UNIVERZITET U NIŠU
PRIRODNO–MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU

Jasmina S. Đorđević

BACKWARD STOHASTIČKE DIFERENCIJALNE JEDNAČINE SA PERTURBACIJAMA

Doktorska disertacija

Mentor
Prof. dr Svetlana V. Janković

Niš, 2013.

Predgovor

U doktorskoj disertaciji *Backward stohastičke diferencijalne jednačine sa perturbacijama* proučavaju se neki tipovi backward stohastičkih diferencijalnih jednačina, čiji se koeficijenti perturbuju na različite načine. Pored ostalog, upoređuju se rešenja perturbovanih i neperturbovanih jednačina i ocenjuje se njihova razlika u L^p smislu.

Za razliku od forward stohastičkih diferencijalnih jednačina koje karakteriše početni uslov, za backward stohastičke diferencijalne jednačine se vezuje pojam finalnog uslova, tj. uslova koji mora da zadovolji rešenje – proces stanja sistema, na kraju vremenskog intervala. Zbog toga ove jednačine, pored procesa stanja sadrže i kontrolni proces, koji dovodi proces stanja do ispunjenja finalnog uslova.

Backward stohastičke diferencijalne jednačine privlače veliku pažnju u stohastičkoj analizi u poslednjih dvadesetak godina. Pardoux i Peng (1990) su dokazali egzistenciju i jedinstvenost adaptiranog rešenja backward stohastičke difencijalne jednačine ako koeficijenti drifta i difuzije zadovoljavaju uniformni Lipschitzov uslov. Mao (1995) je proširio ovaj rezultat u slučaju da koeficijenti drifta i difuzije zadovoljavaju neke nelipšicovske uslove. Osim toga, Pardoux i Peng (1992) su uspostavili vezu između rešenja određene klase stohastičkih kvazilinearnih paraboličnih parcijalnih diferencijalnih jednačina drugog reda i rešenja backward stohastičkih diferencijalnih jednačina, tj. izveli su Feynman-Kac formulu.

Backward stohastičke diferencijalne jednačine imaju veliku primenu u teoriji stohastičke kontrole i stohastičkih igara (Hamedène 2003, Hamedène i Lepeltier 1995), ekonomiji i problemima vezanim za matematičko modeliranje u finansijama (El Karoui 1997, El Karoui i Quenez 1997). U finansijama i osiguranju, vrednost finansijskog ugovora se modelira rešenjima linearnih backward stohastičkih diferencijalnih jednačina. Odatle i potiče veliko interesovanje za razvojem teorije ovih jednačina i njihovom primenom u praksi.

Egzistencija i jedinstvenost, kao i neka kvalitativna svojstva rešenja backward stohastičkih diferencijalnih jednačina uglavnom su ranije razmatrani. Međutim, zanimljivo je ponašanje procesa stanja i kontrolnog procesa kada se koeficijenti drifta i difuzije perturbuju. U ovoj disertaciji, za backward doubly stohastičke diferencijalne jednačine su dokazane egzistencija i jedinstvenost rešenja kada je kontrolnom procesu u forward stohastičkom integralu Itôa dodata funkcija koja zavisi od procesa stanja, odnosno razmatran je aditivni tip perturbacija. Glavna ideja u ovoj disertaciji je šira slika ovog problema, tj. uticaj kako aditivnih i linearnih tako i opštih funkcionalnih perturbacija na neke složenije tipove backward stohastičkih diferencijalnih jednačina, kao i ponašanje rešenja jednačina kada te perturbacije zavise od malog parametra.

Disertacija se sastoji iz pet glava u kojima su izložene teorijske postavke i novi rezultati o posmatranim problemima.

Prva glava je uvodnog karaktera i u njoj su navedeni osnovni pojmovi i rezultati teorije stohastičkih procesa, stohastičkih diferencijalnih jednačina, kao i neke nejednakosti koje se koriste u disertaciji.

U drugoj glavi disertacije, najpre su navedena tvrđenja egzistencije i jedinstvenosti rešenja homogene i nehomogene backward stohastičke diferencijalne jednačine, teoreme upoređivanja rešenja i veza rešenja ovih jednačina sa rešenjima odgovarajućih stohastičkih parcijalnih diferencijalnih jednačina, tj. Feynman-Kac formula. Novi rezultati se odnose na klasu backward stohastičkih diferencijalnih jednačina sa aditivno perturbovanim koeficijentima zavisnim od malog parametra. Rešenja ovih jednačina se upoređuju u smislu L^p-norme sa rešenjima odgovarajućih neperturbovanih jednačina istog tipa. Preciznije, pokazuje se da se za proizvoljno $\eta > 0$ može odrediti interval $[t(\eta), T] \subset [0, T]$ na kome je razlika rešenja perturbovane i neperturbovane jednačine manja od η u L^p-smislu. Nasuprot analognim problemima za forward stohastičke diferencijalne jednačine, za ovu ocenu razlike rešenja je korišćen potpuno drugačiji pristup, uslovljen samom postavkom backward stohastičkih diferencijalnih jednačina. Rezultati ovog dela desertacije se zasnivaju na originalnim naučnim rezultatima objavljenim u radu [63], S. Janković, M. Jovanović, J. Đorđević, *Perturbed backward stochastic differential equations*, Mathematical and Computer Modelling 55 (2012) 1734-1745. U drugom delu ove glave je data veza između rešenja homogene i nehomogene backward stohastičke Volterra integralne jednačine specijalnog tipa, gde se nehomogenost tretira kao perturbacija. Novi rezultati su sastavni deo rada [26], J. Djordjević, S. Janković, *Relations between solutions of some classes of backward stochastic Volterra integral equations*, predatog za štampu.

Treća glava se odnosi na egzistenciju, jedinstvenost i neke osobine rešenja nove klase jednačina – nehomogenih backward doubly stohastičkih diferencijalnih jednačina, koje do sada nisu razmatrane u literaturi. Izloženi su već postojeći rezultati egzistencije i jedinstvnosti rešenja homogene backward doubly stohastičke diferencijalne jednačine, kada koficijenti jednačine zadovoljavaju Lipschitzov uslov i posebno za neke nelipšicovske, integralne uslove. Postavljene su i dokazane teoreme egzistencije i jedinstvenosti rešenja backward doubly stohastičke diferencijalne jednačine sa dodatom funkcijom kontrolnom procesu u forward stohastičkom integralu Itôa, koja se može tretirati kao perturbacija. Motiv za ovakvo proširenje klase backward doubly stohastičkih diferencijalnih jednačina je upravo mogućnost perturbovanja svih koeficijenata ovih jednačina. U literaturi se ovakav tip jednačina prvi put javlja u radu [62], S. Janković, J. Đorđević, M. Jovanović, *On a class of backward doubly stochastic differential equations*, Applied Mathematics and Computation, 217 (2011), 8754-8764. Rezultati iz navedenog rada sastavni su deo ovog dela disertacije. Preciznije, rešenje nehomogene jednačine se može opisati pomoću rešenja pridružene backward doubly stohastičke diferencijalne jednačine sa neperturbovanim koeficijentom uz forward stohastički integral Itôa i sa odgovarajuće transliranim trećim argumentom. Problem je rešavan kada koeficijenti jednačina zadovoljavaju Lipschitzov uslov, kao i nelipšicovske integralne uslove. Teoreme upoređivanja rešenja u oba slučaja, kao i veza rešenja sa rešenjem pridružene kvazilinearne stohastičke parcijalne diferencijalne jednačine, tj. jedan oblik Feynman-Kac formule za nehomogeni tip backward doubly stohastičke diferencijalne jednačine, takođe predstavljaju nove rezultate u ovoj disertaciji.

U četvrtoj glavi je opisan problem perturbovane backward doubly stohastičke diferencijalne jednačine u kojoj su linearno perturbovani finalni uslov, drift koeficijent, koeficijenti uz forward i backward stohastičke integrale. Problem je razmatran kada koeficijenti jednačine zadovoljavaju neke nelipšicovske uslove. Razmatrana je srednjekvadratna razlika rešenja i L^p-razlika rešenja, $p > 2$ perturbovane i neperturbovane jednačine pri različitim uslovima za koeficijente ovih jednačina. U oba slučaja su ocenjeni vremenski intervali u kojima rešenja zadržavaju zadatu bliskost. Planira se objavljivanje još dva rada na ovu temu koji bi sadržali nove rezultate iz ove glave.

U petoj glavi se razmatraju perturbovane backward stohastičke diferencijalne jednačine sa barijerom. Najpre su navedeni već postojeći rezultati egzistencije i jednistvenosti rešenja iz L^p-prostora, za $p \in]1,2[$. Novi rezultati se odnose na upoređivanje u L^p-smislu rešenja perturbovane i odgovarajuće neperturbovane jednačine sa funkcionalnim perturbacijama, kao i na nalaženje vremenskog intervala u kome rešenja perturbovane i neperturbovane jednačine zadržavaju L^p-bliskost. Novi rezultati iz ove glave još uvek nisu publikovani. U ovom slučaju treba istaći da se perturbuju kako finalni uslov i koeficijent drifta, tako i barijerni proces koji je specifičan za ovaj tip jednačina, i doprinosi primeni ovih jednačina u modeliranju cena barijernih opcija.

Zaključak je poslednji deo disertacije, u kome su navedeni otvoreni problemi i mogući pravci daljeg istraživanja.

Ovim putem želim da zahvalim svom mentoru, prof. dr Svetlani Janković i prof. dr Miljani Jovanović na usmeravanju, pomoći i podršci koju su mi pružile.

Sadržaj

Glava 1

Uvodni pojmovi

U ovoj glavi se uvode neki osnovni pojmovi i rezultati koji se eksplicitno koriste u daljem radu, a koji su sa više detalja izloženi u [35],[38]-[41],[61],[80],[81],[89]. U Poglavlju 1.1 se navode osnovni elementi teorije stohastičkih procesa kao što su merljivost, separabilnost, neprekidnost, Markovsko svojstvo, stacionarnost. U Poglavlju 1.2 je uvedena definicija procesa Brownovog kretanja i navedene su njegove najvažnije osobine. Konstrukcija integrala Itôa, tj. integrala slučajne funkcije po procesu Brownovog kretanja, kao i osobine tog integrala, date su u Poglavlju 1.3. U Poglavlju 1.4 se navode teoreme egzistencije i jedinstvenosti rešenja običnih stohastičkih diferencijalnih jednačina, osnovne osobine ovih jednačina, kao i glavne razlike između grupe forward i backward stohastičkih diferencijalnih jednačina. Ova glava se završava Poglavljem 1.5 koje sadrži neke elementarne nejednakosti, integralnu nejednakost Gronwall-Bellmana, Biharijevu nejednakost, i neke nejednakosti sa matematičkim očekivanjem koje se primenjuju u daljem radu.

1.1 Osnovni pojmovi teorije stohastičkih procesa

Početkom prošlog veka, veliki napredak tehničkih disciplina je pred teoriju verovatnoća postavio mnoge probleme koji nisu mogli biti rešeni metodama kojima su one tada raspolagale i koje ne uključuju slučajnost kao fenomen. Sa druge strane, teorija verovatnoća još uvek nije imala razvijenu metodologiju za modeliranje takvih pojava. Odatle potiče potreba za uključenjem slučajnog parametra, što je iniciralo razvoj teorije stohastičkih procesa u okviru koje su se razmatrale vremenski zavisne slučajne pojave.

Pojam stohastičkog procesa je star oko sto godina, a temelji ovog pojma se vezuju pre svega za imena Khincina, Sluckog, Wienera, Kolmogorova, Cramera. U tom periodu je bilo više pokušaja proučavanja slučajnih pojava, među kojima su najznačajniji pokušaji Sluckog [126] da slučajnost poveže sa konceptom realnih funkcija, kao i pokušaji Wienera [131], koji je dao matematičku formulaciju haotičnog kretanja čestica polena u tečnosti, poznatog kao proces Brownovog kretanja ili Wienerov proces. Uslovno matematičko očekivanje uveo je Kolmogorov [76, 77], i time omogućio postuliranje sistematske i stroge konstrukcije osnova teorije stohastičkih procesa markovskog tipa sa beskonačnim parametarskim skupom.

Začetnikom teorije stacionarnih procesa smatra se Khinchin [75], dok je za razvijanje teorije Gaussovih procesa pre svega zaslužan Cramer [22].

U svojoj monografiji [28], Doob je sistematizovao brojne koncepte teorije stohastičkih procesa. Proučavao je, između ostalog, koncept vremena zaustavljanja, što je dovelo do širenja teorije martingala. Rad u ovoj oblasti su nastavili Meyer [93, 94, 95], Dolean−Dade [27], Dellacherie [24], Kunita i Watanabe [83] i mnogi drugi. Teorija stohastičkih procesa je doprinela i razvoju drugih matematičkih teorija koje opisuju pojave iz realnog života, i kao takva je od velikog značaja za nematematičke nauke, kao što su ekonomija, inženjerstvo, biologija, epidemiologija i mehanika.

U cilju uvođenja definicije stohastičkog procesa, neophodno je uvesti okruženje za datu definiciju. Shodno tome, neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ prostor verovatnoća i $T \subset \mathbb{R}$ parametarski skup. U predstojećem razmatranju, T će biti interval $[0, \infty)$, $[0, T]$ ili $[t_0, T] \subset [0, \infty)$, pri čemu parametar $t \in T$ predstavlja vreme.

Definicija 1.1.1 *Familija $\{x_t, t \in T\}$ slučanih promenljivih x_t definisanih na prostoru verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, sa vrednostima u $\mathbb{R}^d$, naziva se stohastički proces sa parametarskim skupom (ili indeksnim skupom) T i skupom stanja $\mathbb{R}^d$.*

Za stohastički proces se umesto oznake $x_t(\omega)$ koristi i oznaka $x(t, \omega)$, gde je stohastički proces funkcija dve promenljive (t, ω) iz $T \times \Omega$ sa vrednostima u $\mathbb{R}^d$, tada umesto $\{x_t, t \in T\}$, pišemo $\{x(t), t \in T\}$. Na osnovu prethodne definicije, za svako fiksirano $t \in T$ preslikavanje $\omega \mapsto x(t, \omega)$, $\omega \in \Omega$, je slučajna promenljiva tj. $\mathcal{F}$-merljiva funkcija. Takođe, za svako fiksirano $\omega \in \Omega$, preslikavanje $t \mapsto x(t, \omega) \in \mathbb{R}^d$ predstavlja funkciju realnog argumenta $t \in T$, koja se naziva trajektorija ili realizacija koja odgovara ishodu $\omega \in \Omega$. Ako je $T = \mathbb{N}$, tj. ako je vremenski interval diskretan, radi se o stohastičkom nizu $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$. U nastavku će biti razmatrani isključivo procesi sa neprekidnim vremenom koji predstavljaju matematičke modele slučajnih pojava čiji se ishodi mogu registrovati neprekidno sa protokom vremena.

Stohastički proces određuje familiju konačno-dimenzionalnih funkcija raspodela,

$$\Big\{F_{t_1,t_2,\ldots,t_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ x_i \in \mathbb{R}^d,\ t_i \in T,\ i = 1, 2, \ldots, n,\ n \in N\Big\},$$

gde je $F_{t_1,t_2,\ldots,t_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P(x(t_1) < x_1, \ldots, x(t_n) < x_n)$. Zahteva se da familija konačno-dimenzionalnih funkcija raspodela zadovoljava sledeća dva uslova:

− uslov simetrije, tj. da za svaku permutaciju $(i_1, \ldots, i_n)$ skupa $\{1, \ldots, n\}$ važi

$$F_{t_{i_1},t_{i_2},\ldots,t_{i_n}}(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}) = F_{t_1,t_2,\ldots,t_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n);$$

− uslov saglasnosti, tj. da važi

$$F_{t_1,t_2,\ldots,t_{n-1},t_n}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, \infty) = F_{t_1,t_2,\ldots,t_{n-1}}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}).$$

Pritom, za svaku familiju konačno-dimenzionalnih funkcija raspodela koja zadovoljava uslove simetrije i saglasnosti, postoji prostor verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ i stohastički proces $\{x(t), t \in T\}$ definisan na tom prostoru, kome odgovara data familija konačno–dimenzionalnih funkcija raspodela (teorema Kolmogorova).

Neprebrojivost parametarskog skupa, u opštem slučaju, onemogućava određivanje verovatnoća događaja opisanih pomoću stohastičkih procesa. Da bi se ta teškoća otklonila, uvodi se pojam separabilnosti.

Definicija 1.1.2 *Stohastički proces $\{x(t), t \in T\}$ je separabilan ako postoji najviše prebrojiv svuda gust skup $S \subset T$ (separant) i događaj $\Lambda \subset \Omega$ za koji je $P(\Lambda) = 0$, tako da se za proizvoljan zatvoren skup $F \subset \mathbb{R}^d$ i proizvoljan otvoren interval $I \subset T$, skupovi*

$$\{\omega : x(\omega, t) \in F,\ t \in I\} \quad i \quad \{\omega : x(\omega, t) \in F,\ t \in I \cap S\}$$

razlikuju na podskupu od Λ.

Prirodno se uvodi pojam stohastičke ekvivalentnosti stohastičkih procesa.

Definicija 1.1.3 *Stohastički procesi $\{x(t), t \in T\}$ i $\{\tilde{x}(t), t \in T\}$, definisani na istom prostoru verovatnoća i sa istim skupom stanja, su stohastički ekvivalentni ako je $P\{x(t) = \tilde{x}(t)\} = 1$ za svako $t \in T$. U tom slučaju se kaže da je jedan proces stohastička modifikacija (verzija) drugog.*

Stohastički ekvivalentni procesi imaju iste funkcije raspodela.

Definicija 1.1.4 *Stohastički proces $\{x(t), t \in T\}$ je merljiv ako je $x(t, \omega)$ merljiva funkcija u odnosu na $\mathcal{B}_T \times \mathcal{F}$, gde je $\mathcal{B}_T$ Borelova σ–algebra nad T, tj. za svaki Borelov skup $B \in \mathcal{B}_d$ važi $\{(t, \omega) : x(t, \omega) \in B\} \in \mathcal{B}_T \times \mathcal{F}$.*

Stohastički proces $\{x(t), t \in T\}$ je stohastički neprekidan u tački $t_0 \in T$ ako za svako $\varepsilon > 0$ važi

$$P\{|x(t) - x(t_0)| > \varepsilon\} \to 0, \quad t \to t_0. \tag{1.1}$$

Stohastički proces je stohastički neprekidan na skupu $S \subseteq T$ ako (1.1) važi za svako $t_0 \in S$.

Teorema 1.1.1 (Doob, [28]) *Za svaki stohastički neprekidan proces $\{x(t), t \in T\}$ postoji stohastički ekvivalentan, separabilan i merljiv proces $\{\tilde{x}(t), t \in T\}$, definisan na istom prostoru verovatnoća i sa istim skupom vrednosti.*

Stohastički proces $\{\tilde{x}(t), t \in T\}$ iz Teoreme 1.1.1 se naziva separabilna i merljiva modifikacija procesa $\{x(t), t \in T\}$.

Stohastički proces $\{x(t), t \in T\}$ je neprekidan u srednjem reda p, tj. L^p-neprekidan u tački $t_0 \in T$ ako važi

$$E|x(t) - x(t_0)|^p \to 0, \quad t \to t_0. \tag{1.2}$$

Stohastički proces je L^p-neprekidan na skupu $S \subseteq T$ ako (1.2) važi za svako $t_0 \in S$.

Stohastički proces $\{x(t), t \in T\}$ je skoro izvesno neprekidan na segmentu $[a, b] \subset T$ ako su skoro sve njegove trajektorije neprekidne na $[a, b]$, tj. ako važi

$$P\{\omega : x(\omega, t) \text{ ima prekid na } [a, b]\} = 0.$$

Sledećom teoremom je naveden kriterijumu Kolmogorova, kao dovoljan uslov skoro izvesne neprekidnosti procesa.

Teorema 1.1.2 (Kriterijum Kolmogorova) *Stohastički proces* $\{x(t), t \geq 0\}$ *ima skoro izvesno neprekidnu modifikaciju ako postoje pozitivne konstante* p, q *i* k, *tako da za svako* $T > 0$ *i svako* $0 \leq s, t \leq T$ *važi*

$$E|x(t) - x(s)|^p \leq k|t - s|^{1+q}.$$

Definicija 1.1.5 *Stohastički proces* $\{x(t), t \in T\}$ *je reda* p, $p \geq 0$ *(*L^p*-proces) ako je* $E|x(t)|^p < \infty$ *za svako* $t \in T$.

Konkretno, za $p = 2$ stohastički proces $\{x(t), t \in T\}$ je proces drugog reda (L^2-proces), tj. $E|x(t)|^2 < \infty$ za svako $t \in T$. Shodno tome, korelaciona funkcija je $K(s,t) = E(x(s) - Ex(s))(x(t) - Ex(t)),\ s, t \in T$ i disperzija procesa $D(t) = K(t,t)$.

Definicija 1.1.6 *Stohastički proces* $\{x(t), t \in T\}$ *je Gaussov ako je svako njegovo* n*-dimenzionalno sečenje* $(x(t_1), x(t_2), ..., x(t_n)), t_1, t_2, ..., t_n \in T$ *Gaussova (normalno raspodeljena) slučajna promenljiva, tj. ako slučajni vektor* $(x(t_1), x(t_2)...x(t_n))$ *ima karakterističnu funkciju*

$$\begin{aligned} f_{t_1,...t_n}(\lambda_1, ..., \lambda_n) &= Eexp\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x(t_j)\right) \\ &= exp\left\{i\sum_{j=1}^{n} \lambda_j m_j - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \lambda_j \lambda_k r_{jk}\right\}, \end{aligned}$$

gde je $m_j = Ex(t_j), j = \overline{1,n}$ *i* $r_{jk} = K(t_j, t_k)$.

Za dati prostor verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, familija $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$ pod–σ–algebri od $\mathcal{F}$ za koju važi $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F},\ s \leq t,\ s, t \in T$, naziva se *filtracija.* Ako je $T = [0, \infty)$, tada je $\mathcal{F}_\infty = \sigma\{\cup_{t\geq 0}\mathcal{F}_t\}$.

Neka je $\mathcal{F}_{t-} = \sigma\{\cup_{s<t}\mathcal{F}_s\}$ σ-algebra događaja koji prethode momentu $t > 0$ i neka je $\mathcal{F}_{t+} = \cap_{s>t}\mathcal{F}_s$ σ–algebra događaja koji se dešavaju neposredno posle trenutka $t > 0$. Filtracija $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ je *neprekidna s desna* (*neprekidna s leva*) ako za svako $t \geq 0$ važi $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+}$ ($\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t_-}$). Za filtraciju se kaže da je neprekidna ako je $\mathcal{F}_{t-} = \mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+}$, za svako $t \geq 0$.

Filtracija $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ zadovoljava uobičajene uslove ako je neprekidna s desna i $\mathcal{F}_0$ sadrži sve dogadjaje iz $\mathcal{F}$ čija je verovatnoća nula. U nastavku će se podrazumevati da filtracija zadovoljava uobičajene uslove.

Definicija 1.1.7 *Stohastički proces* $\{x(t), t \in T\}$ *je adaptiran u odnosu na filtraciju* $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$ *ako je slučajna promenljiva* $x(t)$ $\mathcal{F}_t$*-merljiva za svako* $t \in T$.

Osobina adaptiranosti stohastičkog procesa $\{x(t), t \in T\}$ u odnosu na filtraciju $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$, označava se sa $\{x(t), \mathcal{F}_t, t \in T\}$.

Za dati stohastički proces $X = \{x(t), t \in T\}$, prirodna filtracija je generisana samim procesom, tj. $\mathcal{F}_t^X = \sigma\{x(s), s \leq t\}$ je najmanja σ-algebra u odnosu na koju je $x(s)$ merljivo za svako $s \leq t$. Ako je $\tilde{X} = \{\tilde{x}(t), t \in T\}$ modifikacija procesa X, tada je i $\tilde{X}$ adaptiran u odnosu na $\{\mathcal{F}_t^X, t \in T\}$.

Definicija 1.1.8 *Stohastički proces* $\{x(t), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ *je progresivno merljiv ako za svako* $t \geq 0$ *i* $B \in \mathcal{B}_d$ *važi*

$$\{(s, \omega) : s \leq t,\, \omega \in \Omega,\, x(s, \omega) \in B\} \in \mathcal{B}([0, t]) \times \mathcal{F}_t,$$

pri čemu je $\mathcal{B}([0, t])$ *Borelova* σ*-algebra nad* $[0, t]$.

Primetimo da je svaki progresivno merljiv stohastički proces $\{x(t), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$, merljiv i adaptiran u odnosu na filtraciju $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$. Važe i sledeća tvrđenja.

Teorema 1.1.3 (Meyer, [95]) *Ako je stohastički proces* $\{x(t), t \geq 0\}$ *merljiv i adaptiran u odnosu na filtraciju* $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$*, tada on ima progresivno merljivu modifikaciju.*

Teorema 1.1.4 (Meyer, [95]) *Ako je stohastički proces* $\{x(t), t \geq 0\}$ *adaptiran u odnosu na filtraciju* $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ *i neprekidan s desna ili s leva, tada on ima progresivno merljivu modifikaciju.*

U daljem radu se koriste i pojmovi procesa Markova i martingala.

Definicija 1.1.9 *Stohastički proces* $\{x(t), t \geq 0\}$ *je proces Markova ako je za svako* $s < t$ *i svaki Borelov skup* $B \in \mathcal{B}_d$

$$P\{x(t) \in B | \mathcal{F}_s\} = P\{x(t) \in B | x(s)\} \;\; s.i.$$

Definicija 1.1.10 *Stohastički proces* $\{x(t), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ *koji je integrabilan (*$E|x(t)| < \infty$ *za svako* $t \geq 0$*) je:*

(i) martingal ako je $E(x(t)|\mathcal{F}_s) = x(s)$ *s.i. za svako* $0 \leq s \leq t$*;*

(ii) submartingal ako je $E(x(t)|\mathcal{F}_s) \geq x(s)$ *s.i. za svako* $0 \leq s \leq t$;

(iii) supermartingal ako je $E(x(t)|\mathcal{F}_s) \leq x(s)$ *s.i. za svako* $0 \leq s \leq t$.

Submartingali i supermartingali se zajedno nazivaju *semimartingalima.*

Ako je $E|x(t)|^2 < \infty$ za svako $t \geq 0$, martingal $\{x(t), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ je *kvadratno-integrabilan* martingal.

Iz Jensenove nejednakosti sledi da ako je $\{x(t), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ martingal, onda je $\{|x(t)|^p, \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ submartingal za svako $p \geq 1$.

Teorema 1.1.5 *Neka filtracija* $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ *ispunjava uobičajne uslove i neka je* $\{x(t), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ *neprekidan kvadratno-integrabilan martingal za koji je* $x(0) = 0$ *skoro izvesno. Tada je*

$$x^2(t) = m(t) + u(t) \;\; s.i., \;\; t \geq 0,$$

pri čemu je $m = \{m(t), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ *neprekidan martingal i* $u = \{u(t), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ *neprekidan integrabilan rastući proces, tako da je* $m(0) = u(0) = 0$ *skoro izvesno. Ova martingalna dekompozicija je jedinstvena do stohastičke ekvivalentnosti.*

Stohastički proces u iz prethodnog tvrđenja se naziva *kvadratna varijacija* procesa x i uobičajno se označava sa $u(t) = \langle x \rangle_t$.

Definicija 1.1.11 *Slučajna promenljiva $\tau : \Omega \to [0, \infty]$ se naziva vreme zaustavljanja u odnosu na filtraciju $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ ako je $\{\omega : \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ za svako $t \geq 0$.*

Definicija 1.1.12 *Neka je $X = \{x(t), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ neprekidan progresivno merljiv proces i neka je τ vreme zaustavljanja. Tada se proces $\{x(t \wedge \tau), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ naziva zaustavljen proces od X.*

Naredno tvrđenje je verzija poznate Doobove teoreme (*Doob martingale stopping theorem*).

Teorema 1.1.6 *Neka je $\{x(t), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ neprekidan martingal i τ vreme zaustavljanja u odnosu na istu filtraciju. Tada za svako $0 \leq s < t < \infty$ važi*

$$E(x_{t\wedge\tau}|\mathcal{F}_s) = x_{s\wedge\tau} \;\; s.i.,$$

tj. zaustavljen proces $\{x(t \wedge \tau), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ je takodje martingal.

Definicija 1.1.13 *Neprekidan (desno neprekidan) proces $X = \{x(t), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$, za koji je $x(0) = 0$ skoro izvesno, naziva se lokalni martingal ako postoji neopadajući niz vremena zaustavljanja $\{\tau_k, k \geq 1\}$ u odnosu na filtraciju $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$, pri čemu je $P\{lim_{k\to\infty}\tau_k = \infty\} = 1$, takav da je $\{x(t \wedge \tau_k), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ martingal za svako $k \geq 1$.*

Iz Teoreme 1.1.6 sledi da je svaki martingal i lokalni martingal, dok u opštem slučaju obrat ne važi.

1.2 Proces Brownovog kretanja

Proces Brownovog kretanja se vezuje za haotično kretanje čestica polena rastvorenih u vodi koje je 1828. godine proučavao škotski botaničar Robert Brown [20]. Haotičnost ovog kretanja je uslovljena slučajnim sudarima do kojih dolazi između molekula tečnosti i čestica polena. L. Bachélier [8] je među prvima posredno dao matematički opis Brownovog kretanja 1900. godine, proučavajući slučajne promene cena vrednosnih papira. Smatra se da je on postavio osnove kvantitativnog i stohastičkog pristupa u finansijama. Značajan opis Brownovog kretanja je dao A. Einsteina [32] 1905. godine (videti [32]), koji je pomoću molekularno-kinetičke teorije toplote, koristeći statističko-mehaničke metode, izveo gustine prelaza za proces Brownovog kretanja.

Norbert Wiener je 1923. godine dao strogu matematičku formulaciju procesa Brownovog kretanja. Zahvaljujući njegovim rezultatima [131, 132], proces Brownovog kretanja više nije predstavljao samo fizičku pojavu, već i matematički pojam. Proces Brownovog kretanja (kraće *Brownovo kretanje*) je uglavnom sinonim za Wienerov proces. Danas Brownovo kretanje zauzima važno mesto u mnogim naučnim disciplinama jer se pomoću njega matematički opisuju različite pojave koje zavise od slučajnosti.

Definicija 1.2.1 *Stohastički proces $W = \{W(t), t \geq 0\}$ je Brownovo kretanje ako zadovoljava sledeće uslove:*

1. $W(0) = 0$, *s.i.;*
2. *ima nezavisne priraštaje, tj. za svako $n \in N$ i $0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_n$, slučajne promenljive $W(t_0), W(t_1) - W(t_0), \ldots, W(t_n) - W(t_{n-1})$ su nezavisne;*
3. $W(t) - W(s) : \mathcal{N}(0, \sigma^2(t-s)),\ 0 \leq s < t$.

Parametar $\sigma^2 > 0$ se naziva koeficijent difuzije. Specijalno, za $\sigma^2 = 1$, radi se o standardnom Brownovom kretanju.

Može se dokazati da je stohastički proces $\{W(t), t \geq 0\}$ Brownovo kretanje ako i samo ako je skoro izvesno neprekidan Gaussov proces sa $EW(t) = 0$, $K(s,t) = \sigma^2 \min\{s,t\},\ s,t \geq 0$.

Brownovo kretanje ima mnogo važnih osobina među kojima su izdvojene sledeće:

- Proces je drugog reda, tj. $E|W(t)|^2 < \infty$;
- n-dimenzionalna gustina raspodele za $t_1 < \cdots < t_n$ i $u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{R}$ se može izraziti preko jednodimenzionalnih gustina raspodela $f_1(t; u)$ Gaussove slučajne promenljive, tj.
$$\begin{aligned} f_n(t_1, \ldots, t_n; u_1, \ldots, u_n) = & f_1(t_1; u_1) \cdot f_1(t_2 - t_1; u_2 - u_1) \cdot \ldots \\ & \cdot f_1(t_n - t_{n-1}; u_n - u_{n-1}); \end{aligned}$$
- Proces je Markova;
- Srednje kvadratno je neprekidan;
- Skoro izvesno je neprekidan, tj. skoro sve njegove trajektorije su neprekidne funkcije;
- Skoro sve trajektorije su nediferencijabilne funkcije u svakoj tački;
- Može se definisati na intervalu $(-\infty, \infty)$, pri čemu je $EW(t) = 0$ i $K(s,t) = \frac{1}{2}\big(|t| + |s| - |t-s|\big)$. Na taj način se dobijaju nezavisna Brownova kretanja $\{W(t), t \geq 0\}$ i $\{W(-t), t \geq 0\}$, čije su trajektorije skoro izvesno spojene u tački $t = 0$;
- Za proizvoljne t_0, t takve da je $0 \leq t_0 \leq t$, proces $W(t) - W(t_0)$ je Brownovo kretanje (osobina translacije);
- Za svako $c > 0$ i $t \geq 0$, $\frac{W(ct)}{\sqrt{c}}$ je Brownovo kretanje (osobina sažimanja);
- Za svako $t > 0$, proces $V(t) = tW(\frac{1}{t})$ sa $V(0) = 0$ s.i., je Brownovo kretanje (osobina inverzije);
- Proces $-W = \{-W(t), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ je Brownovo kretanje (osobina simetrije);

- Proces $\{W(t), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ je martingal, tj. za svako $0 \leq s \leq t$ važi

$$E(W(t)|\mathcal{F}_s) = W(s) \ s.i.;$$

- Skoro izvesno je neograničene varijacije i srednje-kvadratno konačne varijacije na svakom segmentu $[a, b] \subset [0, \infty)$, tj. za proizvoljnu konstantu $c \in \mathbb{R}$ i proizvoljnu particiju $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ segmenta $[a, b]$ za koji $\max_{k=\overline{1,n}}(t_k - t_{k-1}) \to 0$ kada $n \to \infty$,

$$P\Big\{\sum_{k=1}^{n} |W(t_k) - W(t_{k-1})| > c\Big\} \to 1, \quad n \to \infty,$$
$$\sum_{k=1}^{n} |W(t_k) - W(t_{k-1})|^2 \to \sigma^2(b-a) \text{ s.k.}, \quad n \to \infty.$$

Analogno jednodimenzionalnom, uvodi se i definicija višedimenzionalnog Brownovog kretanja.

Definicija 1.2.2 *Stohastički proces* $W = \{W(t), t \geq 0\} = \{(W_1(t), \ldots, W_m(t)), t \geq 0\}$ *je* m*–dimenzionalno Brownovo kretanje ako zadovoljava sledeće uslove:*

1. $W(0) = 0$ *skoro izvesno;*
2. *ima nezavisne priraštaje;*
3. $W(t) - W(s) : \mathcal{N}(0, \sigma^2(t-s)I),\ 0 \leq s < t,$ *I je jedinična matrica reda m.*

Iz ove definicije sledi da su koordinate *m-dimenzionalnog Brownovog kretanja*, jednodimenzionalna uzajamno nezavisna Brownova kretanja. Pored toga, za m-dimenzionalno Brownovo kretanje važe sve napred navedene osobine jednodimenzionalnog Brownovog kretanja.

U fizičkim sistemima beli šum se najčešće opisuje slabo stacionarnim procesom ξ_t koji ima očekivanje nula i konstantnu spektralnu gustinu $S(\nu) \equiv S,\ \nu \in \mathbb{R}$. Ako je ξ_t Gaussov proces, tada se on naziva *Gaussov beli šum.* Reč "beli" u nazivu se povezuje sa činjenicom da ξ_t ima konstantnu spektralnu gustinu, kao kod spektra bele svetlosti, dok je reč "šum" više istorijskog karaktera. Kako je $D\xi_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} S(\nu)\, d\nu = \infty$, beli šum ne može biti fizički proces. Osim toga, ξ_t je proces sa nezavisnim vrednostima, pa su dva proizvoljno bliska zaseka nezavisne slučajne promenljive, što ne odgovara realnosti. Zbog toga se uobičajno Gaussov beli šum aproksimira takozvanim "obojenim šumom", što za posledicu ima da se ξ_t interpretira kao izvod Brownovog kretanja $W(t)$. Ovo opravdava oznaku $\xi_t = \dot{W}(t)$ ili analogno, $W(t) = \int_0^t \xi_s\, ds$, koja se često koristi u inženjerstvu, iako skoro sve trajektorije Brownovog kretanja nisu nigde diferencijabilne. Iako Gaussov beli šum realno ne postoji, pomoću njega se matematički modeliraju mnogi fizički fenomeni.

1.3 Integral Itôa

U okviru teorije stohastičkih procesa, pedesetih godina prošlog veka je počela da se razvija teorija stohastičkih diferencijalnih jednačina. Nezavisno jedan od drugog ovu teoriju su razvijali I.I. Gikhman [36, 37] i K. Itô [54, 55, 56, 57, 58], sa izvesnim razlikama, pri čemu se vremenom zadržao Itôv pristup. On je uveo pojam stohastičkog integrala u odnosu na Wienerov proces 1949. godine, koji se u literaturi najčešće sreće pod nazivom *stohastički integral Itôa.* Imajući u vidu da je Brownovo kretanje skoro izvesno neograničene varijacije i da skoro sve njegove trajektorije nemaju izvod ni u jednoj tački, stohastički integral po Brownovom kretanju se ne može definisati kao Riemann–Stieltjesov ili Lebesgueov integral. Ipak, zahvaljujući stohastičkoj prirodi Brownovog kretanja, moguće je definisati stohastički integral Itôa za široku klasu stohastičkih procesa.

1.3.1 Konstrukcija integrala Itôa

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ prostor verovatnoća na kome su definisane sve slučajne promenljive i procesi koji će biti nadalje razmatrani.

Neka je $W = \{W(t), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ jednodimenzionalno standardno Brownovo kretanje, adaptirano u odnosu na rastuću familiju pod-σ-algebri $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ σ-algebre $\mathcal{F}$, pri čemu je $\mathcal{F}_t = \sigma\{W(s), s \leq t\}$, $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t, s \leq t$ i $W(t) - W(s)$ je nezavisno u odnosu na $\mathcal{F}_s$ za svako $s \leq t$.

Označimo sa $\mathcal{M}^2([t_0, T]; \mathbb{R})$ klasu stohastičkih procesa $\varphi = \{\varphi(t), t \in [t_0, T]\}$ za koju važi:

1. φ je $\mathcal{B} \otimes \mathcal{F}$–merljiv;
2. φ je adaptiran u odnosu na familiju $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$;
3. $\|\varphi\|^2_{\mathcal{M}^2} = \int_{t_0}^T E|\varphi(t)|^2\, dt < \infty$.

Prostor $(\mathcal{M}^2([t_0, T]; \mathbb{R}), \|\cdot\|_{\mathcal{M}^2})$ je Banachov i u tom prostoru se poistovećuju φ i $\tilde{\varphi}$ ako je $\|\varphi - \tilde{\varphi}\|_{\mathcal{M}^2} = 0$.

U nastavku će najpre biti definisan stohastički integral Itôa stepenastog stohastičkog procesa iz klase $\mathcal{M}^2([t_0, T]; \mathbb{R})$, a zatim će definicija biti proširena na čitavu klasu $\mathcal{M}^2([t_0, T]; \mathbb{R})$, aproksimacijom proizvoljnog procesa iz te klase nizom stepenastih procesa.

Definicija 1.3.1 *Stohastički proces $\varphi \in \mathcal{M}^2([t_0, T]; \mathbb{R})$ je stepenasti proces ako postoji particija $t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T$, nezavisna od ω, tako da je*

$$\varphi(t) = \varphi(t_k) \ s.i., \quad t_k \leq t < t_{k+1}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Definicija 1.3.2 *Neka je $\varphi \in \mathcal{M}^2([t_0, T]; \mathbb{R})$ stepenasti proces. Slučajna promenljiva*

$$I(\varphi) = \int_{t_0}^T \varphi(t)\, dW(t) := \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(t_k)(W(t_{k+1}) - W(t_k))$$

je stohastički integral stepenastog procesa φ u odnosu na Brownovo kretanje W i naziva se integral Itôa.

Naredna teorema će omogućiti definisanje integrala Itôa za $\varphi \in \mathcal{M}^2([t_0,T];\mathbb{R})$.

Teorema 1.3.1 *Neka je* $W = \{W(t), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ *Brownovo kretanje i neka je* $\varphi \in \mathcal{M}^2([t_0,T];\mathbb{R})$. *Tada:*

1. *postoji niz stepenastih procesa* $\{\varphi_n, n \in \mathbb{N}\}$ *tako da*
$$\|\varphi - \varphi_n\|^2_{\mathcal{M}^2} = \int_{t_0}^{T} E|\varphi(t) - \varphi_n(t)|^2\, dt \to 0,\ n \to \infty;$$

2. *ako niz stepenastih procesa* $\{\varphi_n, n \in N\}$ *aproksimira* φ *tako da* $\|\varphi - \varphi_n\|_{\mathcal{M}^2} \to 0$, $n \to \infty$ *i ako je integral* $I(\varphi_n)$ *definisan kao u Definiciji 1.3.2, tada niz slučajnih promenljivih* $\{I(\varphi_n), n \in \mathbb{N}\}$ *konvergira u srednje kvadratnom smislu kad* $n \to \infty$*;*

3. *ako su* $\{\varphi_n, n \in \mathbb{N}\}$ *i* $\{\varphi'_n, n \in \mathbb{N}\}$ *dva niza stepenastih procesa koji aproksimiraju* φ, *tada je*
$$s.k. \lim_{n\to\infty} I(\varphi_n) = s.k. \lim_{n\to\infty} I(\varphi'_n).$$

Na osnovu Teoreme 1.3.1 se uvodi naredna definicija.

Definicija 1.3.3 *Intergal Itôa* $I(\varphi)$ *je srednje kvadratni limes niza* $\{\varphi_n, n \in \mathbb{N}\}$ *koji aproksimira* φ, *tj.*
$$I(\varphi) = \int_{t_0}^{T} \varphi(t)\, dW(t) := s.k. \lim_{n\to\infty} \int_{t_0}^{T} \varphi_n(t)\, dW(t).$$

Najvažnije osobine integrala Itôa su date sledećom teoremom.

Teorema 1.3.2 *Neka je* $\varphi, \psi \in \mathcal{M}^2([t_0,T];\mathbb{R})$ *i neka su* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *proizvoljne konstante. Tada je:*

1. $I(\varphi)$ $\mathcal{F}_T$*-merljivo;*

2. $EI(\varphi) = 0$;

3. $I(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha I(\varphi) + \beta I(\psi)$*;*

4. $E|I(\varphi)|^2 = \int_{t_0}^{T} E|\varphi(t)|^2\, dt$ *(stohastička integralna izometrija);*

5. $E[I(\varphi)I(\psi)] = \int_{t_0}^{T} E[\varphi(t)\psi(t)]\, dt$.

Integral Itôa se može definisati pod slabijim uslovima od prethodno navedenih. Naime, neka je $\mathcal{L}^2([t_0,T];\mathbb{R})$ klasa stohastičkih procesa koji su $\mathcal{B} \otimes \mathcal{F}$–merljivi, adaptirani u odnosu na familiju $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ i za koje je
$$P\left\{\int_{t_0}^{T} |\varphi(t)|^2\, dt < \infty\right\} = 1.$$
Očigledno, $\mathcal{M}^2([t_0,T];\mathbb{R}) \subset \mathcal{L}^2([t_0,T];\mathbb{R})$.

Može se dokazati da za svako $\varphi \in \mathcal{L}^2([t_0,T];\mathbb{R})$ postoji niz $\{\varphi_n, n \in \mathbb{N}\}$ iz klase $\mathcal{M}^2([t_0,T];\mathbb{R})$, tako da je integral Itôa procesa φ

$$I(\varphi) := \lim_{n\to\infty} I(\varphi_n) \text{ u verovatnoći.}$$

U ovom slučaju važe samo osobine 1–3 Teoreme 1.3.2. Medjutim, integral Itôa procesa $\varphi \in \mathcal{L}^2([t_0,T];\mathbb{R})$ zadovoljava sledeću osobinu: Za proizvoljne pozitivne konstante N i ε je

$$P\left\{\left|\int_{t_0}^{T} \varphi(t)\, dW(t)\right| > \varepsilon\right\} \leq P\left\{\int_{t_0}^{T} |\varphi(t)|^2\, dt > N\right\} + \frac{N}{\varepsilon^2}.$$

Definicija 1.3.3 integrala Itôa se analogno proširuje na stohastičke procese iz klase $\mathcal{M}^2([t_0,T];\mathbb{R}^{d\times m})$, u odnosu na m-dimenzionalno Brownovo kretanje $W = \{W(t), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$. Klasa $\mathcal{M}^2([t_0,T];\mathbb{R}^{d\times m})$ obuhvata sve $(d\times m)$-dimenzionalne merljive i $\{\mathcal{F}_t, t\geq 0\}$-adaptirane stohastičke procese φ koji zadovoljavaju uslov

$$\|\varphi\|^2_{\mathcal{M}^2} = \int_{t_0}^{T} E||\varphi(t)||^2\, dt < \infty,$$

gde je $||\cdot||$ matrična norma definisana sa $||\varphi||^2 = \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{m} |\varphi_{ij}|^2 = trace(\varphi^T\varphi)$. Kako je $\varphi \in \mathcal{M}^2([t_0,T];\mathbb{R}^{d\times m})$ kada je $\varphi_{ij} \in \mathcal{M}^2([t_0,T];\mathbb{R}), i = \overline{1,d}, j = \overline{1,m}$, višedimenzionalni integral Itôa se definiše kao d-dimenzionalni vektor

$$I(\varphi) = \int_{t_0}^{T} \varphi(t)\, dW(t) = \int_{t_0}^{T} \begin{bmatrix} \varphi_{11}(t) & \dots & \varphi_{1m}(t) \\ \vdots & & \\ \varphi_{d1}(t) & \dots & \varphi_{dm}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dW_1(t) \\ \vdots \\ dW_m(t) \end{bmatrix},$$

gde je i-ta komponenta vektora $I(\varphi)$, suma jednodimenzionalnih integrala Itôa, tj.

$$I_i(\varphi) = \sum_{j=1}^{m} \int_{t_0}^{T} \varphi_{ij}(t)\, dW_j(t), \quad i = \overline{1,d}.$$

Zbog toga, sve osobine Teoreme 1.3.2 važe i u ovom slučaju. Analogno jednodimenzionalnom slučaju, definicija stohastičkog integrala Itôa se može proširiti na klasu $\mathcal{L}^2([t_0,T];\mathbb{R}^{d\times m})$.

1.3.2 Neodređeni integral Itôa

Definicija 1.3.4 *Neka je $I_{\{s<t\}}, t_0 \leq s < t < T$, indikator skupa $[t_0,t]$. Neodređeni integral Itôa procesa $\varphi \in \mathcal{M}^2([t_0,T];\mathbb{R})$ u odnosu na jednodimenzionalno Brownovo kretanje $\{W(t), \mathcal{F}_t, t\geq 0\}$ je stohastički proces $x = \{x(t), t \in [t_0,T]\}$, pri čemu je*

$$x(t) := \int_{t_0}^{T} I_{\{s<t\}}\varphi(s)\, dW(s) = \int_{t_0}^{t} \varphi(s)\, dW(s), \quad t \in [t_0,T].$$

Teorema 1.3.3 *Za $\varphi \in \mathcal{M}^2([t_0,T];\mathbb{R})$, neodređeni integral Itôa ima sledeće osobine:*

1. *$x(t)$ je $\mathcal{F}_t$-merljivo za svako $t \in [t_0, T]$;*

2. *$\{x(t), \mathcal{F}_t, t \in [t_0, T]\}$ ima separabilnu i merljivu modifikaciju;*

3. *$x(t_0) = 0$ s.i.;*

4. *$x(t) - x(s) = \int_s^t \varphi(u)\, dW(u)$;*

5. *$Ex(t) = 0$;*

6. *$E|x(t)|^2 = \int_{t_0}^t E|\varphi(s)|^2\, ds$;*

7. *proces $\{x(t), \mathcal{F}_t, t \in [t_0, T]\}$ je kvadratno integrabilni martingal sa kvadratnom varijacijom*
$$u(t) = \int_{t_0}^t |\varphi(u)|^2\, du;$$

8. *proces $\{x(t), \mathcal{F}_t, t \in [t_0, T]\}$ je skoro izvesno neprekidan;*

9. *ako je τ vreme zaustavljanja u odnosu na $\{\mathcal{F}_t, t \in [t_0, T]\}$, tada je stohastički proces*
$$x(t \wedge \tau) = \int_{t_0}^{t \wedge \tau} \varphi(s)\, dW(s), \quad t \in [t_0, T],$$
martingal u odnosu na $\{\mathcal{F}_t, t \in [t_0, T]\}$ i $E[x(t \wedge \tau)] = 0$.

