}_h$. Tada važi

$$a = sas + sa(1-s) + (1-s)as + (1-s)a(1-s).$$

Neka je

$$a_{11} = sas, \quad a_{12} = sa(1-s), \quad a_{21} = (1-s)as, \quad a_{22} = (1-s)a(1-s).$$

Proizvoljan projektor $s \in \dot{\mathcal{A}}_h$ indukuje sledeću matričnu reprezentaciju elementa $a \in \mathcal{A}$:

$$a = \begin{bmatrix} sas & sa(1-s) \\ (1-s)as & (1-s)a(1-s) \end{bmatrix}_s = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}_s .$$

Ovakva matrična reprezentacija je veoma korisna jer predstavlja reprezentaciju proizvoljnog elementa C^*-algebre u obliku blok-matrice.

Sledeći Alberta [1], Carlsona, Haynswortha, i Markhama[20], ako je $a \in \mathcal{A}_+$, $s \in \dot{\mathcal{A}}_h$ i $a_{11} \in \mathcal{A}^\dagger$, Schurov komplement elementa a u odnosu na s definisan je kao

$$s(a) = a_{22} - a_{21}{a_{11}}^\dagger a_{12}. \tag{2.11}$$

Sledeći rezultat, iako elementaran, naveden je zbog njegove česte primene.

Lema 2.2.1 *Ako je $s \in \dot{\mathcal{A}}_h$ i $a \in \mathcal{A}^\dagger \cap s\mathcal{A}s$, tada je $a^\dagger \in s\mathcal{A}s$.*

Dokaz: Na osnovu uslova $a \in s\mathcal{A}s$ sledi da je $a = sa = as = sas$. Dakle,

$$\begin{aligned} &a(sa^\dagger s)a = aa^\dagger a = a, \ (sa^\dagger s)a(sa^\dagger s) = sa^\dagger aa^\dagger s = sa^\dagger s, \\ &(a(sa^\dagger s))^* = (aa^\dagger s)^* = (saa^\dagger s)^* = saa^\dagger s = a(sa^\dagger s), \\ &((sa^\dagger s)a)^* = (sa^\dagger a)^* = (sa^\dagger as)^* = sa^\dagger as = (sa^\dagger s)a, \end{aligned}$$

te je $a^\dagger = sa^\dagger s \in s\mathcal{A}s$.

Sledeća teorema predstavlja uopštenje Albertovog rezultata [1] sa dokazom koji je znatno drugačiji.

Teorema 2.2.1 *Neka je* $a \in \mathcal{A}_h$, $s \in \dot{\mathcal{A}}_h$ *i* $a_{11} \in \mathcal{A}^\dagger$. *Tada je* $a \geq 0$ *ako i samo ako su sledeći uslovi zadovoljeni:*

(1) $a_{11} \geq 0$,

(2) $a_{11}{a_{11}}^\dagger a_{12} = a_{12}$,

(3) $s(a) \geq 0$.

Dokaz: Pretpostavimo da je $a \geq 0$. Postoji $h \in \mathcal{A}$ tako da je $a = hh^*$. Očigledno, $a_{11} = sh(sh)^* \geq 0$. Na osnovu [[58], Theorem 7] ili [[66],Theorem 2.4], sledi da je sh regularan i

$$\begin{aligned} a_{11}{a_{11}}^\dagger &= (sh)(sh)^*((sh)(sh)^*)^\dagger = (sh)(sh)^*((sh)^*)^\dagger(sh)^\dagger \\ &= (sh)((sh)^\dagger(sh))^*(sh)^\dagger = (sh)(sh)^\dagger. \end{aligned}$$

Dakle,

$$a_{11}{a_{11}}^\dagger a_{12} = (sh)(sh)^\dagger shh^*(1-s) = shh^*(1-s) = a_{12}.$$

Takođe,

$$\begin{aligned} s(a) &= a_{22} - {a_{12}}^*((sh)(sh)^*)^\dagger a_{12} \\ &= a_{22} - (1-s)hh^*s((sh)^\dagger)^*(sh)^\dagger shh^*(1-s) \\ &= a_{22} - (1-s)h(sh)^\dagger shh^*(1-s) \\ &= (1-s)h(1-(sh)^\dagger(sh))((1-s)h)^* \\ &= [(1-s)h(1-(sh)^\dagger(sh))][(1-s)h(1-(sh)^\dagger(sh))]^* \geq 0. \end{aligned}$$

Sa druge strane, pretpostavimo da uslovi $(1), (2)$ i (3) važe. Na osnovu Leme 2.2.1, sledi

$$(1 - {a_{12}}^*{a_{11}}^\dagger)a(1 - {a_{12}}^*{a_{11}}^\dagger)^* = a_{11}^\dagger + (a_{22} - {a_{12}}^*a_{11}^\dagger a_{12}) \geq 0.$$

Elemenat $1 - {a_{12}}^*{a_{11}}^\dagger$ je invertibilan i $(1 - {a_{12}}^*{a_{11}}^\dagger)^{-1} = 1 + {a_{12}}^*{a_{11}}^\dagger$. Dakle,

$$a = (1 + {a_{12}}^*{a_{11}}^\dagger)(a_{11} + (a_{22} - {a_{12}}^*a_{11}a_{12}))(1 + {a_{12}}^*{a_{11}}^\dagger)^* \geq 0.$$

Posledica 2.2.1 *Neka je $a \in \mathcal{A}_h$, $s \in \dot{\mathcal{A}}_h$ i $a_{22} \in \mathcal{A}^\dagger$. Tada je $a \geq 0$ ako i samo ako su sledeći uslovi zadovoljeni:*

(1) $a_{22} \geq 0$,

(2) $a_{22}{a_{22}}^\dagger {a_{12}}^* = {a_{12}}^*$,

(3) $a_{11} - a_{12}{a_{22}}^\dagger {a_{12}}^* \geq 0$.

Dokaz: Sledi iz Teoreme 2.2.1, zamenom s sa $1-s$.

Sledeća teorema predstavlja uopštenje rezultata Kreina [70] u C^*-algebrama.

Teorema 2.2.2 *Neka je $a \in \mathcal{A}_+$, $s \in \dot{\mathcal{A}}_h$, a_{22} je relativno regularan i neka je $\mathcal{M}(a,s) = \{x{\in}\mathcal{A} : 0 \leq x \leq a,\ sx = x\}$. Tada je*

$$a_{11} - a_{12}{a_{22}}^\dagger a_{21} = \max \mathcal{M}(a,s).$$

Dokaz: Neka je $b = a_{11} - a_{12}{a_{22}}^\dagger a_{21}$. Prema Posledici 2.2.1 sledi da je

$$\begin{aligned} b &= a_{11} + a_{22}{a_{22}}^\dagger a_{21} - a(1-s){a_{22}}^\dagger a_{21} \\ &= a_{11} + a_{21} + a(1-s){a_{22}}^\dagger a_{22} - a(1-s){a_{22}}^\dagger (1-s)a \\ &= a - a(1-s){a_{22}}^\dagger (1-s)a. \end{aligned}$$

Dakle,

$$a - b = a(1-s){a_{22}}^\dagger (1-s)a \geq 0.$$

Ponovnom primenom Teoreme 2.2.1, sledi da je $b = a_{11} - a_{12}{a_{22}}^\dagger a_{21} \geq 0$. Očigledno, $sb = b$, te je $b \in \mathcal{M}(a,s)$. Dokažimo da $x \in \mathcal{M}(a,s)$ implicira $x \leq b$. Za $x \in \mathcal{M}(a,s)$, važi $0 \leq x \leq a$, $sx = x$ i $x \in s\mathcal{A}s$. Kako je $a - x \geq 0$ sledi $x \leq b$.

Posledica Teoreme 2.2.2 je rezultat:

$$s(a) = \max\, \mathcal{M}(a, 1-s).$$

Nadalje je razmatrano 6 različitih interpretacija Schurovog komplementa, pra-teći istorijski tok njihovog uvođenja. Takođe su odredjeni uslovi pod kojima su neke od njih ekvivalentne. Neke od definicija, za razliku od originalno datih, zahtevaće posebne uslove za elemente C^*-algebre. Analogni rezultati za Schurov komplement blok-matrice mogu se naći u radu C.A.Butlera, T.D.Morleya[16].

Motivacija za sledeću definiciju, kao što smo već pomenuli, potiče od Alberta [1] i Carlsona, Haynswortha i Markhama [20].

Definicija 2.2.1 *Ako su $a \in A$, $s \in \dot{\mathcal{A}}_h$ i $a_{11} \in \mathcal{A}^\dagger$, tada je Schurov komplement od a u odnosu na s definisan sa*

$$s_1(a) = a_{22} - a_{21}{a_{11}}^\dagger a_{12}. \tag{2.12}$$

Prateći rad Andoa [5], uvodimo sledeću definiciju:

Definicija 2.2.2 *Neka su $a \in \mathcal{A}_h$ i $s \in \dot{\mathcal{A}}_h$. Element a je s-komplementabilan ako postoji $r \in \mathcal{A}$ tako da je*

$$sr = r, \;\; sar = sa. \tag{2.13}$$

$a_s = ar$ nazivamo s-kompresijom od a na s, dok je $s_2(a) = a - ar$ Schurov komplement od a u odnosu na s.

Ako je a s-komplementabilan, tada elemenat ar zavisi samo od a i s, ali ne i od r. Ako postoje dva međusobno različita elementa r_1 i r_2 za koje (2.13) važi, tada je

$$ar_1 = asr_1 = r_2^* asr_1 = r_2^* sar_1 = r_2^* sar_2 = r_2^* asr_2 = asr_2 = ar_2.$$

Na osnovu definicije koju su dali M.G. Krein [70] i W.N. Anderson i G.E. Trapp [3], proizilazi i analogna definicija u C^*-algebrama:

Definicija 2.2.3 *Neka su $a \in \mathcal{A}_+$, $s \in \dot{\mathcal{A}}_h$ i $a_{11} \in \mathcal{A}^\dagger$. Generalisani Schurov komplement od a (ili skraćeni element od a u odnosu na s) je*

$$s_3(a) = \max \mathcal{M}(a, 1 - s).$$

Sledeće definicije potiču iz rada Buttlera i Morleya [16].

Definicija 2.2.4 *Neka su $a \in \mathcal{A}$ i $s \in \dot{\mathcal{A}}_h$. Ako su $p \in s\mathcal{A}(1-s)$ i $q \in (1-s)\mathcal{A}s$ elementi za koje važi $a_{12} = a_{11}p$ i $a_{21} = qa_{11}$, tada je Schurov komplement od a u odnosu na s definisan sa*

$$s_4(a) = a_{22} - qa_{11}p.$$

Schurov komplement $s_4(a)$ ne zavisi od izbora p i q. Pretpostavimo da postoje $p_1, p_2 \in s\mathcal{A}(1-s)$ i $q_1, q_2 \in (1-s)\mathcal{A}s$ tako da važi $a_{12} = a_{11}p_1 = a_{11}p_2$, i $a_{21} = q_1a_{11} = q_2a_{11}$. Tada je $q_1a_{11}p_1 = q_1a_{11}p_2 = q_2a_{11}p_2$.

Definicija 2.2.5 *Neka su $a \in \mathcal{A}$, $s \in \dot{\mathcal{A}}_h$. Ako postoji $x \in s\mathcal{A}(1-s)$ tako da je $a_{11}x = a_{12}$ i ako $a_{11}u = 0$ implicira $a_{21}u = 0$, tada je Schurov komplement od a u odnosu na s definisan kao*

$$s_5(a) = a(1-s) - ax.$$

Schurov komplement $s_5(a)$ ne zavisi od x. Ako su $x_1, x_2 \in s\mathcal{A}(1-s)$ rešenja jednačine $a_{11}x = a_{12}$, tada je $a_{11}(x_1 - x_2) = 0$, odakle je $a_{21}x_1 = a_{21}x_2$. Dakle,

$$ax_1 = a_{11}x_1 + a_{21}x_1 = a_{11}x_2 + a_{21}x_2 = ax_2.$$

Definicija 2.2.6 *Neka su $a, k, l, f, g \in \mathcal{A}$, $s \in \dot{\mathcal{A}}_h$, i $a_{11} = kl$, $a_{12} = kg$, $a_{21} = fl$. Ako jednačina $lx = g$ ima rešenje i ako za $u \in \mathcal{A}$, $ku = 0$ implicira $fu = 0$ tada je Schurov komplement od a u odnosu na s definisan sa*

$$s_6(a) = a_{22} - fg.$$

Schurov komplement $s_6(a)$ ne zavisi od izbora k, l, f, g. Ako za $k_1, l_1, f_1, g_1 \in \mathcal{A}$ i $k_2, l_2, f_2, g_2 \in \mathcal{A}$ važe uslovi iz Definicije 2.2.6, tada je

$$f_1g_1 = f_1l_1x_1 = a_{21}x_1 \quad \text{i} \quad f_2g_2 = f_2l_2x_2 = a_{21}x_2, \tag{2.14}$$

pri čemu su x_1 i x_2 rešenja jednačina $l_1x = g_1$ i $l_2x = g_2$, redom. Takođe, $a_{12} = a_{11}x_1 = a_{11}x_2$, povlači da je $k_1(l_1x_1 - l_1x_2) = 0$, te je $f_1(l_1x_1 - l_1x_2) = 0$. Dakle, $a_{21}x_1 = a_{21}x_2$, pa na osnovu (2.14) važi $f_1g_1 = f_2g_2$.

Sledeći rezultat daje uslove pod kojima su Definicija 2.2.1 i Definicija 2.2.4 ekvivalentne.