Analogno Definiciji 1.3.4, neodređeni integral Itôa se može definisati i za stohastičke procese $\varphi \in \mathcal{L}^2([t_0, T]; \mathbb{R})$. Tada je proces $x = \{x(t), \mathcal{F}_t, t \in [t_0, T]\}$ merljiv i skoro izvesno neprekidan, ali u opštem slučaju nije martingal. Međutim, proces x je lokalni martingal, tj. $\{x(t \wedge \tau_n), \mathcal{F}_t, t \in [t_0, T]\}$ je martingal, pri čemu je $\{\tau_n, n \in \mathbb{N}\}$ niz vremena zaustavljanja definisanih sa
$$\tau_n = \inf\left\{t : \int_{t_0}^t |\varphi(s)|^2\, ds \geq n\right\}.$$

Prethodne definicije i tvrđenja analogno važe i u višedimenzionalnom slučaju.

1.3.3 Formula Itôa

U cilju rešavanja stohastičkog integrala Itôa, koristi se smena promenljivih poznata pod nazivom *formula Itôa*. Formula Itôa ima značajnu ulogu i u proučavanju različitih problema kako forward, tako i backward stohastičkih diferencijalnih jednačina. Formulu je prvi uveo K. Itô u radovima [57, 58], a njena uopštenja je dao Meyer u [96].

Neka je $W = \{W(t), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ jednodimenzionalno Brownovo kretanje definisano na kompletnom prostoru verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, i neka su $a \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+; \mathbb{R})$ i $b \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{R})$ merljivi procesi, adaptirani u odnosu na familiju $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$, tj., za svako $T > 0$,
$$\int_0^T |a(t)|\, dt < \infty \quad \text{s.i.}, \qquad \int_0^T |b(t)|^2\, dt < \infty \quad \text{s.i.}$$

Definicija 1.3.5 *Za* $a \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+;\mathbb{R})$ *i* $b \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+;\mathbb{R})$, *jednodimenzionalan stohastički proces* $\{x(t), t \geq 0\}$ *naziva se procesom Itôa, gde je*

$$x(t) = x(0) + \int_0^t a(s)\,ds + \int_0^t b(s)\,dW(s), \quad t \geq 0. \tag{1.3}$$

Kaže se da $\{x(t), t \geq 0\}$ *ima stohastički diferencijal* $dx(t)$ *za* $t \geq 0$, *pri čemu je*

$$dx(t) = a(t)\,dt + b(t)\,dW(t).$$

Prvi integral u (1.3) je Lebesgueov, dok je drugi integral Itôa. Kako su oba integrala merljiva, $\mathcal{F}_t$-adaptirana i skoro izvesno neprekidna, to i proces Itôa ima iste osobine.

Teorema 1.3.4 (Formula Itôa) *Neka je* $\{x(t), t \geq 0\}$ *proces Itôa sa stohastičkim diferencijalom* $dx(t) = a(t)\,dt + b(t)\,dW(t)$ *i neka je* $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *neslučajna funkcija sa neprekidnim parcijalnim izvodima* $f_t'(t,x)$, $f_x'(t,x)$, $f_{xx}''(t,x)$. *Tada je* $\{f(t, x(t)), t \geq 0\}$ *takođe proces Itôa i ima stohastički diferencijal*

$$df(t,x(t)) = f_t'(t,x(t))\,dt + f_x'(t,x(t))\,dx(t) + \frac{1}{2} f_{xx}''(t,x(t)) b^2(t)\,dt, \quad t \geq 0. \tag{1.4}$$

Izraz (1.4) je poznat kao *formula Itôa za stohastičko diferenciranje.*

Formula Itôa se može uopštiti na višedimenzionalan slučaj. U tom smislu najpre se uvodi pojam višedimenzionalnog stohastičkog diferencijala.

Definicija 1.3.6 *Neka je* $W = \{W(t), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ m*-dimenzionalno Brownovo kretanje. Neprekidan i adaptiran* d*-dimenzionalan stohastički proces je proces Itôa ako je oblika*

$$x(t) = x(0) + \int_0^t a(s)\,ds + \int_0^t b(s)\,dW(s),$$

gde je $a \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}^d)$ *i* $b \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}^{d\times m})$. *Kaže se da* $\{x(t), t \geq 0\}$ *ima stohastički diferencijal* $dx(t)$ *za* $t \geq 0$, *pri čemu je*

$$dx(t) = a(t)\,dt + b(t)\,dW(t).$$

I u višedimenzionalnom slučaju, za efektivno rešavanje integrala Itôa često je neophodno primeniti formulu Itôa za stohastičko diferenciranje složene funkcije, analogno jednodimenzionalnom slučaju. Da bi se formula Itôa mogla primeniti na višedimenzionalan slučaj, za funkciju $V \in C^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d;\mathbb{R})$, označimo

$$V_t = \frac{\partial V}{\partial t}, \quad V_x = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial x_d}\right),$$

$$V_{xx} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{d\times d} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_d} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x_d \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 V}{\partial x_d \partial x_d} \end{pmatrix}.$$

Teorema 1.3.5 (Višedimenzionalna formula Itôa) *Neka je* $\{x(t), t \geq 0\}$ *d–dimenzionalan proces Itôa sa stohastičkim diferencijalom* $dx(t) = a(t)\,dt + b(t)\,dW(t)$ *i neka je* $V \in C^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d; \mathbb{R})$. *Tada je* $\{V(t, x(t)), t \geq 0\}$ *takođe proces Itôa koji ima stohastički diferencijal*

$$dV(t,x(t)) = \Big[V_t(t,x(t)) + V_x(t,x(t))a(t) + \frac{1}{2}trace\big(b^T(t)V_{xx}(t,x(t))b(t)\big)\Big]\,dt \\ + V_x(t,x(t))b(t)\,dW(t), \quad t \geq 0.$$

U ovom delu disertacije je uvedena formula Itôa, kao bitan aparat u teoriji stohastičkih integrala i forward stohastičkih diferencijalnih jednačina. Modifikacije ove formule za backward stohastičke diferencijalne jednačine biće navede kasnije, kada to bude bilo neophodno, uz svaki tip jednačine.

1.4 Stohastičke diferencijalne jednačine

Ovo poglavlje ima za cilj uvođenje pojma stohastičkih diferencijalnih jednačina, kako bi se istakla razlika između forward (običnih) i backward stohastičkih diferencijalnih jednačina.

Stohastička diferencijalna jednačina nepoznatog d-dimenzionalnog procesa $x = \{x(t),\, t \in [t_0, T]\}$ je jednačina oblika

$$dx(t) = a(t,x(t))\,dt + b(t,x(t))\,dW(t), \quad t \in [t_0,T], \quad x(t_0) = x_0, \tag{1.5}$$

gde je $W = \{W(t), t \in [t_0, T]\}$ m-dimenzionalno Brownovo kretanje, početni uslov x_0 je d-dimenzionalna slučajna promenljiva koja je stohastički nezavisna u odnosu na W i $a : [t_0, T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $b : [t_0, T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times m}$ su neslučajne Borelove funkcije.

Jednačina (1.5) se može predstaviti i u ekvivalentnom integralnom obliku

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} a(s,x(s))\,ds + b(s,x(s))\,dW(s), \quad t \in [t_0,T]. \tag{1.6}$$

Do kraja ovog poglavlja podrazumevaće se da je $\mathcal{F}_t = \sigma\{x_0, W(s), 0 \leq s \leq t\}$.

Definicija 1.4.1 *Merljiv stohastički proces* $x = \{x(t), t \in [t_0, T]\}$ *je strogo rešenje jednačine (1.5) ako zadovoljava sledeće uslove:*

1. $x(t)$ *je* $\mathcal{F}_t$*-merljivo za svako* $t \in [t_0, T]$;
2. $\int_{t_0}^{T} |a(t, x(t))|\,dt < \infty$ *s.i.*, $\int_{t_0}^{T} ||b(t, x(t))||^2\,dt < \infty$ *s.i.;*
3. $x(t_0) = x_0$ *s.i.;*
4. *integralni oblik jednačine (1.6) je zadovoljen skoro izvesno za svako* $t \in [0, T]$.

Na osnovu osobina 1 i 2 Definicije 1.4.1 sledi da su i Lebesgueov i Itôv integral na desnoj strani jednakosti (1.6) dobro definisani, jedinstveni do stohastičke ekvivalentnosti i skoro izvesno neprekidni, zbog čega je i x skoro izvesno neprekidan proces. U skladu sa Teoremom Dooba 1.1.1, uvek se pretpostavlja da se radi sa merljivom, separabilnom i skoro izvesno neprekidnom modifikacijom strogog rešenja.

Definicija 1.4.2 *Jednačina (1.5) ima jedinstveno strogo rešenje ako za svaka dva stroga rešenja x i $\tilde{x}$ važi*

$$P\{x(t) = \tilde{x}(t), t \in [0,T]\} = 1.$$

Naredna teorema daje dovoljne uslove egzistencije i jedinstvenosti rešenja jednačine (1.5).

Teorema 1.4.1 *Neka je W m-dimenzionalno Brownovo kretanje i x_0 slučajna promenljiva, nezavisna od W, za koju je $E|x_0|^2 < \infty$. Neka su $a : [t_0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $b : [t_0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times m}$ Borelove funkcije koje zadovoljavaju globalni Lipschitzov uslov i uslov ograničenog rasta, tj. postoji konstanta $L > 0$ tako da za svako $(t,x),(t,y) \in [t_0,T] \times \mathbb{R}^d$,*

$$\begin{aligned} |a(t,x) - a(t,y)| + ||b(t,x) - b(t,y)|| &\le L|x-y|, \\ |a(t,x)|^2 + ||b(t,x)||^2 &\le L^2(1+|x|^2). \end{aligned}$$

Tada postoji jedinstveno skoro izvesno neprekidno strogo rešenje jednačine (1.5) sa osobinom $E\sup_{t\in[t_0,T]}|x(t)|^2 < \infty$. Pored toga, ako je $E|x_0|^p < \infty, p \ge 2$, tada je $E\sup_{t\in[t_0,T]}|x(t)|^p \le \infty$.

Teorema 1.4.1 važi i kada su koeficijenti jednačine slučajne funkcije, tj. $a : \Omega\times[t_0,T]\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $b : \Omega\times[t_0,T]\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times m}$, pri čemu Lischitzov uslov i uslov ograničenog rasta moraju biti zadovoljeni skoro izvesno.

Naredno tvrđenje, poznato kao teorema upoređivanja za skalarne stohastičke diferencijalne jednačine, može se naći u [37]-[41], [61].

Teorema 1.4.2 *Neka koeficijenti $a_i : \Omega\times[0,T]\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = 1,2$ i $b : \Omega\times[0,T]\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadovoljavaju Lipschitzov uslov i neka je $a_1(t,x) < a_2(t,x)$ skoro izvesno za svako $(t,x) \in [0,\infty)\times\mathbb{R}$. Neka su $x_1(t)$ i $x_2(t)$ rešenja jednačina*

$$dx_i(t) = a_i(t,x_i(t))\,dt + b(t,x_i(t))\,dW(t), \quad i = 1,2,$$

koja zadovoljavaju isti početni uslov $x_i(0) = x_0$ skoro izvesno. Tada je $x_1(t) < x_2(t)$ skoro izvesno za svako $t \ge 0$.

1.5 Neke elementarne, integralne i stohastičke nejednakosti

U ovom poglavlju biće navedene neke elementarne nejednakosti, integralna nejednakost Gronwall–Bellmana i neke nejednakosti sa matematičkim očekivanjem, koje će biti korišćene prilikom dokazivanja glavnih rezultata.

Elementarne nejednakosti (videti [97]) koje će biti korišćene su:

$$(i) \quad \pm 2ab \leq \frac{a^2}{\lambda} + \lambda b^2, \ \ gde\ je\ \lambda\ pozitivna\ konstanta; \tag{1.7}$$

$$(ii) \quad Youngova\ nejednakost: \ u^{\alpha}v^{1-\alpha} \leq \alpha u + (1-\alpha)v, \ u, v \geq 0, \ \alpha \in [0,1]; \tag{1.8}$$

$$(iii) \quad Cauchy-Schwarzova\ nejednakost: \ za \ \ f, g \in \mathcal{L}^2([t_0, T]; \mathbb{R}^n),$$

$$\left| \int_{t_0}^{T} f(s)^T g(s)\, ds \right|^2 \leq \int_{t_0}^{T} |f(s)|^2\, ds \int_{t_0}^{T} |g(s)|^2\, ds; \tag{1.9}$$

$$(iv) \quad \left(\sum_{i=1}^{m} a_i \right)^k \leq (m^{k-1} \vee 1) \sum_{i=1}^{m} a_i^k, \ a_i \geq 0, \ k \geq 0; \tag{1.10}$$

$$(v) \quad a^{p-j}b^j \leq \frac{p-j}{p}\, a^p + \frac{j}{p}\, b^p, \ j = 1, 2, \ a, b \geq 0; \tag{1.11}$$

$$(vi) \quad |a+b|^p \leq [1 + \varepsilon^{\frac{1}{p-1}}]^{p-1} \left(|a|^p + \frac{|b|^p}{\varepsilon} \right), \ p > 1, \ \ a, b \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0; \tag{1.12}$$

$$(vii) \quad |a+b|^p \leq (1+\delta)|a|^p + \phi(\delta)|b|^p, \ \delta > 0, \ \phi(\delta)\, je\, generisana\ funkcija. \tag{1.13}$$

Sledeće poznate nejednakosti i granične teoreme, koje se odnose na matematičko očekivanje, će biti primenjivane više puta.

- *Nejednakost Chebysheva*: Neka slučajna promenljiva X ima momenat reda r, $r \in \mathbb{N}$. Tada za svako $\varepsilon > 0$ važi
$$P\{|X| \geq \varepsilon\} \leq \frac{E|X|^r}{\varepsilon^r}. \tag{1.14}$$
- *Nejednakost Höldera*: Neka su p i q realni brojevi, takvi da je $1 < p, q < \infty$ i $1/p + 1/q = 1$. Ako za slučajne promenljive X i Y važi $E|X|^p < \infty$, $E|Y|^q < \infty$, tada je
$$E|XY| \leq (E|X|^p)^{1/p}(E|Y|^q)^{1/q}. \tag{1.15}$$
- *Nejednakost Jensena*: Neka je X slučajna promenljiva za koju je $E|X| < \infty$ i neka je $g = g(x)$ konveksna Borelova funkcija. Tada je
$$g(EX) \leq Eg(X). \tag{1.16}$$
- *Fatouova lema*: Neka su $Y, X_1, X_2, ...$ slučajne promenljive. Tada važi:
  1. ako je $X_n \geq Y, \forall n \geq 1$ i $EY > -\infty$, tada je
  $$E(\liminf_{n\to\infty} X_n) \leq \liminf_{n\to\infty}(EX_n); \tag{1.17}$$
  2. ako je $X_n \leq Y, \forall n \geq 1$ i $EY < \infty$, tada je
  $$\limsup_{n\to\infty}(EX_n) \leq E(\limsup_{n\to\infty} X_n); \tag{1.18}$$
  3. ako je $|X_n| \leq Y, \forall n \geq 1$ i $EY < \infty$, tada je
  $$E(\liminf_{n\to\infty} X_n) \leq \liminf_{n\to\infty}(EX_n) \leq \limsup_{n\to\infty}(EX_n) \leq E(\limsup_{n\to\infty} X_n). \tag{1.19}$$

Postoji više Doobovih nejednakosti koje se odnose na martingale i submartingale (videti [28],[37]-[41], [88], itd.). Navedeno tvrđenje će se koristiti u daljem radu.

Teorema 1.5.1 (Doob, [28]) *Neka je $\{x(t), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ neprekidan s desna martingal i neka je $E|x(t)|^p < \infty$ za svako $t \in [0, \infty)$ i za $p > 1$. Ako je $[a, b] \subset [0, \infty)$ ograničen interval, tada je*

$$E \sup_{t\in[a,b]} |x(t)|^p \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p E|x(b)|^p. \tag{1.20}$$

Narednim teoremama su iskazane nejednakosti sa momentima za stohastički integral Itôa.

Teorema 1.5.2 (Mao, [89]) *Neka je $p \geq 2$ i neka $\varphi \in \mathcal{M}^p([0, T]; \mathbb{R}^{d\times m})$, tj.*

$$E \int_0^T ||\varphi(s)||^p \, ds < \infty.$$

Tada je

$$E \left| \int_0^T \varphi(s) \, dW(s) \right|^p \leq \left(\frac{p(p-1)}{2}\right)^{\frac{p}{2}} T^{\frac{p-2}{2}} E \int_0^T ||\varphi(s)||^p \, ds. \tag{1.21}$$

Specijalno, jednakost važi za $p = 2$.

Teorema 1.5.3 (Burkholder–Davis–Gundy nejednakost, [21]) *Neka je $W = \{W(t), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ m-dimenzionalno Brownovo kretanje i $\varphi \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^{d\times m})$. Tada, za svako $p > 0$ postoje univerzalne konstante c_p i C_p (koje zavise samo od p), tako da za svako $t \geq 0$ važi*

$$c_p E \left| \int_0^t ||\varphi(s)||^2 \, ds \right|^{\frac{p}{2}} \leq E \left(\sup_{0\leq s\leq t} \left| \int_0^s \varphi(u) \, dW(u) \right|^p \right) \leq C_p E \left| \int_0^t ||\varphi(s)||^2 \, ds \right|^{\frac{p}{2}}. \tag{1.22}$$

Konkretno

$$\begin{array}{lll} c_p = (p/2)^p, & C_p = (32/p)^{\frac{p}{2}}, & 0 < p < 2; \\ c_p = 1, & C_p = 4, & p = 2; \\ c_p = (2p)^{-p/2}, & C_p = [p^{p+1}/2(p-1)^{p-1}]^{p/2}, & p > 2. \end{array}$$

Teorema 1.5.3 važi i ako je gornja granica integrala u (1.22) vreme zaustavljanja.

Poznato je da postoji više verzija Gronwall–Bellmanove nejednakosti (videti [13], [96]). U nastavku će se više puta primenjivati sledeća verzija.

Teorema 1.5.4 (Gronwall–Bellmanova nejednakost) *Neka su $u(t)$ i $b(t)$ neprekidne funkcije na $J = [\alpha, \beta]$ i neka su $a(t)$ i $q(t)$ Riemann-integrabilne funkcije na J. Ako je*

$$u(t) \leq a(t) + q(t) \int_\alpha^t b(s)u(s) \, ds, \quad t \in J,$$

tada je

$$u(t) \leq a(t) + q(t) \int_{\alpha}^{t} a(s)b(s)e^{\int_s^t b(\tau)q(\tau)d\tau} \, ds, \quad t \in J.$$

Ovo tvrđenje važi i ako se integrali $\int_\alpha^t$ *i* $\int_s^t$ *zamene sa* $\int_t^\beta$ *i* $\int_t^s$*, respektivno.*

Koristiće se naredna definicija i teorema.

Definicija 1.5.1 *Rešenje* $r(t), t \in [\alpha, \beta]$ *Caushyjevog problema*

$$r' = f(t, r), \quad r(\alpha) = r_0, \tag{1.23}$$

je maksimalno, ako za svako drugo rešenje $v(t), t \in [\alpha, \beta]$ *Caushyjevog problema (1.23) važi*

$$v(t) \leq r(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta.$$

Teorema 1.5.5 ([13]) *Neka je funkcija* $f(t, r)$ *definisana i neprekidna na otvorenom skupu* D *koji sadrži tačku* (α, v_0)*, i neka Caushyjev problem (1.23) ima maksimalno rešenje* $r(t)$ *za* $t \in [\alpha, \beta]$*. Ako je* $v(t)$ *diferencijabilna funkcija na* $[\alpha, \beta]$*, takva da je* $(t, v(t)) \in D$ *za* $t \in [\alpha, \beta]$ *i*

$$v'(t) \leq f(t, v(t)), \quad \alpha \leq t \leq \beta, \quad v(\alpha) = v_0,$$

tada je

$$v(t) \leq r(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta.$$

Postoji više verzija Biharijeve nejednakosti, od kojih je ovde navedena jedna od njih, koja će biti eksplicitno korišćena u disertaciji.

Teorema 1.5.6 (Biharijeva nejednakost [15]) *Neka je* g *monotono neprekidna i strogo pozitivna funkcija na intervalu* I *koji sadrži tačku* u_0*. Neka su* u *i* k *neprekidne funkcije na intervalu* $J = (\alpha, \beta]$ *za koji je* $u(J) \subset I$*, i neka je* k *istog znaka na* J*. Neka je*

$$u(t) \leq a + \int_t^\beta k(s)g(u(s)) \, ds, \ t \in J.$$

Ako je

(i) g *neopadajuća i* k *nenegativna,*

ili

(ii) g *nerastuća i* k *nepozitivna,*

onda je

$$u(t) \leq G^{-1}\left(G(a) + \int_t^\beta k(s) \, ds\right), \ \alpha_1 < t \leq \beta, \tag{1.24}$$

gde je $G(u) = \int_{u_0}^{u} \frac{dx}{g(x)}$*,* $u \in I$ *i* $\alpha_1 = \max\{\mu_1, \mu_2\}$*, pri čemu je*

$$\mu_1 = \inf\left\{\mu \in J : a + \int_t^\beta k(s)g(u(s)) \, ds \in I, \ \mu \leq t \leq \beta\right\},$$

$$\mu_2 = \inf\left\{\mu \in J : G(a) + \int_t^\beta k(s) \, ds \in G(I), \ \mu \leq t \leq \beta\right\}.$$

Napomenimo da prethodna teorema obuhvata i slučaj kada je $I = J = (0, \infty)$, a g neopadajuća pozitivna funkcija na I.

Glava 2

Perturbovane backward stohastičke diferencijalne jednačine

U prvom delu ove glave se razmatraju backward stohastičke diferencijalne jednačine sa aditivnim perturbacijama zavisnim od malog parametra. Rešenja ovih jednačina se upoređuju u smislu L^p-norme sa rešenjima odgovarajućih neperturbovanih jednačina istog tipa. Za zadatu L^p-razliku rešenja perturbovane i neperturbovane jednačine određuje se vremenski interval u kome ova rešenja zadržavaju zadatu bliskost. U drugom delu ove glave se razmatraju homogene i nehomogene backward stohastičke Volterra integralne jednačine. Uspostavlja se veza između njihovih rešenja, gde se nehomogenost tretira kao perturbacija.

2.1 Backward stohastičke diferencijalne jednačine sa aditivnim perturbacijama

Backward stohastičke diferencijalne jednačine, kraće BSDJ[1], (eng. backward stochastic differential equations) predstavljaju klasu stohastičkih diferencijalnih jednačina čija se rešenja određuju u odnosu na finalni uslov, za razliku od običnih (forward) stohastičkih diferencijalnih jednačina koje su predstavljene u Poglavlju 1.4 i čija se rešenja određuju u odnosu na početni uslov. BSDJ izazivaju veliku pažnju poslednjih dvadesetak godina, uglavnom zbog veze rešenja ovih jednačina sa rešenjima određene klase stohastičkih kvazilinearnih paraboličnih parcijalnih diferencijalnih jednačina drugog reda. BSDJ imaju veliku primenu u stohastičkoj kontroli, ekonomiji, finansijama i osiguranju, što je dovelo do naglog razvoja ove teorije. Na primer, u finansijama cena nekih finansijskih derivata se modelira rešenjem linearne BSDJ.

Bismut [16] je uveo pojam linearne BSDJ, a kasnije su Pardoux i Peng [107]

[1]Sa BSDJ je označena jednina i množina reči *backward stochastičke diferencijalne jednačine*, kao i njihove promene po padežima.

proširili klasu ovih jednačina na BSDJ opšteg oblika,

$$-dy(t) = f(t, y(t), z(t))dt - z(t)\, dW(t), \qquad y(T) = \xi, \tag{2.1}$$

gde je funkcija f generator i ξ finalni uslov. Rešenje jednačine (2.1) se sastoji od uređenog para adaptiranih procesa (y, z) koji zadovoljavaju ovu jednačinu.

Kao što je već pomenuto, ovakav tip jednačina se primenjuje u mnogim problemima vezanim za finansije. Black i Sholes [17], Merton [91], [92], Harrison i Kreps [50], Harrison i Pliska [51], Duffie [29], Karatzas [67] i mnogi drugi su se bavili izračunavanjem cena finansijskih derivata na kompletnom tržištu u terminima rešenja BSDJ. Ovaj problem se sastoji u određivanju vrednosti ugovora u bilo kom trenutku pre datuma dospeća, ako je poznato da on obezbeđuje vrednost ξ na datum dospeća T. Na kompletnom tržištu je uvek moguće kreirati replikacioni portfolio, tj. portfolio čija je vrednost na datum dospeća jednaka naplati ξ. Na taj način se dinamika vrednosti replikacionog portfolija opisuje pomoću BSDJ koja ima linearni generator, sa procesom z koji odgovara zaštiti portfolija. Cena finansijskog derivata u trenutku t odgovara vrednosti portfolija zaštićenog od rizika. Međutim, određivanje vrednosti finansijskog derivata na ovaj način nailazi na problem jedinstvenosti, jer postoji beskonačno mnogo portfolija koji imaju istu vrednost ξ na datum dospeća T. Zbog toga je bilo neophodno korigovati prethodno opisani model određivanja cena finansijskih ugovora na bezarbitražnom tržištu. Restrikcije uvedene u model su vezane za odgovarajuću verovatnosnu meru neutralnog rizika. Karoui, Peng i Quenez su u radu [72] dokazali da postoji jedinstvena cena finansijskog derivata i jedinstveni portfolio zaštićen od rizika, na taj način što su uveli restrikciju na proces z, na one slučajeve kada je z kvadratno-integrabilan proces u odnosu na početnu verovatnoću. Ovaj rad je inicirao dalja istraživanja i primene BSDJ u ekonomiji i finansijama, na primer u radovima Föllmera i Schweizera [33], El Karouia i Queneza [69], Cvitanića i Karatzasa [23], Duffiea i Epsteina [30, 31].

Istaknimo da su Pardoux i Peng [108] i Peng u radovima [113], [114], [115], [116] doveli u vezu rešenja BSDJ sa rešenjima nekih stohastičkih nelinearnih paraboličnih parcijalnih diferencijalnih jednačina, odnosno izveli su Feynman–Kac formulu. BSDJ takođe imaju veliku primenu u teoriji stohastičke kontrole i stohastičkih igara, na primer u radovima Hamedènea i Lepeltiera [43], Hamedènea [46], i drugih.

Iako su BSDJ privukle veliku pažnju poslednje dve decenije, i dalje su saznanja do kojih se došlo o procesu z manja od onih koja su postignuta za proces y. Najveći problem u proučavanju procesa z je u činjenici da je z neka vrsta "izvoda"procesa y, što se može povezati sa Feynman-Kac formulom (videti [86] i [109]), ili sa Clarc-Oconovom formulom (videti [99]). Ovo ima za posledicu da je proces z generalno komplikovaniji za ispitivanje od procesa y. Nasuprot ovoj teorijskoj činjenici, u praksi je proces z veoma bitan. Na primer, pomoću procesa z se opisuje strategija zaštite u finansijama. Imajući u vidu značaj primene procesa z i izazov u teoriji vezan za ispitivanje osobina ovog procesa, on zauzima značajno mesto u teoriji BSDJ. Pošto je rešenje BSDJ uređeni par (y, z), shodno tome je podjednako bitno ispitati ponašanje oba procesa.

Glavna tema ovog dela disertacije je uticaj različitih tipova perturbacija na rešenje BSDJ. Konkretno, tema ove glave je proučavanje klase BSDJ čiji su koeficijenti aditivno perturbovani, pri čemu su perturbacije zavisne od malog parametra. Cilj je upoređivanje rešenja ove jednačine u L^p-smislu, za $p \geq 2$, sa rešenjima odgovarajuće jednostavnije neperturbovane jednačine.

Generalno, perturbovane stohastičke diferencijalne jednačine su tema koju su proučavali mnogi, kako se teorijskog aspekta, tako i sa aspekta primene u različitim oblastima nauke i inženjerstva. Značaj primene perturbacija u stohastičkim modelima je veliki, pre svega jer znatno olakšava izračunavanja prilikom korekcije modela. Na primer, neki stohastički modeli u analitičkoj mehanici, teoriji kontrole i populacionoj dinamici, koji opisuju kompleksne pojave koje zavise od perturbacija, mogu se u nekim slučajevima uporediti i aproksimirati odgovarajućim neperturbovanim modelom jednostavnijeg oblika. Pritom aproksimacija povlači sa sobom i odgovarajuću grešku, koja zavisi od ograničenja uvedenih perturbacija.

Treba istaći rad [34] Friedlina i Wentzella koji su proučavali stohastički perturbovane dinamičke sisteme i rad [74] Khasminskog koji je među prvima posmatrao stohastičke diferencijalne jednačine Itôa sa malim parametrom. Takođe, Stoyanov [127] je između ostalog, proučavao regularno perturbovane stohastičke diferencijalne jednačine.

Početna inspiracija za uvođenje perturbovanih BSDJ se zasniva na radu [128] Stoyanova i Boteva u kome su proučavani neki specijani tipovi aditivnih perturbacija za obične stohastičke diferencijalne jednačine Itôvog tipa. Značajni rezultati u proučavanju različitih složenih tipova perturbovanih stohastičkih diferencijalnih i integrodiferencijalnih jednačina vezuju se za autore Janković i Jovanović (videti [59]-[66]). Janković i Jovanović su svoja istraživanja na polju perturbacija sumirali u monografiji [61]. Mnoge nejednakosti i metode korišćene u ovoj monografiji su bile od velikog značaja pri pisanju ove disertacije. Nasuprot tehnici koja se koristi kod forward stohastičkih diferencijalnih jednačina, tehnika koja se primenjuje pri ispitivanju uticaja perturbacija na rešenja BSDJ je u mnogome drugačija i suštinski je uslovljena samom postavkom BSDJ.

2.1.1 Uvodni pojmovi i poznati rezultati

Glavna tema ovog poglavlja je BSDJ sledećeg oblika,

$$y(t) = \xi - \int_t^T f(y(s), z(s), s)ds - \int_t^T \big[g(y(s), s) + z(s)\big]\, dW(s), \quad t \in [0, T], \quad (2.2)$$

sa finalnim uslovom $x(T) = \xi$. U oblasti stohastičke kontrole, adaptirani proces $z(t)$ se smatra *procesom kontrole*, a proces $y(t)$ *procesom stanja sistema*. Cilj je odrediti adaptirani proces $z(t)$ tako da stanje sistema $y(t)$ bude dovedeno do fiksirane vrednosti ξ u trenutku $t = T$. Ovaj problem se naziva *problemom dostizanja krajnje vrednosti* ("reachability problem"). Za BSDJ (2.2) se određuje adaptirani par procesa $\{(y(t), z(t)), t \in [0, T]\}$ koji skoro izvesno zadovoljava tu jednačinu. Ovakav uređeni par se naziva adaptiranim rešenjem jednačine (2.2). Pri tom postoji sloboda odabira procesa $z(t)$ i u zavisnosti od njega se određuje proces $y(t)$.

Osnovna pretpostavka je da su sve slučajne promenljive i procesi definisani u odnosu na prostor verovantoća $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, P)$, sa filtracijom $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ koja zadovoljava uobičajne uslove (rastuća je, neprekidna sa desna i $\mathcal{F}_0$ sadrži sve događaje verovatnoće nula) koja je generisana m-dimenzionalnim Brownovim kretanjem $W = \{W(t)\}_{t\geq 0}$, $\mathcal{F}_t = \sigma\{W(s), 0 \leq s \leq t\}$. Kao i do sada, standardna oznaka euklidske norme u prostoru R^n je $|\cdot|$, a trag-norma matrice B ima uobičajnu oznaku $||B|| = \sqrt{trace[B^T B]}$, gde je B^T oznaka za transponovanu matricu (vektor).

Pre daljeg ispitivanja BSDJ, potrebno je adaptirati formulu Itôa koja je uvedena u Poglavlju 1.3, da bi se mogla primeniti na BSDJ.

Neka su zadovoljeni svi uslovi Teoreme 1.3.4. Tada se iz (1.4) jednostavno može izvesti sledeći oblik formule Itôa u integralnom obliku,

$$\begin{aligned} f(t,x(t)) = f(t,x(T)) &- \int_t^T \left[f'(s,x(s)) + f'_x(s,x(s))a(s) + \frac{1}{2} f''_{xx}(s,x(s))b^2(s) \right] ds \\ &- \int_t^T f'_x(s,x(s))a(s)\, dW(s), \quad t \geq 0. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Za proizvoljno $r > 0$, neka $L^r_{\mathcal{F}_T}(\Omega; R^d)$ označava skup slučajnih promenljivih X sa vrednostima u R^d, za koje važi:

(i) $E|X|^r < \infty$;

(ii) X je $\mathcal{F}_T$-merljiva slučajna promenljiva.

Slično, $\mathcal{M}^r([0,T]; R^d)$ je skup procesa $\{\varphi(t), t \in [0,T]\}$ iz prostora R^d, za koje važi:

(i) $|\varphi|_{\mathcal{M}^r} = E\int_0^T |\varphi(t)|^r\, dt < \infty$;

(ii) $\varphi(t)$ je $\mathcal{F}_t$-adaptiran proces za $t \in [0,T]$.

Uvodimo sledeću hipotezu:

$(\mathbf{H_0})$ Za finalni uslov i funkcije f i g jednačine (2.2) važi:

(i) $\xi \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbf{P}; \mathbb{R}^d)$;

(ii) $f : \Omega \times [0,T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d\times m} \to \mathbb{R}^d$, $g : \Omega \times [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times m}$ su merljive funkcije, tj. f je $\mathcal{B}_d \otimes \mathcal{B}_{d\times m} \otimes \mathcal{P}$-merljiva, g je $\mathcal{B}_d \otimes \mathcal{P}$-merljiva, gde je $\mathcal{P}$ σ-algebra $\mathcal{F}_t$-progresivno merljivih podskupova od $[0,T] \times \Omega$;

(iii) $f(\cdot,0,0) \in \mathcal{M}^2([0,T]; \mathbb{R}^d)$, $g(\cdot,0,0) \in \mathcal{M}^2([0,T]; \mathbb{R}^{d\times m})$.

Definicija 2.1.1 *Par stohastičkih procesa*

$$(y,z) = \{(y(t), z(t)), t \in [0,T]\} \in \mathcal{M}^2([0,T]; R^d) \times \mathcal{M}^2([0,T]; R^{d\times m})$$

je adaptirano rešenje BSDJ (2.2) ako:

(i) $f(\cdot, y(\cdot), z(\cdot)) \in \mathcal{M}^2([0,T], \mathbb{R}^d)$ *i* $g(\cdot, y(\cdot), z(\cdot)) \in \mathcal{M}^2([0,T]; \mathbb{R}^{d\times m})$*;*

(ii) jednačina (2.2) je zadovoljena za svako $t \in [0,T]$ *skoro izvesno.*

Definicija 2.1.2 *Rešenje* $(y,z)=\{(y(t),z(t)),t\in[0,T]\}$ *jednačine (2.2) je jedinstveno ako za svako drugo rešenje* $(\bar{y},\bar{z})=\{\bar{y}(t),\bar{z}(t)\},t\in[0,T]\}$ *važi*

$$P\{y(t)=\bar{y}(t),\, 0\le t\le T\}=1, \quad E\int_0^T ||z(t)-\bar{z}(t)||^2\,dt=0.$$

Uvodi se još jedna hipoteza za funkcie f i g, poznati Lipshitzov uslov.

$(\mathbf{H_1})$ Funkcije f i g zadovoljavaju uniformni Lipshitzov uslov ako postoji pozitivna konstanta $L>0$, tako da za svako $y,y'\in R^d$, $z,z'\in R^{d\times m}$ i $t\in[0,T]$ važi

$$|f(t,y,z)-f(t,y',z')|^2\le L(|y-y'|^2+||z-z'||^2) \;\; \text{s.i.} \tag{2.4}$$
$$||g(t,y)-g(t,y')||^2\le L|y-y'|^2 \;\; \text{s.i.} \tag{2.5}$$

Iz $(\mathbf{H_0})$, (2.4), (2.5) i $(y,z)\in\mathcal{M}^2([0,T];R^d)\times\mathcal{M}^2([0,T];R^{d\times m})$, sledi da je $f(\cdot,y,z)\in\mathcal{M}^2([0,T];R^d)$, $g(\cdot,y)\in\mathcal{M}^2([0,T];R^{d\times m})$.

Za svako $y,y'\in R^d$, $z,z'\in R^{d\times m}$ i $t\in[0,T]$, primetimo da iz hipoteza $(\mathbf{H_0})$ i $(\mathbf{H_1})$ sledi uslov linearnog rasta za funkcije f i g,

$$|f(t,y,z)|^2 \le \bar{L}(1+|y|^2+||z||^2) \;\; \text{s.i.} \tag{2.6}$$
$$||g(y,t)||^2 \le \bar{L}(1+|y|^2) \;\; \text{s.i.} \tag{2.7}$$

za neku generisanu konstantu $\bar{L}>0$.

U [89] i [107] su dati osnovni uslovi egzistencije i jedinstvenosti rešenja jednačine (2.2) ako funkcije f i g zadovoljavaju hipoteze $(\mathbf{H_0})$ i $(\mathbf{H_1})$.

Teorema 2.1.1 (Mao [89], Pardoux, Peng [107]) *Ako finalni uslov* ξ *i funkcije* f *i* g *zadovoljavaju hipoteze* $(\mathbf{H_0})$ *i* $(\mathbf{H_1})$, *onda postoji jedinstveno rešenje*

$$\{(y(t),z(t)),t\in[0,T]\}\in\mathcal{M}^2([0,T];R^d)\times\mathcal{M}^2([0,T];R^{d\times m})$$

jednačine (2.2).

Egzistencija i jedinstvenost rešenja BSDJ (2.2) se može dokazati i pri nekim drugim uslovima. Na primer za klasu jednačina čiji koeficijenti zadovljavaju nelipšicovske, integralne uslove dokaz se može naći u [88].

U ispitivanju osobina rešenja BSDJ bitno je ponašanje viših momenata rešenja.

Teorema 2.1.2 (Mao [88]) *Neka je* $p\ge 2$ *i* $\xi\in L^p(\Omega,\mathcal{F}_T,\mathbf{P};\mathbb{R}^d)$. *Ako funkcije* f *i* g *zadovoljavaju uslove Teoreme 2.1.1 i ako je* $f(\cdot,0,0)\in\mathcal{M}^p([0,T];\mathbb{R}^d)$, $g(\cdot,0,0)\in\mathcal{M}^p([0,T];\mathbb{R}^{d\times m})$, *tada za rešenje BSDJ (2.2) važi*

$$E|y(t)|^p<\infty,\;\; t\in[0,T], \qquad E\int_0^T |y(t)|^{p-2}||z(t)||^2<\infty. \tag{2.8}$$

Uporedo sa jednačinom (2.2), posmatra se i njoj pridružena perturbovana jednačina u kojoj su koeficijenti drifta i difuzije jednačine (2.2) aditivno perturbovani,

$$y_\varepsilon(t) = \xi_\varepsilon - \int_t^T \tilde{f}(s, y_\varepsilon(s), z_\varepsilon(s), \varepsilon)\, ds - \int_t^T \big[\tilde{g}(s, y_\varepsilon(s), \varepsilon) + z_\varepsilon(s)\big]\, dW(s), \qquad (2.9)$$

gde je $t \in [0,T]$, $\xi_\varepsilon = y_\varepsilon(T)$, i $\xi_\varepsilon, \tilde{f}, \tilde{g}$ zavise od malog parametra $\varepsilon \in (0,1)$. Jednačina (2.9) izvedena je iz jednčine (2.2) kada je koeficijentima drifta i difuzije dodata odgovarajuća funkcija, koja pored zavisnosti od procesa stanja i kontrolnog procesa, zavisi i od malog parametra ε. Pritom su $\xi_\varepsilon, \tilde{f}, \tilde{g}$ definisani na isti način kao ξ, f, g, respektivno. Osim toga, ako su $\xi_\varepsilon, \tilde{f}, \tilde{g}$ bliski u nekom smilu sa ξ, f, g, očekuje se da i rešenja $\{(y_\varepsilon(t), z_\varepsilon(t)), t \in [0,T]\}$ i $\{(y(t), z(t)), t \in [0,T]\}$ budu bliska u odgovarajućem smilu. Shodno tome, jednačina (2.9) se smatra *perturbovanom jednačinom* u odnosu na odgovarajuću jednostavniju *neperturbovanu jednačinu* (2.2).

Bliskost rešenja perturbovane jednačine (2.9) i neperturbovane jednačine (2.2) se zasniva na problemima stabilnosti BSDJ (videti [9], [52], [70]). U slučaju da je $g \equiv 0$ i da funkcija f zadovoljava Lipshitzov uslov, Karoui, Pardoux i Quenez [70] su uz odgovarajuće dodatne pretpostavke dokazali da ako

$$E \int_0^T |\tilde{f}(s, y(s), z(s), \varepsilon) - f(s, y(s), z(s))|^2\, ds \to 0, \quad \varepsilon \to 0,$$

onda

$$(\forall t \in [0,T]) \quad E|y_\varepsilon(t) - y(t)|^2 + E\int_0^T ||z_\varepsilon(t) - z(t)||^2\, dt \to 0, \quad \varepsilon \to 0. \qquad (2.10)$$

Ovaj rezultat je poboljšan u [52], gde je dokazano da (2.10) sledi i iz slabijeg uslova, tj. dovoljno je da važi

$$E\left|\int_0^T [\tilde{f}(s, y(s), z(s), \varepsilon) - f(s, y(s), z(s))]\, ds\right|^2 \to 0, \;\; \varepsilon \to 0.$$

Ispitivanje svojstava rešenja BSDJ (2.9) može biti komplikovano zbog složenosti njenog oblika. Ova činjenica je motivacija za uvođenje specijalnih uslova koji se jednostavno proveravaju, a koji sa druge strane garantuju L^p-bliskost rešenja jednačina (2.2) i (2.9), odakle se jednostvno izvode neka svojstva BSDJ (2.9).

Novi rezultati na ovu temu su izloženi do kraja Poglavlja 2.1 i predstavljaju oginiralne rezultate koji su publikovani u radu [62], S. Janković, M. Jovanović, J. Đorđević, *Perturbed backward stochastic dfferential equations*, Mathematical and Computer Modelling 55 (2012) 1734-1745.

2.1.2 Formulacija problema i preliminarni rezultati

Jedna od značajnih primena BSDJ je modeliranje cena evropskih opcija koje se svodi na rešavanje linearne BSDJ

$$y(t) = \xi - \int_t^T \big[r(s)y(s) + \theta(s)z(s)\big]\, ds - \int_t^T z(s)\, dW(s), \quad t \in [0,T],$$

gde je ξ naplata, $r(t)$ kamatna stopa, $\theta(t)$ predstavlja stopu premije rizika i T je datum dospeća. Međutim, kako cena evropske opcije može zavisiti i od nekih parametara i slučajnih uticaja, tako se može modelirati nelinearnom BSDJ oblika,

$$\begin{aligned} y_\varepsilon(t) = \xi_\varepsilon - \int_t^T & \big[r(s)y_\varepsilon(s) + \theta(s)z_\varepsilon(s) + \alpha(s, y_\varepsilon(s), z_\varepsilon(s), \varepsilon)\big]\, ds \\ & - \int_t^T \big[z_\varepsilon(s) + \beta(s, y_\varepsilon(s), \varepsilon)\big]\, dW(s), \quad t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Ako su za svako t, y, z i malo ε, vrednosti za $\alpha(t, y, z, \varepsilon)$ i $\beta(t, y, \varepsilon)$ male, i ako su naplate ξ i ξ_ε bliske vrednosti, očekuje se da se $y(t)$ i $y_\varepsilon(t)$ takođe razlikuju za malu vrednost i da su kontrolni procesi $z(t)$ i $z_\varepsilon(t)$ bliski u određenom smislu.

Glavna tema daljeg proučavanja je *aditivno perturbovana* BSDJ, odnosno jednačina (2.9) kod koje je $\tilde{f}(t, y, z) = f(t, y, z) + \alpha(t, y, z, \varepsilon)$, $\tilde{g}(t, y) = g(t, y) + \beta(t, y, \varepsilon)$. Preciznije, posmatra se sledeća jednačina

$$\begin{aligned} y_\varepsilon(t) = \xi_\varepsilon - \int_t^T & \big[f(s, y_\varepsilon(s), z_\varepsilon(s)) + \alpha(s, y_\varepsilon(s), z_\varepsilon(s), \varepsilon)\big]\, ds \\ & - \int_t^T \big[g(s, y_\varepsilon(s)) + z_\varepsilon(s) + \beta(s, y_\varepsilon(s), \varepsilon)\big]\, dW(s), \quad t \in [0, T], \end{aligned} \tag{2.11}$$

čije se rešenje upoređuje u L^p-smislu sa rešenjem neperturbovane BSDJ (2.2). U skladu sa tim, uvode se sledeće pretpostavke:

A1. Za finalne uslove $\xi, \xi_\varepsilon \in L^p_{\mathcal{F}_T}(\Omega; R^d)$ postoji neslučajna funkcija $\delta_T(\varepsilon)$ takva da je

$$E|\xi_\varepsilon - \xi|^p \le \delta_T(\varepsilon).$$

A2. Za funkcije $\alpha(\cdot)$ i $\beta(\cdot)$ definisane kao f i g, respektivno i zavisne od $\varepsilon \in (0, 1)$, postoje neslučajne ograničene funkcije $\bar{\alpha}(\cdot)$ i $\bar{\beta}(\cdot)$, definisane na $[0, T]$ i zavisne od ε, takve da je

$$\sup_{(y,z)\in R^d \times R^{d\times m}} |\alpha(t, y, z, \varepsilon)| \le \bar{\alpha}(t, \varepsilon) \text{ s.i.}, \quad \sup_{y \in R^d} ||\beta(t, y, \varepsilon)|| \le \bar{\beta}(t, \varepsilon) \text{ s.i.}$$

A3. Pretpostavlja se, bez posebnog isticanja uslova, da postoje jedinstvena rešenja $\{(y(t), z(t)), t \in [0, T]\}$ i $\{(y_\varepsilon(t), z_\varepsilon(t)), t \in [0, T]\}$ jednačina (2.2) i (2.9), respektivno, za koja je

$$\begin{aligned} & E \sup_{t\in[0,T]} |y(t)|^p < \infty, \quad E\left(\int_0^T ||z(t)||^2 dt\right)^{p/2} < \infty, \\ & E \sup_{t\in[0,T]} |y_\varepsilon(t)|^p < \infty, \quad E\left(\int_0^T ||z_\varepsilon(t)||^2\, dt\right)^{p/2} < \infty. \end{aligned}$$

Takođe, svi Lebesgueovi i Itôvi integrali koji se pojavljuju u dokazima su korektno definisani.

Treba istaći da je ***A3*** zadovoljeno ako $\xi, \xi^\varepsilon f, g, \alpha, \beta$ ispunjavaju neke od uslova egzistencije i jedinstvenosti rešenja u L^p-smislu, kao na primer u radovima [89], [107]. U nastavku će biti isticani samo uslovi koji su eksplicitno korišćeni u proučavanju.

Ako za proizvoljno $t \in [0,T]$ i ε dovoljno malo, $\delta_T(\varepsilon), \bar{\alpha}(t,\varepsilon), \bar{\beta}(t,\varepsilon)$ imaju male vrednosti, logično je očekivati da su rešenja jednačina (2.2) i (2.9) bliska u nekom smislu. U skladu sa ovim zahtevom, naziv *male perturbacije* je prikladan za $\xi_\varepsilon, \alpha(t,y,z,\varepsilon), \beta(t,y,\varepsilon)$.

U nastavku će prvo biti predstavljen jedan pomoćni rezultat koji je značajan u opisu glavnih rezultata – oceni za $E|y_\varepsilon(t) - y(t)|^p$.

Propozicija 2.1.1 *Neka su $\{(y(t), z(t)), t \in [0,T]\}$ i $\{(y_\varepsilon(t), z_\varepsilon(t)), t \in [0,T]\}$ rešenja jednačina (2.2) i (2.9), respektivno, i neka su zadovoljenje pretpostavke **A1** − **A3** i hipoteza $(\mathbf{H_1})$. Tada, za $t \in [0,T]$,*

$$
\begin{aligned}
&E|y_\varepsilon(t) - y(t)|^p \qquad (2.12)\\
&\quad \le \delta_T(\varepsilon) + \int_t^T \varrho(s,\varepsilon)\,ds + c_1 \int_t^T \Big(\delta_T(\varepsilon) + \int_s^T \varrho(r,\varepsilon)\,dr\Big) e^{c_1(s-t)}\,ds,
\end{aligned}
$$

gde je $\varrho(s,\varepsilon) = \frac{2}{lL}\,\bar{\alpha}^p(s,\varepsilon) + l\,\bar{\beta}^p(s,\varepsilon)$, $c_1 = l(pL + \frac{p}{2} - 1) + \frac{pL+p-2}{lL}$ i $l > 4$ je konstanta.

Dokaz. Neka je

$$
\psi_\varepsilon(t) = y_\varepsilon(t) - y(t), \quad \Delta_\varepsilon(t) = E|\psi_\varepsilon(t)|^p.
$$

Oduzimanjem jednačina (2.2) i (2.9) i primenom Itôve formule na $|\psi_\varepsilon(t)|^p$, za $t \in [0,T]$ je

$$
\begin{aligned}
&|\psi_\varepsilon(t)|^p\\
&= |\psi_\varepsilon(T)|^p - p \int_t^T |\psi_\varepsilon(s)|^{p-2} \psi_\varepsilon^T(s)\\
&\qquad \times [f(y_\varepsilon(s), z_\varepsilon(s), s) - f(s, y(s), z(s)) + \alpha(y_\varepsilon(s), z_\varepsilon(s), s, \varepsilon)]\,ds\\
&\quad -\frac{p}{2} \int_t^T |\psi_\varepsilon(s)|^{p-2} ||g(s, y_\varepsilon(s)) - g(s, y(s)) + z_\varepsilon(s) - z(s) + \beta(s, y_\varepsilon(s), \varepsilon)||^2\,ds\\
&\quad -\frac{p(p-2)}{2} \int_t^T |\psi_\varepsilon(s)|^{p-4}\\
&\qquad \times \big|\psi_\varepsilon^T(s)[g(s, y_\varepsilon(s)) - g(s, y(s)) + z_\varepsilon(s) - z(s) + \beta(s, y_\varepsilon(s), \varepsilon)]\big|^2\,ds\\
&\quad -p \int_t^T |\psi_\varepsilon(s)|^{p-2} \psi_\varepsilon^T(s)\\
&\qquad \times [g(s, y_\varepsilon(s)) - g(s, y(s)) + z_\varepsilon(s) - z(s) + \beta(s, y_\varepsilon(s), \varepsilon)]\,dW(s).
\end{aligned}
$$

Kako je

$$
\int_t^T |\psi_\varepsilon(s)|^{p-2} ||g(s, y_\varepsilon(s)) - g(s, y(s)) + z_\varepsilon(s) - z(s) + \beta(s, y_\varepsilon(s), \varepsilon)||^2\,ds
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_t^T |\psi_\varepsilon(s)|^{p-2} ||g(s, y_\varepsilon(s)) - g(s, y(s)) + \beta(s, y_\varepsilon(s), \varepsilon)||^2 \, ds \\
&\quad + \int_t^T |\psi_\varepsilon(s)|^{p-2} ||z_\varepsilon(s) - z(s)||^2 ds \\
&\quad +2 \int_t^T |\psi_\varepsilon(s)|^{p-2} \\
&\qquad \times trace\big[[g(s, y_\varepsilon(s)) - g(s, y(s)) + \beta(s, y_\varepsilon(s), \varepsilon)]^T (z_\varepsilon(s) - z(s))\big] \, ds,
\end{aligned}
$$

to je

$$
\begin{aligned}
&|\psi_\varepsilon(t)|^p + \frac{p}{2} \int_t^T |\psi_\varepsilon(s)|^{p-2} ||z_\varepsilon(s) - z(s)||^2 \, ds \\
&\le |\psi_\varepsilon(T)|^p - p \int_t^T |\psi_\varepsilon(s)|^{p-2} \psi_\varepsilon^T(s) \\
&\qquad \times [f(s, y_\varepsilon(s), z_\varepsilon(s)) - f(s, y(s), z(s)) + \alpha(s, y_\varepsilon(s), z_\varepsilon(s), \varepsilon)] \, ds \\
&\quad - p \int_t^T |\psi_\varepsilon(s)|^{p-2} \\
&\qquad \times trace\big[[g(s, y_\varepsilon(s)) - g(s, y(s)) + \beta(s, y_\varepsilon(s), \varepsilon)]^T (z_\varepsilon(s) - z(s))\big] \, ds \\
&\quad - p \int_t^T |\psi_\varepsilon(s)|^{p-2} \psi_\varepsilon^T(s) \\
&\qquad \times [g(s, y_\varepsilon(s)) - g(s, y(s)) + z_\varepsilon(s) - z(s) + \beta(s, y_\varepsilon(s), \varepsilon)] \, dW(s).
\end{aligned} \tag{2.13}
$$

Ako se na poslednju nejednakost primeni očekivanje i pretpostavka ***A1***, dobija se sledeće,

$$
\begin{aligned}
&\Delta_\varepsilon(t) + \frac{p}{2} E \int_t^T |\psi_\varepsilon(s)|^{p-2} ||z_\varepsilon(s) - z(s)||^2 \, ds \\
&\le \delta_T(\varepsilon) - p \, E \int_t^T |\psi_\varepsilon(s)|^{p-2} \psi_\varepsilon^T(s) \\
&\qquad \times [f(s, y_\varepsilon(s), z_\varepsilon(s)) - f(s, y(s), z(s)) + \alpha(s, y_\varepsilon(s), z_\varepsilon(s), \varepsilon)] \, ds \\
&\quad -p \, E \int_t^T |\psi_\varepsilon(s)|^{p-2} \\
&\qquad \times trace\big[[g(s, y_\varepsilon(s)) - g(s, y(s)) + \beta(s, y_\varepsilon(s), \varepsilon)]^T (z_\varepsilon(s) - z(s))\big] \, ds \\
&\le \delta_T(\varepsilon) + K_1 + K_2.
\end{aligned} \tag{2.14}
$$

Svaki član sa desne strane poslednje nejednakosti će biti ocenjen. U tom cilju, koristiće se elementarna nejednakost (1.7), tj. $\pm 2ab \le a^2/\lambda + \lambda b^2$, gde je $\lambda > 0$ proizvoljna konstanta.

Za ocenu integrala K_1 primenjujemo prethodnu nejednakost za $\lambda = \lambda_1 = lL > 0$, Lipschitzov uslov (2.4) i pretpostavku ***A2***. Tada je

$$
\begin{aligned}
&-\psi_\varepsilon^T(s)[f(s, y_\varepsilon(s), z_\varepsilon(s)) - f(s, y(s), z(s)) + \alpha(s, y_\varepsilon(s), z_\varepsilon(s), \varepsilon)] \\
&\quad \le \left(\frac{lL}{2} + \frac{1}{l} \right) |\psi_\varepsilon(s)|^2 + \frac{1}{l} ||z_\varepsilon(s) - z(s)||^2 + \frac{1}{lL} \bar{\alpha}^2(s, \varepsilon).
\end{aligned} \tag{2.15}
$$

Primenom nejednakosti (1.11) sledi

$$K_1 = -p\,E\int_t^T |\psi_\varepsilon(s)|^{p-2}\psi_\varepsilon^T(s) \tag{2.16}$$
$$\times[f(s,y_\varepsilon(s),z_\varepsilon(s)) - f(s,y(s),z(s)) + \alpha(s,y_\varepsilon(s),z_\varepsilon(s),\varepsilon)]\,ds$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left(\frac{lp}{2}L + \frac{p}{l}\right)\int_t^T \Delta_\varepsilon(s)\,ds \\
&\quad + \frac{p}{l}\,E\int_t^T |\psi_\varepsilon(s)|^{p-2}||z_\varepsilon(s)-z(s)||^2\,ds + \frac{p}{lL}\,E\int_t^T |\psi_\varepsilon(s)|^{p-2}\bar\alpha^2(s,\varepsilon)\,ds \\
&\leq \left(\frac{lp}{2}L + \frac{p}{l} + \frac{p-2}{lL}\right)\int_t^T \Delta_\varepsilon(s)\,ds \\
&\quad + \frac{p}{l}\,E\int_t^T |\psi_\varepsilon(s)|^{p-2}||z_\varepsilon(s)-z(s)||^2\,ds + \frac{2}{lL}\int_t^T \bar\alpha^p(s,\varepsilon)\,ds.
\end{aligned}$$

Ocena za K_2 se dobija analogno. Primenom navedene elementarne nejednakosti za $\lambda = \lambda_2 = 2/l$ i (2.5) je

$$-trace\big[[g(s,y_\varepsilon(s)) - g(s,y(s)) + \beta(s,y_\varepsilon(s),\varepsilon)]^T(z_\varepsilon(s)-z(s))\big] \tag{2.17}$$
$$\leq \frac{lL}{2}\,|y_\varepsilon(s)-y(s)|^2 + \frac{l}{2}\,\bar\beta^2(s,\varepsilon) + \frac{1}{l}\,||z_\varepsilon(s)-z(s)||^2.$$

Otuda je

$$K_2 = -p\,E\int_t^T |\psi_\varepsilon(s)|^{p-2} \tag{2.18}$$
$$\begin{aligned}
&\quad\times trace\big[[g(s,y_\varepsilon(s)) - g(s,y(s)) + \beta(s,y_\varepsilon(s),\varepsilon)]^T(z_\varepsilon(s)-z(s))\big]\,ds \\
&\leq \left(\frac{lp}{2}L + \frac{lp}{2} - l\right)\int_t^T \Delta_\varepsilon(s)\,ds \\
&\quad + \frac{p}{l}\,E\int_t^T |\psi_\varepsilon(s)|^{p-2}||z_\varepsilon(s)-z(s)||^2\,ds + l\int_t^T \bar\beta^p(s,\varepsilon)\,ds.
\end{aligned}$$

Zamenom ocena za K_1 i K_2, tj. (2.16) i (2.18) u (2.14), dobija se

$$\Delta_\varepsilon(t) + \frac{l-4}{2l}p\,E\int_t^T |\psi_\varepsilon(s)|^{p-2}||z_\varepsilon(s)-z(s)||^2\,ds \tag{2.19}$$
$$\leq \delta_T(\varepsilon) + \int_t^T \varrho(s,\varepsilon)\,ds + c_1\int_t^T \Delta_\varepsilon(s)\,ds,$$

gde je $\varrho(s,\varepsilon) = \frac{2}{lL}\,\bar\alpha^p(s,\varepsilon) + l\,\bar\beta^p(s,\varepsilon)$ i $c_1 = l(pL + \frac{p}{2} - 1) + \frac{pL+p-2}{lL}$. Kako je $l > 4$, sledi da je

$$\Delta_\varepsilon(t) \leq \delta_T(\varepsilon) + \int_t^T \varrho(s,\varepsilon)\,ds + c_1\int_t^T \Delta_\varepsilon(s)\,ds. \tag{2.20}$$

Sada ocena (2.12) direktno sledi primenom Gronwall-Bellmanove nejednakosti (Teorema 1.5.4) na (2.20). $\diamondsuit$

Primetimo da se ocene (2.15) i (2.17) mogu dobiti pomoću nejednakosti $\pm 2ab \leq a^2/\lambda + \lambda b^2$ za proizvoljno $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, sa ograničenjem da konstanta koja množi $E\int_{t_0}^T |z_\varepsilon(s)|^{p-2}|y_\varepsilon(s) - y(s)|^2\, ds$ u (2.19) ostane pozitivna. Međutim, uslov $l > 4$ je dobijen za $\lambda_1 = lL$ i $\lambda_2 = 2/l$, u cilju optimizacije primera u Sekciji 2.1.5.

2.1.3 Ocena L^p-razlike rešenja

U cilju određivanja intervala $[\bar{t}(\eta), T] \subset [0, T]$ na kome je L^p-razlika rešenja BSDJ (2.2) i (2.9) manja od unapred zadate vrednosti $\eta > 0$, prvo će biti predstavljen pomoćni rezultat, L^p-stabilnost rešenja BSDJ (2.2).

Teorema 2.1.3 *Neka su zadovoljeni uslovi Propozicije 2.1.1 i neka $\delta_T(\varepsilon)$, $\bar{\alpha}(t, \varepsilon)$ $\bar{\beta}(t, \varepsilon)$ uniformno teže nuli na $t \in [0, T]$, kada ε teži nuli. Tada,*

$$\sup_{t\in[0,T]} E|y_\varepsilon(t) - y(t)|^p \to 0, \quad \varepsilon \to 0 \tag{2.21}$$

i

$$E\left(\int_0^T ||z_\varepsilon(s) - z(s)||^2\, ds\right)^{\frac{p}{2}} \to 0, \quad \varepsilon \to 0. \tag{2.22}$$

Dokaz. Označimo sa

$$\tilde{\alpha}(\varepsilon) = \sup_{t\in[0,T]} \bar{\alpha}(t, \varepsilon), \quad \tilde{\beta}(\varepsilon) = \sup_{t\in[0,T]} \bar{\beta}(t, \varepsilon)$$

i

$$\Phi(\varepsilon) = \max\{\delta_T(\varepsilon), \tilde{\alpha}^p(\varepsilon), \tilde{\beta}^p(\varepsilon)\}. \tag{2.23}$$

Jednostavno je zaključiti da (2.21) sledi direktno iz Propozicije 2.1.1. Relacija (2.12) povlači da je za svako $t \in [0, T]$

$$\Delta_\varepsilon(t) \leq \Phi(\varepsilon)\left[\left(1 + \frac{c_2}{c_1}\right)e^{c_1(T-t)} - \frac{c_2}{c_1}\right], \tag{2.24}$$

gde je $c_2 = \frac{2}{lL} + l$. Odatle, $\sup_{t\in[0,T]} \Delta_\varepsilon(t) \to 0$ kada $\varepsilon \to 0$, jer $\Phi(\varepsilon) \to 0$ kada $\varepsilon \to 0$.

Da bi se dokazalo tvrđenje (2.22), odredićemo razliku rešenja na proizvoljnom intervalu $[t_0, T] \subseteq [0, T]$, a nakon toga, za $t_0 = 0$ ćemo dobiti odgovarajuću ocenu na $[0, T]$.

Neka je $t_0 \leq u \leq t \leq v \leq T$. Oduzimanjem jednačina (2.2) i (2.9) se dobija

$$\begin{aligned}
&\int_u^t (z_\varepsilon(s) - z(s))\, dW(s) \\
&\quad = y_\varepsilon(t) - y(t) - (y_\varepsilon(u) - y(u)) \\
&\qquad - \int_u^t [f(s, y_\varepsilon(s), z_\varepsilon(s)) - f(s, y(s), z(s)) + \alpha(s, y_\varepsilon(s), z_\varepsilon(s), \varepsilon)]\, ds \\
&\qquad - \int_u^t [g(s, y_\varepsilon(s)) - g(s, y(s)) + \beta(s, y_\varepsilon(s), \varepsilon)]\, dW(s),
\end{aligned}$$

odnosno,

$$E \sup_{t\in[u,v]} \left| \int_u^t (z_\varepsilon(s) - z(s))\, dW(s) \right|^p \le 4^{p-1}\, [2I_1 + I_2 + I_3], \tag{2.25}$$

gde je

$$\begin{aligned} I_1 &= E \sup_{t\in[t_0,T]} |\psi_\varepsilon(t)|^p, \\ I_2 &= E \sup_{t\in[u,v]} \left| \int_u^t [f(s, y_\varepsilon(s), z_\varepsilon(s)) - f(s, y(s), z(s)) + \alpha(s, y_\varepsilon(s), z_\varepsilon(s), \varepsilon)]\, ds \right|^p, \\ I_3 &= E \sup_{t\in[u,v]} \left| \int_u^t [g(s, y_\varepsilon(s)) - g(s, y(s)) + \beta(s, y_\varepsilon(s), \varepsilon)]\, dW(s) \right|^p. \end{aligned}$$

Ocenimo prvo I_1. Iz (2.13), (2.15) i (2.17) se dobija

$$\begin{aligned} |\psi_\varepsilon(t)|^p \le |\psi_\varepsilon(T)|^p &+ \Big(lpL + \frac{p}{l}\Big) \int_t^T |\psi_\varepsilon(s)|^p\, ds + \frac{p}{2} \int_t^T \varrho(s,\varepsilon) |\psi_\varepsilon(s)|^{p-2}\, ds \\ &-p \int_t^T |\psi_\varepsilon(s)|^{p-2} \psi_\varepsilon^T(s) \\ &\qquad \times [g(s, y_\varepsilon(s)) - g(s, y(s)) + z_\varepsilon(s) - z(s) + \beta(s, y_\varepsilon(s), \varepsilon)]\, dW(s), \end{aligned}$$

odakle je

$$\begin{aligned} I_1 \le \delta_T(\varepsilon) &+ \Big(lpL + \frac{p}{l}\Big) \int_{t_0}^T \Delta_\varepsilon(s)\, ds + \frac{p}{2} E \int_{t_0}^T \varrho(s,\varepsilon)\, |\psi_\varepsilon(s)|^{p-2}\, ds \\ &+ E \sup_{t\in[t_0,T]} \Bigg(-p \int_t^T |\psi_\varepsilon(s)|^{p-2} \psi_\varepsilon^T(s) \\ &\quad \times [g(s, y_\varepsilon(s)) - g(s, y(s)) + z_\varepsilon(s) - z(s) + \beta(s, y_\varepsilon(s), \varepsilon)]\, dW(s) \Bigg). \end{aligned} \tag{2.26}$$

Označimo sa

$$\theta(s,\varepsilon) = p\, |\psi_\varepsilon(s)|^{p-2} \psi_\varepsilon^T(s)\, [g(s, y_\varepsilon(s)) - g(s, y(s)) + z_\varepsilon(s) - z(s) + \beta(s, y_\varepsilon(s), \varepsilon)]$$

i sa J poslednji član sa desne strane nejednakosti (2.26). Tada je

$$\begin{aligned} J &= E \sup_{t\in[t_0,T]} \Big(-\int_t^T \theta(s,\varepsilon)\, dW(s) \Big) \\ &= E \sup_{t\in[t_0,T]} \Big(-\int_{t_0}^T \theta(s,\varepsilon)\, dW(s) + \int_{t_0}^t \psi(s,\varepsilon)\, dW(s) \Big) \\ &= E \sup_{t\in[t_0,T]} \Big(\int_{t_0}^t \theta(s,\varepsilon)\, dW(s) \Big). \end{aligned}$$

Primenom Burkholder–Davis–Gundyjeve nejednakosti (Teorema 1.5.3) i Youngove nejednakosti (1.8) za $\alpha = \frac{1}{2}$, dobija se

$$
\begin{aligned}
J &\leq 4\sqrt{2}p\, E\Bigg(\int_{t_0}^{T} |\psi_\varepsilon(s)|^{2p-2} \\
&\quad \times ||g(s, y_\varepsilon(s)) - g(s, y(s)) + z_\varepsilon(s) - z(s) + \beta(s, y_\varepsilon(s), \varepsilon)||^2\, ds\Bigg)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq 4\sqrt{2}p\, E\Bigg(\sup_{s\in[t_0,T]} |\psi_\varepsilon(s)|^{p} \int_{t_0}^{T} |\psi_\varepsilon(s)|^{p-2} \\
&\quad \times ||g(s, y_\varepsilon(s)) - g(s, y(s)) + z_\varepsilon(s) - z(s) + \beta(s, y_\varepsilon(s), \varepsilon)||^2\, ds\Bigg)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{1}{2}\, I_1 + 16p^2 E \int_{t_0}^{T} |\psi_\varepsilon(s)|^{p-2} \\
&\quad \times ||g(s, y_\varepsilon(s)) - g(s, y(s)) + z_\varepsilon(s) - z(s) + \beta(s, y_\varepsilon(s), \varepsilon)||^2\, ds \\
&\leq \frac{1}{2}\, I_1 + 48p(pL + p - 2) \int_{t_0}^{T} \Delta_\varepsilon(s)\, ds + 96p\, \tilde{\beta}^p(\varepsilon)(T - t_0) \\
&\quad + 48p^2 E \int_{t_0}^{T} |\psi_\varepsilon(s)|^{p-2} ||z_\varepsilon(s) - z(s)||^2\, ds.
\end{aligned}
$$

Iz ovoga i ocene (2.19) je

$$
\begin{aligned}
&\frac{l-4}{2l} p \cdot E \int_{t_0}^{T} |\psi_\varepsilon(s)|^{p-2} ||z_\varepsilon(s) - z(s)||^2\, ds \\
&\qquad \leq \Delta_\varepsilon(t) + \frac{l-4}{2l} p \cdot E \int_{t_0}^{T} |\psi_\varepsilon(s)|^{p-2} ||z_\varepsilon(s) - z(s)||^2\, ds \\
&\qquad \leq \delta_T(\varepsilon) + \int_{t}^{T} \rho(s, \varepsilon)\, ds + c_1 \int_{t}^{T} \Delta_\varepsilon(s)\, ds.
\end{aligned}
$$

Dalje, iz (2.23) i (2.24) je

$$
\begin{aligned}
&\delta_T(\varepsilon) \leq \Phi(\varepsilon), \qquad \int_{t}^{T} \rho(s, \varepsilon)\, ds \leq c_2\, \Phi(\varepsilon)\, (T - t), \\
&\int_{t}^{T} \Delta_\varepsilon(s)\, ds \leq \Phi(\varepsilon) \int_{t}^{T} \left[\left(1 + \frac{c_2}{c_1}\right) e^{c_1(T-s)} - \frac{c_2}{c_1}\right] ds \\
&\qquad\qquad = \Phi(\varepsilon)\, \frac{1}{c_1} \left[\left(1 + \frac{c_2}{c_1}\right) \left(e^{c_1(T-t)} - 1\right) - c_2\, (T - t)\right].
\end{aligned} \tag{2.27}
$$

Na osnovu ovih ocena je

$$
\frac{l-4}{2l} p \cdot E \int_{t_0}^{T} |\psi_\varepsilon(s)|^{p-2} ||z_\varepsilon(s) - z(s)||^2\, ds \leq \Phi(\varepsilon) \left[\left(1 + \frac{c_2}{c_1}\right) e^{c_1(T-t_0)} - \frac{c_2}{c_1}\right].
$$

Poslednja ocena i (2.24) povlače da je

$$
J \leq \frac{1}{2}\, I_1 + \Phi(\varepsilon) \cdot \varphi(T - t_0), \tag{2.28}
$$

gde je

$$\begin{aligned}
&\varphi(T-t_0)\\
&\quad = 48p\left[\left(1+\frac{c_2}{c_1}\right)\left(c_3+\frac{2l}{l-4}\right)\left(e^{c_1(T-t_0)}-1\right)+(2-c_2c_3)(T-t_0)+\frac{2l}{l-4}\right]
\end{aligned}$$

i $c_3=(pL+p-2)/c_1$.

Iz (2.26), (2.28) i prethodne ocene jednostavno sledi

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\,I_1 \le \delta_T(\varepsilon)+\left(lpL+\frac{p}{l}\right)\int_{t_0}^{T}\Delta_\varepsilon(s)\,ds\\
+\frac{p}{2}\,E\int_{t_0}^{T}\rho(s,\varepsilon)|\psi_\varepsilon(s)|^{p-2}\,ds+\Phi(\varepsilon)\cdot\varphi(T-t_0).
\end{aligned}$$

Imajući u vidu (2.27) i da je $|\psi_\varepsilon(s)|^{p-2}=|\psi_\varepsilon(s)|^{p-2}\cdot 1^2\le\frac{p-2}{p}\,|\psi_\varepsilon(s)|^p+\frac{2}{p}$, dobija se sledeće

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\,I_1\le\Phi(\varepsilon)\\
&\qquad\times\left\{1+\left(lpL+\frac{p}{l}+\frac{p-2}{2}\,c_2\right)\frac{1}{c_1}\left[\left(1+\frac{c_2}{c_1}\right)\left(e^{c_1(T-t_0)}-1\right)-c_2(T-t_0)\right]\right.\\
&\qquad\qquad\left.+c_2(T-t_0)+\varphi(T-t_0)\right\}.
\end{aligned}$$

Pošto je $lpL+\frac{p}{l}+\frac{p-2}{2}\,c_2=c_1$, onda je konačno

$$I_1\le\Phi(\varepsilon)\cdot\tilde{\varphi}(T-t_0),$$

gde je

$$\tilde{\varphi}(T-t_0)=2\left[\left(1+\frac{c_2}{c_1}\right)e^{c_1(T-t_0)}-\frac{c_2}{c_1}+\varphi(T-t_0)\right].$$

Za ocenu I_2 primenimo Cauchy–Schwarzovu nejednakost (1.9), elementarnu nejednakost (1.10), odnosno $(a+b)^2\le 2(a^2+b^2)$ i $(a+b+c)^2\le 3(a^2+b^2+c^2)$, $a,b,c\ge 0$, Lipschitzov uslov (2.4) i ocenu (2.24). Tada je

$$\begin{aligned}
I_2&\le E\left(\left|\int_u^v[f(s,y_\varepsilon(s),z_\varepsilon(s))-f(s,y(s),z(s))+\alpha(s,y_\varepsilon(s),z_\varepsilon(s),\varepsilon)]\,ds\right|^2\right)^{\frac{p}{2}}\\
&\le(v-u)^{\frac{p}{2}}\\
&\quad\times E\left(\int_u^v|f(s,y_\varepsilon(s),z_\varepsilon(s))-f(s,y(s),z(s))+\alpha(s,y_\varepsilon(s),z_\varepsilon(s),\varepsilon)|^2\,ds\right)^{\frac{p}{2}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\le 2^{\frac{p}{2}}\, 3^{\frac{p}{2}-1}(v-u)^{\frac{p}{2}} \Bigg[L^{\frac{p}{2}} E \left(\int_u^v |\psi_\varepsilon(s)|^2\, ds \right)^{\frac{p}{2}} \\
&\quad + L^{\frac{p}{2}} E \left(\int_u^v ||z_\varepsilon(s) - z(s)||^2\, ds \right)^{\frac{p}{2}} + E \left(\int_u^v \bar{\alpha}^2(s,\varepsilon)\, ds \right)^{\frac{p}{2}} \Bigg] \\
&\le 2 \cdot 6^{\frac{p}{2}-1}(v-u)^{p-1} \left[L^{\frac{p}{2}} \int_u^v \Delta_\varepsilon(s)\, ds + \tilde{\alpha}^p(\varepsilon)\,(v-u) \right] \\
&\quad + 2 \cdot 6^{\frac{p}{2}-1} L^{\frac{p}{2}} (v-u)^{\frac{p}{2}}\, E \left(\int_u^v ||z_\varepsilon(s) - z(s)||^2\, ds \right)^{\frac{p}{2}} \\
&\le \Phi(\varepsilon) \cdot \left(\frac{3}{2} \right)^{\frac{p}{2}-1} (v-u)^{\frac{p}{2}} \cdot \vartheta(T - t_0, v-u) \\
&\quad + 2 \cdot 6^{\frac{p}{2}-1} L^{\frac{p}{2}} (v-u)^{\frac{p}{2}}\, E \left(\int_u^v ||z_\varepsilon(s) - z(s)||^2\, ds \right)^{\frac{p}{2}},
\end{aligned}
$$

gde je

$$
\begin{aligned}
\vartheta(T-t_0, v-u) &= 2^{p-1}(v-u)^{\frac{p}{2}-1} \\
&\times \left[\frac{L^{\frac{p}{2}}}{c_1} \left(1 + \frac{c_2}{c_1} \right) e^{c_1(T-t_0)} \big(e^{c_1(v-u)} - 1 \big) + \left(1 - \frac{L^{\frac{p}{2}} c_2}{c_1} \right) (v-u) \right].
\end{aligned}
$$

Analogno, primenom Burkoholder–Davis–Gundyjeve nejednakosti za ocenu I_3 se dobija

$$
\begin{aligned}
I_3 &= E \sup_{t\in[u,v]} \left| \int_u^t [g(s, y_\varepsilon(s)) - g(s, y(s)) + \beta(s, y_\varepsilon(s), \varepsilon)]\, dW(s) \right|^p \\
&\le \tilde{C}_p\, E \left(\int_u^v ||g(s, y_\varepsilon(s)) - g(s, y(s)) + \beta(s, y_\varepsilon(s), \varepsilon)||^2\, ds \right)^{\frac{p}{2}} \\
&\le 2^{\frac{p}{2}} \tilde{C}_p\, (v-u)^{\frac{p}{2}-1}\, E \int_u^v \left[L|\psi_\varepsilon(s)|^2 + ||\beta(s, y_\varepsilon(s), \varepsilon)||^2 \right]^{\frac{p}{2}} ds \\
&\le 2^{p-1} \tilde{C}_p\, (v-u)^{\frac{p}{2}-1} \left(L^{\frac{p}{2}} \int_u^v \Delta_\varepsilon(s)\, ds + \tilde{\beta}(\varepsilon)\,(v-u) \right) \\
&\le \tilde{C}_p \cdot \Phi(\varepsilon) \cdot \theta(T-t_0, v-u),
\end{aligned}
$$

gde je $\tilde{C}_p = 4$ ili $\tilde{C}_p = [p^{p+1}/2(p-1)^{p-1}]^{\frac{p}{2}}$ u zavisnosti od vrednost za p, $p = 2$ ili $p > 2$, respektivno.

Zamenom dobijenih ocena za I_1, I_2, I_3 i primenom Burkoholder–Davis–Gundyjeve nejednakosti u drugom smeru, iz relacije (2.25) se dobija

$$
\begin{aligned}
&\tilde{c}_p E \left(\int_u^v ||z_\varepsilon(s) - z(s)||^2\, ds \right)^{\frac{p}{2}} \qquad (2.29) \\
&\quad \le E \sup_{t\in[u,v]} \left| \int_u^t (z_\varepsilon(s) - z(s))\, dW(s) \right|^p \\
&\quad \le 2 \cdot 4^{p-1} 6^{\frac{p}{2}-1} L^{\frac{p}{2}} (v-u)^{\frac{p}{2}} E \left(\int_u^v ||z_\varepsilon(s) - z(s)||^2\, ds \right)^{\frac{p}{2}} \\
&\qquad + \Phi(\varepsilon) \cdot \nu(T-t_0, v-u),
\end{aligned}
$$

gde je $\tilde{c}_p = 1$ ili $\tilde{c}_p = (2p)^{-\frac{p}{2}}$ u zavisnosti od vrednost za p, tj. za $p = 2$ ili $p > 2$, respektivno, i

$$\nu(T - t_0, v - u) \tag{2.30}$$
$$= 4^{p-1}\left(2\tilde{\varphi}(T - t_0) + \left[(3/2)^{\frac{p}{2}-1}(v-u)^{\frac{p}{2}} + \tilde{C}_p\right] \cdot \theta(T - t_0, v - u)\right).$$

Vrednosti u i v se sada mogu izabrati da budu dovoljno blizu, ali tako da je vrednost $\tilde{c}_p - 2 \cdot 4^{p-1}\, 6^{\frac{p}{2}-1} L^{\frac{p}{2}}(v-u)^{\frac{p}{2}} > 0$. Odavde je

$$v - u < \left(\frac{\tilde{c}_p}{2 \cdot 4^{p-1}\, 6^{\frac{p}{2}-1} L^{\frac{p}{2}}}\right)^{\frac{2}{p}} = \frac{(12\tilde{c}_p)^{\frac{2}{p}}}{96\, L}. \tag{2.31}$$

Imajući u vidu ovaj uslov, nejednakost (2.29) implicira

$$E\left(\int_u^v ||z_\varepsilon(s) - z(s)||^2\, ds\right)^{\frac{p}{2}} < \frac{\Phi(\varepsilon) \cdot \nu(T - t_0, v - u)}{\tilde{c}_p - 2 \cdot 4^{p-1}\, 6^{\frac{p}{2}-1} L^{\frac{p}{2}}(v-u)^{\frac{p}{2}}} \tag{2.32}$$
$$\equiv \Phi(\varepsilon) \cdot \omega(T - t_0, v - u)$$
$$\to 0 \quad \text{kada} \quad \varepsilon \to 0.$$

Konačno, sada je moguće dokazati (2.22). Neka je $t_0 = 0$ i neka je, nezavisno od ε, izabran konačan broj deobnih tačaka vremenskog segmenta $[0, T]$, $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = T$, takvih da je $t_j - t_{j-1} < (12\tilde{c}_p)^{\frac{2}{p}}/(96\, L)$, $j = 1, 2, \ldots, k$. Tada, iz (2.32) sledi

$$E\left(\int_0^T ||z_\varepsilon(s) - z(s)||^2 ds\right)^{\frac{p}{2}} = E\left(\sum_{j=1}^{k} \int_{t_{j-1}}^{t_j} ||z_\varepsilon(s) - z(s)||^2 ds\right)^{\frac{p}{2}} \tag{2.33}$$
$$< \Phi(\varepsilon) \cdot k^{\frac{p}{2}-1} \sum_{j=1}^{k} \omega(T, t_j - t_{j-1})$$
$$\to 0, \quad \varepsilon \to 0,$$

čime je dokaz završen. $\diamondsuit$

2.1.4 Ocena dužine intervala za zadatu L^p-razliku rešenja

Iz Teoreme 2.1.3 se može zaključiti da bi procesi stanja sistema $y_\varepsilon(t)$ i $y(t)$, i kontrolni procesi $z_\varepsilon(t)$ i $z(t)$ jednačina (2.2) i (2.9) mogli biti proizvoljno bliski za dovoljno malo ε. Međutim, iz ugla modeliranja, bliskost procesa stanja $y_\varepsilon(t)$ i $y(t)$ nije neophodno razmatrati na celom segmentu $[0, T]$, već samo u blizini finalnih vrednosti ξ_ε i ξ. U skladu sa ovim, za neku dopustivu vrednost $\eta > 0$ i ε dovoljno malo, može se odrediti $\bar{t}(\eta) = \bar{t} \in [0, T]$ tako da razlika procesa $y_\varepsilon(t)$ i $y(t)$ u L^p-smislu ne bude veća od η na intervalu $[\bar{t}, T]$. Takođe, potrebno je oceniti razliku kontrolnih procesa $z_\varepsilon(t)$ i $z(t)$ na $[\bar{t}, T]$. Sledeća teorema je originalan rezultat na ovu temu, objavljen u radu [63].

Teorema 2.1.4 *Neka su zadovoljeni uslovi Teoreme 2.1.3 i neka je $\Phi(\varepsilon)$ definisano sa (2.23). Tada, za proizvoljnu konstantu $\eta > 0$ i svako $\varepsilon \in (0, \Phi^{-1}(\eta)]$, postoji $\bar{t} \in [0, T]$ oblika*

$$\bar{t} = \max\left\{0, T - \frac{1}{c_1}\ln\left[\frac{1}{1+\frac{c_2}{c_1}}\left(\frac{c_2}{c_1} + \frac{\eta}{\Phi(\varepsilon)}\right)\right]\right\}, \tag{2.34}$$

gde je $c_1 = l(pL + \frac{p}{2} - 1) + \frac{pL+p-2}{lL}$, $c_2 = \frac{2}{lL} + l$, $l > 4$, tako da je

$$\sup_{t\in[\bar{t},T]} E|y_\varepsilon(t) - y(t)|^p \leq \eta, \tag{2.35}$$

i

$$E\left(\int_{\bar{t}}^T ||z_\varepsilon(s) - z(s)||^2\, ds\right)^{\frac{p}{2}} \leq \Phi(\varepsilon)\cdot \frac{k_0^{\frac{p}{2}}\,\nu(T-\bar{t}, \beta\tilde{\delta})}{\tilde{c}_p\,(1-\beta^{\frac{p}{2}})}, \tag{2.36}$$

gde je ν dato sa (2.30), a $k_0 \in N$ i $\beta \in (0,1)$ su takvi da važi $(T-\bar{t})/k_0 < \beta\tilde{\delta}$, $\tilde{\delta} = (12\tilde{c}_p)^{\frac{2}{p}}/(96L)$.

Dokaz. Uvedimo funkciju $S(\varepsilon, T-t), t \in [0,T]$, takvu da je

$$S(\varepsilon, T-t) = \Phi(\varepsilon)\left[\left(1+\frac{c_2}{c_1}\right)e^{c_1(T-t)} - \frac{c_2}{c_1}\right]. \tag{2.37}$$

Za proizvoljno $\eta > 0$, iz (2.24) sledi da mora biti

$$S(\varepsilon, 0) \leq \eta \leq S(\varepsilon, T),$$

odnosno, iz (2.37),

$$\Phi(\varepsilon) \leq \eta \leq \Phi(\varepsilon)\,\left[\left(1+\frac{c_2}{c_1}\right)e^{c_1T} - \frac{c_2}{c_1}\right].$$

U skladu sa prethodnom diskusijom, gde se pretpostavlja da je funkcija $\Phi(\varepsilon)$ opadajuća, sledi

$$\varepsilon_1 = \Phi^{-1}\left(\frac{\eta}{\left(1+\frac{c_2}{c_1}\right)e^{c_1T} - \frac{c_2}{c_1}}\right) \leq \varepsilon \leq \Phi^{-1}(\eta) = \varepsilon_2, \tag{2.38}$$

gde je Φ^{-1} inverzna funkcija funkcije Φ. Sada se za svako $\varepsilon \in [\varepsilon_1, \varepsilon_2]$ može odrediti $\tilde{t}$ iz relacije $S(\varepsilon, T-\tilde{t}) = \eta$, kao

$$\tilde{t} = T - \frac{1}{c_1}\ln\left[\frac{1}{1+\frac{c_2}{c_1}}\left(\frac{c_2}{c_1} + \frac{\eta}{\Phi(\varepsilon)}\right)\right]. \tag{2.39}$$

Primetimo da ako je $\eta > S(\varepsilon, T)$, onda je $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$. Za $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2)$, neka je

$$\bar{t} = \max\{0, \tilde{t}\} = \max\left\{0, T - \frac{1}{c_1}\ln\left[\frac{1}{1+\frac{c_2}{c_1}}\left(\frac{c_2}{c_1} + \frac{\eta}{\Phi(\varepsilon)}\right)\right]\right\}.$$

Prema tome, za svako $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2)$, iz (2.24) sledi da je

$$\sup_{t\in[\bar{t},T]} E|y_\varepsilon(t) - y(t)|^p \leq S(\varepsilon, T - \bar{t}) = \eta.$$

Očigledno, $\bar{t} \uparrow T$ kada $\varepsilon \uparrow \varepsilon_2$ i $\bar{t} \downarrow 0$ kada $\varepsilon \downarrow \varepsilon_1$, odnosno, $\bar{t} \downarrow 0$ kada $\varepsilon \downarrow 0$.

Da bi se dokazalo (2.36), koriste se ekvidistantne tačke $\bar{t} = t_0 < t_1 < \cdots < t_{k_0} = T$ za neko dovoljno veliko $k_0 \in N$ i $\beta \in (0, 1)$ takvo da je, u skladu sa (2.31), $t_j - t_{j-1} = \delta_0 = \frac{T-\bar{t}}{k_0} < \beta\,\tilde{\delta}$, gde je $\tilde{\delta} = (12\tilde{c}_p)^{\frac{2}{p}}/(96\,L)$, $j = 1, 2, \ldots, k$. Tada, za $t_0 = \bar{t}$, iz relacija (2.32) i (2.33) sledi da je

$$\begin{aligned} E\left(\int_{\bar{t}}^{T} ||z_\varepsilon(s) - z(s)||^2\,ds\right)^{\frac{p}{2}} &< \Phi(\varepsilon) \cdot k_0^{\frac{p}{2}} \cdot \psi(T - \bar{t}, \delta_0) \\ &< \Phi(\varepsilon) \cdot \frac{k_0^{\frac{p}{2}}\,\nu(T - \bar{t}, \beta\tilde{\delta})}{\tilde{c}_p(1 - \beta^{\frac{p}{2}})}, \end{aligned}$$

što je trebalo dokazati. $\diamondsuit$

Evidentno je da se razlika kontrolnih procesa $z_\varepsilon(t)$ i $z(t)$ povećava kada se smanjuju k_0 i β. Imajući u vidu da su ovi zahtevi u međusobnoj kontradikciji, potrebno je optimalno odrediti k_0 i β u konkretnoj situaciji, u cilju maksimizacije veličine bliskosti. Osim toga, za dopustivu vrednost $\tilde{\eta} > 0$, numerički se može odrediti k_0 i $\delta_0 < \tilde{\delta}$ tako da je

$$\Phi(\varepsilon) \cdot \frac{k_0^{\frac{p}{2}}\,\nu(T - \bar{t}, \delta_0)}{\tilde{c}_p - 2 \cdot 4^{p-1}\,6^{\frac{p}{2}-1} L^{\frac{p}{2}}\,\delta_0^{\frac{p}{2}}} < \tilde{\eta}. \tag{2.40}$$

Prethodna teorijska razmatranja ilustruje sledeći primer.

Primer 2.1.1 Rešenje skalarne perturbovane BSDJ

$$\begin{aligned} y_\varepsilon(t) = \xi_\varepsilon &- \int_t^1 \left[\sqrt{\cos s}\,y_\varepsilon(s) + \frac{2^{-\frac{1}{s}}\varepsilon}{|y_\varepsilon(s)| + |z_\varepsilon(s)| + 2}\right] ds \\ &- \int_t^1 \left[z_\varepsilon(s) + \frac{\varepsilon}{\varepsilon + \ln\big(e + |y_\varepsilon(s)|\big)}\right] dW(s), \quad t \in [0, 1], \end{aligned} \tag{2.41}$$

se može uporediti sa rešenjem odgovarajuće neperturbovane jednačine

$$y(t) = \xi - \int_t^1 \sqrt{\cos s}\,y(s)\,ds - \int_t^1 z(s)\,dW(s), \quad t \in [0, 1]. \tag{2.42}$$

Funkcije

$$\alpha(t, y, z, \varepsilon) = \frac{2^{-\frac{1}{t}}\varepsilon}{|y| + |z| + 2}, \quad \beta(t, y, \varepsilon) = \frac{\varepsilon}{\varepsilon + \ln(e + |y|)}$$

se smatraju aditivnim perturbacijama, dok za finalne uslove ξ_ε i ξ važi relacija $\xi_\varepsilon = \xi + e^{-\frac{1}{\varepsilon}}$.

Poznato je da u opštem slučaju BSDJ nisu eksplicitno rešive, čak je i numerički teško odrediti njihovo rešenje. Međutim, neperturbovana jednačina (2.42) je poseban slučaj sledeće BSDJ,

$$dy(t) = \xi - \int_t^1 f(s, y(s))\, ds - \int_t^1 z(s)\, dW(s),$$

koju je moguće numerički rešiti postupkom opisanim u radu [87], dok se ovaj postupak ne može primeniti na jednačinu (2.41). Ova činjenica je dodatno opravdanje za upoređivanje rešenja perturbovane jednačine (2.41) i neperturbovane jednačine (2.42), u smislu prethodne diskusije.

U cilju upoređivanja rešenja u smislu četvrtog momenta, pretpostavlja se da je četvrti moment finalnog uslova neperturbovane BSDJ konačan, $E|\xi|^4 < \infty$. Takođe, nije teško proveriti da koeficijenti jednačina (2.41) i (2.42) zadovoljavaju Lipschitzove uslove (2.4) i (2.5) za $L = 1$ i da su zadovoljeni ostali uslovi Teoreme 2.1.1, koji garantuju egzistenciju i jedinstvenost rešenja, kao i da je $E|y_\varepsilon(t)|^4 < \infty$, $E|y(t)|^4 < \infty$ za svako $t \in [0, T]$ i $E\int_0^T |y_\varepsilon(t)|^2 |z_\varepsilon(t)|^2 dt < \infty$, $E\int_0^T |y(t)|^2|z(t)|^2 dt < \infty$.

Kako je

$$\tilde{\alpha}(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2}, \quad \tilde{\beta}(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{\varepsilon + 1},$$

iz (2.23), nalazimo da je za $\varepsilon \in (0, 1)$

$$\Phi(\varepsilon) = \max\left\{ e^{-\frac{4}{\varepsilon}}, \frac{\varepsilon^4}{16}, \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon+1}\right)^4 \right\} = \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon+1}\right)^4.$$

Primenom Teoreme 2.1.3 sledi

$$\sup_{t\in[0,1]} E|y_\varepsilon(t) - y(t)|^4 \to 0, \quad E\left(\int_0^1 |z_\varepsilon(s) - z(s)|^2\, ds\right)^2 \to 0 \ \text{ kada } \ \varepsilon \to 0.$$

Za zadato $\eta > 0$, odredimo [2] interval $[\bar{t}, T]$ na kome su rešenja $y_\varepsilon(t)$ i $y(t)$ bliska u L^4-smislu pri čemu je razlika rešenja manja od η. Na primer, za $\eta = 10^{-17}$ iz (2.38) je $\varepsilon_2 = 5.62373 \cdot 10^{-5}$.

Kako je $\tilde{\delta} = 0.00451055$, fiksirajmo, na primer, $\varepsilon_0 = 10^{-5} < \varepsilon_2$, $\tilde{\eta} = 10^{-3}$ i $l = 4.1$, odakle možemo izračunati da je

$$\varepsilon_1 = 2.21258 \cdot 10^{-7}, \quad \bar{t} = 0.694114, \quad k_0 = 617, \quad \delta_0 = 0.000496.$$

Za $l = 5$ je

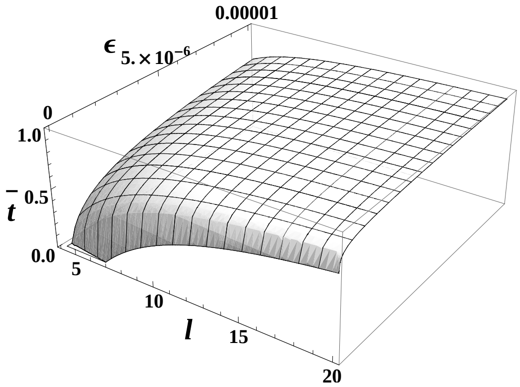
$$\varepsilon_1 = 7.58 \cdot 10^{-8}, \quad \bar{t} = 0.743488, \quad k_0 = 1761, \quad \delta_0 = 0.0001457,$$

odnosno, rešenja $(y_{\varepsilon_0}(t), z_{\varepsilon_0}(t))$ i $(y(t), z(t))$ su bliska na intervalu $[\bar{t}, 1]$, u smislu bliskosti date sa (2.35).