Lema 2.2.2 *Ako su $a \in \mathcal{A}_h$, $s \in \dot{\mathcal{A}}_h$ i $a_{11} \in \mathcal{A}^\dagger \cap \mathcal{A}_+$, tada su Definicija 2.2.1 i Definicija 2.2.4 ekvivalentne, tj.*

$$s_4(a) = s_1(a).$$

Dokaz: Ako je $a_{11} \geq 0$ i $a = a^*$ sledi $a_{12} = a_{11}{a_{11}}^\dagger a_{12}$ i $a_{21} = {a_{12}}^* = {a_{12}}^* {a_{11}}^\dagger a_{11}$. Dakle, za $p = {a_{11}}^\dagger a_{12} \in s\mathcal{A}(1-s)$ i $q = {a_{12}}^* {a_{11}}^\dagger \in (1-s)\mathcal{A}s$ važi $a_{12} = a_{11}p$ i $a_{21} = qa_{11}$. Sada je

$$s_4(a) = a_{22} - qa_{11}p = a_{22} - {a_{12}}^* {a_{11}}^\dagger a_{12}.$$

Obrnuto, ako pretpostavimo da su uslovi Definicije 2.2.4 zadovoljeni, tada $a_{12} = a_{11}p$ i $a_{21} = qa_{11}$ povlače da je

$$s_4(a) = a_{22} - qa_{11}p = a_{22} - qa_{11}{a_{11}}^\dagger a_{11}p = a_{22} - a_{21}{a_{11}}^\dagger a_{12} = s_1(a).$$

Lema 2.2.3 *Neka su $a \in \mathcal{A}_h$ i $s \in \dot{\mathcal{A}}_h$. Tada su Definicija 2.2.2 i Definicija 2.2.4 ekvivalentne, tj.*

$$s_2(a) = s_4(a).$$

Dokaz: Najpre pretpostavimo da su uslovi Definicije 2.2.2 zadovoljeni. Iz (2.13) sledi da je $r = b_r + c_r$, gde su $b_r \in s\mathcal{A}s$, $c_r \in s\mathcal{A}(1-s)$ i

$$a_{11}b_r = a_{11}, \ a_{11}c_r = a_{12}.$$

Dakle,

$$\begin{aligned} s_2(a) &= a - ar = a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22} - (a_{11} + a_{21})(b_r + c_r) \\ &= (a_{22} - a_{21}c_r) + (a_{21} - a_{21}b_r) \\ &= (a_{22} - a_{21}c_r) + c_l(a_{11} - a_{11}b_r) \\ &= a_{22} - a_{21}c_r. \end{aligned}$$

Za $p = c_r$ i $q = c_r^*$ važi da je $a_{12} = a_{11}p$ i $a_{21} = qa_{11}$, te su uslovi Definicije 2.2.4 zadovoljeni. Dakle,

$$s_4(a) = a_{22} - qap = a_{22} - c_l a_{11} c_r = a_{22} - a_{21}c_r = s_2(a).$$

Obrnuto, pretpostavimo da su uslovi Definicije 2.2.4 zadovoljeni. Neka je $r = s + p$. Tada r zadovoljava (2.13). Takođe,

$$s_2(a) = a - ar = a_{22} - qap = s_4(a).$$

Lema 2.2.4 *Neka su $a \in \mathcal{A}_h$, $s \in \dot{\mathcal{A}}_h$ i $a_{11} \in \mathcal{A}^\dagger \cap \mathcal{A}_+$. Tada su Definicija 2.2.1 i Definicija 2.2.2 ekvivalentne, tj.*

$$s_1(a) = s_2(a).$$

Dokaz: Neka je $r = s + a_{11}{}^\dagger a_{12}$. Očigledno r zadovoljava (2.13), te je a s-kompatibilan i

$$s_2(a) = a - ar = a_{22} - a_{21}a_{11}{}^\dagger a_{12} = s_1(a).$$

Obrnuto, neka postoji $r \in \mathcal{A}$ tako da (2.13) važi. Za $r = b_r + c_r$, gde je $b_r \in s\mathcal{A}s$ i $c_r \in s\mathcal{A}(1-s)$, važi $a_{11}c_r = a_{12}$. Dakle,

$$s_2(a) = a - ar = a_{22} - a_{21}c_r,$$

c_r je rešenje jednačine $a_{11}x = a_{12}$ i $c_r = a_{11}{}^\dagger a_{12} + (1 - a_{11}{}^\dagger a_{11})y$ za $y \in \mathcal{A}$. Kako je $a_{11} \geq 0$ i $a = a^*$, sledi $a_{21} = a_{21}a_{11}{}^\dagger a_{11}$ i

$$\begin{aligned} s_2(a) &= a_{22} - a_{21}c_r \\ &= a_{22} - a_{21}(a_{11}{}^\dagger a_{12} + (1 - a_{11}{}^\dagger a_{11})y) \\ &= a_{22} - a_{21}a_{11}{}^\dagger a_{12} \\ &= s_1(a). \end{aligned}$$

Lema 2.2.5 *Ako su $a \in \mathcal{A}_+$, $s \in \dot{\mathcal{A}}_h$ i $a_{11} \in \mathcal{A}^\dagger$, tada su Definicija 2.2.1 i Definicija 2.2.3 ekvivalentne tj.*

$$s_1(a) = s_3(a).$$

Dokaz: Dokaz sledi na osnovu Teoreme 2.2.2.

Lema 2.2.6 *Za $a \in \mathcal{A}$ i $s \in \dot{\mathcal{A}}_h$, Definicija 2.2.5 i Definicija 2.2.6 su ekvivalentne, tj.*

$$s_5(a) = s_6(a).$$

Dokaz: Neka su uslovi iz Definicije 2.2.5 zadovoljeni. Označimo sa $k = a_{11}$, $l = 1$, $g = x$, $f = a_{21}$, gde je x rešenje jednačine $a_{11}x = a_{12}$. Tada je

$a_{11} = kl$ i $a_{12} = a_{11}x = kg,\ a_{21} = fl$, te jednačina $lx = g$ ima rešenje $x = g$. Ako je $km = 0$, za $m \in \mathcal{A}$, tada je $a_{11}m = klm = km = 0$ i $a_{21}m = 0$. Dakle, uslovi Definicije 2.2.6 važe. Očigledno,

$$s_5(a) = a(1-s) - ax = a_{22} + a_{12} - a_{11}x - a_{21}x = a_{22} - fg = s_6(a).$$

Obrnuto, neka su uslovi Definicije 2.2.6 zadovoljeni. Važi $a_{12} = kg = klx = a_{11}x$, gde je x rešenje jednačine $lx = g$. Dakle, jednačina $a_{11}x = a_{12}$ ima rešenje. Ako je $u \in \mathcal{A}$ i $a_{11}u = 0$, tada je $klu = 0$ i $a_{21}u = flu = 0$. Sada su uslovi Definicije 2.5 zadovoljeni. Konačno,

$$\begin{aligned} s_6(a) &= a_{22} - fg = a_{22} - a_{21}x \\ &= a_{12} + a_{22} - a_{11}x - a_{21}x \\ &= a(1-s) - ax \\ &= s_5(a). \end{aligned}$$

Lema 2.2.7 *Ako je $a \in \mathcal{A}$ i $s \in \dot{\mathcal{A}}_h$, tada uslovi Definicija 2.2.4 impliciraju uslove Definicije 2.2.5 i važi*

$$s_4(a) = s_5(a).$$

Ako je $a \in \mathcal{A}_h$ i $s \in \dot{\mathcal{A}}_h$, tada su ove definicije ekvivalentne.

Dokaz: Pretpostavimo da su uslovi Definicije 2.2.4 zadovoljeni. Tada je $a_{12} = a_{11}p$, i jednačina $a_{11}x = a_{12}$ ima rešenje $x = p$. Ako je $a_{11}u = 0$ $u \in \mathcal{A}$, tada je $a_{21}u = qa_{11}u = 0$. Dakle i uslovi iz Definicija 2.2.5 važe. Takođe je,

$$\begin{aligned} s_4(a) &= a_{22} - qa_{11}p \\ &= a_{22} - a_{21}p = a_{12} + a_{22} - a_{21}x - a_{11}x \\ &= a(1-s) - ax \\ &= s_5(a). \end{aligned}$$

Ako je $a \in \mathcal{A}_h$ i uslovi Definicije 2.2.5 važe, tada je $a_{12} = a_{11}x$, $a_{21} = {a_{12}}^* = x^*a_{11}$, $p = x$ i $q = x^*$. Očigledno,

$$\begin{aligned} s_5(a) &= a(1-s) - ax = a_{22} + a_{12} - a_{11}p - a_{21}p \\ &= a_{22} - a_{21}p = a_{22} - qa_{11}p \\ &= s_4(a). \end{aligned}$$

Na osnovu svega izloženog sledi ekvivalencija svih do sada navedenih definicija Schurovih komplemenata u C^*-algebri.

Teorema 2.2.3 *Neka su $a \in \mathcal{A}_+$ i $s \in \dot{\mathcal{A}}_h$ takvi da je a_{11} regularan. Tada su Definicije 2.2.1 –2.2.6 međusobno ekvivalentne, tj.*

$$s_1(a) = s_3(a) = s_2(a) = s_4(a) = s_5(a) = s_6(a) = s(a).$$

Naredni rezultati predstavljaju uopštenje ekstremalnih karakteristika generalisanog Schurovog komplementa $s(a)$, datih u radu Chi-Kwong Lia i Roy Mathi-asa[21]. Dokazi rezultata u ovoj doktorskoj disertaciji su opštiji, kraći i zasnivaju se na drugačijim metodama od metoda u [21].

Lema 2.2.8 *Neka su $s \in \dot{\mathcal{A}}_h$, $a, b \in \mathcal{A}_+$ i $a_{11}, b_{11}, a_{11} + b_{11}$ regularni. Tada važi*

$$(a_{12} + b_{12})^*(a_{11} + b_{11})^\dagger(a_{12} + b_{12}) \leq {a_{12}}^*{a_{11}}^\dagger a_{12} + b_{12}^* b_{11}^\dagger b_{12}. \tag{2.15}$$

Dokaz: Neka je $c = as(sas)^\dagger sa$. Iz $(sas)^\dagger \geq 0$ sledi $c \geq 0$. Takođe, $c_{11} = scs = sas = a_{11}$ i $c_{22} = (1-s)c(1-s) = (1-s)as(sas)^\dagger sa(1-s) = {a_{12}}^*{a_{11}}^\dagger a_{12}$. Na osnovu Teoreme 2.2.1, važi $c_{12} = sc(1-s) = sas(sas)^\dagger sa(1-s) = a_{11}{a_{11}}^\dagger a_{12} = a_{12}$. Obzirom da je $c = c^*$, sledi $c_{21} = c_{12}^* = {a_{12}}^*$. Dakle, c ima sledeću matričnu reprezentaciju

$$c = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ {a_{12}}^* & {a_{12}}^*{a_{11}}^\dagger a_{12} \end{bmatrix}.$$

Za $d = bs(sbs)^\dagger sb$ na sličan način proizilazi $d \geq 0$ i d ima sledeću matričnu repre-zentaciju

$$d = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12}^* & b_{12}^* b_{11}^\dagger b_{12} \end{bmatrix}.$$

Sada je

$$c + d = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ (a_{12} + b_{12})^* & {a_{12}}^*{a_{11}}^\dagger a_{12} + b_{12}^* b_{11}^\dagger b_{12} \end{bmatrix} \geq 0. \tag{2.16}$$

Na osnovu Teoreme 2.2.1 i (2.16) važi (2.15).

Teorema 2.2.4 *Neka su $s \in \dot{\mathcal{A}}_h$, $a \in \mathcal{A}_+$, $a_{11} \in \mathcal{A}^\dagger$, $z \in (1-s)\mathcal{A}s$ i $q = z + 1 - s$. Tada je*

$$qaq^* \geq s(a). \tag{2.17}$$

Jednakost važi, tj.

$$qaq^* = s(a) \tag{2.18}$$

ako i samo ako je

$$(z + {a_{12}}^* {a_{11}}^\dagger) a_{11} = 0. \tag{2.19}$$

Dokaz: Iz $z = (1-s)zs$ sledi

$$\begin{aligned} qaq^* &= ((1-s)zs + (1-s))a(sz^*(1-s) + (1-s)) \\ &= s(a) + (z + {a_{12}}^* {a_{11}}^\dagger) a_{11} ({a_{11}}^\dagger a_{12} + z^*). \end{aligned} \tag{2.20}$$

Na osnovu Teoreme 2.2.1, $s(a) \geq 0$ i $a_{11} \geq 0$. Takođe,

$$\begin{aligned} &(z + {a_{12}}^* {a_{11}}^\dagger) a_{11} ({a_{11}}^\dagger a_{12} + z^*) \\ &= ((z + {a_{12}}^* {a_{11}}^\dagger) a_{11}^{1/2})((z + {a_{12}}^* {a_{11}}^\dagger) a_{11}^{1/2})^* \geq 0, \end{aligned}$$

odakle proizilazi (2.17). Iz (2.20), sledi da (2.18) važi ako i samo ako je

$$(z + {a_{12}}^* {a_{11}}^\dagger) a_{11} ({a_{11}}^\dagger a_{12} + z^*) = 0,$$

što je ekvivalentno sa (2.19).

Posledica 2.2.2 *Ako su $s \in \dot{\mathcal{A}}_h$, $a \in \mathcal{A}_+$ i a_{11} je regularan, tada je*

$$\begin{aligned} s(a) &= \min\{qaq^* : q = z + 1 - s,\ z \in (1-s)\mathcal{A}s\} \\ &= (1 - s - {a_{12}}^* {a_{11}}^\dagger) a (1 - s - {a_{12}}^* {a_{11}}^\dagger)^*. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Dokaz: Sledi na osnovu (2.17), (2.18) i (2.19), ako je $z = -{a_{12}}^* {a_{11}}^\dagger$.