Sa opadanjem l i ε_0, interval $[\bar{t}, 1]$ se povećava, što je ilustrovano na Slici 2.1, kao i sledećim numeričkim vrednostima: Ako je $\varepsilon_0 = 10^{-6}$ i $\tilde{\eta} = 10^{-3}$, onda je

$$\begin{aligned} l = 4.1 &\Rightarrow \ \varepsilon_1 = 2.21258 \cdot 10^{-7}, \ \ \bar{t} = 0.274776, \ k = 599, \ \ \delta_0 = 0.001212, \\ l = 5 \ \ &\Rightarrow \ \varepsilon_1 = 7,58 \cdot 10^{-8}, \qquad \bar{t} = 0.391958, \ k = 1757, \ \delta_0 = 0.000346. \end{aligned}$$

[2]Sva izračunavanja su dobijena primenom standardnog programa MATHEMATICA.



Slika 2.1: Zavisnost vrednosti $\bar{t}$ u odnosu na ε_0 i l.

2.2 Veza između rešenja backward stohastičkih Volterra integralnih jednačina

Tema ovog poglavlja su *backward stohastičke Volterra integralne jednačine*, kraće BSVIJ, (eng. backward stochastic Volterra integral equations). Osim osnovnog tipa BSDJ koji je uveden u prethodnom poglavlju, mnogi autori su uvodili nove, modifikovane tipove ovih jednačina. Lin [84] je uveo određenu klasu BSVIJ oblika

$$y(t) + \int_t^T f(t,s,y(s),z(t,s))\,ds + \int_t^T [g(t,s,y(s)) + z(t,s)]\,dW(s) = \xi,\ \ t \in [0,T], \tag{2.43}$$

gde je W standardno Brownovo kretanje, ξ je finani uslov, f i g su odgovarajući koeficienti drifta i difuzije, $y(s)$ je proces stanja sistema i $z(t,s)$ je kontrolni proces. Bitna razlika ovih jednačina i osnovnog tipa BSDJ razmatranog u prethodnom poglavlju je što su koeficijenti drifta i difuzije, kao i kontrolni proces z, zavisni od dva vremenska trenutka koja su različita među sobom. Lin je proučavao problem egzistencije i jedinstvenosti adaptiranog rešenja uz pretpostavku da koeficijenti f i g ispunjavaju globalni Lipschitzov uslov. Aman i N'zi su u radu [1] oslabili uslove za koeficijent drifta od globalnog Lipschitzovog uslova na lokalni Lipschitzov uslov, dok su Wang i Zhang u [129] diskutovali jednačinu (2.43) pod uslovom da su zadovoljeni neki nelipšicovski integralni uslovi. Kasnije je Yong [133, 134] proširio klasu BSVIJ na opštu BSVIJ i opravdao njihovu primenu u nekim problemima stohastičke kontrole, finansijama i menadžmentu (kontroli) rizika.

Anh and Yong su u [6] proučavali BSVIJ u Hilbertovim prostorima, dok je Ren [121] značajno proširio prethodne rezultate na klasu BSVIJ sa Poissonovim skokovima u Hilbertovim prostorima.

Neophodno je istaći da je u svim prethodno navedenim radovima [6, 121, 133, 134], kao i u mnogim drugim radovima koji se odnose na BSVIJ, posmatrana BSVIJ jednostavnog oblika, koja za koficijent difuzije ima $\int_t^T z(t,s)\,dW(s)$ umesto složenijeg izraza $\int_t^T [g(t,s,y(s)) + z(t,s)]\,dW(s)$. Logično je bilo napraviti pomak i proširiti rezultate na BSVIJ opštijeg oblika.

U nastavku će biti predstavljeni originalni rezultati na ovu temu sadržani u radu [26], predatog za štampu. Glavna ideja je dokazati da se rešenje BSVIJ (2.43) može izraziti u terminima rešenja jednačine

$$\bar{y}(t) + \int_t^T \bar{f}(t, s, \bar{y}(s), \bar{z}(t, s))\, ds + \int_t^T \bar{z}(t, s)\, dW(s) = \xi, \quad t \in [0, T], \tag{2.44}$$

gde je $\bar{f}(t, s, y, z) := f(t, s, y, z - g(t, s, y))$. Glavna motivacija potiče iz koautorskog rada [62] u kome je, pored ostalog, sličan problem razmatran za backward doubly stohastičke diferenijalne jednačine, o kojima će biti reči u sledećoj glavi. Naime, jednačina (2.43) se može posmatrati kao tip aditivno perturbovane jednačine (2.44), gde je perturbacija upravo funkcija $g(t, s, y(s))$ koja se dodatno javlja kod koeficijenta difuzije.

Analogni problemi se mogu proučavati na sličan način za kompleksnije BSVIJ, kao što su neke u prethodno navedenim radovima.

2.2.1 Uvodni pojmovi i poznati rezultati

Pretpostavimo da je $\{W(t), \mathcal{F}_t, t \in [0, T]\}$ standardno k-dimenzionalno Brownovo kretanje. Neka je $\mathcal{D} = \{(t, s) \in \mathbb{R}_+^2; 0 \leq t \leq s \leq T\}$ i $\mathcal{P}$ σ-algebra $\mathcal{F}_{t\vee s}$-progresivno meljivih podskupova od $\Omega \times \mathcal{D}$. Zatim, $\mathcal{M}^2([t, T]; \mathbb{R}^d)$ (resp. $\mathcal{M}^2(\mathcal{D}; \mathbb{R}^{d\times k})$) je skup procesa φ iz prostora R^d (respektivno $\mathbb{R}^{d\times k}$), za koje važi:

(i) proces φ je kvadratno-integrabilan na $\Omega \times \mathcal{D}$ u odnosu na $\mathcal{P} \otimes \lambda \otimes \lambda$, gde λ označava Lebesgueovu meru na $[0, T]$,

(ii) $\varphi(t)$ je $\mathcal{F}_{t\vee s}$-progresivno merljiv proces.

Pre navođenja postojećih, kao i novih rezultata, uvode se sledeće pretpostavke:

$(\mathbf{H_1})$ Za koeficijente drifta i difuzije f, g i za finalni uslov ξ važi:

(i) $\xi \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbf{P}; \mathbb{R}^d)$;

(ii) Funkcija $f : \Omega \times \mathcal{D} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d\times k} \to \mathbb{R}^d$ je $\mathcal{P} \otimes \mathcal{B}_d \otimes \mathcal{B}_{d\times k}/\mathcal{B}_d$-merljiva, a funkcija $g : \Omega \times \mathcal{D} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times k}$ je $\mathcal{P} \otimes \mathcal{B}_d/\mathcal{B}_{d\times k}$-merljiva;

(iii) $f(\cdot, \cdot, 0, 0) \in \mathcal{M}^2(\mathcal{D}; \mathbb{R}^d)$, $g(\cdot, \cdot, 0) \in \mathcal{M}^2(\mathcal{D}; \mathbb{R}^{d\times k})$.

$(\mathbf{H_2})$ Funkcije f i g zadovoljavaju globalni Lipshitzov uslov, tj. postoji konstanta $k > 0$, takva da je za svako $(t, s, y, z), (t, s, y', z') \in \Omega \times \mathcal{D} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d\times k}$,

$$|f(t, s, y, z) - f(t, s, y', z')|^2 \leq k(|y - y'|^2 + ||z - z'||^2) \text{ s.i.}, \tag{2.45}$$

$$||g(t, s, y) - g(t, s, y')||^2 \leq k|y - y'| \text{ s.i.} \tag{2.46}$$

Bitno je istaći da hipoteze $(\mathbf{H_1})$ i $(\mathbf{H_2})$ impliciraju da je $f(\cdot, \cdot, y(\cdot), z(\cdot)) \in \mathcal{M}^2(\mathcal{D}; \mathbb{R}^d)$ i $g(\cdot, \cdot, y(\cdot)) \in \mathcal{M}^2(\mathcal{D}; \mathbb{R}^{d\times k})$ za svako $y \in \mathcal{M}^2([t, T]; \mathbb{R}^d)$, $z \in \mathcal{M}^2(\mathcal{D}; \mathbb{R}^{d\times k})$.

Sledeća definicija je navedena u radu [1].

Definicija 2.2.1 *Rešenje jednačine (2.43) je uređeni par $\mathcal{F}_{t\vee s}$-adaptiranih procesa $\{(y(s), z(t, s)), (t, s) \in \mathcal{D}\}$ sa vrednostima u $\mathcal{M}^2([t, T]; \mathbb{R}^d) \times \mathcal{M}^2(\mathcal{D}; \mathbb{R}^{d\times k})$, koji zadovoljava jednačinu (2.43) skoro izvesno.*

Lin je u radu [84] dokazao osnovnu teoremu egzistencije i jedinstvenosti rešenja jednačine (2.43):

Teorema 2.2.1 (Lin [84]) *Neka su zadovoljene pretpostavke* $(\mathbf{H_1})$ *i* $(\mathbf{H_2})$. *Tada postoji skoro izvesno jedinstveno određeni par procesa* $\{(y(s), z(t,s)), (t,s) \in \mathcal{D}\} \in \mathcal{M}^2([0,T];\mathbb{R}^d) \times \mathcal{M}^2(\mathcal{D};\mathbb{R}^{d\times k})$, *koji zadovoljava jednačinu (2.43).*

Primetimo da se formula Itôa (Teorema 1.3.4) ili njen integralni oblik (2.3) za backward jednačine, ne mogu primeniti na BSVIJ. Problem je u zavisnosti koeficijenata od dva vremenska trenutka s i t. Međutim, Lin je u [84] izveo relaciju za BSVIJ, koja će se koristiti u dokazivanju glavnih rezultata. Ovde se navodi samo jedna njena verzija.

Lema 2.2.1 (Lin [84]) *Neka je* $\xi \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbf{P};\mathbb{R}^d)$, *procesi* $f(\cdot,\cdot,x(\cdot),z(\cdot,\cdot)) \in \mathcal{M}^2(\mathcal{D};\mathbb{R}^d)$, $g(\cdot,\cdot,y(\cdot)) \in \mathcal{M}^2(\mathcal{D};\mathbb{R}^{d\times k})$ *i neka par procesa* $\{(y(s), z(t,s)), (t,s) \in \mathcal{D}\} \in \mathcal{M}^2([t,T];\mathbb{R}^d) \times \mathcal{M}^2(\mathcal{D};\mathbb{R}^{d\times k})$ *zadovoljava jednačinu (2.43). Tada je,*

$$
\begin{aligned}
&E|y(t)|^2 + E\int_t^T ||g(t,s,y(s)) + z(t,s)||^2\,ds \qquad (2.47)\\
&= E|\xi|^2 - 2E\int_t^T y^\top(s)\,f(t,s,y(s)z(t,s))\,ds - 2E\int_t^T f^\top(t,s,y(s)z(t,s))\\
&\quad\times\left[\int_t^T [f(s,u,y(u),z(s,u)) - f(t,u,y(u),z(t,u))]\,du\right]ds.
\end{aligned}
$$

Već je ranije istaknuto da su Linov rad [84] uopštili Aman i N'zi [1] uz pretpostavku da koeficijent drifta umesto globalnog, ispunjava lokalni Lipshitzov uslov. Preciznije, uvodi se sledeća hipoteza za koeficijente f i g:

$(\mathbf{H_3})$ (i) Postoje konstante $K > 0$ i $0 \le \alpha < 1$ takve da je za svako $(t,s) \in \mathcal{D}$, $y, y' \in \mathbb{R}^d$, $z \in \mathbb{R}^{d\times k}$,

$$
\begin{aligned}
|f(t,s,y,z)| &\le K(1 + |y| + ||z||)^\alpha, \quad \text{s.i.}\\
||g(t,s,y) - g(t,s,y')|| &\le K|y - y'| \quad \text{s.i.}
\end{aligned}
$$

(ii) Za svako $N \in \mathbb{N}$, postoji konstanta $L_N > 0$ takva da je, za svako $(t,s) \in \mathcal{D}$, $|y| \le N, |y'| \le N$, $z, z' \in \mathbb{R}^{d\times k}$,

$$
|f(t,s,y,z) - f(t,s,y',z')| \le L_N|y - y'| + K||z - z'|| \quad \text{s.i.} \qquad (2.48)
$$

Pri uslovu $(\mathbf{H_3})$, Aman i N'zi su u [1] dokazali sledeću lemu i teoremu.

Lema 2.2.2 (Aman, N'zi [1]) *Neka proces* f *zadovoljava hipoteze* $(\mathbf{H_1})$ *i* $(\mathbf{H_3})$. *Tada, postoji niz procesa* $\{f_n\}_{n\ge1}$ *takvih da za svako* $n \ge 1$, f_n *je* $\mathcal{P} \times \mathcal{B}_d \otimes \mathcal{B}_{d\times k}/\mathcal{B}_d$ *merljiva funkcija koja zadovoljava Lipschitzov uslov i hipotezu* $(\mathbf{H_3})$. *Pritom,* $\varrho_N(f_n - f) \to 0$, *kada* $n \to \infty$ *za svako fiksirano* N, *gde je*

$$
\varrho_N(f) = E\left(\int_{\mathcal{D}} \sup_{|y|\le N}\ \sup_{z\in\mathbb{R}^{d\times k}} |f(t,s,y,z)|^2\,dt\,ds\right)^{\frac{1}{2}}.
$$

Teorema 2.2.2 (Aman, N'zi [1]) *Neka su ispunjene hipoteze* $(\mathbf{H_1})$ *i* $(\mathbf{H_3})$. *Ako je*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{exp[(2L_N + 2L_N^2)T]}{(2L_N + 2L_N^2)N^{2(1-\alpha)}} = 0, \tag{2.49}$$

tada postoji jedinstven par procesa $\{(y(s), z(t,s)), (t,s) \in \mathcal{D}\} \in \mathcal{M}^2([0,T];\mathbb{R}^d) \times \mathcal{M}^2(\mathcal{D};\mathbb{R}^{d\times k})$ *koji zadovoljava jednačinu (2.43) skoro izvesno.*

2.2.2 Oblik rešenja backward stohastičkih Volterra integralnih jednačina

Uporedo sa jednačinom (2.43), posmatra se i jednačina oblika (2.44), odnosno

$$\bar{y}(t) + \int_t^T f(t,s,\bar{y}(s), \bar{z}(t,s) - g(t,s,\bar{y}(s)))\,ds + \int_t^T \bar{z}(t,s)\,dW(s) = \xi, \quad t \in [0,T]. \tag{2.50}$$

Kao što je već rečeno na početku ovog poglavlja, pokazaćemo da se rešenje jednačine (2.43) može opisati u terminima rešenja jednačine (2.50), i obrnuto. Pritom, ako su ispunjene pretpostavke $(\mathbf{H_1})$ i $(\mathbf{H_2})$, po Teoremi 2.2.1 postoje jedinstvena rešenja $\{(y(s), z(t,s)), (t,s) \in \mathcal{D}\}$, $\{(\bar{y}(s), \bar{z}(t,s)), (t,s) \in \mathcal{D}\} \in \mathcal{M}^2([0,T];\mathbb{R}^d)\times\mathcal{M}^2(\mathcal{D};\mathbb{R}^{d\times k})$ jednačina (2.43) i (2.50), respektivno.

Teorema 2.2.3 *Neka su za finalni uslov* ξ *i funkcije* f, g *ispunjene pretpostavke* $(\mathbf{H_1})$ *i* $(\mathbf{H_2})$ *i neka je* $\{(\bar{y}(s), \bar{z}(t,s)), (t,s) \in \mathcal{D}\} \in \mathcal{M}^2([0,T];\mathbb{R}^d) \times \mathcal{M}^2(\mathcal{D};\mathbb{R}^{d\times k})$ *rešenje jednačine (2.50). Tada je*

$$\{(\bar{y}(s), \bar{z}(t,s) - g(t,s,\bar{y}(s))), (t,s) \in \mathcal{D}\} \in \mathcal{M}^2([0,T];\mathbb{R}^d) \times \mathcal{M}^2(\mathcal{D};\mathbb{R}^{d\times k})$$

rešenje jednačine (2.43).

Dokaz. Neka je $(t,s) \in [T-\eta, T] \times [t,T]$, gde je $\eta \in [0,T]$ neka konstanta. Oduzimanjem jednačina (2.43) i (2.50) se dobija

$$\begin{aligned}\bar{y}(t) - y(t) &+ \int_t^T [f(t,s,\bar{y}(s), \bar{z}(t,s) - g(t,s,\bar{y}(s))) - f(t,s,y(s),z(t,s))]\,ds \\ &+ \int_t^T [\bar{z}(t,s) - g(t,s,y(s)) - z(t,s)]\,dW(s) = 0.\end{aligned}$$

Primenom Leme 2.2.1 je

$$\begin{aligned}&E|\bar{y}(s) - y(s)|^2 + E\int_t^T ||\bar{z}(t,s) - g(t,s,y(s)) - z(t,s)||^2\,ds \\ &= -2\,E\int_t^T [\bar{y}(t) - y(t)]^\top [f(t,s,\bar{y}(s), \bar{z}(t,s) - g(t,s,\bar{y}(s))) - f(t,s,y(s),z(t,s))]\,ds\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-2\,E\int_t^T [f(t,s,\bar{y}(s),\bar{z}(t,s)-g(t,s,\bar{y}(s)))-f(t,s,y(s),z(t,s))]^\top\\
&\qquad\times\Bigg[\int_s^T [f(s,u,\bar{y}(u),\bar{z}(s,u)-g(s,u,\bar{y}(u)))-f(s,u,y(u),z(s,u))\\
&\qquad\qquad -f(t,u,\bar{y}(u),\bar{z}(t,u)-g(t,u,\bar{y}(u)))+f(t,u,y(u),z(t,u))]\,du\Bigg]\,ds\\
&\equiv J_1(t)+J_2(t),
\end{aligned}
$$

gde su $J_1(t)$ i $J_2(t)$ odgovarajući integrali. Kako je

$$
\begin{aligned}
&E\int_t^T ||\bar{z}(t,s)-g(t,s,y(s))-z(t,s)||^2\,ds\\
&\quad= E\int_t^T ||\bar{z}(t,s)-g(t,s,\bar{y}(s))-z(t,s)||^2\,ds\\
&\qquad+E\int_t^T ||g(t,s,\bar{y}(s))-g(t,s,y(s))||^2\,ds+J_3(t),
\end{aligned}
$$

gde je

$$
J_3(t)=2\,E\int_t^T trace[g(t,s,\bar{y}(s))-g(t,s,y(s))]^\top[\bar{z}(t,s)-g(t,s,\bar{y}(s))-z(t,s)]\,ds,
$$

iz poslednje dve jednakosti je

$$
\begin{aligned}
&E|\bar{y}(t)-y(t)|^2+E\int_t^T ||\bar{z}(t,s)-g(t,s,\bar{y}(s))-z(t,s)||^2\,ds\\
&\quad\le J_1(t)+J_2(t)+J_3(t).
\end{aligned}
\tag{2.51}
$$

Primenom hipoteze ($\mathbf{H_2}$), za proizvoljne konstante $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3>0$ sledi

$$
\begin{aligned}
J_3(t)&\le k\varepsilon_3\,E\int_t^T |\bar{y}(s)-y(s)|^2\,ds\\
&\quad+\frac{1}{\varepsilon_3}\,E\int_t^T ||\bar{z}(t,s)-g(t,s,\bar{y}(s))-z(t,s)||^2\,ds,
\end{aligned}
\tag{2.52}
$$

$$
\begin{aligned}
J_1(t)&\le\left(\varepsilon_1+\frac{k}{\varepsilon_1}\right)E\int_t^T |\bar{y}(s)-y(s)|^2\,ds\\
&\quad+\frac{k}{\varepsilon_1}\,E\int_t^T ||\bar{z}(t,s)-g(t,s,\bar{y}(s))-z(t,s)||^2\,ds,
\end{aligned}
\tag{2.53}
$$

$$
\begin{aligned}
J_2(t)&\le \varepsilon_2\,J_4(t)+\frac{k}{\varepsilon_2}\,E\int_t^T |\bar{y}(s)-y(s)|^2\,ds\\
&\quad+\frac{k}{\varepsilon_2}\,E\int_t^T ||\bar{z}(t,s)-g(t,s,\bar{y}(s))-z(t,s)||^2\,ds,
\end{aligned}
\tag{2.54}
$$

gde je $J_4(t) = E\int_t^T \Big| \int_s^T [f(s,u,\bar{y}(u),\cdots + f(t,u,y(u),z(t,u))]\,du\Big|^2 ds$. Lako se zaključuje da je

$$J_4(t) \le 4k\,E\int_t^T (T-s)\int_s^T |\bar{y}(u)-y(u)|^2\,du\,ds \tag{2.55}$$
$$+\,2k\,E\int_t^T (T-s)\int_s^T ||\bar{z}(s,u)-g(s,u,\bar{y}(u))-z(s,u)||^2\,du\,ds$$
$$+\,2k\,E\int_t^T (T-s)\int_s^T ||\bar{z}(t,u)-g(t,u,\bar{y}(u))-z(t,u)||^2\,du\,ds.$$

Primenom parcijalne integracije je

$$E\int_t^T (T-s)\int_s^T |\bar{y}(u)-y(u)|^2\,du\,ds \le \frac{(T-t)^2}{2}\,E\int_t^T |\bar{y}(s)-y(s)|^2\,ds.$$

Isti postupak se primenjuje i na treći član nejednakosti (2.55). Zamenom ovih ocena u $J_4(t)$, nalazimo da je

$$J_4(t) \le 2k(T-t)^2\,E\int_t^T |\bar{y}(s)-y(s)|^2\,ds$$
$$+\,2k(T-t)\,E\int_t^T\int_s^T ||\bar{z}(s,u)-g(s,u,\bar{y}(u))-z(s,u)||^2\,du\,ds$$
$$+\,k(T-t)^2\,E\int_t^T ||\bar{z}(t,s)-g(t,s,\bar{y}(s))-z(t,s)||^2\,ds.$$

Poslednja ocena zajedno sa ocenama (2.51)–(2.54) implicira

$$E|\bar{y}(t)-y(t)|^2$$
$$+\Big(1-\frac{k}{\varepsilon_1}-\frac{k}{\varepsilon_2}-\frac{1}{\varepsilon_3}-k\varepsilon_2(T-t)^2\Big)E\int_t^T ||\bar{z}(t,s)-g(t,s,\bar{y}(s))-z(t,s)||^2\,ds$$
$$\le \Big(\varepsilon_1+\frac{k}{\varepsilon_1}+\frac{k}{\varepsilon_2}+k\varepsilon_3+2k\varepsilon_2(T-t)^2\Big)E\int_t^T |\bar{y}(s)-y(s)|^2\,ds$$
$$+2k\varepsilon_2(T-t)E\int_t^T\int_s^T ||\bar{z}(s,u)-g(s,u,\bar{y}(u))-z(s,u)||^2\,du\,ds.$$

Konkretno, neka je $\varepsilon_1=\varepsilon_2=8k$, $\varepsilon_3=4$. Tada je $\alpha := 1-k/\varepsilon_1-k/\varepsilon_2-1/\varepsilon_3-k\varepsilon_2(T-t)^2 = 1/2-8k^2(T-t)^2$. Pretpostavimo da je $(t,s)\in[T-\eta,T]\times[t,T]$, gde je $0<\eta<\min\{T,1/4k\}$. Ako je $T<1/4k$, tada je $\alpha>0$; suprotno, ako je $T>1/4k$ i ako je, na primer, $\eta=1/8k$, tada je $\alpha>1/2-8k^2\eta^2=3/4>0$. Za svako $t\in[T-\eta,T]$, u oba slučaja je

$$E|\bar{y}(t)-y(t)|^2+\alpha\,E\int_t^T ||\bar{z}(t,s)-g(t,s,\bar{y}(s))-z(t,s)||^2\,ds$$
$$\le \beta\int_t^T\Big[E|\bar{y}(s)-y(s)|^2\,ds+\alpha\,E\int_s^T ||\bar{z}(s,u)-g(s,u,\bar{y}(u))-z(s,u)||^2\,du\Big]\,ds,$$

gde je β neka generisana pozitivna konstanta. Primenom Gronwallove nejednakosti zaključujemo da je

$$E|\bar{y}(t) - y(t)|^2 + \alpha\, E \int_t^T ||\bar{z}(t,s) - g(t,s,\bar{y}(s)) - z(t,s)||^2\, ds \equiv 0.$$

Prema tome $y(t) = \bar{y}(t)$ s.i. za svako $t \in [T-\eta, T]$ i $z(t,s) = \bar{z}(t,s) - g(t,s,\bar{y}(s))$ s.i. za svako $(t,s) \in [T-\eta, T] \times [t,T]$.

Ponavljanjem prethodno opisane procedure, dokazuje se da je $y(t) = \bar{y}(t)$ skoro izvesno za svako $t \in [T-2\eta, T-\eta]$ i $z(t,s) = \bar{z}(t,s) - g(t,s,\bar{y}(s))$ skoro izvesno za svako $(t,s) \in [T-2\eta, T-\eta] \times [t, T-\eta]$. Dokaz teoreme je sada jednostavno izvesti nastavljajući prethodni postupak potreban broj puta, sve dok se ne pokrije segment $[0,T]$. $\diamondsuit$

U nastavku je data veza rešenja jednačina (2.43) i (2.50) uz oslabljene uslove za koeficijent drifta, odnosno zahteva se da funkcija f ispunjava lokalni Lipschitzov uslov, umesto globalnog Lipschitzovog uslova.

Pre nego što bude iskazan glavni rezultat ovog poglavlja, podsetimo da je pod pretpostavkama $(\mathbf{H_1})$ i $(\mathbf{H_3})$, Teoremom 2.2.2 garantovana egzistencija i jedinstvenost rešenja jednačine (2.43). Dokaz ove teoreme se može naći u radu [84] i zasniva se na uvođenju niza $\{(y_n(s), z_n(t,s)), (t,s) \in \mathcal{D}\}, n \in \mathbb{N}\}$ iz $\mathcal{M}^2([0,T];\mathbb{R}^d) \times \mathcal{M}^2(\mathcal{D};\mathbb{R}^{d\times k})$, gde je za svako $n \in \mathbb{N}$, $\{(y_n(s), z_n(t,s)), (t,s) \in \mathcal{D}\}$ rešenje jednačine

$$y_n(t) + \int_t^T f_n(t,s,y_n(s), z_n(t,s))\, ds + \int_t^T [g(t,s,y_n(s)) + z_n(t,s)]\, dW(s) = \xi. \quad (2.56)$$

Niz $\{f_n\}_{n\geq 1}$ je u relaciji sa funkcijom f koja je iskazana Lemom 2.2.2. U dokazu Teoreme 2.2.2 je pokazano da za svako $(t,s) \in \mathcal{D}$,

$$y_n(t) \xrightarrow{M^2} y(t), \quad z_n(t,s) \xrightarrow{M^2} z(t,s), \quad n \to \infty,$$

gde je $\{(y(s), z(t,s)), (t,s) \in \mathcal{D}\}$ jedinstveno rešenje jednačine (2.43).

Sledećom teoremom je data veza između rešenja jednačina (2.43) i (2.50), pri čemu koeficijent drifta zadovoljava hipotezu $(\mathbf{H_3})$ umesto $(\mathbf{H_2})$.

Teorema 2.2.4 *Neka važe hipoteze* $(\mathbf{H_1})$ *i* $(\mathbf{H_3})$ *i neka je* $\{(\bar{y}(s), \bar{z}(t,s)), (t,s) \in \mathcal{D}\} \in \mathcal{M}^2([0,T];\mathbb{R}^d) \times \mathcal{M}^2(\mathcal{D};\mathbb{R}^{d\times k})$ *jedinstveno rešenje jednačine (2.50). Tada je*

$$\{(\bar{y}(s), \bar{z}(t,s) - g(t,s,\bar{y}(s))), (t,s) \in \mathcal{D}\} \in \mathcal{M}^2([0,T];\mathbb{R}^d) \times \mathcal{M}^2(\mathcal{D};\mathbb{R}^{d\times k})$$

jedinstveno rešenje jednačine (2.43).

Dokaz. Uporedo sa jednačinom (2.56) posmatra se i jednačina

$$\bar{y}_n(t) + \int_t^T f_n(t,s,\bar{y}_n(s), \bar{z}_n(t,s) - g(t,s,\bar{y}_n(s)))\, ds + \int_t^T \bar{z}_n(t,s)\, dW(s) = \xi. \quad (2.57)$$

Označimo

$$\widehat{f_n}(t,s,y,z) := f_n(t,s,y,z - g(t,s,y)), \quad \widehat{f}(t,s,y,z) := f(t,s,y,z - g(t,s,y))$$

za svako $(t,s) \in \mathcal{D}$, $(x,z) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d\times k}$. Evidentno, $\widehat{f}_n$ ispunjava globalni Lipschitzov uslov (2.45) kao kompozicija funkcija f_n i g koje su obe Lipschitzove. Teorema 2.2.3 daje vezu između rešenja $\{(y_n(s), z_n(t,s)), (t,s) \in \mathcal{D}\}$ i $\{(\bar{y}_n(s), \bar{z}_n(t,s)), (t,s) \in \mathcal{D}\}$ jednačina (2.56) (2.57), respektivno, na sledeći način,

$$y_n(t) = \bar{y}_n(t) \text{ s.i.}, \quad z_n(t,s) = \bar{z}_n(t,s) - g(t,s,\bar{x}_n(s)) \text{ s.i.} \tag{2.58}$$

Sa druge strane, lako se proverava da je hipoteza $(\mathbf{H_3})$ ispunjena za $\widehat{f}$. Primenom Leme 2.2.2, za svako fiksirano $N \in \mathbb{N}$ sledi da $\varrho_N(f_n - f) \to 0$ kada $n \to \infty$, i da $\varrho_N(\widehat{f}_n - \widehat{f}) \to 0$ kada $n \to \infty$. Uslov (2.49) je takođe ispunjen sa $L'_N = (1+K)L_N$ umesto L_N. Iz ovoga sledi da za svako $(t,s) \in \mathcal{D}$,

$$\bar{y}_n(t) \xrightarrow{M^2} \bar{y}(t), \quad \bar{z}_n(t,s) \xrightarrow{M^2} \bar{z}(t,s), \quad n \to \infty,$$

gde je $\{(\bar{y}(s), \bar{z}(t,s)), (t,s) \in \mathcal{D}\}$ rešenje jednačine (2.50). Imajući u vidu (2.58), sledi da je $y(t) = \bar{y}(t)$ skoro izvesno i $z(t,s) = \bar{z}(t,s) - g(t,s,y(s))$ skoro izvesno, čime je dokaz teoreme završen. $\diamondsuit$

Na ovaj način je data veza kojom se rešenje nehomogene (2.43), koja se može smatrati perturbovnom jednačinom, bez njenog rešavanja izražava pomoću rešenja homogene, neperturbovane jednačine (2.44).

Glava 3

Nehomogene backward doubly stohastičke diferencijalne jednačine

U ovoj glavi je uvedena nova klasa jednačina – nehomogenih backward doubly stohastičkih diferencijalnih jednačina, sa funkcijom dodatom kontrolnom procesu u forward stohastičkom integralu Itôa, koja se može tretirati kao perturbacija. Postavljene su i dokazane teoreme egzistencije i jedinstvenosti rešenja i data je veza između rešenja ove jednačine i pridružene jednačine sa neperturbovanim koeficijentom uz forward stohastički integral. Problem je rešavan kada koeficijenti jednačina zadovoljavaju Lipschitzove uslove, kao i nelipšicovske integralne uslove. Dokazane su i teoreme upoređivanja rešenja u oba slučaja i veza rešenja backward doubly stohastičkih diferencijalnih jednačina sa rešenjem pridružene kvazilinearne stohastičke parcijalne diferencijalne jednačine, tj. jedan oblik Feynman-Kac formule. Ova glava u potpunosti sadrži nove rezultate.

3.1 Egzistencija i jedinstvenost rešenja

Pardoux je osamdesetih godina prošlog veka u radovima [105, 106] izveo probabilistički oblik rešenja linearnih stohastičkih paraboličnih parcijalnih diferencijalnih jednačina, čime je uopštio klasičnu Feynman-Kac formulu (videti [82, 103, 123]). Desetak godina kasnije, Pardoux i Peng su drugačijim pristupom u nizu radova [108, 112, 113, 115, 116], opisali vezu između rešenja određene klase stohastičkih kvazilinearnih paraboličnih parcijalnih diferencijalnih jednačina i rešenja backward stohastičkih diferencijalnih jednačina i time generalizovali prethodno izvedenu Feynman-Kac formulu. Kombinujući ova dva pristupa, Pardoux i Peng su u radu [110] uveli novu klasu backward stohastičkih diferencijalnih jednačina – *backward doubly stohastičke diferencijalne jednačine*, kraće BDSDJ (eng. backward doubly stohastic differential equations). U istom radu su pod određenim uslovima izveli vezu između rešenja ovih jednačina i rešenja određene klase stohastičkih kvazilinearnih parcijalnih diferencijalnih jednačina (kraće SPDJ), i time posredno dokazali egzistenciju i jedinstvenost rešenja te klase jednačina.

Za $t \in [0,T]$, BDSDJ je oblika

$$y(t) = \xi + \int_t^T f(s, y(s), z(s))\, ds + \int_t^T g(s, y(s), z(s))\, dB(s) - \int_t^T z(s)\, dW(s), \quad (3.1)$$

gde je integral u odnosu na Brownovo kretanje $B(t)$ "backward" Itô integral, dok je integral u odnosu na Brownovo kretanje $W(t)$ standardni forward Itô integral. Oba integrala su tipa Itô-Skorohodovog integrala (videti Nualart, Pardoux [98]). Rešenje je uređeni par procesa $(y(t), z(t))$ adaptiranih u odnosu na prošlost Brownovih kretanja.

Pardoux and Peng su u radu [110] dokazali teoremu egzistencije i jedinstvenosti rešenja jednačine (3.1) pod pretpostavkom da koeficijenti drifta i difuzije, f i g, zadovoljavaju uniformni Lipschitzov uslov i da je finalni uslov ξ kvadratno integrabilna slučajna promenljiva. Od tada, mnogi autori su pokušavali da oslabe uslove za funkcije f i g i da time uopšte u nekom smislu jednačinu (3.1), kao na primer, Lin [85], Aman [4], Aman, Owo [5], N'zi, Owo [101, 102], Boufoussi, Casteren, Mrhardy [18], Ren, Lin, Hu [120], Hu, Lin, Ren [53].

Zbog značajne primene BSDJ u ekonomiji i finansijama, pre svega zbog barijernih opcija, mnogi autori su istraživali svojstva BDSDJ sa barijerom (videti El Karoui [70], Bahlali, Hassani, Mansouri [12], Shi, Gu [124], Ren [122] itd.). Osim toga, u poslednje vreme se razvija efikasan aparat za BDSDJ – teorija vezana za teoreme upoređivanja rešenja ovih jednačina (videti Lin [85], Shi, Gu, Liu [125], El Otmani, Mrhardy [100]). Ove teoreme upoređivanja, preko Feynman-Kac formule, značajne su i u upoređivanju rešenja nekih tipova stohastičkih parcijalnih diferncijalnih jednačina.

Svi prethodno navedeni radovi razmatraju BDSDJ jednačine koje uz forward integral imaju samo proces z, tj. koje sadrže integral $\int_t^T z(s)\, dW(s)$. Novi rezultati u ovoj disertacji sadrže forward integral opštijeg oblika i objavljeni su u radu [62], S. Janković, J. Đorđević, M. Jovanović, *On a class of backward doubly stochastic differential equations*, Applied Mathematics and Computation, 217 (2011), 8754-8764. Glavna tema ovog rada je proširenje postojećih rezultata teorije BDSDJ na širu klasu ovih jednačina, odnosno, analiza rešenja BDSDJ kod kojih se uvodi funkcija h koja zavisi od procesa stanja y u forward integralu. Preciznije, razmatra se jednačina

$$\begin{aligned} Y(t) = \xi + \int_t^T f(s, Y(s), Z(s))\, ds + \int_t^T g(s, Y(s), Z(s))\, dB(s) \\ - \int_t^T [h(s, Y(s)) + Z(s)]\, dW(s), \quad t \in [0,T]. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Glavni rezultat je veza kojom se rešenje jednačine (3.2) može izraziti u terminima rešenja jednačine

$$\begin{aligned} y(t) = \xi + \int_t^T f(s, y(s), z(s) - h(s, y(s)))\, ds + \int_t^T g(s, y(s), z(s) - h(s, y(s)))\, dB(s) \\ - \int_t^T z(s)\ dW(s), \quad t \in [0,T], \end{aligned} \quad (3.3)$$

koja je u stvari tip jednačine (3.1). Time se posredno dokazuju egzistencija i jedinstvenost rešenja jednačine oblika (3.2).

Jednačina (3.2) se moze posmatrati kao tip aditivno perturbovane BDSDJ, gde su sve perturbacije jednake nuli, sem one uz forward integral. Perturbacija uz forward integral je upravo funkcija h. Jednačina (3.2) se naziva *nehomogenom* BDSDJ, dok je (3.3) njena odgovarajuća *homogena* jednačina. Na osnovu rezultata za homogeni tip jednačine, u esencijalnom radu [110] Pardouxa i Penga su date ocene momenata rešenja, dokazane su teoreme upoređivanja rešenja i data je veza rešenja jednačine (3.2) sa rešenjem odgovarajućeg sistema kvazilinearne SPDJ. U ovom delu disertacije su, pored ostalog, svi rezultati rada [110] prošireni na klasu nehomogenih BDSDJ. Naglasimo da su sva ova proširenja izvedena potpuno novom tehnikom u odnosu na onu iz rada [110], te time ne predstavljaju samo formalno proširenje rezultata ovog rada.

3.1.1 Teoreme egzistencije i jedinstvenosti rešenja BDSDJ – Lipshitzov uslov

Do kraja ove glave, sve slučajne promenljive i slučajni procesi su definisani na prostoru verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ i $[0,T]$ je proizvoljan fiksiran vremenski interval. Pretpostavlja se da su $\{W(t), t \in [0,T]\}$ i $\{B(t), t \in [0,T]\}$ dva nezavisna standardna Brownova kretanja sa vrednostima u R^d i R^l, respektivno.

Za svako $t \in [0,T]$, definiše se

$$\mathcal{F}_t := \mathcal{F}_t^W \vee \mathcal{F}_{t,T}^B ,$$

pri čemu je za proces η_t, $\mathcal{F}_{s,t}^\eta = \sigma\{\eta_r - \eta_s, r \in [s,t]\} \vee \mathcal{N}$ i $\mathcal{F}_t^\eta = \mathcal{F}_{0,t}^\eta$, gde je $\mathcal{N}$ skup svih elemenata iz $\mathcal{F}$ verovatnoće nula. Kako su $\{\mathcal{F}_t^W, t \in [0,T]\}$ i $\{\mathcal{F}_{t,T}^B, t \in [0,T]\}$ rastuća i opadajuća filtracija, respektivno, familija $\{\mathcal{F}_t, t \in [0,T]\}$ nije ni rastuća ni opadajuća, pa samim tim ne predstavlja filtraciju.

Neka je $\mathcal{M}^2([0,T];\mathbb{R}^n)$ skup stohastičkih procesa[1] iz $\mathbb{R}^n$ za koje važi:

(i) φ_t je $\mathcal{F}_t$-merljiv proces za skoro svako $t \in [0,T]$;

(ii) $||\varphi||_{\mathcal{M}^2} = E\int_0^T |\varphi_t|^2\,dt < \infty$.

Uočimo da je skup stohastičkih procesa $\mathcal{M}^2([0,T];\mathbb{R}^n)$ drugačiji od $\mathcal{M}^2([0,T];\mathbb{R}^n)$ definisanog u Poglavlju 2, jer $\{\mathcal{F}_t, t \in [0,T]\}$ u ovom slučaju nije filtracija.

Slično, sa $\mathcal{S}^2([0,T],\mathbb{R}^n)$ je označen skup neprekidnih stohastičkih procesa sa vrednostima u $\mathbb{R}^n$, za koje važi:

(i) φ_t je $\mathcal{F}_t$-merljiv proces za svako $t \in [0,T]$;

(ii) $||\varphi||_{\mathcal{S}^2} = E\sup_{t\in[0,T]} |\varphi_t|^2 < \infty$.

Kao za BSDJ, uvodi se definicija rešenja BDSDJ.

[1] Elementi ovog skupa su $dP \times dt$ jednaki skoro svuda.

Definicija 3.1.1 *Rešenje jednačine (3.2) je par procesa* $(Y, Z) = \{(y(t), z(t)), t \in [0, T]\} \in \mathcal{S}^2([0, T]; \mathbb{R}^k) \times \mathcal{M}^2([0, T]; \mathbb{R}^{k\times d})$ *sa vrednostima u* $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d}$*, koji zadovoljava jednačinu (3.2) skoro izvesno.*

Definicija 3.1.2 *Rešenje* $\{(y(t), z(t)), t \in [0, T]\}$ *jednačine (3.2) je jedinstveno, ako za svako drugo rešenje* $\{\bar{Y}(t), \bar{Z}(t)), t \in [0, T]\}$ *važi da je* $P\{Y(t) = \bar{Y}(t),\, t \in [0, T]\} = 1$ *i* $E\int_0^T ||Z(t) - \bar{Z}(t)||^2\, dt = 0$.

U daljem radu će više puta biti primenjena proširena formula Itôa. Nemogućnost primene prethodne verzije formule Itôa, Teoreme 1.3.4, je zbog prisustva backward integrala u jednačinama (3.1) i (3.2).

Lema 3.1.1 (Pardoux, Peng [110]) *Neka su procesi* $\alpha \in \mathcal{S}^2([0, T]; \mathbb{R}^k)$, $\beta \in \mathcal{M}^2([0, T]; \mathbb{R}^k)$, $\gamma \in \mathcal{M}^2([0, T]; \mathbb{R}^{k\times l})$, $\delta \in \mathcal{M}^2([0, T]; \mathbb{R}^{k\times d})$ *takvi da je*

$$\alpha(t) = \alpha(0) + \int_0^t \beta(s) ds + \int_0^t \gamma(s)\, dB(s) + \int_0^t \delta(s)\, dW(s), \quad t \in [0, T].$$

Tada je

$$|\alpha(t)|^2 = |\alpha(0)|^2 + 2\int_0^t \alpha^T(s)\beta(s)\, ds + 2\int_0^t \alpha^T(s)\gamma(s)\, dB(s) + 2\int_0^t \alpha^T(s)\delta(s)\, dW(s) - \int_0^t ||\gamma(s)||^2\, ds + \int_0^t ||\delta(s)||^2\, ds.$$

U opštem slučaju, za funkciju $\Phi \in C^2(\mathbb{R}^k)$ *je*

$$\Phi(\alpha(t)) = \Phi(\alpha(0)) + \int_0^t \Phi'^T(\alpha(s))\beta(s)\, ds + \int_0^t \Phi'^T(\alpha(s))\gamma(s)\, dB(s) + \int_0^t \Phi'^T(\alpha(s))\delta(s)\, dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^t trace[\Phi''(\alpha(s))\gamma(s)\gamma^T(s)]\, ds + \frac{1}{2}\int_0^t trace[\Phi''(\alpha(s))\delta(s)\delta^T(s)]\, ds.$$

Uvode se sledeće hipoteze, od kojih se druga odnosi na Lipschitzov uslov.

($\mathbf{H_0}$) Za finalni uslov i funkcije f, g i h važi:

(i) $\xi \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P; \mathbb{R}^k)$;

(ii) $f : \Omega \times [0, T] \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d} \to \mathbb{R}^k$, $g : \Omega \times [0, T] \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d} \to \mathbb{R}^{k\times l}$, $h : \Omega \times [0, T] \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{k\times d}$ su merljive funkcije;

(iii) $f(\cdot, y, z) \in \mathcal{M}^2([0, T]; \mathbb{R}^k)$, $g(\cdot, y, z) \in \mathcal{M}^2([0, T]; \mathbb{R}^{k\times l})$, $h(\cdot, y) \in \mathcal{M}^2([0, T]; \mathbb{R}^{k\times d})$ za svako $(y, z) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d}$.

($\mathbf{H_1}$) Za funkcije f, g i h koje zadovoljavaju hipotezu ($\mathbf{H_0}$), postoje konstante $K > 0$ i $0 < \alpha < 1$ takve da je za svako $(\omega, t) \in \Omega \times [0, T]$ i $(y_1, z_1), (y_2, z_2) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d}$,

$$|f(t, y_1, z_1) - f(t, y_2, z_2)|^2 \leq K\big(|y_1 - y_2|^2 + ||z_1 - z_2||^2\big),$$
$$||g(t, y_1, z_1) - g(t, y_2, z_2)||^2 \leq K|y_1 - y_2|^2 + \alpha||z_1 - z_2||^2,$$
$$||h(t, y_1) - h(t, y_2)||^2 \leq K|y_1 - y_2|^2.$$

Analiza jednačine (3.2) je bazirana na sledećem tvrđenju koje se odnosi na jednačinu (3.1).

Propozicija 3.1.1 (Pardoux, Peng [110]) *Neka važe pretpostavke* $(\mathbf{H_0})$ *i* $(\mathbf{H_1})$ *za* ξ, f *i* g. *Tada jednačina (3.1) ima jedinstveno rešenje* $(y,z) \in \mathcal{S}^2([0,T];\mathbb{R}^k) \times \mathcal{M}^2([0,T];\mathbb{R}^{k\times d})$.

Dokaz Propozicije 3.1.1 se zasniva na iterativnom nizu: Neka je $y^0(t) \equiv 0, z^0(t) \equiv 0$. Za dato $\{(y^{n-1}(t), z^{n-1}(t)), t \in [0,T]\}$, par procesa $\{(y^n(t), z^n(t))_{n=1,2..}, t \in [0,T]\}$ iz $\mathcal{S}^2([0,T];\mathbb{R}^k) \times \mathcal{M}^2([0,T];\mathbb{R}^{k\times d})$ je jedinstveno rešenje jednačine

$$\begin{aligned} y^n(t) = \xi + \int_t^T f(s, y^{n-1}(s), z^{n-1}(s))\,ds + \int_t^T g(s, y^{n-1}(s), z^{n-1}(s))\,dB(s), \\ - \int_t^T z^n(s)\,dW(s), \quad t \in [0,T]. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Iz dokaza propozicije sledi da $y^n \xrightarrow{\mathcal{S}^2} y$, $z^n \xrightarrow{\mathcal{M}^2} z$ kada $n \to \infty$, odnosno,

$$\mathbf{E} \sup_{t\in[0,T]} |y^n(t) - y(t)|^2 \to 0, \quad \mathbf{E} \int_0^T ||z^n(t) - z(t)||^2 \to 0, \ n \to \infty.$$

Egzistencija i jedinstvenost rešenja $\{(y^n(t), z^n(t)), t \in [0,T]\}$ jednačine (3.4) se zasniva na činjenici da ona pripada sledećem tipu BDSDJ,

$$y(t) = \xi + \int_t^T f(s)\,ds + \int_t^T g(s)\,dB(s) - \int_t^T z(s)\,dW(s), \quad t \in [0,T], \tag{3.5}$$

za koju su Pardoux i Peng dokazali tvrđenje:

Propozicija 3.1.2 (Pardoux, Peng [110]) *Neka je* $\xi \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbf{P}; \mathbb{R}^k)$ *i neka su procesi* $f \in \mathcal{M}^2([0,T];\mathbb{R}^k)$ *i* $g \in \mathcal{M}^2([0,T];\mathbb{R}^{k\times l})$. *Tada postoji jedinstveno određen par procesa* $(y,z) \in \mathcal{S}^2([0,T];\mathbb{R}^k) \times \mathcal{M}^2([0,T];\mathbb{R}^{k\times d})$ *koji skoro izvesno zadovoljava jednačinu (3.5).*

Koristeći Propoziciju 3.1.2 dobijena je veza pomoću koje se rešenje jednačine (3.2) izražava u terminima rešenja jednačine (3.3). Koristeći ovaj rezultat, dobijene su i neke ocene momenata i teoreme upoređivanja rešenja ovih jednačina, o kojima će biti više reči u narednim poglavljima.

Teorema 3.1.1 *Neka je* $\xi \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbf{P}; \mathbb{R}^k)$ *i neka su procesi* $f \in \mathcal{M}^2([0,T];\mathbb{R}^k)$, $g \in \mathcal{M}^2([0,T];\mathbb{R}^{k\times l})$ *i* $h \in \mathcal{M}^2([0,T];\mathbb{R}^{k\times d})$. *Neka je takođe* $\{(y(t), z(t)), t \in [0,T]\}$ *rešenje jednačine (3.5). Tada je*

$$\{(y(t), z(t) - h(t)), t \in [0,T]\} \in \mathcal{S}^2([0,T];\mathbb{R}^k) \times \mathcal{M}^2([0,T];\mathbb{R}^{k\times d})$$

jedinstveno rešenje jednačine

$$Y(t) = \xi + \int_t^T f(s)\,ds + \int_t^T g(s)\,dB(s) - \int_t^T [h(s) + Z(s)]\,dW(s), \quad t \in [0,T]. \tag{3.6}$$

Dokaz. Neka je $\{(Y(t), Z(t)), t \in [0,T]\}$ proizvoljno rešenje nehomogene BDSDJ (3.6) i $\{(y(t), z(t)), t \in [0,T]\}$ rešenje homogene BDSDJ (3.5). Oduzimanjem ove dve jednačine se dobija

$$Y(t) - y(t) + \int_t^T [h(s) + Z(s) - z(s)]\, dW(s) = 0 \ \text{ s.i.}, \ t \in [0,T].$$

Kako je

$$\mathbf{E}|Y(t) - y(t)|^2 + \mathbf{E}\int_t^T ||h(s) + Z(s) - z(s)||^2\, ds = 0, \quad t \in [0,T], \tag{3.7}$$

to je $Y(t) = y(t)$ skoro izvesno za svako $t \in [0,T]$, dok za kontrolne procese iz $E\int_t^T ||h(s) + Z(s) - z(s)||^2\, ds = 0$ sledi $Z(t) = z(t) - h(t)$ skoro izvesno, za skoro svako $t \in [0,T]$.

Jedinstvenost rešenja $\{(y(t), z(t) - h(t)), t \in [0,T]\}$ sledi direktno iz jedinstvenosti rešenja $\{(y(t), z(t)), t \in [0,T]\}$ jednačine (3.5). $\diamondsuit$

Sledećom teoremom je dat jedan od glavnih rezultata ovog poglavlja, teorema egzistencije i jedinstvenosti rešenja jednačine (3.2) i eksplicitna veza rešenja jednačina (3.1) i (3.2).

Teorema 3.1.2 *Pretpostavimo da za ξ, f, g i h važe hipoteze* $(\mathbf{H_0})$ *i* $(\mathbf{H_1})$ *i da je $\{(y(t), z(t)), t \in [0,T]\}$ rešenje jednačine (3.3). Tada je*

$$\{(y(t), z(t) - h(t, y(t))), t \in [0,T]\} \in \mathcal{S}^2([0,T]; \mathbb{R}^k) \times \mathcal{M}^2([0,T]; \mathbb{R}^{k\times d})$$

jedinstveno rešenje jednačine (3.2).

Dokaz. *Egzistencija.* Iz dokaza Propozicije 3.1.1 sledi da je jedinstveno rešenje $(y(t), z(t))$ jednačine (3.3) dobijeno pomoću iterativnog niza $(y^n(t), z^n(t))$, gde je

$$\begin{aligned} y^n(t) & \\ &= \xi + \int_t^T f(s, y^{n-1}(s), z^{n-1}(s) - h(s, y^{n-1}(s)))\, ds \qquad (3.8)\\ &+ \int_t^T g(s, y^{n-1}(s), z^{n-1}(s) - h(s, y^{n-1}(s)))\, dB(s) - \int_t^T z^n(s)\, dW(s), \ t \in [0,T], \end{aligned}$$

za $n = 1, 2\ldots$, $y^0(t) \equiv 0$, $z^0(t) \equiv h(t,0)$. Pritom, $y^n(t) \xrightarrow{\mathcal{S}^2} y(t)$, $z^n(t) \xrightarrow{\mathcal{M}^2} z(t)$ kada $n \to \infty$, za $t \in [0,T]$. Na osnovu Teoreme 3.1.1, za svako $n \in \mathbb{N}$ postoji jedinstveno rešenje $\{(Y^n(t), Z^n(t)), t \in [0,T]\}$ jednačine

$$\begin{aligned} Y^n(t) = \xi &+ \int_t^T f(s, y^{n-1}(s), z^{n-1}(s) - h(s, y^{n-1}(s)))\, ds \\ &+ \int_t^T g(s, y^{n-1}(s), z^{n-1}(s) - h(s, y^{n-1}(s)))\, dB(s) \\ &- \int_t^T [h(s, y^{n-1}(s)) + Z^n(s)]\, dW(s), \ t \in [0,T], \end{aligned} \tag{3.9}$$

gde je $(Y^n(t), Z^n(t)) = (y^n(t), z^n(t) - h(t, y^{n-1}(t)))$ za $t \in [0,T]$, odnosno,

$$Y^n(t) = y^n(t) \text{ s.i. za svako } t \in [0,T],\; E\int_0^T ||h(t, y^{n-1}(t)) + Z^n(t) - z^n(t)||^2\, dt = 0. \tag{3.10}$$

Osim toga,

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\int_0^T ||z^n(t) - h(t, y^{n-1}(t)) - \big(z(t) - h(t, y(t))\big)||^2\, dt \\
&\le 2\mathbf{E}\int_0^T ||z^n(t) - z(t)||^2\, dt + 2K\mathbf{E}\int_0^T |y^{n-1}(t) - y(t)|^2\, dt \\
&\longrightarrow 0, \quad n \to \infty,
\end{aligned}$$

odnosno, $z^n(t) - h(t, y^{n-1}(t)) \xrightarrow{\mathcal{M}^2} z(t) - h(t, y(t))$ kada $n \to \infty$ za $t \in [0,T]$. Iz uslova $(\mathbf{H_0})$ i $(\mathbf{H_1})$ za funkciju h je

$$\mathbf{E}\int_0^T ||h(t, y(t))||^2 \le 2K\,\mathbf{E}\int_0^T |y(t)|^2\, dt + 2\mathbf{E}\int_0^T ||h(t,0)||^2\, dt < \infty,$$

iz čega sledi da je $\{h(t, y(t)), t \in [0,T]\} \in \mathcal{M}^2([0,T]; \mathbb{R}^{k\times d})$. Otuda je $\{(y(t), z(t) - h(t, y(t))), t \in [0,T]\} \in \mathcal{S}^2([0,T]; \mathbb{R}^k) \times \mathcal{M}^2([0,T]; \mathbb{R}^{k\times d})$. Ostaje da se dokaže da je ovaj uređeni par rešenje jednačine (3.2).

Primenom Lipschitzovog uslova za svako $t \in [0,T]$ je

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left|\int_t^T f(s, y^{n-1}(s), z^{n-1}(s) - h(s, y^{n-1}(s)))\, ds - \int_t^T f(s, y(s), z(s) - h(s, y(s)))\, ds\right|^2 \\
&\le T\mathbf{E}\int_t^T |f(s, y^{n-1}(s), z^{n-1}(s) - h(s, y^{n-1}(s))) - f(s, y(s), z(s) - h(s, y(s)))|^2\, ds \\
&\le TK\mathbf{E}\int_t^T |y^{n-1}(s) - y(s)|^2\, ds \\
&\quad + TK\mathbf{E}\int_0^T ||z_s^{n-1} - h(s, y^{n-1}(s)) - (z(s) - h(s, y(s)))||^2\, ds \\
&\longrightarrow 0, \quad n \to \infty.
\end{aligned}$$

Slično,

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\bigg|\int_t^T g(s, y^{n-1}(s), z^{n-1}(s) - h(s, y^{n-1}(s)))\, dB(s) \\
&\quad - \int_t^T g(s, y(s), z(s) - h(s, y(s)))\, dB(s)\bigg|^2 \\
&= \mathbf{E}\int_t^T ||g(s, y^{n-1}(s), z^{n-1}(s) - h(s, y^{n-1}(s))) - g(s, y(s), z(s) - h(s, y(s)))||^2\, ds \\
&\longrightarrow 0, \quad n \to \infty,
\end{aligned}$$

Na osnovu (3.10),

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left|\int_t^T [h(s,y^{n-1}(s)) + Z^n(s)]\,dW(s) - \int_t^T [h(s,y(s)) + (z(s) - h(s,y(s)))]\,dW(s)\right|^2 \\
&= \mathbf{E}\int_t^T ||h(s,y^{n-1}(s)) + Z^n(s) - z(s)||^2\,ds \\
&\leq 2\mathbf{E}\int_t^T ||h(s,y^{n-1}(s)) + Z^n(s) - z^n(s)||^2\,ds + 2\mathbf{E}\int_t^T ||z^n(s) - z(s)||^2\,ds \\
&\longrightarrow 0, \quad n \to \infty.
\end{aligned}
$$

Prema tome, za svako $t \in [0,T]$, kada $n \to \infty$,

$$
\begin{aligned}
&\int_t^T f(s,y^{n-1}(s),z^{n-1}(s) - h(s,y^{n-1}(s)))\,ds \xrightarrow{\mathbf{P}} \int_t^T f(s,y(s),z(s) - h(s,y(s)))\,ds, \\
&\int_t^T g(s,y^{n-1}(s),z^{n-1}(s) - h(s,y^{n-1}(s)))\,dB(s) \\
&\qquad\qquad\qquad \xrightarrow{\mathbf{P}} \int_t^T g(s,y(s),z(s) - h(s,y(s)))\,dB(s), \\
&\int_t^T [h(s,y^{n-1}(s)) - Z^n(s)]\,dW(s) \xrightarrow{\mathbf{P}} \int_t^T [h(s,y(s)) - (z(s) - h(s,y(s)))]\,dW(s).
\end{aligned}
$$

Prelaskom na limes kada $n \to \infty$ u (3.9), sledi da za $(y(t), z(t))$ skoro izvesno važi jednakost

$$
\begin{aligned}
y(t) = \xi &+ \int_t^T f(s,y(s),z(s) - h(s,y(s)))\,ds + \int_t^T g(s,y(s),z(s) - h(s,y(s)))\,dB(s) \\
&- \int_t^T [h(s,y(s)) + (z(s) - h(s,y_s))]\,dW(s), \quad t \in [0,T], \qquad (3.11)
\end{aligned}
$$

što je i trebalo dokazati.

Jedinstvenost. Uobičajno, jedinstvenost rešenja se dokazuje kontradikcijom. Pretpostavimo da postoje dva rešenja $\{(Y^i(t), Z^i(t)), t \in [0,T]\}$, $i = 1,2$ jednačine (3.2). Iz dokaza egzistencije rešenja sledi da je $(Y^i(t), Z^i(t)) = (y^i(t), z^i(t) - h(t, y^i(t)))$, odnosno,

$$
Y^i(t) = y^i(t) \text{ s.i. za svako } t \in [0,T], \quad \mathbf{E}\int_0^T ||h(t,y^i(t)) + Z^i(t) - z^i(t)||^2\,dt = 0, \qquad (3.12)
$$

gde su $\{(y^i(t), z^i(t)), t \in [0,T]\}$, $i = 1,2$, rešenja jednačine (3.3). Međutim, na osnovu Propozicije 3.1.1, rešenje jednačine (3.3) je jedinstveno, tj. $y^1(t) = y^2(t)$ skoro izvesno za svako $t \in [0,T]$, što povlači

$$
Y^1(t) = Y^2(t) \text{ s.i. za svako } t \in [0,T].
$$

Iz (3.12) se dobija

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{E}\int_0^T ||Z^1(t) - Z^2(t)||^2\, dt \\
&\leq 4\Bigg[\mathbf{E}\int_0^T ||h(t, y^1(t)) + Z^1(t) - z^1(t)||^2\, dt \\
&\qquad + \mathbf{E}\int_0^T ||h(t, y^2(t)) + Z^2(t) - z^2(t)||^2\, dt \\
&\qquad + \mathbf{E}\int_0^T ||z^1(t) - z^2(t)||^2\, dt + K\,\mathbf{E}\int_0^T |y^1(t) - y^2(t)|^2\, dt\Bigg] = 0,
\end{aligned}
$$

odnosno, jednačina (3.2) ima jedinstveno rešenje u smislu Definicije 3.1.2. $\diamondsuit$

3.1.2 Teoreme egzistencije i jedinstvenosti rešenja BDSDJ – odsustvo Lipshitzovog uslova

Prethodno je pokazano da se rešenje jednačine (3.2) može izraziti pomoću rešenja jednačine (3.1) ako koeficijenti jednačine zadovoljavaju Lipschitzov uslov iz hipoteze $(\mathbf{H_1})$. U nastavku, koristeći Teoremu 3.1.2, pokazaće se da isti zaključak važi i pri opštijim uslovima. Postavka ovog problema je inspirisana radovima [85, 101], u kojima se razmatra jednačina (3.3) pod uslovom da njeni koeficijenti zadovoljavaju tzv. *nelipšicovski uslov*, uveden narednom hipotezom.

$(\mathbf{H_2})$ Za funkcije f, g i h koje zadovoljavaju hipotezu $(\mathbf{H_0})$, postoje konstante $C > 0$ i $0 < \alpha < 1$ takve da je za svako $(\omega, t) \in \Omega \times [0, T]$ i $(y_1, z_1), (y_2, z_2) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d}$,

$$
\begin{aligned}
|f(t, y_1, z_1) - f(t, y_2, z_2)|^2 &\leq \rho(t, |y_1 - y_2|^2) + C||z_1 - z_2||^2, \\
||g(t, y_1, z_1) - g(t, y_2, z_2)||^2 &\leq \rho(t, |y_1 - y_2|^2) + \alpha||z_1 - z_2||^2, \\
||h(t, y_1) - h(t, y_2)||^2 &\leq \rho(t, |y_1 - y_2|^2),
\end{aligned}
$$

pri čemu funkcija $\rho : [0, T] \times R^+ \to R^+$ zadovoljava sledeće uslove:

– $\rho(t, \cdot)$ je konkavna neopadajuća funkcija za fiksirano $t \in [0, T]$ i $\rho(t, 0) \equiv 0$;
– $\int_0^T \rho(t, u)\, dt < \infty$ za fiksirano u;
– za svako $M > 0$, diferencijalna jednačina

$$u' = -M\,\rho(t, u), \quad u(T) = 0$$

ima jedinstveno rešenje $u(t) \equiv 0$, $t \in [0, T]$.

Očigledno, ako je $\rho(t, u) \equiv Cu$, onda se nelipšicovski uslov $(\mathbf{H_2})$ svodi na Lipschitzov uslov $(\mathbf{H_1})$.

U dokazivanju novih rezultata, primenjivaće se sledeće tvrđenje.

Propozicija 3.1.3 (N'zi, Owo [101]) *Ako važe hipoteze* $(\mathbf{H_0})$ *i* $(\mathbf{H_2})$ *za* ξ, f *i* g, *tada jednačina (3.1) ima jedinstveno rešenje* $(y, z) \in \mathcal{S}^2([0, T]; \mathbb{R}^k) \times \mathcal{M}^2([0, T]; \mathbb{R}^{k\times d})$.

Dokaz Propozicije 3.1.3 se zasniva na konstrukciji iterativnog niza: $y^0(t) \equiv 0, t \in [0,T]$ i par procesa $(y^n, z^n) \in \mathcal{S}^2([0,T];\mathbb{R}^k) \times \mathcal{M}^2([0,T];\mathbb{R}^{k\times d})$ je definisan rekurzivno na sledeći način,

$$y^n(t)=\xi+\int_t^T f(s,y^{n-1}(s),z^n(s))\,ds+\int_t^T g(s,y^{n-1}(s),z^n(s))\,dB(s)-\int_t^T z^n(s)\,dW(s). \tag{3.13}$$

Dokazano je da postoji segment $T_1 \in [0,T]$ takav da su y^n i z^n Cauchyjevi nizovi u $\mathcal{S}^2([T_1,T];\mathbb{R}^k)$ i $\mathcal{M}^2([T_1,T];\mathbb{R}^{k\times d})$, respektivno. Zbog toga postoji par procesa $(y,z) \in \mathcal{S}^2([T_1,T];\mathbb{R}^k) \times \mathcal{M}^2([T_1,T];\mathbb{R}^{k\times d})$ takav da

$$y^n \xrightarrow{\mathcal{S}^2} y,\ n\to\infty, \qquad z^n \xrightarrow{\mathcal{M}^2} z,\ n\to\infty,$$

i (y,z) je rešenje jednačine (3.1) na intervalu $[T_1,T]$. Takođe, za svako $t\in[T_1,T]$ i $n\geq 1$,

$$\mathbf{E}|y^n(t)-y(t)|^2 \leq \phi_{n-1}(t),$$

gde je $\{\phi_n(t), t\in[T_1,T], n\geq 0\}$ nerastući, rekurzivni niz definisan kao

$$\phi_0(t) = M\int_t^T \rho(s,M_1)\,ds, \quad \phi_{n+1}(t) = M\int_t^T \rho(s,\phi_n(s))\,ds,$$

gde je $M_1 > 0$ generisana konstanta. Osim toga, $\phi_n(t) \to \phi(t) \equiv 0$, $n\to\infty$, uniformno na $[T_1,T]$. Kako je $\phi(T_1)=0$, ponavljajući istu proceduru, zaključuje se da postoji konstanta $T_2 \in [0,T_1]$ takva da je rešenje (y,z) produženo na interval $[T_2,T_1]$. Dokaz egzistencije je kompletiran činjenicom da postoji $p\in N$ za koje je $T_p = 0$.

Koristeći prethodno tvrđenje, dokazuje se egzistencija i jedinstvenost rešenja jednačine (3.2).

Teorema 3.1.3 *Neka su zadovoljene hipoteze* $(\mathbf{H_0})$ *i* $(\mathbf{H_2})$ *za* ξ, f, g *i* h *i neka je* $\{(y(t),z(t)), t\in[0,T]\}$ *rešenje jednačine (3.3). Tada je*

$$\{(y(t), z(t)-h(t,y(t))), t\in[0,T]\} \in \mathcal{S}^2([0,T];\mathbb{R}^k)\times\mathcal{M}^2([0,T];\mathbb{R}^{k\times d})$$

jedinstveno rešenje jednačine (3.2).

Dokaz. *Egzistencija.* Kako je jednačina (3.3) istog tipa kao jednačina (3.1), na osnovu Propozicije 3.1.3 se uvodi iterativni niz za aproksimaciju rešenja jednačine (3.3): $y^0(t)\equiv 0$, $(y^n(t), z^n(t)), n = 1,2,\ldots$ se definiše rekurzivno,

$$\begin{aligned} y^n(t) = \xi &+ \int_t^T f(s,y^{n-1}(s), z^n(s) - h(s,y^{n-1}(s)))\,ds \\ &+ \int_t^T g(s,y^{n-1}(s), z^n(s)-h(s,y^{n-1}(s)))\,dB(s) - \int_t^T z^n(s)\,dW(s),\ t\in[0,T]. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Iz Propozicije 3.1.3 sledi da $y^n \xrightarrow{\mathcal{S}^2} y$, $z^n \xrightarrow{\mathcal{M}^2} z$ kada $n\to\infty$, gde je $\{(y(t),z(t)), t\in[0,T]\}$ jedinsteveno rešenje jednačine (3.3).

Nizu homogenih BDSDJ (3.14) je pridružen niz nehomogenih BDSDJ,

$$\begin{aligned} Y^n(t) = \xi + \int_t^T f(s, y^{n-1}(s), Z^n(s))\,ds + \int_t^T g(s, y^{n-1}(s), Z^n(s))\,dB(s) \\ - \int_t^T [h(s, y^{n-1}(s)) + Z^n(s)]\,dW(s),\ t \in [0,T]. \end{aligned} \tag{3.15}$$

pri čemu je $Y^0(t) \equiv 0$. Kako za ξ, f, g nehomogenog niza jednačina, pa samim tim i za ξ, f, g homogenog niza jednačina, važi hipoteza $(\mathbf{H_1})$, na osnovu Teoreme 3.1.2 postoji jedinstveno rešenje $\{(Y^n(t), Z^n(t)), t \in [0,T]\} \in \mathcal{S}^2([0,T]; R^k) \times \mathcal{M}^2([0,T]; R^{k\times d})$ jednačina (3.15) za svako $n \in N$, pri čemu je veza rešenja homogenih (3.14) i nehomogenih jednačina (3.15) izražena na sledeći način,

$$(Y^n(t), Z^n(t)) = (y^n(t), z^n(t) - h(t, y^{n-1}(t))),\ t \in [0,T],\ n = 1, 2, \ldots.$$

Na osnovu Propozicije 3.1.3 postoji par stohastičkih procesa $(y,z) \in \mathcal{S}^2([T_1,T]; \mathbb{R}^k) \times \mathcal{M}^2([T_1,T]; \mathbb{R}^{k\times d})$ takav da $y^n \xrightarrow{\mathcal{S}^2} y$ i $z^n \xrightarrow{\mathcal{M}^2} z$ kada $n \to \infty$, pri čemu je (y,z) jedinstveno rešenje jednačine (3.3) na $[T_1,T]$.

Iz hipoteze $(\mathbf{H_2})$ za funkciju h i osobina funkcije $\rho(t,\cdot)$ sledi

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}\int_{T_1}^T ||z^n(t) - h(t, y^{n-1}(t)) - (z(t) - h(t, y(t)))||^2\,dt \\ &\le 2\mathbf{E}\int_{T_1}^T ||z^n(t) - z(t)||^2\,dt + 2\int_{T_1}^T \rho(t, \mathbf{E}|y^{n-1}(t) - y(t)|^2)\,dt \\ &\le 2\mathbf{E}\int_{T_1}^T ||z^n(t) - z(t)||^2\,dt + 2\int_{T_1}^T \rho(t, \phi_{n-2}(t))\,dt \\ &= 2\mathbf{E}\int_{T_1}^T ||z^n(t) - z(t)||^2\,dt + \frac{2}{M}\,\phi_{n-1}(T_1) \\ &\longrightarrow 0, \quad n \to \infty, \end{aligned} \tag{3.16}$$

odnosno, $z^n(t) - h(t, y^{n-1}(t)) \xrightarrow{\mathcal{M}^2} z(t) - h(t, y(t))$ kada $n \to \infty$. Takođe, iz hipoteza $(\mathbf{H_0})$ i $(\mathbf{H_2})$ za funkciju h i osobine funkcije ρ da je $\int_0^T \rho(t,u)\,dt < \infty$ za fiksirano u sledi

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\int_{T_1}^T ||h(t, y(t))||^2 &\le 2\,\mathbf{E}\int_{T_1}^T ||h(t, y(t)) - h(t, 0)||^2\,dt + 2\mathbf{E}\int_{T_1}^T ||h(t,0)||^2\,dt \\ &\le 2\int_{T_1}^T \rho(t, \mathbf{E}\sup_{t\in[T_1,T]} |y(t)|^2)\,dt + 2\mathbf{E}\int_{T_1}^T ||h(t,0)||^2\,dt \\ &< \infty, \end{aligned}$$

odnosno $\{h(t, y(t)), t \in [T_1,T]\} \in \mathcal{M}^2([T_1,T]; \mathbb{R}^{k\times d})$. Koristeći poslednju činjenicu, jednostavno se dokazuje da je $(y(t), z_t - h(t, y(t)))$ rešenje jednačine (3.2) na intervalu $[T_1,T]$.

Iz hipoteze $(\mathbf{H_2})$ i (3.16), za svako $t \in [T_1, T]$ je

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left|\int_t^T f(s, y^{n-1}(s), Z^n(s))\, ds - \int_t^T f(s, y(s), z(s) - h(s, y(s)))\, ds\right|^2 \\
&\leq (T - T_1) \\
&\quad \times \left[\int_t^T \rho(s, \mathbf{E}|y^{n-1}(s) - y(s)|^2)\, ds + C\,\mathbf{E}\int_0^T ||Z^n(s) - (z(s) - h(s, y(s)))||^2\, ds\right] \\
&\leq (T - T_1)\left[\frac{1}{M}\,\phi_{n-1}(t) + C\,\mathbf{E}\int_0^T ||z^n(s) - h(s, y^{n-1}(s)) - (z(s) - h(s, y(s)))||^2\, ds\right] \\
&\longrightarrow 0, \quad n \to \infty.
\end{aligned}
$$

Analogno,

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left|\int_t^T g(s, y^{n-1}(s), Z^n(s))\, dB(s) - \int_t^T g(s, y(s), z(s) - h(s, y(s)))\, dB(s)\right|^2 \\
&\leq \frac{1}{M}\,\phi_{n-1}(t) + \alpha\,\mathbf{E}\int_0^T ||z^n(s) - h(s, y^{n-1}(s)) - (z(s) - h(s, y(s)))||^2\, ds \\
&\longrightarrow 0, \quad n \to \infty,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left|\int_t^T [h(s, y^{n-1}(s)) + Z^n(s)]\, dW(s) - \int_t^T [h(s, y(s)) + (z(s) - h(s, y(s)))]\, dW(s)\right|^2 \\
&\leq 2\mathbf{E}\int_0^T ||h(s, y^{n-1}(s)) + Z^n(s) - z^n(s)||^2\, ds + 2\mathbf{E}\int_t^T ||z^n(s) - z(s)||^2\, ds \\
&\longrightarrow 0, \quad n \to \infty.
\end{aligned}
$$

Prelazeći na limes u jednačini (3.15), zaključuje se da (3.11) važi skoro izvesno na $[T_1, T]$, odnosno, $(y(t), z(t) - h(t, y(t)))$ je rešenje jednačine (3.2) na $[T_1, T]$. Kako je $\phi(T_1) = 0$, za $T_2 \in [0, T_1]$ rešenje se proširuje sa $[T_1, T]$ na $[T_2, T]$ ponovljanjem prethodno opisane procedure. Dokaz egzistencije je kompletiran činjenicom da postoji $p \in N$ takvo da je $T_p = 0$.

Jedinstvenost. Neka su $\{(Y^i(t), Z^i(t)), t \in [0, T]\}$, $i = 1, 2$ dva rešenja jednačine (3.2). Prethodno je dokazano da je $(Y_t^i, Z_t^i) = (y^i(t), z^i(t) - h(t, y^i(t)))$ za $t \in [0, T]$, odnosno,

$$
Y^i(t) = y^i(t) \text{ s.i. za svako } t \in [0, T], \quad \mathbf{E}\int_0^T ||h(t, y^i(t)) + Z^i(t) - z^i(t)||^2\, dt = 0, \tag{3.17}
$$

gde su $\{(y^i(t), z^i(t)), t \in [0, T]\}$, $i = 1, 2$, rešenja jednačine (3.3). Štaviše, na osnovu Propozicije 3.1.1 rešenje jednačine (3.3) je jedinstveno, tj. $y^1(t) = y^2(t)$ skoro izvesno za svako $t \in [0, T]$, što povlači

$$
Y^1(t) = Y^2(t) \text{ s.i. za svako } t \in [0, T].
$$

Iz (3.17) i činjenice da je $\rho(t,0)\equiv 0$, sledi

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{E}\int_0^T ||Z^1(t)-Z^2(t)||^2\,dt \\
&\le 4\left[\mathbf{E}\int_0^T ||h(t,y^1(t))+Z^1(t)-z^1(t)||^2\,dt+\mathbf{E}\int_0^T ||h(t,y^2(t))+Z^2(t)-z^2(t)||^2\,dt\right.\\
&\qquad\left.+\mathbf{E}\int_0^T ||z^1(t)-z^2(t)||^2\,dt+\int_0^T \rho(t,0)\,dt\right]=0,
\end{aligned}
$$

čime je dokaz završen. $\diamondsuit$

Izraz $-\int_t^T h(s,Y(s))\,dW_s$ koji figurše u jednačini (3.2), može se smatrati stohastičkom perturbacijom u odnosu na početnu jednačinu (3.1). Preciznije, Teorema 3.1.1 i Teorema 3.1.3 pokazuju da ovaj dodatni integral menja jedino generator, od $z(t)$ na $z(t)-h(t,y(t))$, dok proces stanja ostaje isti skoro izvesno.

Istaknimo da analogni rezultati važe i za backward stohastičke diferencijalne jednačine. Na primer, za rešenja $\{(Y(t),Z(t)),t\in[0,T]\}$ i $\{(y(t),z(t)),t\in[0,T]\}$ jednačina

$$
\begin{aligned}
Y(t)&=\xi+\int_t^T f(s,Y(s),Z(s))\,ds-\int_t^T [h(s,Y(s))+Z(s)]\,dW(s), t\in[0,T], \qquad (3.18)\\
y(t)&=\xi+\int_t^T f(s,y(s),z(s)-h(s,y(s)))\,ds-\int_t^T z(s)\,dW(s), t\in[0,T],
\end{aligned}
$$

je $Y(t)=y(t)$ skoro izvesno za svako $t\in[0,T]$ i $\mathbf{E}\int_0^T ||Z_t-(z(t)-h(t,y(t)))||^2\,dt=0$, iz čega sledi da je, $\{(y(t),z(t)-h(t,y(t))),t\in[0,T]\}$ rešenje jednačine (3.18). Na ovaj način, dokazi egzistencije i jedinstvenosti rešenja (videti Mao [89]), kao i ocene momenata rešenja jednačine (3.18), razmatranih u narednom poglavlju, se mogu znatno uprostiti.

3.2 L^p-momenti rešenja

Osim problema egzistencije i jedinstvenosti rešenja, od posebne važnosti je i problem ograničenosti L^p-momenta rešenja BDSDJ (3.2). Pardoux i Peng su u radu [110] dokazali ograničenost L^p-momenta rešenja BDSDJ (3.1) ako funkcije f i g zadovoljavaju Lipschitzove uslove iz hipoteze $(\mathbf{H_1})$. Za dokaz tog tvrđenja neophodno je uvođenje sledeće pretpostavke za funkciju g.

A1. Postoji K, tako da je za svako $(t,y,z)\in[0,T]\times\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{k\times d}$,

$$g^T(t,y,z)g(t,y,z)\le z^Tz+K(||g(t,0,0)||^2+|y|^2)I,$$

pri čemu je I jedinična matrica reda l.

Teorema 3.2.1 (Pardoux, Peng, [110]) *Neka su ispunjeni svu uslovi Propozicije 3.1.1 i pretpostavka* $\boldsymbol{A1}$. *Ako je* $p \geq 2$, $\xi \in L^p(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbf{P}; \mathbb{R}^d)$ *i*

$$E \int_0^T (|f(t,0,0)|^p + ||g(t,0,0)||^p)\, dt < \infty,$$

tada za rešenje $\{(y(t), z(t)), t \in [0,T]\}$ *jednačine (3.1) važi*

$$E \sup_{0 \leq t \leq T} |y(t)|^p < \infty, \quad E \left(\int_0^T ||z(t)||^2\, dt \right)^{\frac{p}{2}} < \infty. \tag{3.19}$$

Koristeći prethodno tvrđenje, jednostavno se dokazuje ograničenost L^p-momenta rešenja jednačine (3.2) pod uslovom da funkcije f, g i h zadovoljavaju Lipschitzove uslove $(\mathbf{H_1})$.

Teorema 3.2.2 *Neka za* ξ, f, g *i* h *važe hipoteze* $(\mathbf{H_0})$ *i* $(\mathbf{H_1})$ *i pretpostavka* $\boldsymbol{A1}$. *Ako je* $\xi \in L^p(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbf{P}; \mathbb{R}^d)$ *za* $p \geq 2$ *i*

$$E \int_0^T (|f(t,0,0)|^p + ||g(t,0,0)||^p + ||h(t,0)||^p)\, dt < \infty, \tag{3.20}$$

tada za rešenje $\{(Y(t), Z(t)), t \in [0,T]\}$ *jednačine (3.2) važi*

$$E \sup_{0 \leq t \leq T} |Y(t)|^p < \infty, \quad E \left(\int_0^T ||Z(t)||^2\, dt \right)^{\frac{p}{2}} < \infty. \tag{3.21}$$

Dokaz. Pošto su isunjeni svi uslovi Teoreme 3.1.2, postoje jedinstvena rešenja $\{(y(t), z(t)), t \in [0,T]\}$ i $\{(y(t), z(t) - h(t, y(t))), t \in [0,T]\} \in \mathcal{S}^2([0,T]; \mathbb{R}^k) \times \mathcal{M}^2([0,T]; \mathbb{R}^{k \times d})$ jednačina (3.1) i (3.2), respektivno, pri čemu je

$$Y(t) = y(t) \text{ s.i. za svako } t \in [0,T], \quad \mathbf{E} \int_0^T ||h(t, y(t)) + Z(t) - z(t)||^2\, dt = 0. \tag{3.22}$$

Iz (3.19) i (3.22) sledi

$$E(\sup_{0 \leq t \leq T} |Y(t)|^p) = E(\sup_{0 \leq t \leq T} |y(t)|^p) < \infty.$$

Takođe, primenom elementarne nejednakosti (1.10), nejednakosti Höldera (1.15) i (3.22), sledi

$$\begin{aligned}
& E \left(\int_0^T ||Z(t)||^2\, dt \right)^{\frac{p}{2}} \qquad (3.23) \\
& \leq 4^{\frac{p}{2}} E \left(\int_0^T ||Z(t) - z(t) + h(t, y(t))||^2\, dt + \int_0^T ||z(t)||^2\, dt \right. \\
& \qquad \left. + K \int_0^T |y(t)|^2\, dt + \int_0^T ||h(t,0)||^2\, dt \right)^{\frac{p}{2}} \\
& \leq 4^{\frac{p}{2}} 3^{\frac{p}{2}-1} E \left[\left(\int_0^T ||z(t)||^2\, dt \right)^{\frac{p}{2}} + (KT)^{\frac{p}{2}} \sup_{0 \leq t \leq T} |y(t)|^p + T^{\frac{p-2}{p}} \left(\int_0^T ||h(t,0)||^p \right)^{\frac{2}{p}} \right].
\end{aligned}$$

Iz (3.19), (3.20) i (3.23) je

$$E\left(\int_0^T ||Z(t)||^2\,dt\right)^{\frac{p}{2}} < \infty,$$

čime je dokaz završen. $\diamondsuit$

Ocena L^p-momenta rešenja jednačine (3.2) se može proširiti i kada se oslabe uslovi za funkcije f, g i h pomoću jedne verzije ne-Lipšicovog uslova. U tom cilju se uvodi sledeća hipoteza.

($\mathbf{H_3}$) Za funkcije f, g i h koje zadovoljavaju hipotezu ($\mathbf{H_0}$), postoje konstante $C > 0$ i $0 < \alpha < 1$ takve da za $p \geq 2$ i za sve $(\omega, t) \in \Omega \times [0, T]$ i $(y_1, z_1), (y_2, z_2) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d}$, važi

$$\begin{aligned}
|f(t, y_1, z_1) - f(t, y_2, z_2)|^2 &\leq \min\left\{\rho(|y_1 - y_2|^2), \rho^{\frac{2}{p}}(|y_1 - y_2|^p)\right\} + C||z_1 - z_2||^2,\\
||g(t, y_1, z_1) - g(t, y_2, z_2)||^2 &\leq \min\left\{\rho(|y_1 - y_2|^2), \rho^{\frac{2}{p}}(|y_1 - y_2|^p)\right\} + \alpha||z_1 - z_2||^2,\\
||h(t, y_1) - h(t, y_2)||^2 &\leq \min\left\{\rho(|y_1 - y_2|^2), \rho^{\frac{2}{p}}(|y_1 - y_2|^p)\right\},
\end{aligned}$$

gde funkcija $\rho : R^+ \to R^+$ ispunjava sledeće uslove:
– ρ je neprekidna, neopadajuća i konkavna;
– $\rho(0) = 0$ i $\rho(u) > 0$ za svako $u > 0$;
– $\int_{0+} \frac{du}{\rho(u)} = \infty$.

Primetimo da iz hipoteze ($\mathbf{H_3}$) sledi hipoteza ($\mathbf{H_2}$). Zaista, zbog neprekidnosti funkicije ρ Caushyjev problem obične diferencijalne jednačine

$$u' = -M\,\rho(u), \quad u(T) = 0$$

je ekvivalentan sa rešavanjem integralne jednačine

$$u(t) = M\int_t^T \rho(u(s))\,ds,\ t \in [0, T].$$

Kako je $\int_{0+} \frac{du}{\rho(u)} = \infty$, diferencijalna jednačina $u' = -M\,\rho(u)$ ima jedinstveno rešenje $u = 0$, odnosno, da obična diferencijalna jednačina iz hipoteze ($\mathbf{H_2}$) ima jedinstveno rešenje $u(t) \equiv 0$, $t \in [0, T]$. Ovim je dokazano da je klasa funkcija koje zadovoljavaju hipotezu ($\mathbf{H_2}$) šira od klase funkcija koje zadovoljavaju hipotezu ($\mathbf{H_3}$). Na osnovu Teoreme 3.1.3 sledi da BDSDJ (3.2) ima jedinstveno rešenje i u slučaju kada ξ, f, g i h zadovoljavaju hipoteze ($\mathbf{H_0}$) i ($\mathbf{H_3}$).

U nastavku je dokazana ograničenost L^p-momenta rešenja jednačine (3.2) pod uslovom da funkcije f, g i h zadovoljavaju nelipšicovski uslov ($\mathbf{H_3}$) uz ograničenje da je $\alpha \in \big(0, 1/2(p-1)\big)$.

Teorema 3.2.3 *Neka je za ξ, f, g, h i $p \geq 2$ zadovoljena hipoteza* ($\mathbf{H_3}$) *za* $\alpha \in \big(0, 1/2(p-1)\big)$. *Ako je* $\xi \in L^p(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbf{P}; \mathbb{R}^d)$ *i*

$$E \int_0^T (|f(t,0,0)|^p + ||g(t,0,0)||^p + ||h(t,0)||^p)\, dt < \infty, \tag{3.24}$$

tada za rešenje $\{(Y(t), Z(t)), t \in [0,T]\}$ *jednačine (3.2) važi*

$$E \sup_{0 \leq t \leq T} |Y(t)|^p < \infty, \quad E \left(\int_0^T ||Z(t)||^2\, dt \right)^{\frac{p}{2}} < \infty. \tag{3.25}$$

Dokaz. Kako je, primenom formule Itôa,

$$\begin{aligned} |Y(t)|^p = |\xi|^p &+ p \int_t^T |Y(s)|^{p-2} (Y_s^\varepsilon)^T \times f(s, Y(s), Z(s))\, ds \\ &+ \frac{p}{2} \int_t^T |Y(s)|^{p-2} ||g(s, Y(s), Z(s))||^2\, ds \\ &+ \frac{p(p-2)}{2} \int_t^T |Y(s)|^{p-4} |(Y(s))^T g(s, Y(s), Z(s))|^2\, ds \\ &+ p \int_t^T |Y(s)|^{p-2} (Y(s))^T g(s, Y(s), Z(s))\, dB(s) \\ &- \frac{p}{2} \int_t^T |Y(s)|^{p-2} ||h(s, Y(s)) + Z(s)^|\,|^2\, ds \\ &- \frac{p(p-2)}{2} \int_t^T |Y(s)|^{p-4} |(Y(s))^T [h(s, Y(s)) + Z(s)]|^2\, ds \\ &- p \int_t^T |Y(s)|^{p-2} (Y(s))^T [h(s, Y(s)) + Z(s)]\, dW(s), \end{aligned} \tag{3.26}$$

to je

$$\begin{aligned} E|Y(t)|^p &\leq E|\xi|^p + pE \int_t^T |Y(s)|^{p-2} (Y_s^\varepsilon)^T f(s, Y(s), Z(s))\, ds \\ &\quad + \frac{p(p-1)}{2} E \int_t^T |Y(s)|^{p-2} ||g(s, Y(s), Z(s))||^2\, ds \\ &\quad - \frac{p}{2} E \int_t^T |Y(s)|^{p-2} ||h(s, Y(s)) + Z(s)||^2\, ds \\ &\equiv E|\xi|^p + pI_1 + \frac{p(p-1)}{2} I_2 + \frac{p}{2} I_3. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Za ocenu integrala I_1, I_2, I_3 se koriste hipoteza ($\mathbf{H_3}$) i elementarne nejednakosti (1.7), (1.10), (1.11), tj. $\pm 2ab \leq \frac{a^2}{\epsilon} + \beta^2 \epsilon$, $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$, $a^{p-2} b^2 \leq \frac{p-2}{p} a^p + \frac{2}{p} b^p$. Za proizvoljnu konstantu $\epsilon_1 > 0$ je

$$\begin{aligned} I_1 &= E \int_t^T |Y(s)|^{p-2} (Y_s^\varepsilon)^T f(s, Y(s), Z(s))\, ds \\ &\leq \frac{1}{2\epsilon_1} E \int_t^T |Y(s)|^p ds + \epsilon_1 E \int_t^T |Y(s)|^{p-2} |f(s, Y(s), Z(s)) - f(s,0,0)|^2\, ds \\ &\quad + \epsilon_1 E \int_t^T |Y(s)|^{p-2} |f(s,0,0)|^2\, ds \end{aligned} \tag{3.28}$$

$$
\begin{aligned}
&\le \frac{1}{2\epsilon_1} E\int_t^T |Y(s)|^p ds + \epsilon_1 E\int_t^T |Y(s)|^{p-2}\rho^{\frac{2}{p}}(|Y(s)|^p)\,ds \\
&\quad +\epsilon_1 CE\int_t^T |Y(s)|^{p-2}||Z(s)||^2\ ds + \epsilon_1 E\int_t^T |Y(s)|^{p-2}|f(s,0,0)|^2\ ds \\
&\le \left(\frac{1}{2\epsilon_1} + \frac{2(p-2)\epsilon_1}{p}\right) E\int_t^T |Y(s)|^p ds + \frac{2\epsilon_1}{p} E\int_t^T \rho(|Y(s)|^p)\,ds \\
&\quad +\frac{2\epsilon_1}{p} E\int_t^T |f(s,0,0)|^p\,ds + \epsilon_1 CE\int_t^T |Y(s)|^{p-2}||Z(s)||^2\ ds.
\end{aligned}
$$

Slično,

$$
\begin{aligned}
I_2 &= E\int_t^T |Y(s)|^{p-2}||g(s,Y(s),Z(s))||^2\ ds \qquad (3.29)\\
&\le 2E\int_t^T |Y(s)|^{p-2}\rho^{\frac{2}{p}}(|Y(s)|^p)\,ds + 2\alpha E\int_t^T |Y(s)|^{p-2}||Z(s)||^2\ ds \\
&\quad + 2E\int_t^T |Y(s)|^{p-2}||g(s,0,0)||^2\ ds \\
&\le \frac{4(p-2)}{p} E\int_t^T |Y(s)|^p\,ds + \frac{4}{p} E\int_t^T \rho(|Y(s)|^p)\,ds \\
&\quad + 2\alpha E\int_t^T |Y(s)|^{p-2}||Z(s)||^2\ ds + \frac{4}{p} E\int_t^T ||g(s,0,0)||^p\ ds.
\end{aligned}
$$

Analogno, za proizvoljnu konstantu $\epsilon_2 > 0$ je

$$
\begin{aligned}
I_3 &\le -2E\int_t^T trace[|Y(s)|^{p-2}(Z(s))^T h(s,Y(s))]\ ds - E\int_t^T |Y(s)|^{p-2}||Z(s)||^2\ ds \\
&\le \frac{1}{\epsilon_2} E\int_t^T |Y(s)|^{p-2}||h(s,Y(s)) - h(s,0) + h(s,0)||^2\ ds \\
&\quad + \epsilon_2 E\int_t^T |Y(s)|^{p-2}||Z(s)||^2\,ds - E\int_t^T |Y(s)|^{p-2}||Z(s)||^2\ ds \\
&\le (\epsilon_2 - 1)E\int_t^T |Y(s)|^{p-2}||Z(s)||^2\,ds + \frac{2}{\epsilon_2} E\int_t^T |Y(s)|^{p-2}\rho^{\frac{2}{p}}(|Y(s)|^p)\ ds \\
&\quad + \frac{2}{\epsilon_2} E\int_t^T |Y(s)|^{p-2}||h(s,0)||^2\,ds \\
&\le (\epsilon_2 - 1)E\int_t^T |Y(s)|^{p-2}||Z(s)||^2\,ds + \frac{4(p-2)}{p\epsilon_2} E\int_t^T |Y(s)|^p\ ds \\
&\quad + \frac{4}{p\epsilon_2} E\int_t^T \rho(|Y(s)|^p)\ ds + \frac{4}{p\epsilon_2} E\int_t^T ||h(s,0)||^p\,ds. \qquad (3.30)
\end{aligned}
$$

Zamenom (3.28), (3.29) i (3.30) u (3.27) se dobija

$$
\begin{aligned}
E|Y(t)|^p \le E|\xi|^p & \\
&+ \left[\frac{p}{2\epsilon_1} + 2(p-2)\epsilon_1 + 2(p-1)(p-2) + \frac{2(p-2)}{\epsilon_2}\right] E\int_t^T |Y(s)|^p ds \\
&+ \left[2\epsilon_1 + 2(p-1) + \frac{2}{\epsilon_2}\right] E\int_t^T \rho(|Y(s)|^p)\, ds \qquad (3.31)\\
&+ \left[\frac{p}{2}(\epsilon_2 - 1) + p\epsilon_1 C + p(p-1)\alpha\right] E\int_t^T |Y(s)|^{p-2}||Z(s)||^2\, ds \\
&+ E\int_t^T [2\epsilon_1|f(s,0,0)|^p + 2(p-1)||g(s,0,0)||^p + \frac{2}{\epsilon_2}||h(s,0)||^p]\, ds.
\end{aligned}
$$

Označimo

$$
\begin{aligned}
c_1 &= \frac{p}{2\epsilon_1} + 2(p-2)\epsilon_1 + 2(p-1)(p-2) + \frac{2(p-2)}{\epsilon_2}, \\
c_2 &= 2\epsilon_1 + 2(p-1) + \frac{2}{\epsilon_2}, \\
c_3 &= p\left[\frac{1}{2} - (p-1)\alpha - \epsilon_1 C - \frac{\epsilon_2}{2}\right], \\
c_4 &= E\int_0^T \left[2\epsilon_1|f(t,0,0)|^p + 2(p-1)||g(t,0,0)||^p + \frac{2}{\epsilon_2}||h(t,0)||^p\right] dt.
\end{aligned}
$$

Iz (3.24) sledi da je c_4 konačna konstanta.