Posledica 2.2.3 *Ako je $a \in \mathcal{A}_+ \cap \mathcal{A}^\dagger$ i $a, a_{11} \in \mathcal{A}^\dagger$, tada je $s(a)$ regularan i $a^\dagger$ je unutrašnji inverz od $s(a)$, tj.*

$$s(a) = s(a) a^\dagger s(a). \tag{2.22}$$

Dokaz: Na osnovu Posledice 2.2.2 sledi da je $s(a) = uau^*$, gde je $u = 1 - s - a_{12}{}^* a_{11}{}^\dagger$. Dakle,

$$s(a) = (ua)a^\dagger(au^*) = (ua)a^\dagger(ua)^*. \tag{2.23}$$

Prema Teoremi 2.2.1, sledi $a_{11} \geq 0$, te je $a_{11}{}^\dagger a_{11} = a_{11} a_{11}{}^\dagger$. Sada je na osnovu Leme 2.2.1 i Teoreme 2.2.1 ispunjeno,

$$\begin{aligned} ua &= (1 - s - a_{12}{}^* a_{11}{}^\dagger)a \\ &= a_{12}{}^* + a_{22} - a_{12}{}^* a_{11}^\dagger a_{11} - a_{12}{}^* a_{11}^\dagger a_{12} \\ &= (a_{12}{}^* a_{12}{}^* a_{11}^\dagger a_{11}) + (a_{22} - a_{12}{}^* a_{11}^\dagger a_{12}) \\ &= s(a). \end{aligned} \tag{2.24}$$

Na osnovu Teoreme 2.2.1 i činjenice $s(a) \geq 0$, (2.23) i (2.24), proizilazi da (2.22) važi.

Sledeća posledica predstavlja vezu između spektra elementa a i spektra njegovog Schurovog komplementa.

Posledica 2.2.4 *Ako je $a \in \mathcal{A}_+ \cap \mathcal{A}^\dagger$ i $a_{11} \in \mathcal{A}^\dagger$, tada je*

$$\inf(\sigma(a) \setminus \{0\}) \leq \inf(\sigma(s(a)) \setminus \{0\}). \tag{2.25}$$

Dokaz: Na osnovu (2.22) važi

$$\gamma(L_{s(a)}) \geq \frac{1}{\|a^\dagger\|} = \gamma(L_a),$$

odakle na osnovu [59] proizilazi (2.25).

Teorema 2.2.5 *Neka su $s \in \dot{\mathcal{A}}_h$, $a, b \in \mathcal{A}_+$, i $a_{11},\ b_{11},\ a_{11} + b_{11} \in \mathcal{A}^\dagger$.*

(1) *Tada je*

$$s(a+b) \geq s(a) + s(b).$$

Jednakost

$$s(a+b) = s(a) + s(b) \tag{2.26}$$

važi ako i samo ako postoji $z \in (1-s)\mathcal{A}s$ tako da je

$$(z + {a_{12}}^* {a_{11}}^\dagger) a_{11} = (z + b_{12}^* b_{11}^\dagger) b_{11} = 0. \tag{2.27}$$

(2) *Ako je $a \geq b$, tada je*

$$s(a) \geq s(b).$$

Jednakost

$$s(a) = s(b) \tag{2.28}$$

važi ako i samo ako je postoji $z \in (1-s)\mathcal{A}s$ tako da (2.27) važi i

$$(z - 1 - s)(a - b) = 0. \tag{2.29}$$

Dokaz: **(1)** Na osnovu Leme 2.2.8 sledi

$$\begin{aligned} s(a+b) &= a_{22} + b_{22} - (a_{12} + b_{12})^* (a_{11} + b_{11})^\dagger (a_{12} + b_{12}) \\ &\geq a_{22} + b_{22} - {a_{12}}^* {a_{11}}^\dagger a_{12} - b_{12}^* b_{11}^\dagger b_{12} \\ &= s(a) + s(b). \end{aligned}$$

Ako postoji $z \in (1-s)\mathcal{A}s$ tako da (2.27) važi, tada na osnovu Teoreme 2.2.4 i (2.20) sledi $s(a) = qaq^*$ i $s(b) = qbq^*$, gde je $q = z + 1 - s$. Dakle,

$$\begin{aligned} s(a) + s(b) &= q(a+b)q^* \\ &\geq \min\{q(a+b)q^* : q = z + 1 - s,\ z \in (1-s)\mathcal{A}s\} \\ &= s(a+b). \end{aligned}$$

Uz pretpostavku da (2.26) važi, dokažimo (2.27). Na osnovu Teoreme 2.2.4, postoji $z \in (1-s)\mathcal{A}s$ tako da je za $q = z + 1 - s$,

$$s(a+b) = q(a+b)q^* = qaq^* + qbq^* = s(a) + p_1 + s(b) + p_2, \tag{2.30}$$

gde je $p_1 = (z + {a_{12}}^* {a_{11}}^\dagger) a_{11} ({a_{11}}^\dagger a_{12} + z^*)$ i $p_2 = (z + b_{12}^* b_{11}^\dagger) b_{11} (b_{11}^\dagger b_{12} + z^*)$. Očigledno, $p_1, p_2 \geq 0$, i na osnovu pretpostavki (2.26) i (2.30) sledi $p_1 + p_2 = 0$. Dakle, $p_1 = p_2 = 0$, što je ekvivalentno sa (2.27).

(2) Pretpostavimo da je $a \geq b$. Neka je $z \in (1-s)\mathcal{A}s$ i $(z + {a_{12}}^* {a_{11}}^\dagger) a_{11} = 0$. Na osnovu Teoreme 2.2.4 sledi

$$s(a) = (z - 1 - s) a (z - 1 - s)^* \geq (z - 1 - s) b (z - 1 - s)^* \geq s(b). \tag{2.31}$$

Druga nejednakost u (2.31) važi ako i samo ako je $(z + b_{12}^* b_{11}^\dagger) b_{11} = 0$, a prva nejednakost u (2.31) važi ako i samo ako je

$$(z - 1 - s)(a - b)(z - 1 - s)^* = 0.$$

Kako je $a - b \geq 0$, poslednji uslov je ekvivalentan sa (2.29).

2.3 Kompatibilnost i a-samoadjungovanost idempotenata

U ovoj sekciji izučavani su a-samoadjungovani elemenati C^*-algebre $\mathcal{A}$ i kompatibilnost para $(a, s) \in \mathcal{A}_h \times \dot{\mathcal{A}}_h$. Dokazano je da su kompatibilnost i s-komplementabilnost ekvivalentne osobine za samoadjungovane elemente. Neki od rezultata predstavljaju uopštenja u C^*-algebrama rezultata izloženih u radu Coracha, Maestripieria i Stojanoffa [24], za ograničene linearne operatore na Hilbertovom prostoru.

Dokaz sledeće leme može se naći u ([18, strana 27]).

Lema 2.3.1 *Ako je $s \in \dot{\mathcal{A}}_h$, tada za $q \in \dot{\mathcal{A}}$ važi*

$$qs = s \quad i \quad sq = q \tag{2.32}$$

ako i samo ako je q oblika

$$q = s + su(1 - s) \tag{2.33}$$

za neko $u \in \mathcal{A}$.

Definicija 2.3.1 *Neka je $a \in \mathcal{A}_h$. Elemenat $b \in \mathcal{A}$ je a-samoadjungovan ako je $b^*a = ab$.*

Primetimo da kada je $a = 1$, tada je $b = b^*$, tj. b je hermitski element.

Karakterizacija a-samoadjungovanog idempotenta za koji važi (2.32) data je u sledećoj teoremi:

Teorema 2.3.1 *Neka je $s \in \dot{\mathcal{A}}_h$. Idempotent $q \in \dot{\mathcal{A}}$ za koji važi (2.32), jeste a-samoadjungovan ako i samo ako je $q = s + su(1 - s)$, pri čemu je $u(1 - s)$ rešenje jednačine*

$$a_{11}x = a_{12}. \tag{2.34}$$

Dokaz: Neka je q a-samoadjungovani idempotent tako da važi (2.32). Na osnovu Leme 2.3.1 važi $q = s + su(1-s)$, za neko $u \in \mathcal{A}$. Na osnovu $aq = q^*a$, sledi

$$as + asu(1-s) = sa + (1-s)u^*sa$$

i

$$sas + sasu(1-s) = sa,$$

tj.

$$sasu(1-s) = sa(1-s).$$

Dakle, $u(1-s)$ je rešenje jednačine (2.34).

Obrnuto, iz pretpostavke da je $q = s + su(1-s)$, gde je $u(1-s)$ rešenje jednačine $a_{11}x = a_{12}$, sledi $saq = sa$ i

$$q^*a = q^*sa = q^*saq = q^*sasq.$$

Očigledno, $aq = q^*a$.

Sledeći rezultat je C^*-algebra verzija rezultata Douglasa [43] i Fillmore-Williamsa [48].

Teorema 2.3.2 *Neka je $a \in \mathcal{A}^\dagger$ i $b \in \mathcal{A}$. Sledeća tvrđenja su ekvivalentna*

(1) $aa^\dagger b = b$,

(2) *$d = a^\dagger b$, je jedinstveno rešenje jednačine*

$$ad = b, \quad a^\dagger ad = d, \tag{2.35}$$

i u tom slučaju d je redukovano rešenje jednačine $ax = b$.

Ako (1) *i* (2) *važe i ako je $b = qa$ za neko $q \in \dot{\mathcal{A}}$, tada je $d^2 = d$.*

Dokaz: $(\mathbf{1}) \Rightarrow (\mathbf{2})$ Neka je $aa^\dagger b = b$ i $d = a^\dagger b$. Sledi $ad = aa^\dagger b = b$ i $a^\dagger ad = a^\dagger aa^\dagger b = a^\dagger b = d$.

$(\mathbf{2}) \Rightarrow (\mathbf{1})$ Ako je $ad = b$ i $a^\dagger ad = d$, tada je $aa^\dagger b = aa^\dagger ad = ad = b$. Sada, očigledno sledi da je $a^\dagger b = a^\dagger ad = d$.

Iz pretpostavke $b = qa$ i $q = q^2$ sledi da je $aa^\dagger qa = qa$, $d = a^\dagger qa$ i $d^2 = a^\dagger qaa^\dagger qa = a^\dagger qa = d$.

Sledeći rezultat je u vezi sa istraživanjima iz Sekcije 2.2:

Teorema 2.3.3 *Neka su $a \in \mathcal{A}_h$, $q \in \dot{\mathcal{A}}$ i neka su data sledeća tvrđenja:*

(1) $aq = q^*a$;

(2) $qq^\dagger aq^\dagger q = qq^\dagger a$;

(3) $q^*aq \leq a$.

Tada je $(\mathbf{1}) \iff (\mathbf{2})$*. Ako je* $a \geq 0$*, tada* $(\mathbf{1}) \Rightarrow (\mathbf{3})$*. Ako je $\mathcal{A}$ AW^*-algebra i* $a \geq 0$*, tada je* $(\mathbf{1}) \iff (\mathbf{3})$*.*

Dokaz: (1)⇒(2): Ako je $aq = q^*a$, tada je

$$\begin{aligned} qq^\dagger aq^\dagger q &= (q^\dagger qaqq^\dagger)^* = (q^\dagger qq^*aq^\dagger)^* = (q^\dagger)^*aqq^\dagger q = (q^\dagger)^*aq \\ &= (q^*aq^\dagger)^* = (aqq^\dagger)^* = qq^\dagger a. \end{aligned}$$

(2)⇒(1): Iz (2) sledi

$$q^\dagger qaqq^\dagger = aqq^\dagger. \tag{2.36}$$

Takođe iz (2) proizilazi $qq^\dagger aq^\dagger q = qq^\dagger aq$ i

$$q^\dagger qaqq^\dagger = q^*aqq^\dagger. \tag{2.37}$$

Iz (2.36) i (2.37) sledi $q^*aqq^\dagger = aqq^\dagger$, odakle je $q^*aq = aq$. Dakle, $aq = q^*a$.

(1)⇒ (3): Ako (1) važi i $a \geq 0$, tada je

$$aq = q^*aq = (a^{1/2}q)^*(a^{1/2}q) \geq 0.$$

Slično, ako je $p = 1 - q$, onda je $ap = p^*ap \geq 0$. Prema tome,

$$q^*aq \leq q^*aq + p^*ap = aq + ap = a.$$

(3)⇒(1): Iz (3) sledi

$$(q^*a^{1/2})(q^*a^{1/2})^* \leq a^{1/2}(a^{1/2})^*.$$

Uz pretpostavku da je $\mathcal{A}$ AW^*-algebra, na osnovu ([47], Posledica 3.6) proizilazi da postoji $d \in \mathcal{A}$ tako da je $a^{1/2}d = q^*a^{1/2}$ i $\|d\| \leq 1$. Na osnovu Teoreme 2.3.2 sledi da je $d^2 = d$, tj. $d^* = d$. Iz $q^*a = a^{1/2}da^{1/2}$, sledi $aq = q^*a$.

Neka je $a \in \mathcal{A}_h$, $s \in \dot{\mathcal{A}}_h$ i

$$\mathcal{P}(a,s) = \{q \in \dot{\mathcal{A}} : \ aq = q^*a, \quad sq = q, \quad qs = s\}.$$

Definicija 2.3.2 *Par (a,s) je kompatibilan ako je skup $\mathcal{P}(a,s)$ neprazan.*

Napomenimo da $\mathcal{P}(a,s)$ može da bude prazan skup, i u slučaju kada je $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Iz Teoreme 2.3.1 imamo

Posledica 2.3.1 *Neka je $a \in \mathcal{A}_h$, $s \in \dot{\mathcal{A}}_h$ i neka je par (a,s) kompatibilan. Tada je $q \in \mathcal{P}(a,s)$ ako i samo ako je $q = s + su(1-s)$, gde je $u(1-s)$ rešenje jednačine $a_{11}x = a_{12}$.*

Teorema 2.3.4 *Ako je $a \in \mathcal{A}_h$, $s \in \dot{\mathcal{A}}_h$ i $a_{11} \in \mathcal{A}^\dagger$, tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(1) *Par (a,s) je kompatibilan,*

(2) $a_{11}{a_{11}}^\dagger sa = sa$.

Dokaz: **(2) $\Rightarrow$ (1):** Za $u = {a_{11}}^\dagger a_{12}$, važi $a_{11}u = a_{12}$. Neka je $q = s + su(1-s)$. Na osnovu Posledice 2.3.1 sledi da je $q \in \mathcal{P}(a,s)$, te je par (a,s) kompatibilan.

(1) $\Rightarrow$ (2): Obzirom da je par (a,s) kompatibilan, postoji $q \in \mathcal{P}(a,s)$ oblika $q = s + su(1-s)$, gde je $a_{11}u(1-s) = a_{12}$. Iz $a_{11}{a_{11}}^\dagger a_{12} = a_{12}$ sledi da je $a_{11}{a_{11}}^\dagger sa = sa$.

Posledica 2.3.2 *Neka je $a \in \mathcal{A}_h$, $s \in \dot{\mathcal{A}}_h$ i $a_{11} \in \mathcal{A}^\dagger$. Ako je par (a,s) kompatibilan tada jednačina $a_{11}x = a_{12}$ ima redukovano rešenje i ono je idempotent.*

Dokaz: Na osnovu Teoreme 2.3.4 proizilazi $a_{11}{a_{11}}^\dagger a_{12} = a_{12}$. Sada, dokaz sledi iz Teoreme 2.3.2.

Sledeći rezultat daje ekvivalentnost komplementabilnosti i kompatibilnosti za samoadjungovan elemente C^*-algebre. Identični rezultat za hermitske operatore na Hilbertovom prostoru je dat u [25].

Teorema 2.3.5 *Neka je $a \in \mathcal{A}_h$. Par (a, s) je kompatibilan ako i samo ako je a s-komplementabilan element.*

Dokaz: Pretpostavimo da je par (a, s) kompatibilan i neka je $q \in \mathcal{P}(a, s)$. Tada $r = q$ zadovoljava uslove Definicije 2.2.2. Dakle, a je s-komplementabilan.

Obrnuto, ako je a s-komplementabilan, važi $r = sus + sv(1 - s)$, za neke $u,\ v \in \mathcal{A}$. Iz uslova $sar = sa$ sledi $a_{11}v(1-s) = a_{12}$. Sada, na osnovu Posledice 2.3.1, sledi $q = s + sv(1 - s) \in \mathcal{P}(a, s)$, tj. par (a, s) je kompatibilan.

2.4 Banachiewicz-Schurova forma

Rezultati izloženi u ovom poglavlju pretstavljaju originalne rezultate dobijene u radu [34].

Motivacija za ovo istraživanje potekla je iz:

(i) rada Baksalarya i Styana [7] koji uopštava ranije rezultate Marsaglia i Styana [71], dajući potrebne i dovoljne uslove za predstavljanje $A^{(1,3)}$, $A^{(1,4)}$ i $A^{\dagger}$ generalisanih inverza blok-matrice A u Banachiewicz-Schurovoj formi;

(ii) rada Y.Weia [96] u kome su dati dovoljni uslovi za predstavljanje Drazinovog inverza u Banachiewicz-Schurovoj formi.

Naš cilj je bio uopštavanje ovih rezultata za težinski Moore-Penroseov i težinski Drazinov inverz blok-matrice, čime su rezultati radova [7] i [96] dobijeni kao posle-dice.

Posmatra se blok-matrica $A \in C^{(m+p)\times(n+q)}$:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \tag{2.38}$$

gde su $A_{11} \in C^{m\times n}$ i $A_{22} \in C^{p\times q}$, i odgovarajuća Banachiewicz-Schurova forma inverza matrice A, data sa

$$X = \begin{bmatrix} A_{11}^{\alpha} + A_{11}^{\alpha} A_{12} S^{\alpha} A_{21} A_{11}^{\alpha} & -A_{11}^{\alpha} A_{12} S^{\alpha} \\ -S^{\alpha} A_{21} A_{11}^{\alpha} & S^{\alpha} \end{bmatrix}, \tag{2.39}$$

gde je $A_{11}^{\alpha} \in A_{11}\{1\}$. Ovde je $S = S(A)$ generalisani Schurov komplement definisan na sledeći način:

Definicija 2.4.1 *Generalisani Schurov komplement od A, u oznaci $S(A)$, je*

$$S(A) = A_{22} - A_{21} A_{11}^{\alpha} A_{12}, \tag{2.40}$$

gde je $A_{11}^{\alpha} \in A_{11}\{1\}$.

Zbog jednostavnosti zapisa, koristićemo oznaku S umesto $S(A)$ za Schurov komplement definisan sa (2.40).

Naredna teorema predstavlja rezultat Baksalarya i Styana [7], koji daje potrebne i dovoljne uslove da X bude unutrašnji inverz matrice A. Prihvatajući oznake iz [7] neka je:

$$E_{A_{11}} = I - A_{11}^{\alpha} A_{11},\ F_{A_{11}} = I - A_{11} A_{11}^{\alpha},\ E_S = I - S^{\alpha} S,\ F_S = I - S S^{\alpha}.$$

Teorema 2.4.1 [7] *Neka su matrice A i X date sa* (2.38) *i* (2.39). *Tada je $X \in A\{1\}$ ako i samo ako je $S^{\alpha} \in S\{1\}$ i*

$$F_{A_{11}} A_{12} E_S = 0, \quad F_S A_{21} E_{A_{11}} = 0, \quad F_{A_{11}} A_{12} S^{\alpha} A_{21} E_{A_{11}} = 0. \tag{2.41}$$

Poslednja tri uslova ne zavise od sledećih izbora: $A_{11}^{\alpha} \in A_{11}\{1\}$, $S^{\alpha} \in S\{1\}$ u $E_{A_{11}}$, $F_{A_{11}}$, E_S i F_S.

Neka su date pozitivno definitne matrice

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad N = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{bmatrix}. \tag{2.42}$$

Najpre ćemo izložiti rezultate koji daju potrebne i dovoljne uslove za predstavljanje težinskih generalisanih inverza $A^{(1,3M)}$, $A^{(1,4N)}$ i $A^{\dagger}_{M,N}$ u Banachiewicz-Schurovoj formi.

Sledeća teorema daje potrebne i dovoljne uslove za $X \in A\{1, 3(M)\}$, pod određenim pretpostavkama.

Teorema 2.4.2 *Neka je M pozitivno definitna matrica i*

$$\begin{aligned} (M_{12} S S^{\alpha})^* &= M_{12}^* A_{11} A_{11}^{\alpha} + M_{12}^* F_{A_{11}} A_{12} S^{\alpha} A_{21} A_{11}^{\alpha}, \\ S^{\alpha} M_{22} F_S &= E_S M_{22} S^{\alpha}. \end{aligned} \tag{2.43}$$

Tada $X \in A\{1, 3(M)\}$ ako i samo ako je $A_{11}^{\alpha} \in A_{11}\{1, 3(M_{11})\}$, $S^{\alpha} \in S\{1, 3(M_{22})\}$ i

$$F_{A_{11}} A_{12} = 0,\ F_S A_{21} = 0. \tag{2.44}$$

Poslednja dva uslova (2.44) *ne zavise od izbora $A_{11}^{\alpha} \in A_{11}\{1\}$, $S^{\alpha} \in S\{1\}$ u $F_{A_{11}}$ i F_S.*

Dokaz: Pretpostavimo da je $A_{11}^{\alpha} \in A_{11}\{1,3(M_{11})\}$, $S^{\alpha} \in S\{1,3(M_{22})\}$ i da (2.44) važi. Tada su uslovi Teoreme 2.4.1 zadovoljeni, te je X unutrašnji inverz od A. Takođe važi

$$
\begin{aligned}
(MAX)_{11} &= M_{11}A_{11}A_{11}^{\alpha} - M_{11}F_{A_{11}}A_{12}S^{\alpha}A_{21}A_{11}^{\alpha} + M_{12}F_SA_{21}A_{11}^{\alpha}\\
&= M_{11}A_{11}A_{11}^{\alpha},\\
(MAX)_{12} &= M_{11}F_{A_{11}}A_{12}S^{\alpha} + M_{12}SS^{\alpha} = M_{12}SS^{\alpha},\\
(MAX)_{21} &= M_{12}^{*}A_{11}A_{11}^{\alpha} - M_{12}^{*}F_{A_{11}}A_{12}S^{\alpha}A_{21}A_{11}^{\alpha} + M_{22}F_SA_{21}A_{11}^{\alpha}\\
&= M_{12}^{*}A_{11}A_{11}^{\alpha},\\
(MAX)_{22} &= M_{12}^{*}F_{A_{11}}A_{12}S^{\alpha} + M_{22}SS^{\alpha} = M_{22}SS^{\alpha}.
\end{aligned}
$$

Dakle, dobili smo da je $(MAX)_{11} = (MAX)_{11}^{*}$, $(MAX)_{12} = (MAX)_{21}^{*}$ i $(MAX)_{22} = (MAX)_{22}^{*}$, tj. $MAX = (MAX)^{*}$.

Sa druge strane, pretpostavimo da je $X \in A\{1,3(M)\}$. Tada (2.41) važi i $MAX = (MAX)^{*}$. Kako je $(MAX)_{21} = (MAX)_{12}^{*}$, sledi $M_{11}F_{A_{11}}A_{12}S^{\alpha} = (M_{22}F_SA_{21}A_{11}^{\alpha})^{*}$ i

$$
\begin{aligned}
(M_{11}F_{A_{11}}A_{12}S^{\alpha})(M_{11}F_{A_{11}}A_{12}S^{\alpha})^{*} &= M_{11}F_{A_{11}}A_{12}S^{\alpha}M_{22}F_SA_{21}A_{11}^{\alpha}\\
&= M_{11}F_{A_{11}}A_{12}E_SM_{22}S^{\alpha}F_SA_{21}A_{11}^{\alpha}\\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Dakle, $M_{11}F_{A_{11}}A_{12}S^{\alpha} = 0$, tj. $M_{11}F_{A_{11}}A_{12} = 0$ i $M_{22}F_SA_{21}A_{11}^{\alpha} = 0$, odakle je $M_{22}F_SA_{21} = 0$. Kako je M invertibilna , sledi da su i matrice M_{11} i M_{22} invertibilne, te (2.44) važi. Iz $(MAX)_{11} = (MAX)_{11}^{*}$ i $(MAX)_{22} = (MAX)_{22}^{*}$ sledi $A_{11}^{\alpha} \in A_{11}\{1,3(M_{11})\}$ i $S^{\alpha} \in S\{1,3(M_{22})\}$.

Nezavisnost uslova (2.44) u odnosu na izbor $A_{11}^{\alpha} \in A_{11}\{1\}$ u $F_{A_{11}}$ i $S^{\alpha} \in S\{1\}$ u F_S sledi analogno kao u dokazu Teoreme 2.4.1.

Posledica 2.4.1 *Ako je M pozitivno definitna matrica i*

$$
S^{\alpha}M_{22}F_S = E_SM_{22}S^{\alpha},\ M_{12}^{*}F_{A_{11}}A_{12} = 0,\ M_{12}SS^{\alpha} = (M_{12}^{*}A_{11}A_{11}^{\alpha})^{*}, \tag{2.45}
$$

tada je $X \in A\{1,3(M)\}$ ako i samo ako je $A_{11}^{\alpha} \in A_{11}\{1,3(M_{11})\}$, $S^{\alpha} \in S\{1,3(M_{22})\}$ i

$$
F_{A_{11}}A_{12} = 0,\ F_SA_{21} = 0. \tag{2.46}
$$

Pri tome, uslov (2.46) *ne zavisi od izbora* $A_{11}^{\alpha} \in A_{11}\{1\}$ *i* $S^{\alpha} \in S\{1\}$ *u* $F_{A_{11}}$ *i* F_S.

Za $M = I$, [[7], Theorem 3] se dobija kao posledica.

Posledica 2.4.2 [7] $X \in A\{1,3\}$ *ako i samo ako je* $A_{11}^{\alpha} \in A_{11}\{1,3\}$, $S^{\alpha} \in S\{1,3\}$ *i*

$$F_{A_{11}}A_{12} = 0,\ \ F_S A_{21} = 0. \tag{2.47}$$

Oslabljivanje uslova iz Teoreme 2.4.2, vodi do dovoljnog ali ne i potrebnog uslova za $X \in A\{1,3(M)\}$.

Posledica 2.4.3 *Ako su* $A_{11}^{\alpha} \in A_{11}\{1,3(M_{11})\}$, $S^{\alpha} \in S\{1,3(M_{22})\}$ *i*

$$F_{A_{11}}A_{12} = 0, \quad F_S A_{21} = 0, \quad M_{12}SS^{\alpha} = (M_{12}^{*}A_{11}A_{11}^{\alpha})^{*},$$

tada je $X \in A\{1,3(M)\}$.

Naredna teorema daje potreban i dovoljan uslov za $X \in A\{1,4(N)\}$.

Teorema 2.4.3 *Neka je* N *pozitivno definitna matrica i*

$$\begin{aligned} (N_{12}S^{\alpha}S)^{*} &= N_{12}^{*}A_{11}^{\alpha}A_{11} + N_{12}^{*}A_{11}^{\alpha}A_{12}S^{\alpha}A_{21}E_{A_{11}}, \\ S^{\alpha}M_{22}F_S &= E_S M_{22}S^{\alpha}. \end{aligned} \tag{2.48}$$

Tada $X \in A\{1,4(N)\}$ *ako i samo ako je* $A_{11}^{\alpha} \in A_{11}\{1,4(N_{11})\}$, $S^{\alpha} \in S\{1,4(N_{22})\}$ *i*

$$A_{12}E_S = 0, \quad A_{21}E_{A_{11}} = 0. \tag{2.49}$$

Dokaz: Dokaz je analogan dokazu Teoreme 2.4.2.

Posledica 2.4.4 *Ako je N pozitivno definitna matrica i*

$$S^{\alpha}N_{22}F_S = E_S N_{22}S^{\alpha},\ N_{12}^{*}A_{11}^{\alpha}A_{12} = 0,\ N_{12}S^{\alpha}S = (N_{12}^{*}A_{11}^{\alpha}A_{11})^{*}, \quad (2.50)$$

tada je $X \in A\{1,4(N)\}$ ako i samo ako važi da je $A_{11}^{\alpha} \in A_{11}\{1,4(N_{11})\}$, $S^{\alpha} \in S\{1,4(N_{22})\}$ i

$$A_{12}E_S = 0, \quad A_{21}E_{A_{11}} = 0. \quad (2.51)$$

Theorem 4 iz rada [7] predstavlja posledicu našeg rezultata u slučaju $N = I$.