Nejednakost (3.31) se sada može zapisati na sledeći način,

$$
\begin{aligned}
E|Y(t)|^p + c_3 E\int_t^T |Y(s)|^{p-2}||Z(s)||^2\, ds & \qquad (3.32)\\
\le E|\xi|^p + c_1 E\int_t^T |Y(s)|^p ds &+ c_2 E\int_t^T \rho(|Y(s)|^p) + c_4.
\end{aligned}
$$

Kako su $C > 0$ i $\alpha \in \big(0, 1/2(p-1)\big)$ poznate konstante, uvek se mogu odrediti pozitivni brojevi ϵ_1 i ϵ_2 tako da je $c_3 > 0$. Primenom Jensenove nejednakosti (1.16) na konkavnu funkciju ρ, iz (3.32) se dobija

$$
E|Y(t)|^p \le E|\xi|^p + \max\{c_1, c_2\} \int_t^T [E|Y(s)|^p ds + \rho(E|Y(s)|^p)]\, ds + c_4. \qquad (3.33)
$$

Kako je $\rho(x)$ konkavna funkcija sa svojstvom $\rho(0) = 0$, to je $\frac{\rho(x)}{x} \ge \frac{\rho(1)}{1}$ za $0 \le x \le 1$, tj.

$$
\rho(x) \ge \rho(1)x, \ \ 0 \le x \le 1.
$$

Definišimo funkciju $\rho_1(x) := x + \rho(x)$. Ona ima ista svojstva kao ρ, tj. $\rho_1 : R^+ \to R^+$, neprekidna je, neopadajuća i konkavna, $\rho_1(0) = 0$ i

$$
\int_{0+} \frac{dx}{x + \rho(x)} \ge \frac{\rho(1)}{1 + \rho(1)} \int_{0+} \frac{dx}{\rho(x)} = \infty.
$$

Da bi primenili Biharijevu teoremu (Teorema 1.5.6) na (3.33), neophodno je opravdati njene uslove. Intervali I i J su $I = [0, \infty)$ i $J = [0, T]$, $u(s) = E|Y(s)|^p$,

$k(s) = \max\{c_1, c_2\}$. Zatim, za svako $s \in [0,T]$ je $E|Y(s)|^p \in I$, što povlači da je $u(J) \subset I$. Konstanta a iz Teoreme 1.5.6 je $E|\xi|^p + c_4$, funkcija $G(u) = \int_{u_0}^{u} \frac{dx}{x+\rho(x)}$ i

$$\mu_1 = \inf \Bigg\{ \mu \in J : E|\xi|^p + c_4 \\ + \max\{c_1, c_2\} \int_t^T [E|Y(s)|^p + \rho(E|Y(s)|^p)]\, ds \in I, \mu \le t \le T \Bigg\} = 0,$$

$$\mu_2 = \inf \Bigg\{ \mu \in J : G(E|\xi|^p + c_4 C) \\ + \max\{c_1, c_2\} \int_t^T [E|Y(s)|^p + \rho(E|Y(s)|^p)]\, ds \in \mu \le t \le T \Bigg\} = 0,$$

tj. $\alpha_1 = \max\{\mu_1, \mu_2\} = 0$. Na osnovu (1.24) iz (3.33) se dobija

$$E|Y(t)|^p \le G^{-1}[G\left(E|\xi|^p + c_4\right) + \max\{c_1, c_2\}(T-t)] < \infty,\ t \in [0,T], \tag{3.34}$$

a iz (3.32) i (3.34),

$$E\int_0^T |Y(s)|^{p-2} ||Z(s)||^2\ ds \le \frac{1}{c_3} G^{-1}[G\left(E(|\xi|^p) + c_4\right) + \max\{c_1, c_2\}T]. \tag{3.35}$$

Iz poslednje dve ocene je

$$\sup_{0\le t\le T} E|Y(t)|^p + E\int_0^T |Y(t)|^{p-2} ||Z(t)||^2\ dt < \infty.$$

Iz (3.26), ponavljajući iste ocene, dobija se

$$E\sup_{0\le t\le T} |Y(t)|^p \le C_1 + pE\sup_{0\le t\le T} \left| \int_t^T |Y(s)|^{p-2} (Y(s))^T g(s, Y(s), Z(s))\, dB(s) \right| \\ + pE\sup_{0\le t\le T} \left| \int_t^T |Y(s)|^{p-2} (Y(s))^T [h(s, Y(s)) + Z(s)]\, dW(s) \right|, \tag{3.36}$$

gde je C_1 neka generisana konstanta. Integrali u (3.36) će biti ocenjeni primenom Burkholder–Davis–Gundy nejednakosti, hipoteze $(\mathbf{H_3})$ i prethodno korišćenih elementarnih nejednakosti. Pre svega, za proizvoljno $\epsilon_3 > 0$, je

$$E\sup_{0\le t\le T} \left| \int_t^T |Y(s)|^{p-2} (Y(s))^T g(s, Y(s), Z(s))\, dB(s) \right| \tag{3.37}$$

$$\le 4E\left(\int_0^T |Y(t)|^{2p-2} ||g(t, Y(t), Z(t)||^2\, dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\le 4E\left\{ \left((\sup_{0\le t\le T} |Y(t)|^p) \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T |Y(t)|^{p-2} ||g(t, Y(t), Z(t))||^2\, dt \right)^{\frac{1}{2}} \right\}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq 2\epsilon_3 E \sup_{0\leq t\leq T} |Y(t)|^p + \frac{4}{\epsilon_3} E \int_0^T |Y(t)|^{p-2} \rho^{\frac{2}{p}}(|Y(t)|^p)\, dt \\
&+ \frac{4\alpha}{\epsilon_3} E \int_0^T |Y(t)|^{p-2} ||Z(t)||^2\, dt + \frac{4}{\epsilon_3} E \int_0^T |Y(t)|^{p-2} ||g(t,0,0)||^2\, dt.
\end{aligned}
$$

Slično, za proizvoljno $\epsilon_4 > 0$,

$$
\begin{aligned}
E &\sup_{0\leq t\leq T} \left| \int_t^T |Y(s)|^{p-2} (Y(s))^T [h(s,Y(s)) + Z(s)]\, dW(s) \right| \qquad (3.38) \\
&\leq 4E \left(\int_0^T |Y(t)|^{2p-2} ||h(t,Y(t)) + Z(t)||^2\, ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq 4E \left\{ \left(\sup_{0\leq t\leq T} |Y(t)|^p \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T |Y(t)|^{p-2} ||h(s,Y(t)) + Z(t)||^2\, dt \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \\
&\leq 2\epsilon_4 E \left(\sup_{0\leq t\leq T} |Y(t)|^p \right) + \frac{6}{\epsilon_4} E \int_0^T |Y(t)|^{p-2} \rho^{\frac{2}{p}}(|Y(t)|^p)\, dt \\
&\quad + \frac{6}{\epsilon_4} E \int_0^T |Y(t)|^{p-2} ||Z(t)||^2\, dt + \frac{6}{\epsilon_4} E \int_0^T |Y(t)|^{p-2} ||h(t,0)||^2\, dt.
\end{aligned}
$$

Zamenom (3.37), (3.38) u (3.36) i primenom nejednakosti Höldera (1.15) i nejednakosti Jensena (1.16), sledi

$$
\begin{aligned}
E \sup_{0\leq t\leq T} |Y(t)|^p \leq\ & C_2 + 2p(\epsilon_3 + \epsilon_4) E \sup_{0\leq t\leq T} |Y(t)|^p \\
& + 8(p-2) \left(\frac{2}{\epsilon_3} + \frac{3}{\epsilon_4} \right) \int_0^T E|Y(t)|^p\, dt \\
& + 4 \left(\frac{2}{\epsilon_3} + \frac{3}{\epsilon_4} \right) \int_0^T \rho(E|Y(t)|^p)\, dt \\
& + 2p \left(\frac{2\alpha}{\epsilon_3} + \frac{3}{\epsilon_4} \right) E \int_0^T |Y(t)|^{p-2} ||Z(t)||^2\, dt, \qquad (3.39)
\end{aligned}
$$

pri čemu je

$$
C_2 = C_1 + \frac{8}{\epsilon_3} E \int_0^T ||g(t,0,0)||^p\, dt + \frac{12}{\epsilon_4} E \int_0^T ||h(t,0)||^p\, dt.
$$

Konstante ϵ_3 i ϵ_4 su proizvoljne i mogu se izabrati tako da je $1 - 2p(\epsilon_3 + \epsilon_4) > 0$. U tom slučaju iz ocena (3.24), (3.34), (3.35) sledi da je

$$
E(\sup_{0\leq t\leq T} |Y(t)|^p) < \infty.
$$

Za $t = 0$ i $p = 2$ iz (3.26) je

$$
\begin{aligned}
|Y(0)|^2 \leq |\xi|^2 &+ 2\int_0^T Y^T(s) f(s,Y(s),Z(s))\ ds - \int_0^T ||Z(s)||^2 \\
&+ \int_0^T ||g(s,Y(s),Z(s))||^2\ ds + 2\int_0^T (Y(s))^T g(s,Y(s),Z(s))\, dB(s) \\
&- 2\int_0^T trace[(Z(s))^T h(s,Y(s))]\ ds \\
&- 2\int_0^T (Y(s))^T [h(s,Y(s)) + Z(s)]\, dW(s),
\end{aligned}
$$

odnosno

$$
\begin{aligned}
\int_0^T ||Z(s)||^2\ ds \leq |\xi|^2 - |Y(0)|^2 &+ 2\int_0^T (Y(s))^T f(s,Y(s),Z(s))\ ds \\
&+ \int_0^T ||g(s,Y(s),Z(s))||^2\ ds \\
&+ 2\int_0^T (Y(s))^T g(s,Y(s),Z(s))\, dB(s) \\
&- 2\int_0^T trace[(Z(s))^T h(s,Y(s))]\ ds \\
&- 2\int_0^T (Y(s))^T [h(s,Y(s)) + Z(s)]\, dW(s).
\end{aligned}
$$

Primenom nejednakosti (1.13) dobija se

$$
\begin{aligned}
&\left(\int_0^T ||Z(s)||^2\ ds\right)^{\frac{p}{2}} \\
&\quad \leq (1+\delta)\left|\int_0^T ||g(s,Y(s),Z(s))||^2\ ds\right|^{\frac{p}{2}} \\
&\qquad + q(\delta,p)\left[|\xi|^p + |Y_0|^p + 2^{\frac{p}{2}}\left|\int_0^T (Y(s))^T \times f(s,Y(s),Z(s))\ ds\right|^{\frac{p}{2}}\right. \\
&\qquad + 2^{\frac{p}{2}}\left|\int_0^T (Y(s))^T g(s,Y(s),Z(s))\, dB(s)\right|^{\frac{p}{2}} \\
&\qquad + 2^{\frac{p}{2}}\left|\int_0^T trace[(Z(s))^T h(s,Y(s))]\ ds\right|^{\frac{p}{2}} \\
&\qquad \left. +2^{\frac{p}{2}}\left|\int_0^T (Y(s))^T [h(s,Y(s)) + Z(s)]\, dW(s)\right|^{\frac{p}{2}}\right],
\end{aligned}
$$

gde je $\delta > 0$ proizvoljna konstanta, a $q(\delta,p)$ generisana konstanta. Iz poslednjeg je

$$
\begin{aligned}
&E\left(\int_0^T ||Z(s)||^2\ ds\right)^{\frac{p}{2}} \\
&\quad \leq (1+\delta)J_2 + q(\delta,p)\left[2E\left(\sup_{0\leq t\leq T} |Y(s)|^p\right) + J_1 + J_3 + J_4 + J_5\right]. \qquad (3.40)
\end{aligned}
$$

Primenom hipoteze $(\mathbf{H_3})$, za proizvoljno $\varepsilon_5 > 0$ je

$$\begin{aligned}
J_1 &\leq 2E\left[\int_0^T \left(\frac{|Y(s)|^2}{\epsilon_5} + \epsilon_5 |f(s,Y(s),Z(s))|^2\right)\, ds\right]^{\frac{p}{2}} \\
&\leq 2^{\frac{p}{2}-1}\left[\frac{T^{\frac{p}{2}-1}}{\epsilon_5^{\frac{p}{2}}} E\int_0^T |Y(s)|^p\, ds\right. \\
&\quad \left. + \epsilon_5^{\frac{p}{2}} 2^{\frac{p}{2}-1} E\left(\int_0^T |f(s,Y(s),Z(s)) - f(s,0,0)|^2\, ds + \int_0^T |f(s,0,0)|^2\, ds\right)^{\frac{p}{2}}\right] \\
&\leq 2^{\frac{p}{2}-1}\left[\frac{T^{\frac{p}{2}}}{\epsilon_5^{\frac{p}{2}}} \sup_{0\leq t\leq T} E|Y(t)|^p + \epsilon_5^{\frac{p}{2}} 2^{p-1}\left(E\int_0^T [\rho^{\frac{2}{p}}(|Y(s)|^p) + C||Z(s)||^2]\, ds\right)^{\frac{p}{2}}\right. \\
&\qquad \left. + \epsilon_5^{\frac{p}{2}} 2^{p-1} T^{\frac{p}{2}-1} E\int_0^T ||f(s,0,0)||^p\, ds\right] \\
&\leq 2^{\frac{p}{2}-1}\left[\frac{T^{\frac{p}{2}}}{\epsilon_5^{\frac{p}{2}}} \sup_{0\leq t\leq T} E|Y(t)|^p\right. \\
&\qquad + \epsilon_5^{\frac{p}{2}} 2^{\frac{3p}{2}-2}\left(T^{\frac{p}{2}} \sup_{0\leq t\leq T} \rho(E|Y(t)|^p) + C^{\frac{p}{2}} E\left(\int_0^T ||Z(s)||^2\, ds\right)^{\frac{p}{2}}\right) \\
&\qquad \left. + \epsilon_5^{\frac{p}{2}} 2^{p-1} T^{\frac{p}{2}-1} E\int_0^T |f(s,0,0)|^p\, ds\right] \\
&\leq (C\epsilon_5)^{\frac{p}{2}} 2^{2p-3} E\left(\int_0^T ||Z(s)||^2\, ds\right)^{\frac{p}{2}} + r_1, \qquad (3.41)
\end{aligned}$$

gde je r_1 generisana konstanta.

Za ocenu integrala J_2, uočimo pre svega da iz hipoteze $(\mathbf{H_3})$ sledi da postoji konstanta $\varepsilon_0 > 0$ tako da je

$$||g(t,x,y)||^2 \leq (1+\varepsilon_0)\rho^{\frac{2}{p}}(|y|^2) + \alpha(1+\varepsilon_0)||z||^2 + \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_0}\right)||g(t,0,0)||^2.$$

Zamenom poslednje nejednakosti u integral J_2 i primenom nejednakosti (1.13) je

$$\begin{aligned}
J_2 &\leq (1+\delta)\alpha(1+\varepsilon_0)\left(\int_0^T ||Z(s)||^2\, ds\right)^{\frac{p}{2}} \qquad (3.42) \\
&\quad + q'(\delta,p)\left|\int_0^T [(1+\varepsilon_0)\rho^{\frac{2}{p}}(|Y(s)|^2) + (1+\frac{1}{\varepsilon_0})||g(s,0,0)||^2]\, ds\right|^{\frac{p}{2}} \\
&\leq (1+\delta)\alpha(1+\varepsilon_0)\left(\int_0^T ||Z(s)||^2\, ds\right)^{\frac{p}{2}} + r_2,
\end{aligned}$$

gde su r_2 i $q'(\delta,p)$ generisane konstante.

Analogno, za $\varepsilon_i > 0$, $i = 6, ..., 11$,

$$J_3 \leq 2^{\frac{p}{2}} E \left(\int_0^T |Y(s)|^2 ||g(s, Y(s), Z(s))||^2 \, ds \right)^{\frac{p}{4}} \tag{3.43}$$
$$\leq 2^p E \left[\sup_{0\leq t\leq T} |Y(t)|^{\frac{p}{2}} \left(\int_0^T [\rho^{\frac{2}{p}}(|Y(s)|^p) + \alpha |Z(s)||^2 + ||g(s,0,0)||^2] \, ds \right)^{\frac{p}{4}} \right]$$
$$\leq 2^{p-1}(3T)^{\frac{p}{4}-1} E \left(\frac{1}{\epsilon_6} (\sup_{0\leq t\leq T} |Y(t)|^{\frac{p}{2}})^2 + \epsilon_6 T \rho(|Y(s)|^p) \right)$$
$$+ 2^{p-1}(3T)^{\frac{p}{4}-1} \alpha^{\frac{p}{4}} E \left[\frac{1}{\epsilon_7} (\sup_{0\leq t\leq T} |Y(t)|^{\frac{p}{2}})^2 + \epsilon_7 \left(\int_0^T |||Z(s)||^2 \, ds \right)^{\frac{p}{2}} \right]$$
$$+ 2^{p-1}(3T)^{\frac{p}{4}-1} E \left[\frac{1}{\epsilon_8} (\sup_{0\leq t\leq T} |Y(t)|^{\frac{p}{2}})^2 + \epsilon_8 T \int_0^T ||g(s,0,0)||^p \, ds \right]$$
$$\leq 2^{p-1}(3T)^{\frac{p}{4}-1} \alpha^{\frac{p}{4}} \epsilon_7 E \left(\int_0^T |||Z(s)||^2 \, ds \right)^{\frac{p}{2}} + r_3,$$

$$J_4 \leq E \left(\int_0^T [\epsilon_9 ||Z(s)||^2 + \frac{1}{\epsilon_9} \rho^{\frac{2}{p}}(|Y_s|^p)] \, ds \right)^{\frac{p}{2}} \tag{3.44}$$
$$\leq 2^{\frac{p}{2}-1} \left\{ \epsilon_9^{\frac{p}{2}} E \left(\int_0^T ||Z(s)||^2 \, ds \right)^{\frac{p}{2}} + \frac{1}{\epsilon_9^{\frac{p}{2}}} T^{\frac{p}{2}} \sup_{0\leq t\leq T} \rho(E|Y_s|^p) \right\}$$
$$\leq 2^{\frac{p}{2}-1} \epsilon_9^{\frac{p}{2}} E \left(\int_0^T ||Z(s)||^2 \, ds \right)^{\frac{p}{2}} + r_4,$$

dok je

$$J_5 \leq 2^{\frac{p}{2}} E \left(\int_0^T |Y(s)|^2 ||h(s, Y(s)) + Z(s)||^2 \, ds \right)^{\frac{p}{4}} \tag{3.45}$$
$$\leq 2^{\frac{p}{2}} E \sup_{0\leq t\leq T} |Y(t)|^{\frac{p}{2}} \left(\int_0^T [2\rho^{\frac{2}{p}}(|Y(s)|^p) + 2||Z(s)||^2] \, ds \right)^{\frac{p}{4}}$$
$$\leq 2^{\frac{p}{2}} E \sup_{0\leq t\leq T} |Y(t)|^{\frac{p}{2}} 2^{\frac{p}{4}-1} \left(2^{\frac{p}{4}} T^{\frac{p}{4}-1} \int_0^T \rho^{\frac{1}{2}}(|Y(s)|^p) \, ds + \left(\int_0^T ||Z(s)||^2 \, ds \right)^{\frac{p}{4}} \right)$$
$$\leq 2^{p-1} T^{\frac{p}{4}-1} E \sup_{0\leq t\leq T} |Y(t)|^{\frac{p}{2}} \int_0^T \rho^{\frac{1}{2}}(|Y(s)|^p) \, ds$$
$$+ 2^{\frac{3p}{4}-1} T^{\frac{p}{4}-1} E \sup_{0\leq t\leq T} |Y(t)|^{\frac{p}{2}} \left(\int_0^T ||Z(s)||^2 \, ds \right)^{\frac{p}{4}}$$
$$\leq 2^{2p-4} T^{\frac{p}{2}-2} \epsilon_{10} E \sup_{0\leq t\leq T} |Y(t)|^p + \frac{T}{\epsilon_{10}} \sup_{0\leq t\leq T} \rho(E|Y(s)|^p) \, ds$$
$$+ \frac{2^{\frac{3p}{2}-2} T^{\frac{p}{2}-2}}{\epsilon_{11}} E \sup_{0\leq t\leq T} |Y(t)|^p + \epsilon_{11} \left(\int_0^T ||Z(s)||^2 \, ds \right)^{\frac{p}{2}}$$
$$\leq \epsilon_{11} \left(\int_0^T ||Z(s)||^2 \, ds \right)^{\frac{p}{2}} + r_5,$$

gde su r_3, r_4, r_5 generisane konstante.

Kako je $E\sup_{0\leq t\leq T}|Y(t)|^p<\infty$ i $\sup_{0\leq t\leq T}\rho(E|Y(t)|^p)<\infty$, i kako važi (3.24), zamenom (3.41)–(3.45) u (3.40) sledi

$$E\left(\int_0^T ||Z(s)||^2 ds\right)^{\frac{p}{2}} \leq R+\left[q(\delta,p)\varepsilon+(1+\delta)^2\alpha(1+\varepsilon_0)\right]E\left(\int_0^T ||Z(s)||^2\, ds\right)^{\frac{p}{2}}, \tag{3.46}$$

gde je R generisana konstanta i $\varepsilon=(C\epsilon_5)^{\frac{p}{2}}2^{2p-3}+2^{p-1}(3T)^{\frac{p}{4}-1}\alpha^{\frac{p}{4}}\epsilon_7+2^{\frac{p}{2}-1}\epsilon_9^{\frac{p}{2}}+\epsilon_{11}$. Konstante $\varepsilon_0,\epsilon_5,\epsilon_7,\epsilon_9,\epsilon_{11}$ i δ se mogu izabrati tako da je

$$(1+\delta)^2\alpha(1+\varepsilon_0)+q(\delta,p)\varepsilon<1$$

za bilo koje $\alpha\in(0,1)$. Kako je R konačno, iz (3.46) neposredno sledi

$$E\left(\int_0^T ||Z(s)||^2\; ds\right)^{\frac{p}{2}}<\infty,$$

čime je dokaz završen. $\diamondsuit$

3.3 Teoreme upoređivanja rešenja

Teoreme upoređivanja rešenja predstavljaju bitan aparat u teoriji BSDJ. Shi, Gu i Liu su u radu [125] formulisali problem i dokazali teoremu upoređivanja rešenja za jednodimenzionalan slučaj jednačine (3.1). Rezultati tog rada su prošireni na BDSDJ oblika (3.2) pri Lipschitzovim uslovima, kao i pri slabijim nelipšicovskim uslovima u radu [62], S. Janković, J. Đorđević, M. Jovanović, *On a class of backward doubly stochastic differential equations*, Applied Mathematics and Computation, 217 (2011), 8754-8764.

Upoređuju se rešenja jednodimenzionalnih BDSDJ

$$\begin{aligned} Y^i(t)=\xi_i+&\int_t^T f_i(s,Y^i(s),Z^i(s))\,ds+\int_t^T g(s,Y^i(s),Z^i(s))\,dB(s)\\ &-\int_t^T [h_i(s,Y^i(s))+Z^i(s)]\,dW(s),\ t\in[0,T],\quad i=1,2, \end{aligned} \tag{3.47}$$

gde ξ_i,f_i,g,h_i zadovoljavaju hipotezu $(\mathbf{H_0})$ za $k=1$. Uporedo sa jednačinama (3.47), posmatraju se i odgovarajuće homogene jednačine

$$\begin{aligned} y(t)^i=\xi_i+&\int_t^T f_i(s,y^i(s),z^i(s)-h_i(s,y^i(s)))\,ds \\ &+\int_t^T g(s,y^i(s),z^i(s)-h_i(s,y^i(s)))\,dB(s)\\ &-\int_t^T z^i(s)\,dW(s),\ t\in[0,T],\quad i=1,2. \end{aligned} \tag{3.48}$$

Za finalne uslove ξ_i, $i = 1, 2$ i funkcije f_i, $i = 1, 2$, uvodi se sledeća hipoteza:

$(\mathbf{H_4})$ $\xi_1 \geq \xi_2$ s.i., $f_1(t, y, z) \geq f_2(t, y, z)$ s.i. za svako $(t, y, z) \in [0, T] \times R \times R^d$.

U dokazima novih rezultata će se koristiti naredno tvrđenje.

Propozicija 3.3.1 (Shi, Gu, Liu [125]) *Neka su za jednačine (3.47) zadovoljeni uslovi Propozicije 3.1.1 i neka su (y^i, z^i), $i = 1, 2$, rešenja jednačina (3.48) za $t \in [0, T]$. Ako je zadovoljena hipoteza $(\mathbf{H_4})$, tada je $y^1(t) \geq y^2(t)$ skoro izvesno za svako $t \in [0, T]$.*

Sada se mogu formulisati teoreme upoređivanja rešenja jednačina (3.47).

Teorema 3.3.1 *Neka su za ξ_i, f_i, g i h_i ispunjene hipoteze $(\mathbf{H_0})$, $(\mathbf{H_1})$ i $(\mathbf{H_4})$, i neka su (Y^i, Z^i), $i = 1, 2$, rešenja jednačina (3.47). Tada je $Y^1(t) \geq Y^2(t)$ skoro izvesno za svako $t \in [0, T]$.*

Dokaz. Neka su (y^i, z^i), $i = 1, 2$ rešenja jednačina (3.48). Iz Teoreme 3.1.2 sledi da su $\{(y^i(t), z^i(t) - h_i(t, y^i(t))), t \in [0, T]\}$, $i = 1, 2$, rešenja jednačina (3.47). Iz Propozicije 3.3.1 je $y^1(t) \geq y^2(t)$ skoro izvesno za svako $t \in [0, T]$, pa je samim tim i $Y^1(t) \geq Y^2(t)$ skoro izvesno za svako $t \in [0, T]$, čime je dokaz završen. $\diamondsuit$

Analogan rezultat važi za jednačine (3.47) pod nelipšicovskim uslovom, tj. ako su ispunjeni uslovi hipoteze $(\mathbf{H_2})$.

Teorema 3.3.2 *Neka su za ξ_i, f_i, g i h_i zadovoljene hipoteze $(\mathbf{H_0})$, $(\mathbf{H_2})$ i $(\mathbf{H_4})$, i neka su uređeni parovi (Y^i, Z^i), $i = 1, 2$, rešenja jednačina (3.47). Tada je $Y^1(t) \geq Y^2(t)$ skoro izvesno za svako $t \in [0, T]$.*

Dokaz. Za proizvoljno $\beta > 0$, primenom formule Itôa na $|(Y^2(t) - Y^1(t))^+|^2 e^{\beta t}$ (za funkciju $f(t)$, $f^+(t) = \max\{0, f(t)\}$) dobija se

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}|(Y^2(t) - Y^1(t))^+|^2 e^{\beta t} + \beta\, \mathbf{E} \int_t^T |(Y^2(s) - Y^1(s))^+|^2 e^{\beta s}\, ds \qquad (3.49)\\
&\quad = 2\mathbf{E} \int_t^T (Y^2(s) - Y^1(s))^+ e^{\beta s} \big[f_2(s, Y^2(s), Z^2(s)) - f_1(s, Y^1(s), Z^1(s))\big]\, ds\\
&\quad\; + \mathbf{E} \int_t^T I_{\{Y^2(s) > Y^1(s)\}}\, e^{\beta s} \big|g(s, Y^2(s), Z^2(s)) - g(s, Y^1(s), Z^1(s))\big|^2\, ds\\
&\quad\; - \mathbf{E} \int_t^T I_{\{Y^2(s) > Y^1(s)\}}\, e^{\beta s} \big|h_2(s, Y^2(s)) - h_1(s, Y^1(s)) + Z^2(s) - Z^1(s)\big|^2\, ds\\
&\quad \equiv \Delta_1(t) + \Delta_2(t) + \Delta_3(t).
\end{aligned}$$

Imajući u vidu hipotezu $(\mathbf{H_4})$, sledi da je $\mathbf{E}(\xi_2 - \xi_1)^+ e^{\beta t} = 0$. Kako je

$$\begin{aligned}
\Delta_1(t) &= 2\mathbf{E} \int_t^T (Y^2(s) - Y^1(s))^+ e^{\beta s} \big[f_2(s, Y^2(s), Z^2(s)) - f_2(s, Y^1(s), Z^1(s))\big]\, ds\\
&\quad + 2\mathbf{E} \int_t^T (Y^2(s) - Y^1(s))^+ e^{\beta s} \big[f_2(s, Y^1(s), Z^1(s)) - f_1(s, Y^1(s), Z^1(s))\big]\, ds
\end{aligned}$$

i kako je drugi integral manji ili jednak nuli zbog hipoteze ($\mathbf{H_4}$), ostaje da se oceni prvi integral. Na osnovu hipoteze ($\mathbf{H_2}$), za proizvoljno $\theta > 0$ je

$$\begin{aligned}\Delta_1(t) \leq \frac{1}{\theta}\,\mathbf{E}\int_t^T |(Y^2(s)-Y^1(s))^+|^2 e^{\beta s}\,ds \qquad (3.50)\\ +\theta\,\mathbf{E}\int_t^T I_{\{Y^2(s)>Y^1(s)\}}\,e^{\beta s}\big[\rho(s,|Y^2(s)-Y^1(s)|^2)+C\,|Z^2(s)-Z^1(s)|^2\big]\,ds.\end{aligned}$$

Integral $\Delta_2(t)$ iz (3.49) se ocenjuje na sličan način primenom hipoteze ($\mathbf{H_2}$) na funkciju g,

$$\Delta_2(t) \leq \mathbf{E}\int_t^T I_{\{Y^2(s)>Y^1(s)\}}\,e^{\beta s}\big[\rho(s,|Y^2(s)-Y^1(s)|^2)+\alpha\,|Z^2(s)-Z^1(s)|^2\big]\,ds. \qquad (3.51)$$

Analogno se ocenjuje $\Delta_3(t)$ kao

$$\begin{aligned}\Delta_3(t) &\leq -\mathbf{E}\int_t^T |I_{\{Y^2(s)>Y^1(s)\}}\,e^{\beta s}|Z^2(s)-Z^1(s)|^2\,ds \qquad (3.52)\\ &\quad -2\mathbf{E}\int_t^T I_{\{Y^2(s)>Y^1(s)\}}\,e^{\beta s}(Z^2(s)-Z^1(s))^T\\ &\qquad\times\big[h_2(s,Y^2(s))-h_1(s,Y^1(s))+Z^2(s)-Z^1(s)\big]\,ds\\ &\leq (\theta-1)\mathbf{E}\int_t^T I_{\{Y^2(s)>Y^1(s)\}}\,e^{\beta s}|Z^2_s-Z^1_s|^2\,ds\\ &\quad+\frac{1}{\theta}\,\mathbf{E}\int_t^T I_{\{Y^2(s)>Y^1(s)\}}\,e^{\beta s}\rho(s,|Y^2(s)-Y^1(s)|^2)\,ds.\end{aligned}$$

Zamenom (3.50), (3.51) i (3.52) u (3.49) se dobija ocena

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}|(Y^2(t)-Y^1(t))^+|^2e^{\beta t}+\left(\beta-\frac{1}{\theta}\right)\mathbf{E}\int_t^T |(Y^2(s)-Y^1(s))^+|^2e^{\beta s}\,ds\\ &\quad+[1-\alpha-\theta(C+1)]\,\mathbf{E}\int_t^T |I_{\{Y^2(s)>Y^1(s)\}}\,e^{\beta s}|Z^2(s)-Z^1(s)|^2\,ds\\ &\leq\left(\theta+1+\frac{1}{\theta}\right)e^{\beta T}\int_t^T \rho(s,\mathbf{E}|(Y^2(s)-Y^1(s))^+|^2)\,ds.\end{aligned}$$

Za $\dfrac{1}{\beta} < \theta < \dfrac{1-\alpha}{C+1}$ i za svako $t \in [0,T]$ je

$$\mathbf{E}|(Y^2_t-Y^1_t)^+|^2 \leq \left(\frac{1-\alpha}{C+1}+1+\beta\right)e^{\beta T}\int_t^T \rho(s,\mathbf{E}|(Y^2_s-Y^1_s)^+|^2)\,ds.$$

Na osnovu Teoreme 1.5.5 sledi da je

$$\mathbf{E}|(Y^2(t)-Y^1(t))^+|^2 \leq r(t), \quad t\in[0,T],$$

gde je $r(t)$ maksimalno rešenje Cauchijevog problema

$$u' = -\left(\frac{1-\alpha}{C+1}+1+\beta\right)e^{\beta T}\rho(t,u), \quad u(T)=0.$$

Pošto iz hipoteze ($\mathbf{H_2}$) sledi da je $r(t) = 0$ za svako $t \in [0,T]$, neposredno se zaključuje da je $\mathbf{E}|(Y^2(t) - Y^1(t))^+|^2 = 0$, $t \in [0,T]$, odnosno $Y^2(t) \leq Y^1(t)$ skoro izvesno za svako $t \in [0,T]$. Ovim je dokaz završen. $\diamondsuit$

3.4 Uopštenje Feynman-Kac formule

Kao što je već rečeno na početku ove glave, veza između rešenja BDSDJ oblika (3.1) i rešenja široke klase kvazilinearnih SPDJ je predstavljena u esencijalnom radu [110] Pardoux i Penga, kao stohastička verzija poznate Feynman-Kac formule. U suštini, to je predstavljanje rešenja sistema kvazilenanih SPDJ u terminima rešenja BDSDJ (videti takođe [18, 53, 108, 120]). U nastavku ovog poglavlja je rezultat iz rada [110] uopšten za BDSDJ oblika (3.2), tj. data je analogna interpretacija rešenja odgovarajućeg sistema SPDJ u terminima rešenja BDSDJ oblika (3.2).

Neka su funkcije $b \in C^3(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)$ i $\sigma \in C^3(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^{d\times d})$ i neka imaju ograničene izvode do trećeg reda. Neka je za svako $t \in [0,T]$ i $x \in \mathbb{R}^d$ proces $\{X_s^{t,x}, s \in [t,T]\}$ jedinstveno rešenje SDJ

$$\begin{aligned} dX^{t,x}(s) &= b(X^{t,x}(s))\,ds + \sigma(X^{t,x}(s))\,dW(s), \quad s \in [t,T], \\ X^{t,x}(t) &= x. \end{aligned} \tag{3.53}$$

Pritom je rešenje $\{X^{t,x}(s), t \leq s \leq T, x \in \mathbb{R}^d\}$ skoro izvesno dva puta neprekidno diferencijabilna funkcija po x i njeni prvi izvodi su skoro izvesno neprekidne funkcije po t, x, s (videti [37]-[40]).

Uvode se sledeće oznake za koeficijente BDSDJ (3.2), koji zavise od $X^{t,x}(s)$,

$$\begin{aligned} f(s,y,z) &= f(s, X^{t,x}(s), y, z), \\ g(s,y,z) &= g(s, X^{t,x}(s), y, z), \\ h(s,y) &= h(s, X^{t,x}(s), y). \end{aligned}$$

Pretpostavlja se da su funkcije $f : [0,T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d} \to \mathbb{R}^k$, $g : [0,T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d} \to \mathbb{R}^{k\times l}$ i $h : [0,T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{k\times d}$ iz klase C^3 u odnosu na (x,y,z) i da su svi njihovi parcijalni izvodi ograničeni na $[0,T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d}$. Takođe se pretpostavlja da su zadovoljeni uslovi hipoteze ($\mathbf{H_1}$).

Za funkciju $\phi \in C^3(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^k)$, neka je $\mathbf{E}|\phi(X^{t,x}(T))|^2 < \infty$ za svako $t \in [0,T]$ i $x \in \mathbb{R}^d$, i neka je $\{(Y^{t,x}(s), Z^{t,x}(s)), s \in [t,T]\}$ jedinstveno rešenje BDSDJ

$$\begin{aligned} Y^{t,x}(s) &= \phi(X^{t,x}(T)) + \int_s^T f(\tau, X^{t,x}(\tau), Y^{t,x}(\tau), Z^{t,x}(\tau))\,d\tau \\ &\quad + \int_s^T g(\tau, X^{t,x}(\tau), Y^{t,x}(\tau), Z^{t,x}(\tau))\,dB(\tau) \\ &\quad - \int_s^T \left[h(\tau, X^{t,x}(\tau), Y^{t,x}(\tau)) + Z^{t,x}(\tau)\right] dW(\tau), \quad s \in [t,T]. \end{aligned} \tag{3.54}$$

Dodefinišimo $X^{t,x}(s), Y^{t,x}(s)$ i $Z^{t,x}(s)$ za svako $(s,t) \in [0,T]^2$, stavljajući da je $X^{t,x}(s) = X^{t,x}(s \vee t)$, $Y^{t,x}(s) = Y^{t,x}(s \vee t)$, $Z^{t,x}(s) = 0$ za $s < t$.

Uporedo sa BDSDJ (3.54), posmatra se sistem kvazilinearnih SPDJ drugog reda,

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)+\mathcal{L}u(t,x)+f(t,x,u(t,x),\nabla u(t,x)\sigma(x)-h(t,u(t,x)))\\&\qquad+g(t,x,u(t,x),\nabla u(t,x)\sigma(x)-h(t,u(t,x)))\,\dot{B}(t)=0,\quad t\in[0,T],\\&u(T,x)=\phi(x),\end{aligned}$$

gde je $\dot{B}(t)$ l-dimenzionalni beli šum, $u:\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^k$, ∇u je gradijent od u, $\mathcal{L}u=(Lu_1,\ldots,Lu_k)^\top$ i

$$L=\sum_{i=1}^d b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d(\sigma\sigma^\top)_{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}.$$

Imajući u vidu uobičajnu interpretaciju za $\dot{B}(t)$, prethodna jednačina se može zapisati u integralnom obliku,

$$\begin{aligned}u(t,x)&=\phi(x)\\&\quad+\int_t^T\big[\mathcal{L}u(\tau,x)+f(\tau,x,u(\tau,x),\nabla u(\tau,x)\,\sigma(x)-h(\tau,u(\tau,x)))\big]\,d\tau\\&\quad+\int_t^T g(\tau,x,u(\tau,x),\nabla u(\tau,x)\,\sigma(x)-h(\tau,u(\tau,x)))\,dB(\tau),\quad t\in[0,T].\end{aligned}\tag{3.55}$$

Pri prethodno navedenim uslovima za ϕ,f,g,σ i h, postoji jedinstveno rešenje $u(t,x)\in\mathcal{C}^{1,2}(\Omega\times[0,T]\times\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^k)$ jednačine (3.54), odnosno (3.55). Sledećom teoremom je uopštena Feynman-Kac formula za rešenje ove jednačine.

Teorema 3.4.1 *Neka su funkcije f,g,h,b,σ iz klase C^3, funkcija ϕ iz klase C^2 i neka one zadovoljavaju prethodno uvedene uslove. Osim toga, neka je $u(t,x)\in C^{1,2}(\Omega\times[0,T]\times\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^k)$ rešenje SPDJ (3.55). Tada je $\{(Y^{t,x}(s),Z^{t,x}(s)),s\in[t,T]\}$, gde je*

$$Y^{t,x}(s)=u(s,X^{t,x}(s)),\ \ Z^{t,x}(s)=\nabla u(s,X^{t,x}(s))\sigma(X^{t,x}(s))-h(s,u(s,X^{t,x}(s))),$$

jedinstveno rešenje BDSDJ (3.54).

Dokaz. Primenom formule Itôa na $u(\tau,X^{t,x}_\tau)$, dobija se

$$du(\tau,X^{t,x}_\tau)=\left[\frac{\partial u}{\partial t}(\tau,X^{t,x}(\tau))+\mathcal{L}u(\tau,X^{t,x}(\tau))\right]d\tau+\nabla u(\tau,X^{t,x}(\tau))\,\sigma(X^{t,x}(\tau))\,dW(\tau).$$

Kako je $u(t,x)$ rešenje SPDJ (3.55), sledi da je

$$\begin{aligned}&du(\tau,X^{t,x}(\tau))\\&=-f(\tau,X^{t,x}(\tau),u(\tau,X^{t,x}(\tau)),\nabla u(\tau,X^{t,x}(\tau))\,\sigma(X^{t,x}(\tau))-h(\tau,u(\tau,X^{t,x}(\tau))))\,d\tau\\&\quad-g(\tau,X^{t,x}_\tau,u(\tau,X^{t,x}(\tau)),\nabla u(\tau,X^{t,x}(\tau))\,\sigma(X^{t,x}(\tau))-h(\tau,u(\tau,X^{t,x}(\tau))))\,dB(\tau)\\&\quad+\nabla u(\tau,X^{t,x}(\tau))\,\sigma(X^{t,x}(\tau))\,dW(\tau).\end{aligned}$$

Integracijom na $[s,T]$ obe strane poslednje jednakosti, za $s \in [t,T]$ je

$$
\begin{aligned}
&u(T, X^{t,x}(T)) - u(s, X^{t,x}(s)) \\
&= -\int_s^T f(\tau, X^{t,x}(\tau), u(\tau, X^{t,x}(\tau)), \nabla u(\tau, X^{t,x}_\tau)\, \sigma(X^{t,x}(\tau)) - h(\tau, u(\tau, X^{t,x}(\tau))))\, d\tau \\
&\quad - \int_s^T g(\tau, X^{t,x}(\tau), u(\tau, X^{t,x}(\tau)), \nabla u(\tau, X^{t,x}_\tau)\sigma(X^{t,x}(\tau)) - h(\tau, u(\tau, X^{t,x}(\tau))))dB(\tau) \\
&\quad + \int_s^T \nabla u(\tau, X^{t,x}(\tau))\sigma(X^{t,x}(\tau))dW(\tau).
\end{aligned}
$$

Otuda je

$$
\begin{aligned}
&u(s, X^{t,x}(s)) = \phi(X^{t,x}(T)) \\
&\quad + \int_s^T f(\tau, X^{t,x}(\tau), u(\tau, X^{t,x}(\tau)), \nabla u(\tau, X^{t,x}(\tau))\, \sigma(X^{t,x}(\tau)) - h(\tau, u(\tau, X^{t,x}(\tau))))\, d\tau \\
&\quad + \int_s^T g(\tau, X^{t,x}(\tau), u(\tau, X^{t,x}(\tau)), \nabla u(\tau, X^{t,x}(\tau))\sigma(X^{t,x}(\tau)) - h(\tau, u(\tau, X^{t,x}(\tau))))dB(\tau) \\
&\quad - \int_s^T \big[h(\tau, u(\tau, X^{t,x}_\tau)) + (\nabla u(\tau, X^{t,x}(\tau))\, \sigma(X^{t,x}(\tau)) - h(\tau, u(\tau, X^{t,x}(\tau))))\big]\, dW(\tau).
\end{aligned}
$$

Iz poslednje relacije i BDSDJ (3.54), sledi da je

$$
\{(u(s, X^{t,x}(s)), \nabla u(s, X^{t,x}(s))\, \sigma(X^{t,x}(s)) - h(s, u(s, X^{t,x}(s)))),\ s \in [t,T]\} \tag{3.56}
$$

jedinstveno rešenje jednačine (3.54). $\diamondsuit$

Ovaj zaključak se može indirektno izvesti primenom Teoreme 3.1.2 i rezultata iz rada [110]. Najpre, pod uslovima uvedenim za funkcije f, g, ϕ, jednačina

$$
\begin{aligned}
y^{t,x}(s) = \phi(X^{t,x}(T)) &+ \int_s^T f(\tau, X^{t,x}(\tau), y^{t,x}(\tau), z^{t,x}(\tau) - h(\tau, y^{t,x}(\tau)))\, d\tau \\
&+ \int_s^T g(\tau, X^{t,x}(\tau), y^{t,x}(\tau), z^{t,x}(\tau) - h(\tau, y^{t,x}(\tau)))\, dB(\tau) - \int_s^T z^{t,x}(\tau)\, dW(\tau),
\end{aligned} \tag{3.57}
$$

ima jedinstveno rešenje $\{(y^{t,x}(s), z^{t,x}(s)), t \le s \le T\}$. Međutim, kako odgovarajući sistem kvazilnearnih SPDJ

$$
\begin{aligned}
v(t,x) = \phi(x) &+ \int_t^T \big[\mathcal{L}v(\tau,x) + f(\tau, x, v(\tau,x), \nabla v(\tau,x)\, \sigma(x) - h(\tau, y^{t,x}(\tau)))\big]\, d\tau \\
&+ \int_t^T g(\tau, x, v(\tau,x), \nabla v(\tau,x)\, \sigma(x) - h(\tau, y^{t,x}(\tau)))\, dB(\tau) \\
&+ \nabla u(\tau, X^{t,x}(\tau))\, \sigma(X^{t,x}(\tau))\, dW(\tau), \quad t \in [0,T],
\end{aligned} \tag{3.58}
$$

ima jedinstveno rešenje $v(t,x)$, u [110] (Teorema 3.1) je dokazano da se jedinstveno rešenje $\{(y^{t,x}(s), z^{t,x}(s)), s \in [t,T]\}$ BDSDJ (3.58) može izraziti na sledeći način,

$$
y^{t,x}(s) = v(s, X^{t,x}(s)), \quad z^{t,x}(s) = \nabla v(s, X^{t,x}(s))\, \sigma(X^{t,x}(s)),\ s \in [t,T].
$$

Na osnovu Teoreme 3.1.2 sledi da je $\{(y^{t,x}(s), z^{t,x}(s) - h(s, y^{y,x}(s))), s \in [t,T]\}$ jedinstveno rešenje jednačine BDSDJ (3.54). Prema tome,

$$u(s, X^{t,x}(s)) = v(s, X^{t,x}(s)) \text{ s.i. za svako } s \in [t,T],$$

pa je rešenje jednačine (3.54) dato sa (3.56).

Rešenje sistema kvazilinearnih SPDJ (3.55) se može izraziti relacijom

$$u(t,x) = Y^{t,x}(t) \text{ s.i.},$$

koja se uobičajno naziva *stochastičkom Feinman-Kac formulom.*

Glava 4

Perturbovane backward doubly stohastičke diferencijalne jednačine

U ovoj glavi su opisane linearno perturbovane backward doubly stohastičke diferencijalne jednačine kada koeficijenti zadovoljavaju neke nelipšicovske uslove. Razmatrane su srednjekvadratna razlika rešenja i L^p-razlika rešenja, $p > 2$, perturbovane i neperturbovane jednačine, pri različitim uslovima bliskosti koeficijenata ovih jednačina. U oba slučaja su ocenjeni vremenski intervali u kojima rešenja zadržavaju zadatu bliskost. Ova glava u potpunosti sadrži nove, još neobjavljene rezultate.

4.1 Backward doubly stohastičke diferencijalne jednačine sa linearnim perturbacijama

U Poglavlju 3.1, za BDSDJ

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)\, ds + \int_t^T g(s, Y_s, Z_s)\, dB_s - \int_t^T [h(s, Y_s) + Z_s]\, dW_s, \ t \in [0, T], \tag{4.1}$$

su dokazane egzistencija i jedinstvenost rešenja $\{(Y_t, Z_t), t \in [0, T]\}$, kao i neka svojstva rešenja. Funkcija h, koja je dodata u forward integral, može se posmatrati kao tip aditivne perturbacije, tj. pomeraj kojim se translira podintegralna funkcija forward integrala sa Z_t na $Z_t + h(t, Y_t)$.

Već se u slučaju BSDJ sa aditivnim perturbacijama može uočiti da se ocenom razlike rešenja perturbovane i neperturbovane jednačine olakšava analiza modela opisanih perturbovanom jednačinom, čije rešenje uglavnom nije moguće odrediti. U cilju pojednostavljenja mnogih izračunavanja koja se javljaju kod problema u mehanici, finansijama itd., u kojima se za modeliranje koriste perturbovane BDSDJ, takođe su značajne ocene razlike rešenja pri linearnim perturbacijama. Razlika u odnosu na tip aditivnih perturbacija koji je opisan u Glavi 2, je što se u ovom slučaju svi koeficijenti i finalni uslov linearno perturbuju, pa je samim tim ovaj tip perturbacija komplikovaniji od aditivnog, a pokazaće se da se ne može svesti na aditivni tip perturbacija.