Posledica 2.4.5 [7] *$X \in A\{1,4\}$ ako i samo ako je $A_{11}^{\alpha} \in A_{11}\{1,4\}$, $S^{\alpha} \in S\{1,4\}$ i*

$$A_{12}E_S = 0, \quad A_{21}E_{A_{11}} = 0.$$

Analogno Posledici 2.4.3, važi:

Posledica 2.4.6 *Ako su $A_{11}^{\alpha} \in A_{11}\{1,4(N_{11})\}$, $S^{\alpha} \in S\{1,4(N_{22})\}$ i*

$$A_{12}E_S = 0, \quad A_{21}E_{A_{11}} = 0. \ \ N_{12}S^{\alpha}S = (N_{12}^{*}A_{11}^{\alpha}A_{11})^{*},$$

tada je $X \in A\{1,4(M)\}$.

Rezultati Teoreme 2.4.2 i Teoreme 2.4.3 važe uz pretpostavku da su M_{11}, M_{22}, N_{11} i N_{22} invertibilne, umesto uslova da su M i N invertibilne.

Na osnovu Teoreme 2.4.2, Teoreme 2.4.3 i Theorem 2 [7], slede potrebni i dovoljni uslovi da težinski Moore-Penrosov inverz matrice A, u oznaci $A_{M,N}^{\dagger}$ bude pretstavljen u Banachiewicz-Schurovoj formi, uz pretpostavku da matrice M i N zadovoljavaju uslove (2.43) i (2.48).

Teorema 2.4.4 *Neka su M i N matrice za koje važe uslovi* (2.43) *i* (2.48)*. Tada $X = A_{M,N}^{\dagger}$ ako i samo ako je $A_{11}^{\alpha} = (A_{11})_{M_{11},N_{11}}^{\dagger}$, $S^{\alpha} = S_{M_{22},N_{22}}^{\dagger}$ i*

$$F_{A_{11}}A_{12} = 0, \quad F_S A_{21} = 0, A_{12}E_S = 0, \quad A_{21}E_{A_{11}} = 0. \quad (2.52)$$

Za $M=I$ i $N=I$ uslovi (2.43) i (2.48) su očigledno zadovoljeni, te na osnovu Teoreme 2.4.4 slede potrebni i dovoljni uslovi za $X=A^\dagger$.

Posledica 2.4.7 *$X=A^\dagger$ ako i samo ako je $A_{11}^\alpha=(A_{11})^\dagger$, $S^\alpha=S^\dagger$ i*

$$F_{A_{11}}A_{12}=0, \quad F_S A_{21}=0, A_{12}E_S=0, \quad A_{21}E_{A_{11}}=0. \tag{2.53}$$

Takođe, uz slabije pretpostavke za matrice M i N, proizilaze dovoljni uslovi za $X=A^\dagger_{M,N}$.

Posledica 2.4.8 *Ako je $A_{11}^\alpha=(A_{11})^\dagger_{M_{11},N_{11}}$, $S^\alpha=S^\dagger_{M_{22},N_{22}}$ i*

$$\begin{aligned} &F_{A_{11}}A_{12}=0, \quad F_S A_{21}=0, A_{12}E_S=0, \quad A_{21}E_{A_{11}}=0,\\ &M_{12}SS^\alpha=(M_{12}^*A_{11}A_{11}^\alpha)^*, \quad N_{12}S^\alpha S=(N_{12}^*A_{11}^\alpha A_{11})^*, \end{aligned}$$

tada je $X=A^\dagger_{M,N}$.

Interesantno je primetiti da za

$$G=\begin{pmatrix} I & O\\ A_{21}A_{11}^\alpha & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & O\\ O & S\end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & A_{11}^\alpha A_{12}\\ O & I\end{pmatrix},$$

gde je $A_{11}^\alpha\in A_{11}\{1\}$, sledi da je

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} O & F_{A_{11}}A_{12}\\ A_{21}E_{A_{11}} & O\end{pmatrix}+G,$$

i

$$X=\begin{pmatrix} I & -A_{11}^\alpha A_{12}\\ O & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11}^\alpha & O\\ O & S^\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & O\\ -A_{21}A_{11}^\alpha & I\end{pmatrix}.$$

Sada je jednostavno uočiti da je $X\in G\{1\}$. Štaviše, ako uslovi $F_{A_{11}}A_{12}=0$ i $A_{21}E_{A_{11}}=0$ važe, onda je $A=G$ i $X\in A\{1,2\}$ ako i samo ako je $A_{11}^\alpha\in A\{1,2\}$ i $S^\alpha\in S\{1,2\}$.

U nastavku su izloženi dovoljni uslovi za predstavljanje W-težinskog Drazinovog inverza u Banachiewicz-Schurovoj formi. Zbog toga su A_{11}^α i S^α u X, $F_{A_{11}}$, $E_{A_{11}}$, F_S i E_S zamenjeni sa $A^{d,W_{11}}$ i $S^{d,W_{22}}$, redom.

Podsetimo da za proizvoljnu matricu W postoje nesingularne matrice P i Q tako da je

$$W = P \begin{bmatrix} W_{11} & 0 \\ 0 & W_{22} \end{bmatrix} Q^{-1} = PW'Q^{-1}.$$

Dakle, ako je $A = QA'P^{-1}$ i $X = QX'P^{-1}$, tada X predstavlja W-težinski Drazinov inverz od A ako i samo ako je X' W'-težinski Drazinov inverz od A'. Zbog toga je prirodno pretpostaviti da W ima sledeću formu

$$W = \begin{bmatrix} W_{11} & 0 \\ 0 & W_{22} \end{bmatrix}. \tag{2.54}$$

Teorema 2.4.5 *Neka su A, X i W oblika* (2.38), (2.39) *i* (2.54), *redom. Ako je $A_{11}^{\alpha} = A_{11}^{d,w_{11}}$, $S^{\alpha} = S^{d,w_{22}}$ i*

$$A_{12}W_{22} = A_{11}W_{11}A_{11}^{d,W_{11}}A_{12} = A_{12}W_{22}SW_{22}S^{d,W_{22}}W_{22}, \tag{2.55}$$
$$A_{21}W_{11} = A_{21}W_{11}A_{11}W_{11}A_{11}^{d,W_{11}}W_{11} = SW_{22}S^{d,W_{22}}A_{21}, \tag{2.56}$$
$$W_{11}A_{12} = A_{12}S^{d,W_{22}}W_{22}S, \tag{2.57}$$
$$W_{22}A_{21} = A_{21}A_{11}^{d,W_{11}}W_{11}A_{11}, \tag{2.58}$$
$$A_{22}W_{22} = A_{22}W_{22}SW_{22}S^{d,W_{22}}W_{22}, \tag{2.59}$$
$$A_{21}A_{11}^{d,W_{11}}W_{11}A_{12} = W_{22}A_{21}A_{11}^{d,W_{11}}A_{12}, \tag{2.60}$$
$$A_{21}W_{11}A_{11}^{d,W_{11}}A_{12} = A_{21}A_{11}^{d,W_{11}}A_{12}W_{22}, \tag{2.61}$$

tada je $X = A^{d,W}$.

Dokaz: Matričnim izračunavanjem, sledi da je

$$\begin{aligned}
(AWX)_{11} &= A_{11}W_{11}A_{11}^{d,W_{11}} \\
&\quad - (A_{12}W_{22} - A_{11}W_{11}A_{11}^{d,W_{11}}A_{12})S^{d,W_{22}}A_{21}A_{11}^{d,W_{11}} \\
&= A_{11}W_{11}A_{11}^{d,W_{11}}, \ \text{ koristeći prvu jednakost iz (2.55)}, \\
(AWX)_{12} &= (A_{12}W_{22} - A_{11}W_{11}A_{11}^{d,W_{11}}A_{12})S^{d,W_{22}} \\
&= 0, \ \text{ na osnovu prve jednakosti iz (2.55)}, \\
(AWX)_{21} &= A_{21}W_{11}A_{11}^{d,W_{11}} \\
&\quad - (A_{22}W_{22} - A_{21}W_{11}A_{11}^{d,W_{11}}A_{12})S^{d,W_{22}}A_{21}A_{11}^{d,W_{11}} \\
&= A_{21}W_{11}A_{11}^{d,W_{11}} - SW_{22}S^{d,W_{22}}A_{21}A_{11}^{d,W_{11}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 0, \text{ na osnovu druge jednakosti iz (2.56) i iz (2.61)}, \\
(AWX)_{22} &= (A_{22}W_{22} - A_{21}W_{11}A_{11}^{d,W_{11}}A_{12})S^{d,W_{22}} \\
&= SW_{22}S^{d,W_{22}}, \text{ sledi iz (2.61)}.
\end{aligned}
$$

Slično,

$$
\begin{aligned}
(XWA)_{11} &= A_{11}^{d,W_{11}}W_{11}A_{11} \\
&\quad - A_{11}^{d,W_{11}}A_{12}S^{d,W_{22}}(W_{22}A_{21} - A_{21}A_{11}^{d,W_{11}}W_{11}A_{11}) \\
&= A_{11}^{d,W_{11}}W_{11}A_{11}, \quad \text{na osnovu (2.58)}, \\
(XWA)_{12} &= A_{11}^{d,W_{11}}W_{11}A_{12} \\
&\quad - A_{11}^{d,W_{11}}A_{12}S^{d,W_{22}}(W_{22}A_{22} - A_{21}A_{11}^{d,W_{11}}W_{11}A_{12}) \\
&= A_{11}^{d,W_{11}}W_{11}A_{12} - A_{11}^{d,W_{11}}A_{12}S^{d,W_{22}}W_{22}S \\
&= 0, \quad \text{koristeći (2.57) i (2.60)}, \\
(XWA)_{21} &= S^{d,W_{22}}(W_{22}A_{21} - A_{21}A_{11}^{d,W_{11}}W_{11}A_{11}) \\
&= 0, \text{ iz (2.58)}, \\
(XWA)_{22} &= S^{d,W_{22}}(W_{22}A_{22} - A_{21}A_{11}^{d,W_{11}}W_{11}A_{12}) \\
&= SW_{22}S^{d,W_{22}}, \text{ na osnovu (2.60)}.
\end{aligned}
$$

Sada je,

$$
AWX = \begin{bmatrix} A_{11}W_{11}A_{11}^{d,W_{11}} & 0 \\ 0 & SW_{22}S^{d,W_{22}} \end{bmatrix}
$$

i

$$
XWA = \begin{bmatrix} A_{11}^{d,W_{11}}W_{11}A_{11} & 0 \\ 0 & SW_{22}S \end{bmatrix},
$$

te je $AWX = XWA$.

Kako je $A_{11}^{\alpha} = A_{11}^{d,W_{11}}$ i $S^{\alpha} = S^{d,W_{22}}$, sledi $XWAWX = X$. Takođe, iz (2.61), (2.59),(2.56) i drugog dela (2.55), sledi

$$
\begin{aligned}
(AW)^2XW &= \begin{bmatrix} (A_{11}W_{11})^2A_{11}^{d,W_{11}}W_{11} & A_{12}W_{22}SW_{22}S^{d,W_{22}}W_{22} \\ A_{21}W_{11}A_{11}W_{11}A_{11}^{d,W_{11}}W_{11} & A_{22}W_{22}SW_{22}S^{d,W_{22}}W_{22} \end{bmatrix} \\
&= AW + \begin{bmatrix} (A_{11}W_{11})^2A_{11}^{d,W_{11}}W_{11} - A_{11}W_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Indukcijom, koristeći prvu jednakost u (2.56), proizilazi da je

$$(AW)^{m+1}XW = (AW)^m + \begin{bmatrix} (A_{11}W_{11})^m - (A_{11}W_{11})^{m+1}A_{11}^{d,W_{11}}W_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dakle, $(AW)^{m+1}XW = (AW)^m$, za proizvoljno $m \geq ind(A_{11}W_{11})$.

Na osnovu Teoreme 2.4.5, sledi rezultat Weia [Theorem 1,[96]] za $W = I$:

Posledica 2.4.9 *Neka su A i X date sa* (2.38) *i* (2.39)*, redom. Ako je* $F_{A_{11}}A_{12} = 0$, $A_{21}E_{A_{11}} = 0$, $A_{12}E_S = 0$, $E_SA_{21} = 0$, $A_{22}E_S = 0$, *tada je* $X = A^d$.

U slučaju Drazinovog i težinskog Drazinovog inverza matrice, nismo pronašli potrebne uslove za predstavljane ovih inverza u Banachiewicz-Schur formi, tako da ovo pitanje ostaje otvoreno za neko dalje istraživanje.

2.5 Jedno uopštenje Schurovog komplementa

U ovo sekciji definisaćemo i izučavati jedno uopštenje Schurovog komplementa, dobijeno zamenom MP inverz matrice A, Drazinovim inverzom A^d.

Definicija 2.5.1 *Neka je* $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \in C^{(m+n)\times(m+n)}$, *gde je* $A \in C^{m\times m}$ *i* $D \in C^{n\times n}$. *d-Schurov komplement od* A *u* M, *definisan je sa*

$$S_{d,A}(M) = D - CA^dB.$$

Takođe, d-Schurov komplement od D u M, je definisan sa

$$S_{d,D}(M) = A - BD^dC.$$

Rezultati u ovoj sekciji izloženi su u radu [32], a predstavljaju uopštenje rada Y.Weia [97].

Kako bi uprostili dokaze sledećih rezultata, uvedimo oznake:

$$S = S_{d,D}(M) \quad \text{i} \quad Z = S_{d,A}(M).$$

Sledeća teorema predstavlja uopštenje formule (2.7).

Teorema 2.5.1 *Neka je* $E_AB = 0$, $CE_A = 0$, $BE_DZ^dC = 0$, $BD^dE_ZC = 0$, $BZ^dE_DC = 0$, *i* $BE_ZD^dC = 0$. *Tada je*

$$S^d = A^d + A^dBZ^dCA^d. \tag{2.62}$$

Dokaz: Označimo sa $X = A^d + A^dBZ^dCA^d$. Sada je,

$$\begin{aligned} SX &= (A - BD^dC)(A^d + A^dBZ^dCA^d) \\ &= AA^d + AA^dBZ^dCA^d - BD^dCA^d - BD^dCA^dBZ^dCA^d \\ &= AA^d + BZ^dCA^d - BD^dCA^d - BD^d(D - Z)Z^dCA^d \\ &= AA^d + BE_DZ^dCA^d - BD^dE_ZCA^d \\ &= AA^d. \end{aligned}$$

Slično, $XS = A^dA$ tj. $XS = SX$ i

$$\begin{aligned} XSX &= A^dA(A^d + A^dBZ^dCA^d) \\ &= A^d + A^dBZ^dCA^d \\ &= X. \end{aligned}$$

Koristeći metod matematičke indukcije, sledi da je

$$(A - BD^dC)^{m+1}X = (A - BD^dC)^m + (A^{m+1}A^d - A^m).$$

Sada je,

$$(A - BD^dC)^{m+1}X = (A - BD^dC)^m,$$

za $m \geq ind(A)$, i sledi (2.62).

Napomenimo da je Y.Wei [97] dokazao (2.62) za $D = I$, te se njegov rezultat dobija kao sledeća posledica Teoreme 2.5.1:

Posledica 2.5.1 [97] *Ako je* $E_AB = 0,\ CE_A = 0,\ BE_ZC = 0,$ *tada važi*

$$(A - BC)^d = A^d + A^dBZ^dCA^d,$$

gde je $Z = I - CA^dB$.

Ako je Z nesingularna matrica, tada iz Teoreme 2.5.1 sledi

Posledica 2.5.2 *Pretpostavimo da je* Z *nesingularna,* $E_AB = 0$, $CE_A = 0$, $BE_DZ^{-1}C = 0$ *i* $BZ^{-1}E_DC = 0$. *Tada je*

$$S^d = A^d + A^dBZ^{-1}CA^d.$$

Ako je $B = I$ onda važi:

Posledica 2.5.3 *Ako je* $CE_A = 0,\ E_AD^d = 0$ *i* $\|A^d\| \cdot \|D^dC\| \leq 1,$ *tada je*

$$(A - D^dC)^d = (I - A^dD^dC)^{-1}A^d = A^d(I - D^dCA^d)^{-1}$$

i

$$(A - D^dC)^d - A^d = (A - D^dC)^dD^dCA^d = A^dD^dC(A - D^dC)^d.$$

Takođe,

$$\frac{\|(A - D^dC)^d - A^d\|}{\|A^d\|} \le \frac{k_D(A)\|D^dC\|/\|A\|}{1 - k_D(A)\|D^dC\|/\|A\|},$$

gde je $k_D(A) = \|A\|\|A^d\|$ *kondicioni broj u odnosu na Drazinov inverz.*

Dokaz: Sledi na osnovu Teoreme 2.5.1 i Posledice 3.2 [99].

Teorema 2.5.2 *Neka je* $BE_DG^dC = 0$, $Z = 0$, $E_AB = 0$, $CE_A = 0$, $BD^dE_GC = 0$, $BG^dE_DC = 0$ *i* $BE_GD^dC = 0$. *Tada je*

$$\begin{aligned} S^d &= (I - KG^dH)A^d(I - KG^dH) \\ &= (I - KH(KH)^d)A^d(I - KH(KH)^d). \end{aligned}$$

Dokaz: Neka je $X = (I - KG^dH)A^d(I - KG^dH)$. Sledi

$$\begin{aligned} SX &= (A - BD^dC)(I - KG^dH)A^d(I - KG^dH) \\ &= (A - BD^dC - BG^dCA^d + BD^dBG^dCA^d) \\ &\quad \times (A^d - (A^d)^2BG^dCA^d) \\ &= (A - BD^dC)(A^d - (A^d)^2BG^dCA^d) \\ &= AA^d - BD^dCA^d - A(A^d)^2BG^dCA^d \\ &\quad + BD^dC(A^d)^2BG^dCA^d \\ &= AA^d - BD^dCA^d - A^dBG^dCA^d + BD^dGG^dCA^d \\ &= AA^d - A^dBG^dCA^d \\ &= AA^d - KG^dH \end{aligned}$$

i $XS = AA^d - KG^dH$, tj. $XS = SX$. Takođe,

$$\begin{aligned} XSX &= (AA^d - KG^dH)(I - KG^dH)A^d(I - KG^dH) \\ &= (AA^d - KG^dH - AA^dKG^d + KG^dHKG^dH) \\ &\quad \times (A^d - A^dKG^dH) \\ &= (AA^d - KG^dH)(A^d - A^dKG^dH) \\ &= (I - KG^dH)AA^dA^d(I - KG^dH) \\ &= X. \end{aligned}$$

Koristeći metod matematičke indukcije, dobijamo da je $(A - BD^dC)^{m+1}X = (A - BD^dC)^m$. Dakle, $S^d = X$.

Ako je $D = I$, dobija se [[97], Theorem 2.2]:

Posledica 2.5.4 *Ako je $Z = 0$, $E_AB = 0$, $CE_A = 0$ i $BE_GC = 0$, tada je*

$$\begin{aligned}(A - BC)^d &= (I - KG^dH)A^d(I - KG^dH)\\ &= (I - KH(KH)^d)A^d(I - KH(KH)^d).\end{aligned}$$

Teorema 2.5.3 *Neka je $ind(Z) = 1$ i $E_AB = 0$, $CE_A = 0$, $BE_D = 0$, $E_DC = 0$, $ZZ^\#G = GZZ^\#$, $BD = DB$, $CD = DC$, $BE_GC = 0$. Tada je*

$$S^d = (I - KE_ZG^dH)A^d(I - KE_ZG^dH) + KZ^\#H. \tag{2.63}$$

Dokaz: Označimo sa X desnu stranu jednakosti (2.63). Važi

$$\begin{aligned}SX &= (A - BD^dC - BE_ZG^dH + BD^dCA^dBE_ZG^dH)\\ &\quad \times A^d(I - KE_ZG^dH) + AKZ^\#H - BD^dCA^dBZ^\#H\\ &= (A - BD^dC - BE_ZG^dH + BD^d(D - Z)E_ZG^dH)\\ &\quad \times A^d(I - KE_ZG^dH) + BZ^\#H - BD^d(D - Z)Z^\#H\\ &= (A - BD^dC)A^d(I - KE_ZG^dH) + BD^dZZ^\#H\\ &= AA^d - KE_ZG^dH - BD^dCA^d + BD^dGG^dE_ZH\\ &\quad + BD^dZZ^\#H\\ &= AA^d - KE_ZG^dH - BD^dE_GCA^d + BD^dE_GZZ^\#CA^d\\ &= AA^d - KE_ZG^dH\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}XS &= (I - KE_ZG^dH)A^d(A - BD^dC - KE_ZG^dC\\ &\quad + KE_ZG^dCA^dBD^dC) + KZ^\#C - KZ^\#CA^dBD^dC\\ &= (I - KE_ZG^dH)A^d(A - BD^dC - KE_ZG^dC\\ &\quad + KE_ZG^d(D - Z)D^dC) + KZ^\#C - KZ^\#(D - Z)D^dC\\ &= (I - KE_ZG^dH)A^d(A - BD^dC) + KZ^\#ZD^dC\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= A^dA - A^dBD^dC - KE_ZG^dH + KE_ZG^dGD^dC \\
&\quad + KZ^{\#}ZD^dC \\
&= A^dA - KG^dE_ZH - A^dBE_GD^dC + KZ^{\#}ZE_GD^dC \\
&= A^dA - KG^dE_ZH.
\end{aligned}$$

Takođe,

$$\begin{aligned}
XSX &= (A^dA - KG^dE_ZH)(I - KE_ZG^dH)A^d \\
&\quad \times (I - KE_ZG^dH) + (A^dA - KG^dE_ZH)KZ^{\#}H \\
&= (A^dA - KG^dE_ZH)A^d(I - KE_ZG^dH) + KZ^{\#}H \\
&= X.
\end{aligned}$$

Indukcijom, sledi

$$(A - BD^dC)^{m+1}X = (A - BD^dC)^m + (A^{m+1}A^d - A^m).$$

Dakle, $(A - BD^dC)^{m+1}X = (A - BD^dC)^m, \quad$ za $m \geq ind(A)$.

Očigledno, za $D = I$, važi sledeći rezultat:

Posledica 2.5.5 *Neka je $E_AB = 0,\ CE_A = 0,\ BE_GC = 0,\ G^dE_Z = E_ZG^d$ i $index(Z) = 1$. Tada je*

$$(A - BC)^d = (I - KE_ZG^dH)A^d(I - KE_ZG^dH) + KZ^{\#}H.$$

2.6 Blok-rang jednačine

U ovoj sekciji istraživana je sledeća blok-rang matrična jednačina po $X \in C^{m\times m}$

$$r\left(\begin{bmatrix} A & B \\ C & X \end{bmatrix}\right) = r(A), \tag{2.64}$$

gde su $A \in C^{n\times n}$, $B \in C^{n\times m}$, $C \in C^{m\times n}$ date matrice.

Dokazani su potrebni i dovoljni uslovi da refleksivni inverz $X = A^r$ matrice A bude rešenje jednačine (2.64) i u tom slučaju nađeni mogući oblici matrica B i C. Kao posledice, dobijeni su rezultati iz radova J. Grosssa [52] i N. Thomea and Y. Weia [91], koji su ujedno i predstavljali glavnu motivaciju za ovo istraživanje. Takođe je razmatran i slučaj kada je Drazinov inverz $X = A^d$ matrice A, rešenje jednačine (2.64), za proizvoljnu matricu A indeksa ind(A) = k ≥ 1.

Izloženi rezultati objavljeni su u radovima [30] i [31].

Dokaz sledeće leme nalazi se u [71], [73], [79].

Lema 2.6.1 *Ako je $A \in C^{n\times n}, B \in C^{n\times m}, C \in C^{m\times n}$ i $X \in C^{m\times m}$, tada je*

$$r\begin{bmatrix} A & B \\ C & X \end{bmatrix} = r(A) + r(L) + r(M) + r(W),$$

gde je $S = I_n - A^-A,\ L = CS,\ M = SB$ i $W = (I_m - LL^-)(X - CA^-B)$ $(I_m - M^-M)$.

Potrebne i dovoljne uslovi za postojanje rešenja jednacine (2.64) dao je J.Gross [52] u smislu određenih geometrijskih uslova.

Teorema 2.6.1 [52] *Za $A \in C^{m\times n}, B \in C^{m\times m}$ i $C \in C^{n\times n}$ postoji rešenje $X \in C^{n\times m}$ jednačine* (2.64) *ako i samo ako je $R(B) \subseteq R(A)$ i $R(C^*) \subseteq R(A^*)$. Ako ovi uslovi važe, tada je $X = CA^\dagger B$ rešenje jednačine* (2.64).

Uslovi $R(B) \subseteq R(A)$ i $R(C^*) \subseteq R(A^*)$ su ekvivalentni uslovima $AA^\dagger B = B$ i $CA^\dagger A = C$. Takođe, proizvod CA^-B je invarijantan u odnosu na izbor generalisanog inverza A^- matrice A ako i samo ako je $R(B) \subseteq R(A)$ i $R(C^*) \subseteq R(A^*)$.

Najpre je dokazan potreban i dovoljan uslov da refleksivni inverz $X = A^r$ matrice A, bude rešenje jednačine (2.64) i u tom slučaju su date eksplicitne forme matrica B i C.

Poznato je da matrica $A \in C_r^{m\times n}$ ima sledeću dekompoziciju:

$$A = P \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q, \tag{2.65}$$

gde su $P \in C^{m\times m}$, $Q \in C^{n\times n}$ i $D \in C^{r\times r}$ invertibilne matrice. Tada je proizvoljan generalisani refleksivni inverz od A dat sa:

$$A^r = Q^{-1} \begin{bmatrix} D^{-1} & U \\ V & VDU \end{bmatrix} P^{-1}, \tag{2.66}$$

gde su U i V proizvoljne matrice odgovarajućih dimenzija.

U sledećoj teoremi sadržani su potrebni i dovoljni uslovi da $X = A^r$ bude rešenje jednačine (2.64).

Teorema 2.6.2 *Neka je $A \in C^{m\times n}$, $B \in C^{m\times m}$, $C \in C^{n\times n}$, $X \in C^{n\times m}$ i matrice A i A^r date sa* (2.65) *i* (2.66)*, redom. Tada je $X = A^r$ rešenje jednačine* (2.64) *ako i samo ako je*

$$B = P \begin{bmatrix} DL & (DLD)U \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1} \quad i \quad C = Q^{-1} \begin{bmatrix} D^{-1}L^{-1} & 0 \\ VL^{-1} & 0 \end{bmatrix} Q, \tag{2.67}$$

za neku nesingularnu matricu $L \in C^{r\times r}$.

Dokaz: Pretpostavimo najpre da je $X = A^r$ rešenje jednačine (2.64). Tada postoje matrice $G \in C^{n\times m}$ i $F \in C^{n\times m}$ tako da je $B = AG$, $C = FA$ i $CA^{(1)}B = A^r$. Neka je

$$QGP = \begin{bmatrix} G_1 & G_2 \\ G_3 & G_4 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad QFP = \begin{bmatrix} F_1 & F_2 \\ F_3 & F_4 \end{bmatrix}.$$

Sledi,

$$B = AG = P \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_1 & G_2 \\ G_3 & G_4 \end{bmatrix} P^{-1} = P \begin{bmatrix} DG_1 & DG_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1} \tag{2.68}$$

i

$$C = FA = Q^{-1} \begin{bmatrix} F_1 & F_2 \\ F_3 & F_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q = Q^{-1} \begin{bmatrix} F_1 D & 0 \\ F_3 D & 0 \end{bmatrix} Q. \tag{2.69}$$

Takođe,

$$A^r = FAG = Q^{-1} \begin{bmatrix} F_1 DG_1 & F_1 DG_2 \\ F_3 DG_1 & F_3 DG_2 \end{bmatrix} P^{-1}.$$

Na osnovu (2.66) sledi da je

$$F_1 DG_1 = D^{-1}, \quad F_1 DG_2 = U \quad \text{i} \quad F_3 DG_1 = V.$$

Iz prve jednačine sledi da su F_1 i G_1 invertibilne matrice i $F_1 D = D^{-1} G_1^{-1}$. Važi da je $DG_2 = F_1^{-1} U = DG_1 DU$ i $F_3 D = V G_1^{-1}$. Zamenom u (2.68) i (2.69) za $G_1 = L$, proizilazi (2.67).