Zajedno sa jednačinom (4.1), posmatra se i jednačina

$$
\begin{aligned}
Y_t^\varepsilon = \xi^\varepsilon &+ \int_t^T [\alpha_1(s, Y_s^\varepsilon, Z_s^\varepsilon, \varepsilon) f(s, Y_s^\varepsilon, Z_s^\varepsilon) + \alpha_2(s, Y_s^\varepsilon, Z_s^\varepsilon, \varepsilon)]\, ds \\
&+ \int_t^T [\beta_1(s, Y_s^\varepsilon, Z_s^\varepsilon, \varepsilon) g(s, Y_s^\varepsilon, Z_s^\varepsilon) + \beta_2(s, Y_s^\varepsilon, Z_s^\varepsilon, \varepsilon)]\, dB_s \\
&- \int_t^T [\gamma_1(s, Y_s^\varepsilon, \varepsilon) h(s, Y_s^\varepsilon) + \gamma_2(s, Y_s^\varepsilon, \varepsilon) + Z_s]\, dW_s,\ t \in [0, T], \qquad (4.2)
\end{aligned}
$$

gde f, g, h zadovoljavaju uslove hipoteze $(\mathbf{H_0})$ iz Glave 3. Jednačina (4.1) će se smatrati *neperturbovanom*, dok će jednačina (4.2) biti odgovarajuća *perturbovana* jednačina. Za *perturbacije* $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1$ i γ_2, zavisne od malog parametra $\varepsilon \in (0, 1)$, pretpostavlja se da su merljive funkcije, definisane na sledeći način:

$$
\begin{aligned}
&\alpha_1 : \Omega \times [0, T] \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k \times d} \to \mathbb{R}^{k \times k}, && \alpha_2 : \Omega \times [0, T] \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k \times d} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^k, \\
&\beta_1 : \Omega \times [0, T] \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k \times d} \to \mathbb{R}^{k \times k}, && \beta_2 : \Omega \times [0, T] \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k \times d} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{k \times l}, \\
&\gamma_1 : \Omega \times [0, T] \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{k \times k}, && \gamma_2 : \Omega \times [0, T] \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{k \times d}.
\end{aligned}
$$

Za svako $(s, y, z) \in [0, T] \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k \times d}$, označimo

$$
\begin{aligned}
\widetilde{f}(s, y, z, \varepsilon) &= \alpha_1(s, y, z, \varepsilon) f(s, y, z) + \alpha_2(s, y, z, \varepsilon), \\
\widetilde{g}(s, y, z, \varepsilon) &= \beta_1(s, y, z, \varepsilon) g(s, y, z) + \beta_2(s, y, z, \varepsilon), \\
\widetilde{h}(s, y, \varepsilon) &= \gamma_1(s, y, \varepsilon) h(s, y) + \gamma_2(s, y, \varepsilon),
\end{aligned}
$$

i pretpostavimo da su perturbacije takve da $\xi^\varepsilon, \widetilde{f}, \widetilde{g}, \widetilde{h}$ zadovoljavaju hipotezu $(\mathbf{H_0})$, kao i da jednačina (4.2) *a priori* ima jedinstveno rešenje $\{(Y_t^\varepsilon, Z_t^\varepsilon),\ t \in [0, T]\} \in \mathcal{S}^2([0, T]; \mathbb{R}^k) \times \mathcal{M}^2([0, T]; \mathbb{R}^{k \times d})$.

Do kraja ovog poglavlja razmatran je problem linearnih perturbacija BDSDJ. Opisana su dva različita pristupa: Prvi, kojim se ocenjuje srednje kvadratna razlika rešenja i ocena intervala bliskosti rešenja u L^2-smislu. Drugim pristupom se ocenjuje razlika procesa stanja Y_t^ε i Y_t u L^p-smislu, $p \geq 2$, pri drugačijim uslovima za perturbacije nego u prvom slučaju. Zatim je opisan problem stabilnosti, tj. dati su uslovi pri kojima razlika rešenja perturbovane i neperturbovane jednačine u L^p-smislu teži nuli kada ε teži nuli. Na kraju, određen je interval $[\bar{t}(\eta), T] \subset [0, T]$ na kome je L^p-razlika procesa stanja $Y(t)^\varepsilon$ i $Y(t)$ manja od unapred zadate vrednosti $\eta > 0$. Ocenjena je i L^p-razlika kontrolnih procesa $Z(t)^\varepsilon$ i $Z(t)$ na tom intervalu.

Drugi pristup uključuje i srednje kvadratnu ocenu, ali su uslovi za njegovu primenu stroži, dok se prvim pristupom ne može oceniti L^p-razlika rešenja za $p > 2$.

4.1.1 Srednje kvadratna razlika rešenja

Da bi se ocenila razlika rešenja jednačina (4.1) i (4.2) u L^2-smislu, uvodi se sledeća pretpostavka:

A2. (i) Za finalne uslove $\xi, \xi_\varepsilon \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P; \mathbb{R}^k)$ postoji neslučajna vrednost ψ_T^ε za koju je

$$
\psi_T^\varepsilon = E|\widehat{\xi}|^2, \quad \widehat{\xi} = \xi^\varepsilon - \xi.
$$

(ii) Za $\varepsilon \in (0,1)$ postoje ograničene vrednosti $\bar{\alpha}_1(\varepsilon), \bar{\beta}_1(\varepsilon), \bar{\gamma}_1(\varepsilon)$ i ograničene funkcije $\widetilde{\alpha}_2(t,\varepsilon), \widetilde{\beta}_2(t,\varepsilon), \widetilde{\gamma}_2(t,\varepsilon)$, $t \in [0,T]$, tako da je skoro izvesno

$$\begin{aligned}
\sup_{(t,y,z)\in[0,T]\times\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{k\times d}} ||\alpha_1(t,y,z,\varepsilon)-1|| &\leq \bar{\alpha}_1(\varepsilon),\\
\sup_{(t,y,z)\in[0,T]\times\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{k\times d}} ||\beta_1(t,y,z,\varepsilon)-1|| &\leq \bar{\beta}_1(\varepsilon),\\
\sup_{(t,y)\in[0,T]\times\mathbb{R}^k} ||\gamma_1(t,y,\varepsilon)-1|| &\leq \bar{\gamma}_1(\varepsilon),\\
\sup_{(y,z)\in\mathcal{R}^k\times\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{k\times d}} |\alpha_2(t,y,z,\varepsilon)| &\leq \widetilde{\alpha}_2(t,\varepsilon),\\
\sup_{(y,z)\in\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{k\times d}} ||\beta_2(t,y,z,\varepsilon)|| &\leq \widetilde{\beta}_2(t,\varepsilon),\\
\sup_{y\in\mathcal{R}^k} ||\gamma_2(t,y,\varepsilon)|| &\leq \widetilde{\gamma}_2(t,\varepsilon).
\end{aligned}$$

(iii) Bez posebnog isticanja neophodnih uslova, *a priori* se pretpostavlja da postoje jedinstvena rešenja $\{(Y_t,Z_t), t \in [0,T]\}$ i $\{(Y_t^\varepsilon, Z_t^\varepsilon), t \in [0,T]\}$ jednačina (4.1) i (4.2), respektivno, za koja je

$$E\sup_{0\leq t\leq T}|Y_t|^2 + E\int_0^T ||Z_t||^2\,dt < \infty, \qquad E\sup_{0\leq t\leq T}|Y_t^\varepsilon|^2 + E\int_0^T ||Z_t^\varepsilon||^2\,dt < \infty,$$

i da su definisani svi Lebesgueovi i Itôvi integrali koji se javljaju u radu.

Istaknimo da pretpostavka (iii) važi ako su zadovoljeni uslovi Teoreme 3.1.3 za ξ, ξ^ε i $f, g, h, \widetilde{f}, \widetilde{g}, \widetilde{h}$, kao i pri slabijim uslovima, tj. ako su zadovoljene hipoteze $(\mathbf{H_0})$ i $(\mathbf{H_3})$.

Treba istaći da se u slučaju $\alpha_1(\cdot) \equiv \beta_1(\cdot) \equiv \gamma_1(\cdot) \equiv 1$, opisani tip linearne perturbacije svodi na aditivne perturbacije opisane u Poglavlju 2.1 za BSDJ. Međutim, linearne perturbacije se ne mogu u opštem slučaju svesti na aditivne perturbacije. Problem je što za $\alpha_1(t,y,z,\varepsilon) = 1 + \pi(t,y,z,\varepsilon)$ koeficijent prenosa postaje $f(t,y,z)+\pi(t,y,z,\varepsilon)f(t,y,z)$, pri čemu $|\pi(t,y,z,\varepsilon)f(t,y,z)|$ ne mora biti uniformno ograničeno u odnosu na $(y,z) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d}$. U slučaju da je za neku ograničenu funkciju $\widehat{\pi}(t,\varepsilon)$ ispunjeno $\sup_{(y,z)\in\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{k\times d}} |\pi(t,y,z,\varepsilon)f(t,y,z)| \leq \widehat{\pi}(t,\varepsilon)$, što je veoma strog uslov, linearne perturbacije se mogu svesti na aditivne. Isto obrazloženje važi i za funkcije $\beta_1(\cdot), \gamma_1(\cdot)$.

Ako se ψ_T^ε, $\bar{\alpha}_1(\varepsilon)$, $\bar{\beta}_1(\varepsilon)$, $\bar{\gamma}_1(\varepsilon), \widetilde{\alpha}_2(t,\varepsilon), \widetilde{\beta}_2(t,\varepsilon), \widetilde{\gamma}_2(t,\varepsilon)$ mogu učiniti proizvoljno malim, za dovoljno malo ε i $t \in [0,T]$, logično je očekivati da su rešenja jednačina (4.1) i (4.2) bliska u nekom smislu.

Sledećom propozicijom je data ocena L^2-momenta razlike procesa stanja perturbovane i neperturbovane BDSDJ.

Propozicija 4.1.1 *Neka su $\{(Y_t,Z_t), t \in [0,T]\}$ i $\{(Y_t^\varepsilon, Z_t^\varepsilon), t \in [0,T]\}$ rešenja jednačina (4.1) i (4.2), respektivno, i neka su zadovoljene pretpostavka* $\boldsymbol{A2}$ *i hipoteza* $(\mathbf{H_3})$. *Tada, za pozitivne konstante λ_1, λ_2 takve da je*

$$\lambda_2 < 1 - 4z\lambda_1 C - 3\alpha,$$

važi ocena

$$E|Y_t^\varepsilon - Y_t|^p \leq G^{-1}\left(G\left(K_2(\varepsilon) + \int_0^T K_3(s,\varepsilon)\,ds\right) + K(T-t)\right),\ t\in[0,T] \quad (4.3)$$

gde je funkcija $G(u) = \int_{u_0}^u \frac{dx}{x+\rho(x)}$ *i*

$$\begin{aligned} K_2(\varepsilon) &= \psi_T^\varepsilon + 3\Big[\lambda_1 R_1 \bar{\alpha}_1^2(\varepsilon) + R_2\bar{\beta}_1^2(\varepsilon) + \frac{1}{\lambda_2}R_3\bar{\gamma}_1^2(\varepsilon)\Big],\\ K_3(s,\varepsilon) &= 3\Big[\lambda_1\widetilde{\alpha}_2^2(s,\varepsilon) + \widetilde{\beta}_2^2(s,\varepsilon) + \frac{1}{\lambda_2}\widetilde{\gamma}_2^2(s,\varepsilon)\Big], \qquad (4.4)\\ K &= \max\left\{\frac{1}{\lambda_1}, 3\Big(\lambda_1 + 1 + \frac{1}{\lambda_2}\Big)\right\}, \end{aligned}$$

pri čemu su R_1, R_2, R_3 *generisane pozitivne konstante.*

Dokaz. Označimo

$$\widehat{\xi} = \xi^\varepsilon - \xi, \quad \widehat{Y}_t^\varepsilon = Y_t^\varepsilon - Y_t, \quad \Delta_t^\varepsilon = E|\widehat{Y}_t^\varepsilon|^2.$$

Oduzimanjem jednačina (4.1) i (4.2) i primenom formule Itôa na $|\widehat{Y}_t^\varepsilon|^2$, za $t\in[0,T]$ se dobija

$$\begin{aligned} |\widehat{Y}_t^\varepsilon|^2 &= |\widehat{\xi}|^2 + 2\int_t^T (\widehat{Y}_s^\varepsilon)^T[\widetilde{f}(s,Y_s^\varepsilon,Z_s^\varepsilon,\varepsilon) - f(s,Y_s,Z_s)]\,ds\\ &+ \int_t^T ||\widetilde{g}(s,Y_s^\varepsilon,Z_s^\varepsilon,\varepsilon) - g(s,Y_s,Z_s)||^2\,ds\\ &+ 2\int_t^T (\widehat{Y}_s^\varepsilon)^T[\widetilde{g}(s,Y_s^\varepsilon,Z_s^\varepsilon,\varepsilon) - g(s,Y_s,Z_s)]\,dB_s\\ &- \int_t^T ||\widetilde{h}(s,Y_s^\varepsilon,\varepsilon) + Z_s^\varepsilon - h(s,Y_s) - Z_s||^2\,ds\\ &- 2\int_t^T (\widehat{Y}_s^\varepsilon)^T[\widetilde{h}(s,Y_s^\varepsilon,\varepsilon) + Z_s^\varepsilon - h(s,Y_s) - Z_s]\,dW_s. \end{aligned}$$

Kako je

$$\begin{aligned} &\int_t^T ||\widetilde{h}(s,Y_s^\varepsilon,\varepsilon) + Z_s^\varepsilon - h(s,Y_s) - Z_s||^2\,ds\\ &\quad= \int_t^T ||\widetilde{h}(s,Y_s^\varepsilon,\varepsilon) - h(s,Y_s)||^2\,ds + \int_t^T ||Z_s^\varepsilon - Z_s||^2\,ds\\ &\quad+2\int_t^T trace[(\widetilde{h}(s,Y_s^\varepsilon,\varepsilon) - h(s,Y_s))^T(Z_s^\varepsilon - Z_s)]\,ds, \end{aligned}$$

onda je

$$\begin{aligned} &\Delta_t^\varepsilon + E\int_t^T ||Z_s^\varepsilon - Z_s||^2\,ds \qquad (4.5)\\ &\quad\leq E|\widehat{\xi}|^2 + 2E\int_t^T (\widehat{Y}_s^\varepsilon)^T[\widetilde{f}(s,Y_s^\varepsilon,Z_s^\varepsilon,\varepsilon) - f(s,Y_s,Z_s)]\,ds \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+E\int_t^T ||\widetilde{g}(s,Y_s^\varepsilon,Z_s^\varepsilon,\varepsilon)-g(s,Y_s,Z_s)||^2\,ds\\
&+2E\int_t^T trace[(\widetilde{h}(s,Y_s^\varepsilon,\varepsilon)-h(s,Y_s))^T(Z_s^\varepsilon-Z_s)]\,ds\\
\equiv\ & E|\widehat{\xi}|^2+I_1+I_2+I_3.
\end{aligned}
$$

Ocenimo svaki od ovih integrala na osnovu hipoteze ($\mathbf{H_3}$), pretpostavke ***A2*** i poznatih nejednakosti.

Za proizvoljno $\lambda_1>0$ je

$$
\begin{aligned}
I_1 &= 2E\int_t^T (\widehat{Y}_s^\varepsilon)^T[\alpha_1(s,Y_s^\varepsilon,Z_s^\varepsilon,\varepsilon)f(s,Y_s^\varepsilon,Z_s^\varepsilon)+\alpha_2(s,Y_s^\varepsilon,Z_s^\varepsilon,\varepsilon)-f(s,Y_s,Z_s)]\,ds\\
&\le \frac{1}{\lambda_1}E\int_t^T |\widehat{Y}_s^\varepsilon|^2\,ds\\
&\quad+\lambda_1E\int_t^T |\alpha_1(s,Y_s^\varepsilon,Z_s^\varepsilon,\varepsilon)f(s,Y_s^\varepsilon,Z_s^\varepsilon)-f(s,Y_s^\varepsilon,Z_s^\varepsilon)+\alpha_2(s,Y_s^\varepsilon,Z_s^\varepsilon,\varepsilon)|^2\,ds\\
&\le \frac{1}{\lambda_1}E\int_t^T |\widehat{Y}_s^\varepsilon|^2\,ds+3\lambda_1\Bigg[E\int_t^T ||\alpha_1(s,Y_s^\varepsilon,Z_s^\varepsilon,\varepsilon)-1||^2|f(s,Y_s^\varepsilon,Z_s^\varepsilon)|^2\,ds\\
&\quad+E\int_t^T |f(s,Y_s^\varepsilon,Z_s^\varepsilon)-f(s,Y_s^\varepsilon,Z_s^\varepsilon)|^2\,ds+E\int_t^T|\alpha_2(s,Y_s^\varepsilon,Z_s^\varepsilon,\varepsilon)|^2\,ds\Bigg]\\
&\le \frac{1}{\lambda_1}\int_t^T \Delta_s^\varepsilon ds+3\lambda_1\Bigg[\bar{\alpha}_1^2(\varepsilon)E\int_t^T|f(s,Y_s^\varepsilon,Z_s^\varepsilon)|^2\,ds\\
&\quad+E\int_t^T[\rho(|\widehat{Y}_s^\varepsilon|^2)+C||\widehat{Z}_s^\varepsilon||^2]\,ds+\int_t^T\widetilde{\alpha}_2^2(s,\varepsilon)\,ds\Bigg].
\end{aligned}
$$

Pošto na osnovu *(iii)* pretpostavke ***A2*** postoje generisane konstante M_1 i M_2 tako da je

$$
E\sup_{0\le t\le T}|Y_t^\varepsilon|^2<M_1,\qquad E\int_0^T||Z_t^\varepsilon||^2dt<M_2,
$$

to je $E\int_t^T|f(s,Y_s^\varepsilon,Z_s^\varepsilon)|^2\,ds<R_1$ za neku generisanu konstantu $R_1=R_1(M_1,M_2)>0$. Otuda je za proizvoljno $\lambda_1>0$,

$$
\begin{aligned}
I_1 &\le \frac{1}{\lambda_1}\int_t^T\Delta_s^\varepsilon ds \qquad (4.6)\\
&\quad+3\lambda_1\left[R_1\bar{\alpha}_1^2(\varepsilon)+E\int_t^T[\rho(|\widehat{Y}_s^\varepsilon|^2)+C||\widehat{Z}_s^\varepsilon||^2]\,ds+\int_t^T\widetilde{\alpha}_2^2(s,\varepsilon)\,ds\right].
\end{aligned}
$$

Ocena za I_2 se dobija analogno,

$$
\begin{aligned}
I_2 &= E\int_t^T ||\beta_1(s,Y_s^\varepsilon,Z_s^\varepsilon,\varepsilon)g(s,Y_s^\varepsilon,Z_s^\varepsilon)+\beta_2(s,Y_s^\varepsilon,Z_s^\varepsilon,\varepsilon)-g(s,Y_s,Z_s)||^2\,ds\\
&\le 3\Bigg[E\int_t^T||\beta_1(s,Y_s^\varepsilon,Z_s^\varepsilon,\varepsilon)g(s,Y_s^\varepsilon,Z_s^\varepsilon)-g(s,Y_s^\varepsilon,Z_s^\varepsilon)||^2\,ds
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\quad + E\int_t^T ||g(s,Y_s^\varepsilon,Z_s^\varepsilon)-g(s,Y_s,Z_s)||^2\,ds + E\int_t^T ||\beta_2(s,Y_s^\varepsilon,Z_s^\varepsilon,\varepsilon)||^2\,ds\Bigg]\\
&\le 3\Bigg[\bar\beta_1^2(\varepsilon)E\int_t^T ||g(s,Y_s^\varepsilon,Z_s^\varepsilon)||^2\,ds\\
&\quad + E\int_t^T [\rho(|\widehat{Y}_s^\varepsilon|^2)+\alpha||\widehat{Z}_s^\varepsilon||^2]\,ds + \int_t^T \widetilde{\beta}_2^2(s,\varepsilon)\,ds\Bigg].
\end{aligned}
$$

Kako je $E\int_t^T ||g(s,Y_s^\varepsilon,Z_s^\varepsilon)||^2\,ds < R_2$, gde je $R_2 = R_2(M_1,M_2) > 0$ generisana pozitivna konstanta, to je

$$
I_2 \le 3\left[R_2\bar\beta_1^2(\varepsilon) + E\int_t^T [\rho(|\widehat{Y}_s^\varepsilon|^2)+\alpha||\widehat{Z}_s^\varepsilon||^2]\,ds + \int_t^T \widetilde{\beta}_2^2(s,\varepsilon)\,ds\right]. \tag{4.7}
$$

Slično, za $\lambda_2 > 0$ je

$$
\begin{aligned}
I_3 &= 2E\int_t^T trace[(\widetilde{h}(s,Y_s^\varepsilon,\varepsilon)-h(s,Y_s))^T(Z_s^\varepsilon - Z_s)]\,ds\\
&\le \frac{1}{\lambda_2}E\int_t^T ||\gamma_1(s,Y_s^\varepsilon,\varepsilon)h(s,Y_s^\varepsilon)+\gamma_2(s,Y_s^\varepsilon,\varepsilon)-h(s,Y_s)||^2\,ds\\
&\quad + \lambda_2 E\int_t^T ||Z_s^\varepsilon - Z_s||^2\,ds\\
&\le \frac{3}{\lambda_2}\Bigg[E\int_t^T ||(\gamma_1(s,Y_s^\varepsilon,\varepsilon)-1)h(s,Y_s^\varepsilon)||^2\,ds + E\int_t^T ||h(s,Y_s^\varepsilon)-h(s,Y_s^\varepsilon)||^2\,ds\\
&\qquad + E\int_t^T ||\gamma_2(s,Y_s^\varepsilon,\varepsilon)||^2\,ds\Bigg] + \lambda_2 E\int_t^T ||Z_s^\varepsilon - Z_s||^2\,ds\\
&\le \frac{3}{\lambda_2}\Bigg[\bar\gamma_1^2(\varepsilon)|E\int_t^T ||h(s,Y_s^\varepsilon)||^2\,ds + E\int_t^T \rho(|\widehat{Y}_s^\varepsilon|^2)\,ds + \int_t^T \widetilde{\gamma}_2^2(s,\varepsilon)\,ds\Bigg]\\
&\quad + \lambda_2 E\int_t^T ||Z_s^\varepsilon - Z_s||^2\,ds.
\end{aligned}
$$

Kako je $E\int_t^T ||h(s,Y_s^\varepsilon)||^2\,ds < R_3$ za neku generisanu konstantu $R_3 = R_3(M_1,M_2) > 0$, to je

$$
\begin{aligned}
I_3 &\le \frac{3}{\lambda_2}\left[R_3\bar\gamma_1^2(\varepsilon) + E\int_t^T \rho(|\widehat{Y}_s^\varepsilon|^2)\,ds + \int_t^T \widetilde{\gamma}_2^2(s,\varepsilon)\,ds\right] \qquad (4.8)\\
&\quad + \lambda_2 E\int_t^T ||Z_s^\varepsilon - Z_s||^2\,ds.
\end{aligned}
$$

Zamenom (4.7), (4.7) i (4.9) u (4.5) i primenom Jensenove nejednakosti (1.16), dobija se

$$
\Delta_t^\varepsilon + (1-3\lambda_1 C - 3\alpha - \lambda_2)E\int_t^T ||Z_s^\varepsilon - Z_s||^2\,ds \tag{4.9}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \psi_T^\varepsilon + 3\Big[\lambda_1 R_1 \bar{\alpha}_1^2(\varepsilon) + R_2 \bar{\beta}_1^2(\varepsilon) + \frac{1}{\lambda_2} R_3 \bar{\gamma}_1^2(\varepsilon)\Big] + 3\left(\lambda_1 + 1 + \frac{1}{\lambda_2}\right) \int_t^T \rho(\Delta_s^\varepsilon)\, ds \\
&+ \frac{1}{\lambda_1} \int_t^T \Delta_s^\varepsilon ds + 3 \int_t^T \Big[\lambda_1 \widetilde{\alpha}_2^2(s,\varepsilon) + \widetilde{\beta}_2^2(s,\varepsilon) + \frac{1}{\lambda_2} \widetilde{\gamma}_2^2(s,\varepsilon)\Big]\, ds.
\end{aligned}
$$

Konstante λ_1, λ_2 se mogu izabrati tako da je

$$
\lambda_2 < 1 - 3\lambda_1 C - 3\alpha.
$$

Ako označimo $K_1 = 1 - 3\lambda_1 C - 3\alpha - \lambda_2 > 0$ i uvedemo oznake (4.4), iz (4.9) sledi

$$
\begin{aligned}
\Delta_t^\varepsilon &\leq \Delta_t^\varepsilon + K_1 E \int_t^T ||Z_s^\varepsilon - Z_s||^2\, ds \qquad (4.10) \\
&\leq K_2(\varepsilon) + \int_t^T K_3(s,\varepsilon)\, ds + K \int_t^T \big[\rho(\Delta_s^\varepsilon) + \Delta_s^\varepsilon\big]\, ds.
\end{aligned}
$$

Funkcija $\rho_1(x) := x + \rho(x)$ je neopadajuća, $\rho_1(0) = 0$ i $\int_{0+} \frac{dx}{\rho_1(x)} = \infty$, tako da Teoremu 1.5.6 možemo primeniti na izraz (4.10), gde su intervali $I = [0,\infty)$ i $J = [0,T]$, $u(s) = \Delta_s^\varepsilon$ i $k(s) = K$. Zatim, za svako $s \in [0,T]$ je $\Delta_s^\varepsilon \in I$, što povlači da je $u(J) \subset I$. Konstanta a je $K_2(\varepsilon) + \int_0^T K_3(s,\varepsilon)\, ds$, funkcija $G(u) = \int_{u_0}^u \frac{dx}{x+\rho(x)}$ i

$$
\begin{aligned}
\mu_1 = \inf \Bigg\{ \mu \in J : K_2(\varepsilon) + \int_0^T K_3(s,\varepsilon)\, ds \\
+ K \int_t^T (\Delta_s^\varepsilon + \rho(\Delta_s^\varepsilon))\, ds \in I,\ \mu \leq t \leq T \Bigg\} = 0, \\
\mu_2 = \inf \Bigg\{ \mu \in J : G\left(K_2(\varepsilon) + \int_0^T K_3(s,\varepsilon)\, ds \right) \\
+ K \int_t^T (\Delta_s^\varepsilon + \rho(\Delta_s^\varepsilon))\, ds \in G(I),\ \mu \leq t \leq T \Bigg\} = 0,
\end{aligned}
$$

tj. $\alpha_1 = \max\{\mu_1, \mu_2\} = 0$. Prema tome, na osnovu (1.24) je

$$
\Delta_t^\varepsilon \leq G^{-1}\left(G\left(K_2(\varepsilon) + \int_0^T K_3(s,\varepsilon)\, ds \right) + K(T-t) \right),\ t \in [0,T]
$$

čime je dokaz teoreme završen. $\diamondsuit$

4.1.2 Ocena dužine intervala za zadatu sredje-kvadratnu razliku rešenja

Za određivanje vremenskog intervala na kome su rešenja perturbovane i neperturbovane jednačine bliska u L^2-smislu, potrebno je zadati uslove koji garantuju L^2-bliskost BDSDJ (4.1) i (4.2).

Teorema 4.1.1 *Neka su zadovoljeni uslovi Propozicije 4.1.1, neka* $\Psi_T^\varepsilon, \bar{\alpha}_1(\varepsilon), \bar{\beta}_1(\varepsilon)$, $\bar{\gamma}_1(\varepsilon)$ *teže nuli kada* ε *teži nuli i neka funkcije* $\widetilde{\alpha}_2(s,\varepsilon)$, $\widetilde{\beta}_2(s,\varepsilon), \widetilde{\gamma}_2(s,\varepsilon)$ *uniformno teže nuli na* $t \in [0,T]$ *kada* ε *teži nuli. Tada,*

$$\sup_{t\in[0,T]} E|Y_t^\varepsilon - Y_t|^2 \to 0, \quad \varepsilon \to 0, \tag{4.11}$$

i

$$E\int_0^T ||Z_s^\varepsilon - Z_s||^2 ds \to 0, \quad \varepsilon \to 0. \tag{4.12}$$

Dokaz. Neka je

$$\bar{\alpha}_2(\varepsilon) = \sup_{t\in[0,T]} \widetilde{\alpha}_2(s,\varepsilon), \quad \bar{\beta}_2(\varepsilon) = \sup_{t\in[0,T]} \widetilde{\beta}_2(s,\varepsilon), \quad \bar{\gamma}_2(\varepsilon) = \sup_{t\in[0,T]} \widetilde{\gamma}_2(s,\varepsilon),$$

i

$$\Phi(\varepsilon) = \max\{\Psi_T^\varepsilon, \bar{\alpha}_i^2(\varepsilon), \bar{\beta}_i^2(\varepsilon), \bar{\gamma}_i^2(\varepsilon),\, i = 1,2\}. \tag{4.13}$$

Iz (4.4) je

$$\begin{aligned}
\bar{K}_2(\varepsilon) &\le \left(1 + 3\Big[\lambda_1 R_1 + R_2 + \frac{1}{\lambda_2} R_3)\Big]\right)\phi(\varepsilon) := \bar{K}_2\phi(\varepsilon),\\
\bar{K}_3(s,\varepsilon) &\le 3\Big(\lambda_1 + 1 + \frac{1}{\lambda_2}\Big)\Phi(\varepsilon) := \bar{K}_3\Phi(\varepsilon).
\end{aligned}$$

Tada, iz (4.3) sledi

$$\Delta_t^\varepsilon \le G^{-1}\left(G\left(\Phi(\varepsilon)(\bar{K}_2 + \bar{K}_3 T)\right) + K(T-t)\right), \tag{4.14}$$

odnosno

$$\sup_{t\in[0,T]} \Delta_t^\varepsilon \le G^{-1}\left(G\left(\Phi(\varepsilon)(\bar{K}_2 + \bar{K}_3 T)\right) + KT\right). \tag{4.15}$$

Kako $\Phi(\varepsilon) \to 0$ kada $\varepsilon \to 0$, iz (4.15) sledi da $\sup_{t\in[0,T]} \Delta_t^\varepsilon \to 0$ kada $\varepsilon \to 0$.

Iz (4.10) i (4.15) je

$$E\int_t^T ||Z_s^\varepsilon - Z_s||^2\, ds \le \frac{1}{K_1} G^{-1}\left(G\left(\Phi(\varepsilon)(\bar{K}_2 + \bar{K}_3 T)\right) + KT\right),$$

tako da $E\int_t^T ||Z_s^\varepsilon - Z_s||^2\, ds \to 0$ kada $\varepsilon \to 0$, čime je dokaz teoreme završen. $\diamondsuit$

Iz Teoreme 4.1.1 se može zaključiti da procesi stanja Y_t^ε i Y_t, kao i kontrolni procesi Z_t^ε i Z_t, mogu biti dovoljno bliski u L^2-smislu za dovoljno malo ε. Sa aspekta modeliranja, bitno je proučiti bliskost između procesa stanja Y_t^ε i Y_t ne na celom intervalu $[0,T]$, već samo u okolini finalnih uslova ξ^ε i ξ. U skladu sa ovakvim zahtevom, za proizvoljnu dopustivu vrednost $\eta > 0$ i ε dovoljno malo, može se odrediti $\bar{t}(\eta) = \bar{t} \in [0,T]$ tako da srednje kvadratna razlika između procesa stanja Y_t^ε i Y_t ne bude veća od η na $[\bar{t},T]$. Ocenjuje se i srednje kvadratna razlika kontrolnih procesa Z_t^ε i Z_t na $[\bar{t},T]$. Sledeće tvrđenje se upravo odnosi na ove ocene.

Teorema 4.1.2 *Neka su ispunjeni uslovi Teoreme 4.1.1 i neka je $\Phi(\varepsilon)$ dato sa (4.13). Tada, za proizvoljnu konstantu $\eta > 0$ i svako $\varepsilon \in \left(0, \Phi^{-1}\left(\frac{\eta}{\bar{K}_2+\bar{K}_3 T}\right)\right]$, postoji $\bar{t} \in [0,T]$ oblika*

$$\bar{t} = \max\left\{0, T - \frac{G(\eta) - G(\Phi(\varepsilon)(\bar{K}_2 + \bar{K}_3 T))}{K}\right\},$$

tako da je

$$\sup_{t\in[\bar{t},T]} E|Y_t^\varepsilon - Y_t|^p \leq \eta, \tag{4.16}$$

i

$$E\int_{\bar{t}}^{T} ||Z_s^\varepsilon - Z_s)||^2\, ds \leq \frac{\eta}{K_1}. \tag{4.17}$$

Dokaz. Definišimo funkciju $S(\varepsilon, T-t)$ za $t \in [0,T]$, na sledeći način,

$$S(\varepsilon, T-t) := G^{-1}\left(G\left(\Phi(\varepsilon)(\bar{K}_2 + \bar{K}_3 T)\right) + K(T-t)\right).$$

Za proizvoljno $\eta > 0$ odredimo interval za ε iz uslova da je

$$S(\varepsilon, 0) \leq \eta \leq S(\varepsilon, T),$$

odnosno

$$\Phi(\varepsilon)(\bar{K}_2 + \bar{K}_3 T) \leq \eta \leq G^{-1}\left(G\left(\Phi(\varepsilon)(\bar{K}_2 + \bar{K}_3 T)\right) + KT\right).$$

Pošto $\Phi(\varepsilon)$ opada kada ε opada, sledi da je

$$\varepsilon_1 := \Phi^{-1}\left(\frac{G^{-1}(G(\eta) - KT)}{\bar{K}_2 + \bar{K}_3 T}\right) \leq \varepsilon \leq \Phi^{-1}\left(\frac{\eta}{\bar{K}_2 + \bar{K}_3 T}\right) := \varepsilon_2.$$

Za svako $\varepsilon \in [\varepsilon_1, \varepsilon_2]$ se jednostavno određuje $\widetilde{t}$ iz relacije $S(\varepsilon, T - \widetilde{t}) = \eta$, kao

$$\widetilde{t} = T - \frac{G(\eta) - G(\Phi(\varepsilon)(\bar{K}_2 + \bar{K}_3 T))}{K}.$$

Ako je $\eta > S(t,T)$, tada je $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$. Za svako $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2)$, neka je

$$\bar{t} = \max\{0, \widetilde{t}\} = \max\left\{0, T - \frac{G(\eta) - G(\Phi(\varepsilon)(\bar{K}_2 + \bar{K}_3 T))}{K}\right\}.$$

Tada iz (4.14) za svako $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2)$ sledi

$$\sup_{t\in[\bar{t},T]} E|Y_t^\varepsilon - Y(t)|^p \leq S(\varepsilon, T - \bar{t}) = \eta.$$

Očigledno, kada $\varepsilon \uparrow \varepsilon_2$, vremenski interval se skraćuje, odnosno $\bar{t} \uparrow T$; obrnuto, kada $\varepsilon \downarrow \varepsilon_1$, tada se vremenski interval proširuje, tj. $\bar{t} \downarrow 0$.

Iz (4.10) i (4.14) se dobija ocena razlike kontrolnih procesa,

$$E\int_{\bar{t}}^{T} ||Z_s^\varepsilon - Z_s)||^2\, ds \leq \frac{1}{K_1} S(\varepsilon, T - \bar{t}) = \frac{\eta}{K_1}.$$

Time je dokaz završen. $\diamondsuit$

Naglasimo da se prethodno opisani postupak za ocenu L^2-razlike rešenja ne može primeniti za ocenu L^p-razlike rešenja za $p > 2$. Problem se javlja u nemogućnosti ocene vrednosti integrala $E\int_t^T |Y_s^\varepsilon - Y_s|^{p-2}||Z_s^\varepsilon||^2\,ds$, i ako je $E\left(\int_0^T ||Z_s^\varepsilon||^2\,ds\right)^{\frac{p}{2}} < \infty$ i $E\int_t^T |Y_s^\varepsilon - Y_s|^p\,ds < \infty$.

4.1.3 L^p-razlika rešenja

U ovom poglavlju je opisan postupak ocene L^p–razlike rešenja i ocene intervala bliskosti za linearno perturbane BDSDJ za $p \geq 2$, pri drugačijim uslovima u odnosu na L^2-ocenu razlike rešenja. Ovim postupkom se može oceniti i srednje kvadratna razlika rešenja, dok obrnuto, kao što je već bilo reči, u opštem slučaju nije moguće.

Da bi se ocenila razlika rešenja jednačina (4.1) i (4.2) u L^p-smislu, za $p \geq 2$, uvode se sledeće pretpostavke:

A3. (i) Za finalne uslove $\xi, \xi_\varepsilon \in L^p(\Omega, \mathcal{F}_T, P; \mathbb{R}^k)$ postoji neslučajna vrednost ψ_T^ε za koju je

$$\psi_T^\varepsilon = E|\widehat{\xi}|^p, \quad \widehat{\xi} = \xi^\varepsilon - \xi.$$

(ii) Za fiksirane brojeve $\theta_1 > 0$, $0 < \theta_2 < 1$ postoje neslučajne ograničene funkcije $\widetilde{\alpha}_i(t,\varepsilon), \widetilde{\beta}_i(t,\varepsilon), \widetilde{\gamma}_i(t,\varepsilon)$, $t \in [0,T]$, $\varepsilon \in (0,1)$, $i = 1,2$, tako da za neprekidnu funkciju ρ koja ispunjava uslove hipoteze $(\mathbf{H_3})$, za svako $(t,y,z), (t,y_1,z_1) \in [0,T]\times\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{k\times d}$ važi skoro izvesno

$$\begin{aligned}
|\alpha_1(t,y_1,z_1,\varepsilon)f(t,y_1,z_1) - f(s,y,z)| &\leq \widetilde{\alpha}_1(t,\varepsilon)[\rho^{\frac{1}{p}}(|y_1-y|^p) + \theta_1||z_1-z||],\\
||\beta_1(t,y_1,z_1,\varepsilon)g(t,y_1,z_1) - g(t,y,z)||^2 &\leq \widetilde{\beta}_1(t,\varepsilon)[\rho^{\frac{2}{p}}(|y_1-y|^p) + \theta_2||z_1-z||^2],\\
||\gamma_1(t,y_1,\varepsilon)h(t,y_1) - h(t,y)||^2 &\leq \widetilde{\gamma}_1(t,\varepsilon)\rho^{\frac{2}{p}}(|y_1-y|^p),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sup_{(y,z)\in\mathcal{R}^k\times\mathcal{R}^{k\times d}} ||\alpha_2(s,y,z,\varepsilon)|| &\leq \widetilde{\alpha}_2(s,\varepsilon),\\
\sup_{(y,z)\in\mathcal{R}^k\times\mathcal{R}^{k\times d}} ||\beta_2(s,y,z,\varepsilon)|| &\leq \widetilde{\beta}_2(s,\varepsilon),\\
\sup_{y\in\mathcal{R}^k} ||\gamma_2(s,y,\varepsilon)|| &\leq \widetilde{\gamma}_2(s,\varepsilon).
\end{aligned}$$

(iii) Bez posebnog isticanja neophodnih uslova, *a priori* se pretpostavlja da postoje jedinstvena rešenja $\{Y_t, Z_t\}_{0\leq t\leq T}$ i $\{Y_t^\varepsilon, Z_t^\varepsilon\}_{0\leq t\leq T}$ jednačina (4.1) i (4.2), respektivno, za koja je

$$E\sup_{0\leq t\leq T}|Y_t|^p + E\left(\int_0^T ||Z_t||^2 dt\right)^{\frac{p}{2}} < \infty, \quad E\sup_{0\leq t\leq T}|Y_t^\varepsilon|^p + E\left(\int_0^T ||Z_t^\varepsilon||^2 dt\right)^{\frac{p}{2}} < \infty,$$

i da postoje svi Lebesgueovi i Itôvi integrali koji se pojavljuju u daljem radu.

Napomenimo da će (iii) važiti ako su, na primer, zadovoljeni uslovi Teoreme 3.1.3 za funkcije $f, g, h, \widetilde{f}, \widetilde{g}, \widetilde{h}$.

Sledećom propozicijom je data L^p-ocena razlike procesa stanja perturbovane jednačine (4.1) i neperturbovane jednačine (4.2).

Propozicija 4.1.2 *Neka su* $\{(Y_t, Z_t), t \in [0,T]\}$ *i* $\{(Y_t^\varepsilon, Z_t^\varepsilon), t \in [0,T]\}$ *rešenja jednačina (4.1) i (4.2), respektivno, i neka je zadovoljena pretpostavka* ***A3***. *Tada za proizvoljne pozitivne konstante* λ_1, λ_2, *takve da je*

$$\lambda_2 < 1 - 2\left[\theta_1^2 \lambda_1 \widetilde{\alpha}_1^2(s,\varepsilon) + (p-1)\theta_2 \widetilde{\beta}_1(s,\varepsilon)\right], \tag{4.18}$$

važi ocena

$$E|Y_t^\varepsilon - Y_t|^p \le G^{-1}\left(G\left(\Psi_T^\varepsilon + \int_0^T K_2(s,\varepsilon)\,ds\right) + \int_t^T K(s,\varepsilon)\,ds\right),\ t \in [0,T], \tag{4.19}$$

gde je $G(u) = \int_{u_0}^u \frac{dx}{x+\rho(x)}$ *i*

$$\begin{aligned}
K_2(s,\varepsilon) &= \widetilde{\alpha}_2^p(s,\varepsilon) + 2(p-1)\widetilde{\beta}_2^p(s,\varepsilon) + \frac{2}{\lambda_2}\widetilde{\gamma}_2^p(s,\varepsilon), &(4.20)\\
K(s,\varepsilon) &= \max\left\{\frac{p}{2\lambda_1} + (p-1)^2 + \frac{p-2}{\lambda_2}\right.\\
&\qquad + (p-2)\left[\lambda_1\widetilde{\alpha}_1^2(s,\varepsilon) + (p-1)\widetilde{\beta}_1(s,\varepsilon) + \frac{1}{\lambda_2}\widetilde{\gamma}_1(s,\varepsilon)\right],\\
&\qquad \left. 2\lambda_1\widetilde{\alpha}_1^2 + 2(p-1)\widetilde{\beta}_1(s,\varepsilon) + \frac{2}{\lambda_2}\widetilde{\gamma}_1(s,\varepsilon)\right\}.
\end{aligned}$$

Dokaz. Označimo

$$\widehat{\xi} = \xi^\varepsilon - \xi, \quad \widehat{Y}_t^\varepsilon = Y_t^\varepsilon - Y_t, \quad \Delta_t^\varepsilon = E|\widehat{Y}_t^\varepsilon|^p.$$

Ako se oduzmu jednačine (4.1) i (4.2) i primeni formula Itôa na $|\widehat{Y}_t^\varepsilon|^p$, za $t \in [0,T]$ se dobija

$$\begin{aligned}
|\widehat{Y}_t^\varepsilon|^p &= |\widehat{\xi}|^p + p\int_t^T |\widehat{Y}_s^\varepsilon|^{p-2}(\widehat{Y}_s^\varepsilon)^T[\widetilde{f}(s, Y_s^\varepsilon, Z_s^\varepsilon, \varepsilon) - f(s, Y_s, Z_s)]\,ds\\
&+ \frac{p}{2}\int_t^T |\widehat{Y}_s^\varepsilon|^{p-2}||\widetilde{g}(s, Y_s^\varepsilon, Z_s^\varepsilon, \varepsilon) - g(s, Y_s, Z_s)||^2\,ds\\
&+ \frac{p(p-2)}{2}\int_t^T |\widehat{Y}_s^\varepsilon|^{p-4}|(\widehat{Y}_s^\varepsilon)^T[\widetilde{g}(s, Y_s^\varepsilon, Z_s^\varepsilon, \varepsilon) - g(s, Y_s, Z_s)]|^2\,ds\\
&+ p\int_t^T |\widehat{Y}_s^\varepsilon|^{p-2}(\widehat{Y}_s^\varepsilon)^T[\widetilde{g}(s, Y_s^\varepsilon, Z_s^\varepsilon, \varepsilon) - g(s, Y_s, Z_s)]\,dB_s &(4.21)\\
&- \frac{p}{2}\int_t^T |\widehat{Y}_s^\varepsilon|^{p-2}||\widetilde{h}(s, Y_s^\varepsilon, \varepsilon) + Z_s^\varepsilon - h(s, Y_s) - Z_s||^2\,ds\\
&- \frac{p(p-2)}{2}\int_t^T |\widehat{Y}_s^\varepsilon|^{p-4}|(\widehat{Y}_s^\varepsilon)^T[\widetilde{h}(s, Y_s^\varepsilon, \varepsilon) + Z_s^\varepsilon - h(s, Y_s) - Z_s]|^2\,ds\\
&- p\int_t^T |\widehat{Y}_s^\varepsilon|^{p-2}(\widehat{Y}_s^\varepsilon)^T[\widetilde{h}(s, Y_s^\varepsilon, \varepsilon) + Z_s^\varepsilon - h(s, Y_s) - Z_s]\,dW_s,
\end{aligned}$$

iz čega je

$$
\begin{aligned}
\Delta_t^\varepsilon &\le E|\widehat{\xi}|^p + pE\int_t^T |\widehat{Y}_s^\varepsilon|^{p-2}(\widehat{Y}_s^\varepsilon)^T[\widetilde{f}(s,Y_s^\varepsilon,Z_s^\varepsilon,\varepsilon) - f(s,Y_s,Z_s)]\ ds \\
&+ \frac{p(p-1)}{2}E\int_t^T |\widehat{Y}_s^\varepsilon|^{p-4}|(\widehat{Y}_s^\varepsilon)^T[\widetilde{g}(s,Y_s^\varepsilon,Z_s^\varepsilon,\varepsilon) - g(s,Y_s,Z_s)]|^2\ ds \\
&- \frac{p}{2}E\int_t^T |\widehat{Y}_s^\varepsilon|^{p-2}||\widetilde{h}(s,Y_s^\varepsilon,\varepsilon) + Z_s^\varepsilon - h(s,Y_s) - Z_s||^2\ ds \\
&- \frac{p(p-2)}{2}E\int_t^T |\widehat{Y}_s^\varepsilon|^{p-4}|(\widehat{Y}_s^\varepsilon)^T[\widetilde{h}(s,Y_s^\varepsilon,\varepsilon) + Z_s^\varepsilon - h(s,Y_s) - Z_s]|^2\ ds \\
&\equiv E|\widehat{\xi}|^p + pI_1(t) + \frac{p(p-1)}{2}I_2(t) - \frac{p}{2}I_3(t),
\end{aligned} \tag{4.22}
$$

gde integrale $I_1(t), I_2(t), I_3(t)$ treba oceniti. U ocenjivanju ovih integrala, bez posebnog naglašavanja će biti korišćene elementarne nejednakosti (1.7) i (1.11), Jensenova nejednakost (1.16) i uslov bliskosti, odnosno pretpostavka ***A3***.