Sa druge strane, pretpostavimo da (2.67) važi. Tada je $AA^{(1)}B = B$ i $C = CA^{(1)}A$, ako je $A^{(1)}$ unutrašnji generalisani inverz od A, dat sa

$$A^{(1)} = Q^{-1} \begin{bmatrix} D^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1}.$$

Sada, na osnovu Teoreme 2.6.1, postoji rešenje $X = CA^{(1)}B$ jednačine (2.64). Koristeći (2.67), jednostavno sledi da je $X = CA^{(1)}B = A^r$.

U specialnom slučaju $U = V = 0$, refleksivni inverz matrice A jeste

$$A^r = Q^{-1} \begin{bmatrix} D^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1}. \tag{2.70}$$

Posledica Teoreme 2.6.2 jeste rezultat [Theorem 3, [91]],

Posledica 2.6.1 *[91] Neka je $A \in C^{m\times n}$, $B \in C^{m\times m}$ $C \in C^{n\times n}$, $X \in C^{n\times m}$ i matrice A i A^r date sa* (2.65) *i* (2.70)*, redom. Tada je $X = A^r$ rešenje jednačine* (2.64) *ako i samo ako je*

$$B = P \begin{bmatrix} DL & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1} \quad i \quad C = Q^{-1} \begin{bmatrix} D^{-1}L^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q, \tag{2.71}$$

za neku nesingularnu matricu $L \in C^{r\times r}$.

Neka je data sledeća singilarna dekompozicija matrice $A \in C_r^{m\times n}$:

$$A = M \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} N^*, \tag{2.72}$$

gde su $M \in C^{m\times m}$ i $N \in C^{n\times n}$ unitarne, a $D \in C^{r\times r}$ realna pozitivno definitna dijagonalna matrica. Na osnovu Teoreme 2.6.2 sledi rezultat iz [[52], Theorem 2].

Posledica 2.6.2 *[52] Neka je matrica $A \in C^{m\times n}$ data sa* (2.72) *i $B \in C^{m\times m}$, $C \in C^{n\times n}$, $X \in C^{n\times m}$. Tada, $X = A^\dagger$ je rešenje jednačine* (2.64) *ako i samo ako je*

$$B = M \begin{bmatrix} DL & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} M^* \quad i \quad C = N \begin{bmatrix} D^{-1}L^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} N^*, \tag{2.73}$$

za neku nesingularnu matricu $L \in C^{r\times r}$.

Dokaz: Zamenom $P = M$ i $Q = N^*$ u (2.65), sledi da matrica A ima reprezentaciju (2.72) i u tom slučaju $A^\dagger = N \begin{bmatrix} D^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} M^*$ je oblika (2.70). Dakle, rezultat sledi na osnovu Posledice 2.6.1.

Obzirom da su pretpostavljeni potrebni i dovoljni uslovi da refleksivni i Moore-Penroseov inverz matrice A budu rešenja jednačine (2.64), nameće se pitanje:

Kada je $X = A^d$ rešenje jednačine (2.64)?

Najpre, pretpostavimo da je $A \in C_r^{n\times n}$ i da je ind(A) = 1. U ovom slučaju postoje nesingularne matrice $P \in C^{n\times n}$ i $D \in C^{r\times r}$ tako da je

$$A = P \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1}. \tag{2.74}$$

Važi sledeći rezultat:

Teorema 2.6.3 *Neka je matrica* $A \in C_r^{n\times n}$ (ind(A) = 1) *data sa* (2.74) *i neka su* $B, C, X \in C^{n\times n}$. *Tada je* $X = A^{\#}$ *rešenje jednačine* (2.64) *ako i samo ako je*

$$B = P \begin{bmatrix} DL & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1} \quad i \quad C = P \begin{bmatrix} D^{-1}L^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1}, \tag{2.75}$$

za neku nesingularnu matricu $L \in C^{r\times r}$.

Dokaz: Za ovako datu matricu A, važi da je

$$A^{\#} = P \begin{bmatrix} D^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1},$$

te rezultat sledi neposredno na osnovu Posledice 2.6.1, pod pretpostavkom $Q = P^{-1}$.

Ova teorema predstavlja glavni rezultat rada N.Thomea and Y. Weia [[91], Theorem 2]. U ovoj disertaciji isti rezultat je posledica, dokazana kraće i jednostavnije.

Nadalje je razmatran opštiji slučaj za matricu $A \in C_r^{n\times n}$ indeksa ind(A) = k ≥ 1. Matrica A predstavljena je u sledećem obliku:

$$A = P^{-1} \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} P, \tag{2.76}$$

gde su $P \in C^{n\times n}, M \in C^{r\times r}$ nesingularne matrice, a $N \in C^{(n-r)\times(n-r)}$ je nilpotentna matrica za koju je $N^k = 0$. Takođe,

$$A^d = P^{-1} \begin{bmatrix} M^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P.$$

Dokazan je naredni rezultat:

Teorema 2.6.4 *Neka je* $A \in C_r^{n\times n}$ (ind(A) = k) *data sa* (2.76) *i* $B, C, X \in C^{n\times n}$. *Tada,* $X = A^d$ *je rešenje jednačine* (2.64) *ako i samo ako postoje matrice* $G_1, F_1 \in C^{r\times r}$, $G_2, F_2 \in C^{r\times(n-r)}$, $G_3, F_3 \in C^{(n-r)\times r}$ *i* $G_4, F_4 \in C^{(n-r)\times(n-r)}$ *tako da je*

$$B = P^{-1} \begin{bmatrix} MG_1 & MG_2 \\ NG_3 & NG_4 \end{bmatrix} P \quad i \quad C = P^{-1} \begin{bmatrix} F_1M & F_2N \\ F_3M & F_4N \end{bmatrix} P \tag{2.77}$$

$$
i \qquad \begin{aligned}
F_1MG_1 + F_2NG_3 &= M^{-1}, \\
F_1MG_2 + F_2NG_4 &= 0, \\
F_3MG_1 + F_4NG_3 &= 0, \\
F_3MG_2 + F_4NG_4 &= 0.
\end{aligned} \tag{2.78}
$$

Dokaz: Pretpostavimo da je $X = A^d$ rešenje jednačine (2.64). Na osnovu Teoreme 2.6.1 sledi da je $R(B) \subseteq R(A)$ i $R(C^*) \subseteq R(A^*)$, pa postoje matrice G i F tako da je $B = AG$ i $C = FA$ i $A^d = CA^\dagger B$. Neka je

$$
PGP^{-1} = \begin{bmatrix} G_1 & G_2 \\ G_3 & G_4 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad PFP^{-1} = \begin{bmatrix} F_1 & F_2 \\ F_3 & F_4 \end{bmatrix}.
$$

Sada je

$$
B = P^{-1} \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_1 & G_2 \\ G_3 & G_4 \end{bmatrix} P = P^{-1} \begin{bmatrix} MG_1 & MG_2 \\ NG_3 & NG_4 \end{bmatrix} P
$$

i

$$
C = P^{-1} \begin{bmatrix} F_1 & F_2 \\ F_3 & F_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} P = P^{-1} \begin{bmatrix} F_1M & F_2N \\ F_3M & F_4N \end{bmatrix} P.
$$

Kako je matrica A data sa (2.76), važi

$$
A^d = P^{-1} \begin{bmatrix} M^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P \quad \text{i} \quad A^\dagger = P^{-1} \begin{bmatrix} M^{-1} & 0 \\ 0 & N^\dagger \end{bmatrix} P.
$$

Dakle,

$$
\begin{aligned}
A^d &= P^{-1} \begin{bmatrix} M^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P \\
&= P^{-1} \begin{bmatrix} F_1M & F_2N \\ F_3M & F_4N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M^{-1} & 0 \\ 0 & N^\dagger \end{bmatrix} \begin{bmatrix} MG_1 & MG_2 \\ NG_3 & NG_4 \end{bmatrix} P \\
&= P^{-1} \begin{bmatrix} F_1MG_1 + F_2NG_3 & F_1MG_2 + F_2NG_4 \\ F_3MG_1 + F_4NG_3 & F_3MG_2 + F_4NG_4 \end{bmatrix} P,
\end{aligned}
$$

i na osnovu prethodnog sledi sistem matričnih jednačina

$$
\begin{aligned}
&F_1MG_1 + F_2NG_3 = M^{-1},\\
&F_1MG_2 + F_2NG_4 = 0,\\
&F_3MG_1 + F_4NG_3 = 0,\\
&F_3MG_2 + F_4NG_4 = 0.
\end{aligned}
$$

Obratno, pretpostavimo da su matrice B i C date sa (2.77). Lako je proveriti da je $AA^{\dagger}B = B$ i $C = CA^{\dagger}A$. Na osnovu Teoreme 2.6.1 proizilazi da je $X = CA^{\dagger}B$ rešenje jednačine (2.64). Iz sistema (2.78) sledi da je $CA^{\dagger}B = A^d$, te je $X = A^d$ rešenje jednačine (2.64).

Teorema 2.6.4 je uopštenje Teoreme 2.6.3.

Na kraju, dokazan je sledeći rezultat.

Teorema 2.6.5 *Neka je* $A \in C^{n\times n}$ (ind(A) = k) *data sa* (2.76) *i neka su* p, m, n *pozitivni celi brojevi takvi da je* $m, n \geq k$. *Tada je* $X = A^d$ *rešenje jednačine*

$$
r\begin{bmatrix} A^p & A^n \\ A^m & X \end{bmatrix} = r(A^p), \tag{2.79}
$$

ako i samo ako je $M^{m+n-p} = M^{-1}$.

Dokaz: Pretpostavimo da je $X = A^d$ rešenje jednačine (2.79). Tada je $A^d = A^m(A^p)^{(1)}A^n$, tj.

$$
\begin{aligned}
P^{-1}\begin{bmatrix} M^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}P &= P^{-1}\begin{bmatrix} M^m & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} M^{-p} & 0 \\ 0 & (N^p)^{(1)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} M^n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}P\\
&= P^{-1}\begin{bmatrix} M^{(m+n-p)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}P.
\end{aligned}
$$

Dakle, $M^{m+n-p} = M^{-1}$.

Sa druge strane, pretpostavimo da je $M^{m+n-p} = M^{-1}$. Dokazaćemo da postoji rešenje jednačine (2.79), što je ekvivalentno sa $R(A^n) \subseteq R(A^p)$ i $N(A^p) \subseteq N(A^m)$.

Ako je $y \in R(A^n)$, tada postoji x tako da je $y = A^n x$, tj.

$$y = P^{-1} \begin{bmatrix} M^n z_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{gde je} \quad Px = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}.$$

Kako je

$$y = P^{-1} \begin{bmatrix} M^p & 0 \\ 0 & N^p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M^{(p-n)} z_1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

sledi da je $y = A^p x'$, za $x' = P^{-1} \begin{bmatrix} M^{(p-n)} z_1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Dakle, $R(A^n) \subseteq R(A^p)$. Analogno se dokazuje da je $N(A^p) \subseteq N(A^m)$. Koristeći izračunavanje iz prvog dela dokaza, proizilazi da je $X = A^d$ rešenje jednačine (2.79).

Tvrđenje Teoreme 2.6.5 važi ako se n i m zamene sa $f(n)$ i $g(m)$, gde su f i g proizvoljne pozitivne funkcije.

Neposredne posledice prethodne teoreme jesu sledeći rezultati.

Posledica 2.6.3 *Neka je* $A \in C^{n\times n}$ (ind(A) = k) *data sa* (2.76) *i neka su* p, m, n *pozitivni celi brojevi takvi da je* $m, n \geq k$ *i* $m + n = p - 1$. *Tada je* $X = A^d$ *rešenje jednačine* (2.79).

Posledica 2.6.4 *Ako je* $A \in C^{n\times n}$, *tada je*

$$r\left(\begin{bmatrix} A^{(2l+1)} & A^l \\ A^l & A^d \end{bmatrix}\right) = r(A^{(2l+1)}),$$

gde je $l \geq ind(A)$ *proizvoljan ceo broj.*

Posledica 2.6.5 *Neka je* $A \in C^{n\times n}$ *i* $ind(A) = 1$. *Tada važi*

$$r\left(\begin{bmatrix} A^3 & A \\ A & A^{\#} \end{bmatrix}\right) = r(A^3).$$

Glava 3

Dodatak

U ovom poglavlju izloženi su radovi u svom originalnom obliku, koji su prihvaćeni za publikovanje sa izveštajima recezenata, kao i oni koji su poslati u odgovarajuće matematičke časopise i čije se recenzije očekuju.

Literatura

[1] A. Albert, *Conditions for positive i nonnegative definiteness in terms of pseudoinverses*, SIAM J. Appl. Math. **17** (2) (1969), 434–440.

[2] W.N. Anderson Jr., *Shorted operators*, SIAM J. Appl. Math. **20** (1971), 520–525.

[3] W.N. Anderson Jr. and G.E. Trapp, *Shorted operatorsII*, SIAM J. Appl. Math. **28** (1975), 60–71.

[4] T. Ando, *Concavity of certain maps on positive definite matrices and applications to Hadamard products*, Linear Algebra Appl. **26** (1979), 203–241.

[5] T. Ando, *Generalized Schur complement*, Linear Algebra Appl. **27** (1979), 173–186.

[6] W.N.Andruchow, G.Corach, D.Stojanoff, *Geometry of oblique projections*, Studia Math. **137** (1) (1999), 61–79.

[7] J.K.Baksalary, G.P.H.Styan, *Generalized inverses of partitioned matrices in Banachiewicz-Schur form* , Linear Algebra Appl. **354**, (2002), 41–47.

[8] T.Banachiewicz, *Zur Berechnung der Determinanten, wie auch der Inverzn und zur darauf basierten Auflosung der Systeme linearer Gleichungen*, Acta Astronom.Ser. C **3**, (1937), 41–67.

[9] A. Ben-Israel and T.N.E. Greville, *Generalized inverses: Theory and Applications*, Springer-Verlag, New York, 2003.

[10] B. Blackadar, *K-Theory for Operator Algebras*, 2nd edition, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

[11] R. H.Bouldin, *The pseudo-inverse of a product*, *SIAM J. Appl. Math.* **25** (1973), 489–495.

[12] R. H. Bouldin, *Generalized inverses i factorizations*, *Recent Applications of Generalized Inverzs*, Pitman Ser. Res. Notes in Math. No. 66 (1982), 233–248.

[13] T. L. Boullion and P. L. Odell, *Generalized Inverses Matrices*, Wiley-Interscience, New York, 1971.

[14] L. G. Brown i G. K. Pedersen, *C^*-algebras of real rank zero*, J. Funct. Anal. 99 (1991), 131–149.

[15] R. Bru, N. Thome, *Group inverse and group involutory matrices*, Lin. Multilin. Alg. 45 (2-3) (1998), 207–218

[16] C.A.Butler, T.D.Morley, *A note on the shorted operator*, SIAM J.Matrix Anal. Appl. **9**, (1988), 147–155.

[17] S. L. Campbell and C. D. Meyer, *Generalized inverses of Linear Transformations*, Pitman, New York, 1979.

[18] S. R. Caradus, *Generalized Inverses and Operator Theory*, Queen's paper in pure and applied mathematics, Quenn's University, Kingston, Ontario, (1978)

[19] D. Carlson, *What are Schur complement, anyway?*, Linear Algebra Appl. **74** (1986), 257–275.

[20] D. Carlson, E. Haynsworth and T. Markham, *A generalization of the Schur complement by means of the Moore-Penrose inverse*, SIAM J. Appl. Math. **26** (1974), 169–176.

[21] C.K Li and R. Mathias, *Extremal Characterization of the Schur komplement and Resulting Inequalities*, SIAM Rev. **42** (2000), 233–246.

[22] J. S. Chipman, *On least squares with insufficient observation*, J. Amer. Statist. Assoc. **54** (1964), 1078–1111.

[23] D. J. Clements and H.K. Wimmer, *Monotonicity of the Optimal Cost in the Discrete-time Regulator Problem and Schur complement*, Automatica, **37** (2001), 1779–1786.

[24] G.Corach, A. Maestripieri and D. Stojanoff, *Oblique projections and Schur complement*, Acta Sci. Math. (Szeged) **67** (2001), 439–459.

[25] G. Corach, A.Maestripieri and D.Stojanoff, *Generalized Schur complements and oblique projections*, Linear Algebra Appl. **341** (2002), 259–272.

[26] G. Corach, A. Maestripieri and D. Stojanoff, *Oblique projections and abstract splines*, Jour.Approx. Theory **117** 2 (2002), 189–206.

[27] R. W. Cottle,*Manifestation of the Schur complement*, Linear Algebra Appl. **8** (1974), 189–211.

[28] D. S. Cvetkovic, *On gaps between bounded operators*, Publ. Math. Inst. (Belgrade),**72** (86) (2002), 49–54.

[29] D. S. Cvetković, D. S.Djorđević and V. Rakočević, *Schur complement in C^*- algebras*, Mathematische Nachrichten, (u štampi).

[30] D. S. Cvetkovic, *Generalized inverses and a block-rank equation*, Publ. Math. Debrecen, (u štampi).

[31] D. S. Cvetkovic, *A note on the problem of N. Thome and Y. Wei*, Appl. Math. Comp. (u štampi).

[32] D. S. Cvetkovic and D. S. Djorđević, *A note on the Drazin inverse of a modified matrix*, (poslat).

[33] D. S. Cvetkovic, D. S. Djorđević and Y.Wei, *Additive results for the generalized Drazin inverse in a Banach algebra*, (poslat).

[34] D. S. Cvetkovic and B. Zheng, *Weighted generalized inverses of partitioned matrices in Banachiewicz-Schur form*, (poslat).

[35] A. R. De Pierro and M. Wei, *Reverse order law for the generalized inverz of products of matrices*, Linear Algebra Appl. **277** (1-3) (1998), 299–311.

[36] D. S. Djorđević and D. S. Cvetkovic, *Explicit solutions of the operator equation $AXB = C$*, (poslat).

[37] D. S. Djordjević, *Unified approach to the reverse order rule for generalized inverzs*, Acta Sci. Math. (Szeged) **l67** (2001), 761–776.

[38] D. S. Djordjević, and P. S. Stanimirovic,*On the generalized Drazin inverse and generalized resolvent*, Czechoslovak Math. J. **51** (126) (2001), 617–634 .

[39] D. S. Djordjević and Y. Wei,*Additive results for the generalized Drazin inverse*, J. Australian Math. Soc. **72** (2002), 1-11.

[40] D. S. Djordjević and Y. Wei, *Operators with equal projections related to their generalized inverses*, Appl. Math. Comput. (to appear).

[41] D. S. Djordjević and P. S. Stanimirovic, *Iterative methods for computing generalized inverses related with optimisation methods*, J. Australian Math. Soc. (to appear).

[42] R. G. Douglas, *Banach algebra techniques in the operator theory*, Academic Press, New York, (1972).

[43] R.G.Douglas, *On majorization, factorization and range inclusion of operators in Hilbert spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **17** (1966), 413–416.

[44] R.J. Duffin and G.E. Trapp, *Hybrid addition of matrices-A network theory concept*, Appl. Anal. **2** (1972), 241–254.

[45] W.J.Duncan, *Some devicesfor the solution of large sets of simultaneous linear equations(with an appendix on the reciprocation of partitioned matrices)*, The London, Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, Seventh Series, **35**, (1944), 660–670.

[46] M. Ferniez-Miria i J.-Ph. Labrousse,*Moore–Penrose inverses and finite range elements in a C^*-algebra*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. **45** (2000), 609-630.

[47] L.A.Fialkow and H.Salas, *Majorization, factorization and systems of linear operator equations*, Math. Balkanica, **4** (1990), 22–34.

[48] P.A.Filmore and J.P.Williams, *On operator ranges*, Adv. Math. **7** (1971), 254–281.

[49] N. Castro Gonzalez and J. J. Koliha, *New additive results for the g-Drazin inverse*, Proc. R. Soc. Edinb. (u štampi).

[50] T. N. E. Greville, *Note on the generalized inverse of a matrix product*, SIAM Rev. **8** (1966), 518–521.

[51] J. Gross, *Solution to a rank equation*, Linear Algebra Appl. 289 (1999), 127–130.

[52] J.Gross, *Explicit solutions to the matrix inverse problem* $AX = B$, Linear Algebra Appl. 289 (1999), 131–134.

[53] W. Guorong and W. Yimin, *Limiting expression for generalized inverse* $A^{(2)}_{T,S}$ *and its corresponding projectors*, Numerical Mathematics (A Journal of Chinese Universities) **4** (1) (1995), 25–30

[54] L.Guttman, *Anlargement methods for computing the inverse matrix*, Ann. Math. Statist. **17** (1946), 336–343.

[55] R. E. Harte, *Spectral projections*, Irish Math. Soc. Newsletter **11** (1984), 10–15.

[56] R. E. Harte, *Invertibility i Singularity for Bounded Linear Operators*, New York, Marcel Dekker, (1988).

[57] R. E. Harte, *On quasinilpotents in rings*, PanAm. Math. J. **1** (1991), 10–16.

[58] R. E. Harte and M. Mbekhta, *On generalized inverses in* C^**-algebras*, Studia Math. **103** (1992), 71–77.

[59] R. E. Harte and M. Mbekhta, *On generalized inverses in* C^**-algebras II* , Studia Math. **106** (1993), 129–138.

[60] R. E. Hartwig, *The reverse order law revisited*, Linear Algebra Appl. **76** (1986), 241–246.

[61] E. Haynsworth, *Determination of the inertia of a partitioned Hermitian matrix*, Linear Algebra Appl. **1** (1968), 73–81.

[62] H. G. Heuser, *Functional analysis*, John Wiley and Sons, Chichester, New York, Brisbane, Toronto, Singapore (1982).

[63] S.Izumino, *The product of operators with closed range and an extension of the reverse order law*, Tohoku Math. J. **34** (1982), 43–52.

[64] J. A. Jeong i H. Osaka, *Extremally rich C^*-crossed products and the cancellation property*, J. Austral. Math. Soc. Ser. A **64** (1998), 285–301.

[65] J. J. Koliha, *A generalized Drazin inverse*, Glasgow Math. J. **38** (1996), 367–381.

[66] J.J. Koliha, *The Drazin and Moore-Penrose inverse in C^*- algebras*, Math. Proc. R. Ir. Acad. **99A (1)** (1999), 17–27.

[67] J.J. Koliha, *Range projections of idempotents in C^*-algebras*, Demonstr. Math. **34** (No.1) (2001), 91-103.

[68] J. J. Koliha, D. S. Djorđević and D. S. Cvetkovic, *Moore–Penrose inverse in rings with involution* (poslat na recenziju u Stud. Math.).

[69] J. J. Koliha and P. Patrício, *Elements of rings with equal spectral idempotents*, J. Australian Math. Soc. **72** (2002), 137–152.

[70] M.G.Krein, *The theory of self-adjoint extensions of semibounded Hermitian operators and its applications*, Math. Sb. (N.S.) 20 **62**(1947), 431–495.

[71] G.Marsaglia, G.P.H.Styan, *Rank conditions for generalized inverzs of partitioned matrices*, Sankhya Ser.A **36**, (1974), 437–442.

[72] G.Marsaglia, G.P.H.Styan, *Equalities and inequalities for ranks of matrices*, Lin. Multilin. Alg. 2 (1974), 269–292.

[73] C. D. Meyer Jr, *Generalized inverses and ranks of block matrices*, SIAM Journal on Applied Mathematics 25 (1973), 597–602.

[74] C. D. Meyer, Jr. and N. J. Rose, *The index and the Drazin inverse of block triangular matrices*, SIAM J. App. Math. **33** 1 (1977), 1–7.

[75] M. Z. Nashed, *Generalized inverses and applications*, Academic Press, New York (1976).

[76] M. Z. Nashed, *Inner, outer and generalized inverse in Banach and Hilbert spaces*, Numer. Funct. Anal. Optim. **9** (1987), 261–325.

[77] R.Penrose, *A generalized inverses for matrices*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **51** (1955), 406–413.

[78] K. M. Prasad and R. B. Bapat, *The generalized Moore–Penrose inverses*, Linear Algebra Appl. **165** (1992), 59–69.

[79] D. V. Quellette, *Schur complements and statistics*, Linear Algebra Appl. **36** (1981), 187–295.

[80] V. Rakočević, *Funkcionalna analiza*, Naučna kniga, Beograd (1994).

[81] V. Rakočević, *A note on regular elements in Calkin algebras*, Collect. Math. **43** (1) (1992), 37–42.

[82] V. Rakočević, *Moore-Penrose inverse in Banach algebras*, Proc.R.Ir. Acad **88 A** (1988), 57–60.

[83] V. Rakočević and Yimin Wei, *The perturbation theory for the Drazin inverse and its applications II*, J. Austr. Math. Soc., **70** (2) (2001), 189–197.

[84] V. Rakočević and Yimin Wei, *The representation and approximation for the W-weighted Drazin inverse of linear operators in Hilbert space*, Appl. Math. Comput., **141** (2003), 455–470.

[85] V. Rakočević and Yimin Wei, *A weighted Drazin inverse and applications*, Linear Algebra App., **350** (2002), 25-39.

[86] K. P. S. B. Rao, *The Theory of Generalized Inverses Over Commutative Rings*, Taylor i Francis, London, 2002.

[87] M. Schechter, *Principles of functional analysis* Academic Press, New York (1973).

[88] I. Schur, *Uber Potenzreihen die in Innern des Einheitskrjees Beschrankt Sind*, J. Reine Angew. Math. **147** (1917), 205–232.

[89] W. Sun i Y. Wei, *Inverse order rule for weighted generalized inverses*, SIAM J. Matrix Anal. Appl. **19** (1998), 772–775.

[90] W. Sun and Y. Wei, *Triple reverse-order law for weighted generalized inverses*, Appl. Math. Comput., 125(2-3) (2001), 221–229.

[91] N. Thome and Y. Wei, *Generalized inverses and a block-rank equation*, Appl. Math. Comput. 141 (2003), 471–476.

[92] Y. Tian, *Reverse order laws for the generalized inverses of multiple matrix products. Generalized inverses*, Linear Algebra Appl. **211** (1994), 85–100.

[93] B. Y. Wang, X. Zhang, F. Zhang, *Some inequalities on generalized Schur complement*, Linear Algebra Appl. **302-303** (1999), 163–172.

[94] G. Wang, Y. Wei and S. Qiao, *Generalized Inverses: Theory and Computation*, Science Press, (2004).

[95] M. Wei, *Reverse order laws for generalized inverses of multiple matrix products*, Linear Algebra Appl. **293** (1999), 273–288.

[96] Y. Wei, *Expressions for the Drazin inverse of a* 2×2 *Block Matrix*, Linear and Multilinear Algebra **45**, (1998), 131–146.

[97] Y. Wei, *The Drazin inverse of a modified matrix*, Appl.Math.Comput. **125**, (2002), 295–301.

[98] Y. Wei, *A characterization and representation of the Drazin inverse*, SIAM J. Matrix. Anal. Appl., 17 (1996), 744–747.

[99] Y. Wei, G. Wang *The perturbation theory for the Drazin inverse and its applications*, Linear Algebra Appl. **258**, (1997), 179–186.

[100] Y. Wei, D. S. Djordjevic and P. S. Stanimirovic, *The representation and approximation of outer generalized inverses*, Acta Math. Hungarica (u štampi).

[101] Y. Wei and D. S. Djordjevic, *On integral representation of the generalized inverse* $A^{(2)}_{T,S}$, Applied Math. Comput. (2002).

[102] H.J.Werner, *When* B^-A^- *is a generalized inverse of* AB*?*, Linear Algebra Appl. **210** (1994), 255–263.

[103] L.Wu, *The Re-positive definite solutions to the matrix inverse problem* $AX = B$, Linear Algebra Appl. 174 (1992), 145–151.

[104] L.Wu and B.Cain, *The Re-nonnegative definite solutions to the matrix inverse problem* $AX = B$, Linear Algebra Appl. 236 (1996), 137–146.

Indeks