Za proizvoljno $\lambda_1 > 0$ je

$$
\begin{aligned}
I_1(t) &= E\int_t^T |\widehat{Y}_s^\varepsilon|^{p-2}(\widehat{Y}_s^\varepsilon)^T \\
&\qquad \times [\alpha_1(s,Y_s^\varepsilon,Z_s^\varepsilon,\varepsilon)f(s,Y_s^\varepsilon,Z_s^\varepsilon) + \alpha_2(s,Y_s^\varepsilon,Z_s^\varepsilon,\varepsilon) - f(s,Y_s,Z_s)]\ ds \\
&\le \frac{1}{2\lambda_1}E\int_t^T |\widehat{Y}_s^\varepsilon|^{p-2}|\widehat{Y}_s^\varepsilon|^2 ds + E\int_t^T |\widehat{Y}_s^\varepsilon|^{p-1}|\alpha_2(s,Y_s^\varepsilon,Z_s^\varepsilon,\varepsilon)|\ ds \\
&+ \frac{\lambda_1}{2}E\int_t^T |\widehat{Y}_s^\varepsilon|^{p-2}|\alpha_1(s,Y_s^\varepsilon,Z_s^\varepsilon,\varepsilon)f(s,Y_s^\varepsilon,Z_s^\varepsilon) - f(s,Y_s,Z_s)|^2\ ds \\
&\le \frac{1}{2\lambda_1}\int_t^T \Delta_s^\varepsilon\, ds + \frac{\lambda_1}{2}E\int_t^T |\widehat{Y}_s^\varepsilon|^{p-2}\widetilde{\alpha}_1^2(s,\varepsilon)[\rho^{\frac{1}{p}}(|Y_s^\varepsilon - Y_s|^p) + \theta_1||Z_s^\varepsilon - Z_s||]^2\ ds \\
&+ E\int_t^T |\widehat{Y}_s^\varepsilon|^{p-1}\widetilde{\alpha}_2(s,\varepsilon)\ ds \\
&\le \int_t^T \left(\frac{1}{2\lambda_1} + \frac{p-2}{p}\lambda_1\widetilde{\alpha}_1^2(s,\varepsilon)\right)\Delta_s^\varepsilon\, ds + 2\frac{\lambda_1}{p}\int_t^T \widetilde{\alpha}_1^2(s,\varepsilon)\rho(\Delta_s^\varepsilon)\, ds \\
&+ \theta_1^2\lambda_1 E\int_t^T \widetilde{\alpha}_1^2(s,\varepsilon)|\widehat{Y}_s^\varepsilon|^{p-2}||Z_s^\varepsilon - Z_s||^2\ ds + \frac{p-1}{p}\int_t^T \Delta_s^\varepsilon\, ds + \frac{1}{p}\int_t^T \widetilde{\alpha}_2^p(s,\varepsilon)\ ds \\
&= \int_t^T \left(\frac{1}{2\lambda_1} + \frac{p-2}{p}\lambda_1\widetilde{\alpha}_1^2(s,\varepsilon) + \frac{p-1}{p}\right)\Delta_s^\varepsilon\, ds + \frac{2\lambda_1}{p}\int_t^T \widetilde{\alpha}_1^2(s,\varepsilon)\rho(\Delta_s^\varepsilon)\, ds \\
&+ \theta_1^2\lambda_1 E\int_t^T \widetilde{\alpha}_1^2(s,\varepsilon)|\widehat{Y}_s^\varepsilon|^{p-2}||Z_s^\varepsilon - Z_s||^2\ ds + \frac{1}{p}\int_t^T \widetilde{\alpha}_2^p(s,\varepsilon)\ ds.
\end{aligned}
$$

Analogno,

$$
\begin{aligned}
I_2(t) &= E\int_t^T |\widehat{Y}_s^\varepsilon|^{p-2} \\
&\qquad \times ||\beta_1(s,Y_s^\varepsilon,Z_s^\varepsilon,\varepsilon)g(s,Y_s^\varepsilon,Z_s^\varepsilon) + \beta_2(s,Y_s^\varepsilon,Z_s^\varepsilon,\varepsilon) - g(s,Y_s,Z_s)||^2\ ds
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&\le 2E\int_t^T |\widehat{Y}_s^\varepsilon|^{p-2}||\beta_1(s,Y_s^\varepsilon,Z_s^\varepsilon,\varepsilon)g(s,Y_s^\varepsilon,Z_s^\varepsilon)-g(s,Y_s,Z_s)||^2\,ds\\
&\quad+2E\int_t^T |\widehat{Y}_s^\varepsilon|^{p-2}||\beta_2(s,Y_s^\varepsilon,Z_s^\varepsilon,\varepsilon)||^2\,ds\\
&\le 2E\int_t^T |\widehat{Y}_s^\varepsilon|^{p-2}\widetilde{\beta}_1(s,\varepsilon)\rho^{\frac{2}{p}}(|Y_s^\varepsilon-Y_s|^p)\,ds\\
&\quad+2E\int_t^T |\widehat{Y}_s^\varepsilon|^{p-2}\widetilde{\beta}_1(s,\varepsilon)\theta_2||Z_s^\varepsilon-Z_s||^2\,ds+2E\int_t^T |\widehat{Y}_s^\varepsilon|^{p-2}\widetilde{\beta}_2^2(s,\varepsilon)\,ds\\
&\le \frac{2(p-2)}{p}\int_t^T(\widetilde{\beta}_1(s,\varepsilon)+1)\Delta_s^\varepsilon\,ds+\frac{4}{p}\int_t^T\widetilde{\beta}_1(s,\varepsilon)\rho(\Delta_s^\varepsilon)\,ds\\
&\quad+2\theta_2E\int_t^T\widetilde{\beta}_1(s,\varepsilon)|\widehat{Y}_s^\varepsilon|^{p-2}||Z_s^\varepsilon-Z_s||^2\,ds+\frac{4}{p}\int_t^T\widetilde{\beta}_2^p(s,\varepsilon)\,ds,
\end{aligned}$$

dok je za proizvoljnu konstantu $\lambda_2>0$,

$$\begin{aligned}
&I_3(t)\\
&=-E\int_t^T |\widehat{Y}_s^\varepsilon|^{p-2}||\gamma_1(s,Y_s^\varepsilon,\varepsilon)h(s,Y_s^\varepsilon)+\gamma_2(s,Y_s^\varepsilon,\varepsilon)+Z_s^\varepsilon-h(s,Y_s)-Z_s||^2\,ds\\
&=-E\int_t^T |\widehat{Y}_s^\varepsilon|^{p-2}||\gamma_1(s,Y_s^\varepsilon,\varepsilon)h(s,Y_s^\varepsilon)+\gamma_2(s,Y_s^\varepsilon,\varepsilon)-h(s,Y_s)||^2\,ds\\
&\quad-2E\int_t^T |\widehat{Y}_s^\varepsilon|^{p-2}trace[\gamma_1(s,Y_s^\varepsilon,\varepsilon)h(s,Y_s^\varepsilon)+\gamma_2(s,Y_s^\varepsilon,\varepsilon)-h(s,Y_s)]^T[Z_s^\varepsilon-Z_s]\,ds\\
&\quad-\int_t^T |\widehat{Y}_s^\varepsilon|^{p-2}||Z_s^\varepsilon-Z_s||^2\,ds\\
&\le \frac{1}{\lambda_2}E\int_t^T |\widehat{Y}_s^\varepsilon|^{p-2}||\gamma_1(s,Y_s^\varepsilon,\varepsilon)h(s,Y_s^\varepsilon)+\gamma_2(s,Y_s^\varepsilon,\varepsilon)-h(s,Y_s)||^2\,ds\\
&\quad+(\lambda_2-1)E\int_t^T |\widehat{Y}_s^\varepsilon|^{p-2}||Z_s^\varepsilon-Z_s||^2\,ds\\
&\le \frac{2}{\lambda_2}E\int_t^T |\widehat{Y}_s^\varepsilon|^{p-2}||\gamma_1(s,Y_s^\varepsilon,\varepsilon)h(s,Y_s^\varepsilon)-h(s,Y_s)||^2\,ds\\
&\quad+\frac{2}{\lambda_2}E\int_t^T |\widehat{Y}_s^\varepsilon|^{p-2}||\gamma_2(s,Y_s^\varepsilon,\varepsilon)||^2\,ds+(\lambda_2-1)E\int_t^T |\widehat{Y}_s^\varepsilon|^{p-2}||Z_s^\varepsilon-Z_s||^2\,ds\\
&\le \frac{2}{\lambda_2}E\int_t^T |\widehat{Y}_s^\varepsilon|^{p-2}\widetilde{\gamma}_1(s,\varepsilon)\rho^{\frac{2}{p}}(|Y_s^\varepsilon-Y_s|^p)\,ds+\frac{2(p-2)}{p\lambda_2}E\int_t^T|\widehat{Y}_s^\varepsilon|^p\,ds\,ds\\
&\quad+\frac{4}{p\lambda_2}\int_t^T\widetilde{\gamma}_2^p(s,\varepsilon)+(\lambda_2-1)E\int_t^T |\widehat{Y}_s^\varepsilon|^{p-2}||Z_s^\varepsilon-Z_s||^2\,ds\\
&\le \frac{2(p-2)}{p\lambda_2}\int_t^T\widetilde{\gamma}_1(s,\varepsilon)\Delta_s^\varepsilon\,ds+\frac{4}{p\lambda_2}E\int_t^T\widetilde{\gamma}_1(s,\varepsilon)\rho(|Y_s^\varepsilon-Y_s|^p)\,ds\\
&\quad+\frac{2(p-2)}{p\lambda_2}\int_t^T\Delta_s^\varepsilon\,ds+\frac{4}{p\lambda_2}\int_t^T\widetilde{\gamma}_2^p(s,\varepsilon)\,ds+(\lambda_2-1)E\int_t^T |\widehat{Y}_s^\varepsilon|^{p-2}||Z_s^\varepsilon-Z_s||^2\,ds
\end{aligned}$$

$$\leq \frac{2(p-2)}{p\lambda_2}\int_t^T(\widetilde{\gamma}_1(s,\varepsilon)+1)\Delta_s^\varepsilon\,ds+\frac{4}{p\lambda_2}\int_t^T\widetilde{\gamma}_1(s,\varepsilon)\rho(\Delta_s^\varepsilon)\,ds$$
$$+\frac{4}{p\lambda_2}\int_t^T\widetilde{\gamma}_2^p(s,\varepsilon)\,ds+(\lambda_2-1)E\int_t^T|\widehat{Y}_s^\varepsilon|^{p-2}||Z_s^\varepsilon-Z_s||^2\,ds.$$

Zamenom dobijenih ocena za $I_1(t), I_2(t), I_3(t)$ u (4.22) dobija se sledeća relacija

$$\begin{aligned}\Delta_t^\varepsilon &\leq \Delta_t^\varepsilon+E\int_t^T K_1(s,\varepsilon)|\widehat{Y}_s^\varepsilon|^{p-2}||Z_s^\varepsilon-Z_s||^2\,ds \\ &\leq \Psi_T^\varepsilon+\int_t^T K_2(s,\varepsilon)\,ds+\int_t^T K(s,\varepsilon)\Big(\Delta_s^\varepsilon\,ds+(s,\varepsilon)\rho(\Delta_s^\varepsilon)\Big)\,ds,\end{aligned} \tag{4.23}$$

gde je

$$K_1(s,\varepsilon)=p\left[\frac{(1-\lambda_2)}{2}-\theta_1^2\lambda_1\widetilde{\alpha}_1^2(s,\varepsilon)-(p-1)\theta_2\widetilde{\beta}_1(s,\varepsilon)\right], \tag{4.24}$$

a $K_2(s,\varepsilon)$ i $K(s,\varepsilon)$ su dati sa (4.20).

Iz relacije (4.23) bi se moglo odrediti Δ_s^ε ako je vrednost funkcije $K_1(s,\varepsilon)$ pozitivna za svako s i ε, tj. ako je

$$\frac{1-\lambda_2}{2}-\theta_1^2\lambda_1\widetilde{\alpha}_1^2(s,\varepsilon)-(p-1)\theta_2\widetilde{\beta}_1(s,\varepsilon)>0,$$

odnosno

$$\lambda_2<1-2\left[\theta_1^2\lambda_1\widetilde{\alpha}_1^2(s,\varepsilon)+(p-1)\theta_2\widetilde{\beta}_1(s,\varepsilon)\right].$$

Shodno tome, λ_1,λ_2 se biraju tako da poslednji uslov bude zadovoljen, što implicira da mora biti $\lambda_2\in(0,1)$. U tom slučaju iz (4.23) se dobija oblik pogodan za primenu Biharijeve nejednakosti (Teorema 1.5.6),

$$\Delta_t^\varepsilon\leq\Psi_T^\varepsilon+\int_0^T K_2(s,\varepsilon)\,ds+\int_t^T K(s,\varepsilon)(\Delta_s^\varepsilon+\rho(\Delta_s^\varepsilon))\,ds. \tag{4.25}$$

Funkcija $\rho_1(x):=x+\rho(x)$ zadovoljava sve uslove hipoteze $(\mathbf{H_3})$, $I=[0,\infty)$, $J=[0,T]$, $u(s)=\Delta_s^\varepsilon$, $k(s)=K(s,\varepsilon)$, a za svako $s\in[0,T]$ je $\Delta_s^\varepsilon\in I$, što povlači da je $u(J)\subset I$. Konstanta a je $\Psi_T^\varepsilon+\int_0^T K_2(s,\varepsilon)\,ds$, funkcija $G(u)=\int_{u_0}^u\frac{dx}{x+\rho(x)}$ i

$$\begin{aligned}\mu_1=\inf\Big\{\mu\in J:\Psi_T^\varepsilon&+\int_0^T K_2(s,\varepsilon)\,ds\\ &+\int_t^T K(s,\varepsilon)(\Delta_s^\varepsilon+\rho(\Delta_s^\varepsilon))\,ds\in I,\ \mu\leq t\leq T\Big\}=0,\\ \mu_2=\inf\Big\{\mu\in J:G\Big(\Psi_T^\varepsilon&+\int_0^T K_2(s,\varepsilon)\,ds\Big)\\ &+\int_t^T K(s,\varepsilon)(\Delta_s^\varepsilon+\rho(\Delta_s^\varepsilon))\,ds\in G(I),\ \mu\leq t\leq T\Big\}=0,\end{aligned}$$

tj. $\alpha_1=\max\{\mu_1,\mu_2\}=0$. Otuda je

$$\Delta_t^\varepsilon\leq G^{-1}\left(G\left(\Psi_T^\varepsilon+\int_0^T K_2(s,\varepsilon)\,ds\right)+\int_t^T K(s,\varepsilon)\,ds\right),\quad t\in[0,T], \tag{4.26}$$

čime je dokaz teoreme završen. $\diamondsuit$

4.1.4 Ocena dužine intervala za zadatu L^p-razliku rešenja

Kao i ranije, za određivanje vremenskog intervala na kome rešenja perturbovane i neperturbovane jednačine ostaju bliska u L^p-smislu za unapred zadatu vrednost, potrebno je oceniti L^p-razliku rešenja BDSDJ (4.1) i (4,2).

Označimo

$$\bar{\alpha}_i(\varepsilon) = \sup_{t\in[0,T]} \widetilde{\alpha}_i(t,\varepsilon),\ \ \overline{\beta}_i(\varepsilon) = \sup_{t\in[0,T]} \widetilde{\beta}_i(t,\varepsilon),\ \bar{\gamma}_i(\varepsilon) = \sup_{t\in[0,T]} \widetilde{\gamma}_i(t,\varepsilon),\ \ i = 1, 2,$$

i definišimo

$$\Phi(\varepsilon) = \max\{\Psi^\varepsilon_T, \bar{\alpha}^p_2(\varepsilon), \bar{\beta}^p_2(\varepsilon), \bar{\gamma}^p_2(\varepsilon)\},\quad M(\varepsilon) = \max\{\bar{\alpha}^2_1(\varepsilon), \bar{\beta}_1(\varepsilon), \bar{\gamma}_1(\varepsilon)\}. \quad (4.27)$$

Teorema 4.1.3 *Neka su zadovoljeni uslovi Propozicije 4.1.2 i neka su $\phi(\varepsilon)$ i $M(\varepsilon)$ definisani sa (4.27). Pored toga, neka $\phi(\varepsilon)$ teži nuli kada ε teži nuli i*

$$0 < M := \sup_{\varepsilon\in(0,1)} M(\varepsilon) \leq \left(\frac{\widetilde{c}_p}{2\widetilde{C}_p\theta_2^{\frac{p}{2}} 5^{p-1} 6^{\frac{p}{2}-1}}\right)^{\frac{2}{p}}, \quad (4.28)$$

gde su $\widetilde{c}_p, \widetilde{C}_p$ konstante iz Burkholder–Davis-Gundy nejednakosti (Teorema 1.5.3). Tada,

$$\sup_{t\in[0,T]} E|Y^\varepsilon_t - Y_t|^p \to 0,\ \varepsilon \to 0, \quad (4.29)$$

i

$$E\left(\int_0^T ||Z^\varepsilon_s - Z_s||^2 ds\right)^{\frac{p}{2}} \to 0,\ \varepsilon \to 0. \quad (4.30)$$

Dokaz. Iz (4.20) i (4.24) sledi da se $K_1(s,\varepsilon)$ može minorirati sa $\bar{K}_1(\varepsilon)$, a $K_2(s,\varepsilon)$ i $K(s,\varepsilon)$ mogu majorirati sa $\bar{K}_2(\varepsilon)$ i $\bar{K}(\varepsilon)$, gde je

$$\begin{aligned}
\bar{K}_1(\varepsilon) &= p\frac{(1-\lambda_2)}{2} - M(\varepsilon)\Big[\theta_1^2\lambda_1 + (p-1)\theta_2\Big] > 0,\\
\bar{K}_2(\varepsilon) &= \Phi(\varepsilon)\Big[2p - 1 + \frac{2}{\lambda_2}\Big] := \bar{K}_2\Phi(\varepsilon), \qquad (4.31)\\
\bar{K}(\varepsilon) &= \max\Big\{\frac{p}{2\lambda_1} + \frac{p-2}{2\lambda_2} + (p-1)^2 + \Big[(p-1)\lambda_1 + (p-1)(p-2) + \frac{p-2}{\lambda_2}\Big]M(\varepsilon),\\
&\qquad 2\Big[\lambda_1 + p - 2 + \frac{1}{\lambda_2}\Big]M(\varepsilon)\Big\}.
\end{aligned}$$

Tada, iz (4.26) sledi

$$\sup_{0\leq t\leq T} \Delta^\varepsilon_t \leq G^{-1}\left(G\left(\Phi(\varepsilon)(1 + \bar{K}_2(\varepsilon)T)\right) + \bar{K}(\varepsilon)T\right). \quad (4.32)$$

Kako $\Phi(\varepsilon) \to 0$, kada $\varepsilon \to 0$, sledi da $\sup_{0\leq t\leq T} \Delta^\varepsilon_t \to 0$ kada $\varepsilon \to 0$.

Da bi se dokazalo (4.30) neka je $t_0 \leq u \leq t \leq v \leq T$, za neko $t_0 \in [0,T]$. Oduzimanjem jednačina (4.1) i (4.2), dobija se za $u \leq t \leq v$

$$\begin{aligned}\int_u^t (Z_s^\varepsilon - Z_s)dW_s = Y_t^\varepsilon - Y_t - (Y_u^\varepsilon - Y_u)\\
+\int_u^t [\widetilde{f}(s, Y_s^\varepsilon, Z_s^\varepsilon, \varepsilon) - f(s, Y_s, Z_s)]\,ds\\
+\int_u^t [\widetilde{g}(s, Y_s^\varepsilon, Z_s^\varepsilon, \varepsilon) - g(s, Y_s, Z_s)]dB_s\\
-\int_u^t [\widetilde{h}(s, Y_s^\varepsilon, \varepsilon) - h(s, Y_s)]dW_s.\end{aligned}$$

Tada je

$$E \sup_{t\in[u,v]} \left| \int_u^t (Z_s^\varepsilon - Z_s)dW_s \right|^p \leq 5^{p-1}[2J_1 + J_2 + J_3 + J_4], \tag{4.33}$$

gde je

$$\begin{aligned}J_1 &= E \sup_{t\in[t_0,T]} |\widehat{Y}_t^\varepsilon|^p,\\
J_2 &= E \sup_{t\in[u,v]} \left| \int_u^t [\alpha_1(s, Y_s^\varepsilon, Z_s^\varepsilon, \varepsilon) f(s, Y_s^\varepsilon, Z_s^\varepsilon) + \alpha_2(s, Y_s^\varepsilon, Z_s^\varepsilon, \varepsilon) - f(s, Y_s, Z_s)]\,ds \right|^p,\\
J_3 &= E \sup_{t\in[u,v]} \left| \int_u^t [\beta_1(s, Y_s^\varepsilon, Z_s^\varepsilon, \varepsilon) g(s, Y_s^\varepsilon, Z_s^\varepsilon) + \beta_2(s, Y_s^\varepsilon, Z_s^\varepsilon, \varepsilon) - g(s, Y_s^\varepsilon, Z_s^\varepsilon)]dB_s \right|^p,\\
J_4 &= E \sup_{t\in[u,v]} \left| \int_u^t [\gamma_1(s, Y_s^\varepsilon, \varepsilon) h(s, Y_s^\varepsilon) + \gamma_2(s, Y_s^\varepsilon, \varepsilon) - h(s, Y_s^\varepsilon)]dW_s \right|^p.\end{aligned}$$

Ocenimo najpre J_1. Iz (4.21) i (4.23), sledi

$$\begin{aligned}|\widehat{Y}_t^\varepsilon|^p \leq |\widehat{Y}_T^\varepsilon|^p + \bar{K}_2\phi(\varepsilon)(T-t) + \bar{K}(\varepsilon) \int_t^T [|\widehat{Y}_s^\varepsilon| + \rho(|\widehat{Y}_s^\varepsilon|^p)]\,ds,\\
+p\int_t^T |\widehat{Y}_s^\varepsilon|^{p-2}(\widehat{Y}_s^\varepsilon)^T[\widetilde{g}(s, Y_s^\varepsilon, Z_s^\varepsilon, \varepsilon) - g(s, Y_s, Z_s)]\,dB_s\\
-p\int_t^T |\widehat{Y}_s^\varepsilon|^{p-2}(\widehat{Y}_s^\varepsilon)^T[\widetilde{h}(s, Y_s^\varepsilon, \varepsilon) + Z_s^\varepsilon - h(s, Y_s) - Z_s]\,dW_s.\end{aligned} \tag{4.34}$$

Tada je,

$$\begin{aligned}J_1 &\leq \Phi(\varepsilon)[1 + +\bar{K}_2(T-t_0)] + \bar{K}(\varepsilon) \int_{t_0}^T (\Delta_s^\varepsilon + \rho(\Delta_s^\varepsilon))\,ds,\\
&+E \sup_{t\in[t_0,T]} \left(p\int_t^T |\widehat{Y}_s^\varepsilon|^{p-2}(\widehat{Y}_s^\varepsilon)^T[\widetilde{g}(s, Y_s^\varepsilon, Z_s^\varepsilon, \varepsilon) - g(s, Y_s, Z_s)]\,dB_s \right)\\
&+E \sup_{t\in[t_0,T]} \left(-p\int_t^T |\widehat{Y}_s^\varepsilon|^{p-2}(\widehat{Y}_s^\varepsilon)^T[\widetilde{h}(s, Y_s^\varepsilon, \varepsilon) + Z_s^\varepsilon - h(s, Y_s) - Z_s]\,dW_s \right)\\
&= \Phi(\varepsilon)[1 + \bar{K}_2(T-t_0)] + \bar{K}(\varepsilon) \int_{t_0}^T (\Delta_s^\varepsilon + \rho(\Delta_s^\varepsilon))\,ds + J_{11} + J_{12}.\end{aligned} \tag{4.35}$$

Slično, primenom Burkholder-Davis-Gundy nejednakosti i Youngove nejednakosti sledi da je

$$
\begin{aligned}
J_{11} &\leq 4\sqrt{2}pE\left(\int_{t_0}^{T}|\widehat{Y}_s^\varepsilon|^{2p-2}||\widetilde{g}(s,Y_s^\varepsilon,Z_s^\varepsilon,\varepsilon)-g(s,Y_s,Z_s)||^2\,ds\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq \frac{1}{3}J_1\\
&+24p^2E\int_{t_0}^{T}|\widehat{Y}_s^\varepsilon|^{p-2}||\beta_1(s,Y_s^\varepsilon,Z_s^\varepsilon,\varepsilon)g(s,Y_s^\varepsilon,Z_s^\varepsilon)+\beta_2(s,Y_s^\varepsilon,Z_s^\varepsilon,\varepsilon)-g(s,Y_s,Z_s)||^2\,ds\\
&\leq \frac{1}{3}J_1+48p^2\Bigg[\bar{\beta}_1(\varepsilon)E\int_{t_0}^{T}|\widehat{Y}_s^\varepsilon|^{p-2}\rho^{\frac{2}{p}}(|\widehat{Y}_s^\varepsilon|^p)\,ds\\
&\quad+\bar{\beta}_1(\varepsilon)\theta_2E\int_{t_0}^{T}|\widehat{Y}_s^\varepsilon|^{p-2}||Z_s^\varepsilon-Z_s^\varepsilon||^2\,ds+\bar{\beta}_2^2(\varepsilon)E\int_{t_0}^{T}|\widehat{Y}_s^\varepsilon|^{p-2}\,ds\Bigg]\\
&\leq \frac{1}{3}J_1+48p\Bigg[(p-2)(M(\varepsilon)+1)\int_{t_0}^{T}\Delta_s^\varepsilon\,ds+2M(\varepsilon)\int_{t_0}^{T}\rho(\Delta_s^\varepsilon)\,ds\\
&\quad+2\Phi(\varepsilon)(T-t_0)+M(\varepsilon)\theta_2pE\int_{t_0}^{T}|\widehat{Y}_s^\varepsilon|^{p-2}||Z_s^\varepsilon-Z_s^\varepsilon||^2\,ds.\Bigg]
\end{aligned}
$$

Ocena za J_{12} se dobija na sličan način,

$$
\begin{aligned}
J_{12} &\leq 4\sqrt{2}pE\left(\int_{t_0}^{T}|\widehat{Y}_s^\varepsilon|^{2p-2}||\widetilde{h}(s,Y_s^\varepsilon,\varepsilon)+Z_s^\varepsilon-h(s,Y_s)-Z_s||^2\,ds\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq \frac{1}{2}J_1+16p^2E\int_{t_0}^{T}|\widehat{Y}_s^\varepsilon|^{p-2}\\
&\qquad\times||\gamma_1(s,Y_s^\varepsilon,\varepsilon)h(s,Y_s^\varepsilon)+\gamma_2(s,Y_s^\varepsilon,\varepsilon))+Z_s^\varepsilon-h(s,Y_s)-Z_s||^2\,ds\\
&\leq \frac{1}{2}J_1+48p\Bigg[(p-2)(M(\varepsilon)+1)\int_{t_0}^{T}\Delta_s^\varepsilon ds+2M(\varepsilon)\int_{t_0}^{T}\rho(\Delta_s^\varepsilon)ds\\
&\quad+2\Phi(\varepsilon)(T-t_0)+pE\int_{t_0}^{T}|\widehat{Y}_s^\varepsilon|^{p-2}||Z_s^\varepsilon-Z_s||^2ds\Bigg].
\end{aligned}
$$

Za $t=t_0$ iz (4.23) je

$$
\begin{aligned}
&E\int_{t_0}^{T}|\widehat{Y}_s^\varepsilon|^{p-2}||Z_s^\varepsilon-Z_s||^2\,ds\\
&\qquad\leq \frac{1}{\bar{K}_1(\varepsilon)}\left[\Phi(\varepsilon)[1+\bar{K}_2](T-t_0)+\bar{K}(\varepsilon)\int_{t_0}^{T}(\Delta_s^\varepsilon+\rho(\Delta_s^\varepsilon))\,ds\right].
\end{aligned}\tag{4.36}
$$

Zamenom ocena za J_{11}, J_{12} i (4.36) u (4.35) sledi

$$\begin{aligned}
J_1 &\le \frac{5}{6} J_1 + 96p(p-2)(M(\varepsilon)+1) \int_{t_0}^T \Delta_s^\varepsilon \, ds \\
&\quad + 192 M(\varepsilon) p \int_{t_0}^T \rho(\Delta_s^\varepsilon)\, ds + 192 p \Phi(\varepsilon) T \\
&\quad + \left(1 + \frac{48(M(\varepsilon)\theta_2 + 1)p^2}{\bar{K}_1(\varepsilon)}\right) \left[\Phi(\varepsilon)[1 + \bar{K}_2 T] + \bar{K}(\varepsilon) \int_{t_0}^T (\Delta_s^\varepsilon + \rho(\Delta_s^\varepsilon))\, ds\right],
\end{aligned}$$

iz čega je

$$\begin{aligned}
J_1 &\le 6 \left[1 + (192p + \bar{K}_2)T + \frac{48(M(\varepsilon)\theta_2 + 1)p^2}{\bar{K}_1(\varepsilon)} (1 + \bar{K}_2 T)\right] \Phi(\varepsilon) \\
&\quad + 6 \cdot 48 \left[2p(p-2)(M(\varepsilon)+1) + \frac{\bar{K}(\varepsilon)(M(\varepsilon)\theta_2 + 1)p^2}{\bar{K}_1(\varepsilon)}\right] \int_{t_0}^T \Delta_s^\varepsilon \, ds \\
&\quad + 6 \cdot 48 \left[4M(\varepsilon)p + \frac{\bar{K}(\varepsilon)(M(\varepsilon)\theta_2 + 1)p^2}{\bar{K}_1}\right] \int_{t_0}^T \rho(\Delta_s^\varepsilon)\, ds.
\end{aligned}$$

Analogno,

$$\begin{aligned}
J_2 &\le (v-u)^{\frac{p}{2}} \\
&\quad \times E\left(\left|\int_u^v [\alpha_1(s, Y_s^\varepsilon, Z_s^\varepsilon, \varepsilon) f(s, Y_s^\varepsilon, Z_s^\varepsilon) + \alpha_2(s, Y_s^\varepsilon, Z_s^\varepsilon, \varepsilon) - f(s, Y_s, Z_s)\, ds]\right|^2\right)^{\frac{p}{2}} \\
&\le 2 \cdot 6^{\frac{p}{2}-1} (v-u)^{p-1} \left[M(\varepsilon)^{\frac{p}{2}} \int_u^v \rho(\Delta_s^\varepsilon)\, ds + \Phi(\varepsilon)(v-u)\right] \\
&\quad + 2 \cdot 6^{\frac{p}{2}-1} (v-u)^{\frac{p}{2}} M(\varepsilon)^{\frac{p}{2}} \theta_1^p E\left(\int_u^v ||Z_s^\varepsilon - Z_s||^2\, ds\right)^{\frac{p}{2}}.
\end{aligned}$$

Primenom Burkholder-Davis-Gundy nejednakosti J_3 se može oceniti na sledeći način,

$$\begin{aligned}
J_3 &\le \widetilde{C}_p E\left(\int_u^v |\beta_1(s, Y_s^\varepsilon, Z_s^\varepsilon, \varepsilon) g(s, Y_s^\varepsilon, Z_s^\varepsilon) + \beta_2(s, Y_s^\varepsilon, Z_s^\varepsilon, \varepsilon) - g(s, Y_s^\varepsilon, Z_s^\varepsilon)|^2 ds\right)^{\frac{p}{2}} \\
&\le \widetilde{C}_p 2^{\frac{p}{2}} 3^{\frac{p}{2}-1} \left[E\left(\int_u^v \widetilde{\beta}_1(s,\varepsilon) \rho^{\frac{2}{p}}(|\widehat{Y}_s^\varepsilon|^p)\, ds\right)^{\frac{p}{2}}\right. \\
&\qquad \left. + E\left(\int_u^v \widetilde{\beta}_1(s,\varepsilon)\theta_2 ||Z_s^\varepsilon - Z_s||^2\, ds\right)^{\frac{p}{2}} + \left(\int_u^v \widetilde{\beta}_2^2(s,\varepsilon)\, ds\right)^{\frac{p}{2}}\right] \\
&\le \widetilde{C}_p 2 \cdot 6^{\frac{p}{2}-1} (v-u)^{\frac{p}{2}-1} \left[M(\varepsilon)^{\frac{p}{2}} \int_{t_0}^T \rho(\Delta_s^\varepsilon)\, ds + \Phi(\varepsilon)(T - t_0)\right] \\
&\quad + \widetilde{C}_p 2 \cdot 6^{\frac{p}{2}-1} M(\varepsilon)^{\frac{p}{2}} \theta_2^{\frac{p}{2}} E\left(\int_u^v ||Z_s^\varepsilon - Z_s||^2\, ds\right)^{\frac{p}{2}},
\end{aligned}$$

gde je za $p=2$ ili $p>2$ konstanta $\tilde{C}_p = 4$ ili $\tilde{C}_p = [p^{p+1}/2(p-1)^{p-1}]^{\frac{p}{2}}$, respektivno. Na kraju,

$$\begin{aligned}
J_4 &\leq \widetilde{C}_p E\left(\int_u^v |\gamma_1(s,Y_s^\varepsilon,\varepsilon)h(s,Y_s^\varepsilon)+\gamma_2(s,Y_s^\varepsilon,\varepsilon)-h(s,Y_s^\varepsilon)|^2 ds\right)^{\frac{p}{2}}\\
&\leq \widetilde{C}_p 2^{\frac{p}{2}}(v-u)^{\frac{p}{2}-1}E\int_u^v [\widetilde{\gamma}_1(s,\varepsilon)\rho^{\frac{2}{p}}(|\widehat{Y}_s^\varepsilon|^p)+\widetilde{\gamma}_2^2(s,\varepsilon)]^{\frac{p}{2}}\, ds\\
&\leq \widetilde{C}_p 2^{p-1}(v-u)^{\frac{p}{2}-1}\left(M(\varepsilon)^{\frac{p}{2}}\int_{t_0}^T \rho(\Delta_s^\varepsilon)\, ds+\Phi(\varepsilon)(v-u)\right).
\end{aligned}$$

Zamenom dobijenih ocena za J_1, J_2, J_3, J_4 i Burkoholder–Davis–Gundy nejednakosti u suprotnom smeru, nalazimo da je

$$\begin{aligned}
&\tilde{c}_p E\left(\int_u^v ||Z_s^\varepsilon - Z_s||^2\, ds\right)^{\frac{p}{2}}\\
&\leq E\sup_{t\in[u,v]}\left|\int_u^t (Z_s^\varepsilon - Z_s)\, dW_s\right|^p\\
&\leq 2\cdot 5^{p-1}\cdot 6^{\frac{p}{2}-1}M(\varepsilon)^{\frac{p}{2}}\Big[(v-u)^{\frac{p}{2}}\theta_1^p+\widetilde{C}_p\theta_2^{\frac{p}{2}}\Big]E\left(\int_u^v ||Z_s^\varepsilon - Z_s||^2\, ds\right)^{\frac{p}{2}}\\
&\quad +\mu_1(v-u)\Phi(\varepsilon)+\mu_2\int_{t_0}^T \Delta_s^\varepsilon\, ds+\mu_3(v-u)\int_{t_0}^T \rho(\Delta_s^\varepsilon)\, ds, \qquad (4.37)
\end{aligned}$$

gde je $\tilde{c}_p = 1$ ili $\tilde{c}_p = (2p)^{-\frac{p}{2}}$ za $p=2$ ili $p>2$, respektivno, a

$$\begin{aligned}
\mu_1(v-u) &= 5^{p-1}\big\{12\left[2+(T-t_0)(192p+\bar{K}_2)+Q(1+\bar{K}_2(T-t_0))\right]\\
&\qquad +2^{\frac{p}{2}}(v-u)^{\frac{p}{2}}[3^{\frac{p}{2}-1}(v-u)^{\frac{p}{2}}+\widetilde{C}_p(3^{\frac{p}{2}-1}+2^{\frac{p}{2}-1})]\Big\},\\
\mu_2 &= 5^{p-1}[1152p(p-2)(M+1)+Q],\\
\mu_3(v-u) &= 5^{p-1}\Big\{12\Big[192Mp+Q\Big]\\
&\qquad +2^{\frac{p}{2}}(v-u)^{\frac{p}{2}-1}M^{\frac{p}{2}}\Big[3^{\frac{p}{2}-1}(v-u)^{\frac{p}{2}}+\widetilde{C}_p(3^{\frac{p}{2}-1}+2^{\frac{p}{2}-1})\Big]\Big\},
\end{aligned}$$

gde je $Q = \frac{48(M(\varepsilon)\theta_2+1)p^2}{\bar{K}_1}$. Imajući u vidu da su perturbacije takve da je $M^{\frac{p}{2}} < \frac{\tilde{c}_p}{2\widetilde{C}_p\theta_2^{\frac{p}{2}}5^{p-1}6^{\frac{p}{2}-1}}$, vrednosti u i v se mogu izabrati dovoljno blizu tako da je

$$\tilde{c}_p - 2\cdot 5^{p-1}\cdot 6^{\frac{p}{2}-1}M^{\frac{p}{2}}\Big[(v-u)^{\frac{p}{2}}\theta_1^p+\widetilde{C}_p\theta_2^{\frac{p}{2}}\Big] > 0.$$

Iz poslednjeg uslova je

$$0 < v-u < \frac{1}{\theta_1^2}\left(\frac{\tilde{c}_p}{2\cdot 5^{p-1}6^{\frac{p}{2}-1}M^{\frac{p}{2}}}-\tilde{C}_p\theta_2^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{2}{p}}. \qquad (4.38)$$

Iz (4.37) je

$$
\begin{aligned}
&E\left(\int_u^v ||Z_s^\varepsilon - Z_s||^2\,ds\right)^{\frac{p}{2}} \qquad (4.39)\\
&\le \frac{\mu_1(v-u)\Phi(\varepsilon) + \mu_2\int_{t_0}^T \Delta_s^\varepsilon ds + \mu_3(v-u)\int_{t_0}^T \rho(\Delta_s^\varepsilon)ds}{\tilde{c}_p - 2\cdot 5^{p-1}\cdot 6^{\frac{p}{2}-1}M^{\frac{p}{2}}[(v-u)^{\frac{p}{2}}\theta_1^p + \widetilde{C}_p\theta_2^{\frac{p}{2}}]}\\
&:= \nu(t_0, v-u).
\end{aligned}
$$

Imajući u vidu da $\Delta_s^\varepsilon \to 0$ i $\rho(\Delta_s^\varepsilon) \to 0$ kad $\varepsilon \to 0$, iz poslednje nejednakosti sledi da $E\left(\int_u^v ||Z_s^\varepsilon - Z_s||^2\,ds\right)^{\frac{p}{2}} \to 0$ kad $\varepsilon \to 0$. Osim toga, za svako l_1, l_2, $\nu(l_1, l_2) \to 0$ kad $\varepsilon \to 0$.

Da bi dokazali (4.30) stavimo $t_0 = 0$ i izaberimo nezavisno od ε konačan broj deobnih tačaka na intervalu $[0,T]$, $0 = t_0 < t_1 < \cdots, t_k = T$ takvih da je $t_j - t_{j-1} < \frac{1}{\theta_1^2}\left(\frac{\tilde{c}_p}{2\cdot 5^{p-1}6^{\frac{p}{2}-1}M^{\frac{p}{2}}} - \widetilde{C}_p\theta_2^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{2}{p}}$, $j = 1, 2, \ldots, k$. Tada iz (4.39) sledi

$$
\begin{aligned}
E\left(\int_0^T ||Z_s^\varepsilon - Z_s)||^2\,ds\right)^{\frac{p}{2}} &= E\left(\sum_{j=1}^k \int_{t_{j-1}}^{t_j} ||Z_s^\varepsilon - Z_s||^2\,ds\right)^{\frac{p}{2}}\\
&< k^{\frac{p}{2}-1}\sum_{j=1}^k \nu(T, t_j - t_{j-1})\\
&\to 0, \quad \varepsilon \to 0,
\end{aligned}
$$

čime je dokaz završen. $\diamondsuit$

Na osnovu Teoreme 4.1.3 se zaključuje da se procesi stanja Y_t^ε i Y_t i kontrolni procesi Z_t^ε i Z_t mogu učiniti proizvoljno bliskim za dovoljno malo ε. Ta činjenica ima za posledicu da se za dopustivu vrednost $\eta > 0$ i ε dovoljno malo, može odrediti $\bar{t}(\eta) = \bar{t} \in [0,T]$ tako da L^p- razlika procesa stanja Y_t^ε i Y_t ne prelazi vrednost η na vremenskom intervalu $[\bar{t}, T]$. Isto tako, na tom vremenskom intervalu može se odrediti veličina bliskosti kontrolnih procesa Z_t^ε i Z_t. Naredna teorema se upravo odnosi na ova razmatranja.

Teorema 4.1.4 *Neka su ispunjeni uslovi Teoreme 4.1.3 i neka su $M(\varepsilon)$ i $\Phi(\varepsilon)$ dati sa (4.27). Tada, za proizvoljnu konstantu $\eta > 0$ i svako $\varepsilon \in \left(0, \Phi^{-1}\left(\frac{\eta}{1+\bar{K}_2T}\right)\right]$, postoji $\bar{t} \in [0,T]$ oblika*

$$
\bar{t} = \max\left\{0, T - \frac{G(\eta) - G(\Phi(\varepsilon)(1+\bar{K}_2T))}{\bar{K}}\right\},
$$

pri čemu je $\bar{K}_2 = 2p - 1 + 2/\lambda_2$ i

$$
\begin{aligned}
\bar{K} = \max\Big\{&\frac{p}{2\lambda_1} + \frac{p-2}{2\lambda_2} + (p-1)^2 + \Big[(p-1)\lambda_1 + (p-1)(p-2) + \frac{p-2}{\lambda_2}\Big]M,\\
&2\Big[\lambda_1 + p - 2 + \frac{1}{\lambda_2}\Big]M\Big\}.
\end{aligned}
$$

Tada je

$$\sup_{t\in[\bar{t},T]} E|Y_t^\varepsilon - Y_t|^p \leq \eta, \tag{4.40}$$

i

$$E\left(\int_{\bar{t}}^T ||Z_s^\varepsilon - Z_s)||^2\,ds\right)^{\frac{p}{2}} < k_0^{\frac{p}{2}} \sum_{j=1}^k \nu(\bar{t},\delta_0), \tag{4.41}$$

gde je funkcija ν *data sa (4.39), a* $k_0 \in N$ *je dovoljno veliko i takvo da je* $\frac{T-\bar{t}}{k_0} < \tau\bar{\delta}_0$ *za* $\bar{\delta}_0 = \frac{1}{\theta_1^2}\left(\frac{\tilde{c}_p}{2\cdot 5^{p-1}6^{\frac{p}{2}-1}M(\varepsilon)^{\frac{p}{2}}} - \tilde{C}_p\theta_2^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{2}{p}}$ *i neko* $\tau \in (0,1)$.

Dokaz. Definišimo funkciju $S(\varepsilon, T-t)$ za $t \in [0,T]$ na sledeći način,

$$S(\varepsilon, T-t) := G^{-1}\left(G\left(\Phi(\varepsilon)(1+\bar{K}_2T)\right) + \bar{K}(T-t)\right).$$

Za proizvoljno $\eta > 0$ mora biti

$$S(\varepsilon,0) \leq \eta \leq S(\varepsilon,T),$$

odnosno,

$$\Phi(\varepsilon)(1+\bar{K}_2T) \leq \eta \leq G^{-1}\left(G\left(\Phi(\varepsilon)(1+\bar{K}_2T)\right) + \bar{K}T\right).$$

Pošto $\Phi(\varepsilon)$ opada kada ε opada, sledi da je

$$\varepsilon_1 := \Phi^{-1}\left(\frac{G^{-1}(G(\eta) - \bar{K}T)}{1+\bar{K}_2T}\right) \leq \varepsilon \leq \Phi^{-1}\left(\frac{\eta}{1+\bar{K}_2T}\right) := \varepsilon_2.$$

Za svako $\varepsilon \in [\varepsilon_1, \varepsilon_2]$, jednostavno se određuje $\widetilde{t}$ iz relacije $S(\varepsilon, T-\widetilde{t}) = \eta$, odnosno

$$\widetilde{t} = T - \frac{G(\eta) - G(\Phi(\varepsilon)(1+\bar{K}_2T))}{\bar{K}},$$

gde je funkcija G data u Propoziciji 4.1.2. Ako je $\eta > S(\varepsilon,T)$, odnosno $\eta > G^{-1}\left(G\left(\Phi(\varepsilon)(1+\bar{K}_2T)\right) + \bar{K}T\right)$, tada je $\phi(\varepsilon) < \frac{G^{-1}(G(\eta)-\bar{K}T)}{1+\bar{K}_2T}$, odakle sledi da je $\varepsilon < \Phi^{-1}\left(\frac{G^{-1}(G(\eta)-\bar{K}T)}{1+\bar{K}_2T}\right) := \varepsilon_1$. Za $\varepsilon \in (0,\varepsilon_2)$, neka je

$$\bar{t} = \max\{0,\widetilde{t}\} = \max\left\{0, T - \frac{G(\eta) - G(\Phi(\varepsilon)(1+\bar{K}_2T)}{\bar{K}}\right\}.$$

Na osnovu (4.32), za svako $\varepsilon \in (0,\varepsilon_2)$ sledi da je

$$\sup_{t\in[\bar{t},T]} E|Y_t^\varepsilon - Y_t|^p \leq S(\varepsilon, T-\bar{t}) = \eta.$$

Evidentno, kada $\varepsilon \uparrow \varepsilon_2$ tada $\bar{t} \uparrow T$, slično, kada $\varepsilon \downarrow \varepsilon_1$, tada $\bar{t} \downarrow 0$.

Da bi dokazali (4.41), podelimo interval $[0,T]$ ekvidistantnim tačkama $\bar{t} = t_0 < t_1 < ..., t_{k_0} = T$ za neko dovoljno veliko $k_0 \in N$ i $\tau \in (0,1)$, tako da je $t_j - t_{j-1} = \delta_0 = \frac{T-\bar{t}}{k_0} < \tau\bar{\delta}_0$, gde je $\bar{\delta}_0 = \frac{1}{\theta_1^2}\left(\frac{\tilde{c}_p}{2 \cdot 5^{p-1} 6^{\frac{p}{2}-1} M^{\frac{p}{2}}} - \tilde{C}_p \theta_2^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{2}{p}}$, $j = 1, 2..., k_0$. Tada je

$$E\left(\int_{\bar{t}}^{T} ||Z_s^{\varepsilon} - Z_s)||^2 \, ds\right)^{\frac{p}{2}} = E\left(\sum_{j=1}^{k} \int_{t_{j-1}}^{t_j} ||Z_s^{\varepsilon} - Z_s||^2 \, ds\right)^{\frac{p}{2}}$$
$$< k_0^{\frac{p}{2}} \sum_{j=1}^{k} \nu(\bar{t}, \delta_0),$$

čime je dokaz završen. $\diamondsuit$

Jasno, L^p-razlika kontrolnih procesa Z_t^{ε} i Z_t je veća ako je k_0 manje i τ bliže nuli. Zbog kolizije ovih zahteva preostaje da se u konkretnoj situaciji optimiziuje k_0 i τ u cilju minimiziranja L^p-razlike kontrolnih procesa. Osim toga, za neku dopustivu vrednost $\bar{\eta} > 0$, numerički se može odrediti k_0 i δ_0 tako da je

$$k_0^{\frac{p}{2}} \sum_{j=1}^{k} \nu(\bar{t}, \delta_0) < \bar{\eta}.$$

Glava 5

Perturbovane backward stohastičke diferencijalne jednačine sa barijerom

U ovoj glavi se razmatraju perturbovane backward stohastičke diferencijalne jednačine sa barijerom. Novi rezultati se odnose na upoređivanje rešenja perturbovane i odgovarajuće neperturbovane jednačine u L^p-smislu i određivanje vremenskog intervala u kome su rešenja perturbovane i neperturbovane jednačine bliska u L^p-smislu. U ovom slučaju se proizvoljno perturbuju finalni uslov, koeficijent drifta i barijerni proces.

5.1 Opšti tip perturbacija

Nakon što su Pardoux i Peng u esencijalnom radu [107] dokazali egzistenciju i jedinstvenost rešenja nelinearnih BSDJ, mnogi autori su se bavili ispitivanjem svojstava ovih jednačina, pre svega motivisani njihovom primenom u praksi. Logično, primene u različitim oblastima sa posebnim specifičnostima su inicirale uvođenje novih tipova BSDJ čije se osobine još uvek ispituju.

Motivisani problemima vezanim za američke opcije, El-Karoui, Kapoudjian, Pardoux, Peng i Quenez su u zajedničkom radu [71] uveli *backward stohastičke diferencijalne jednačine sa barijerom*, kraće BSDJ sa barijerom (eng. reflected backward stochastic differential equations). Za ovaj tip BSDJ je karakteristično da se za proces stanja rešenja zahteva da ostane iznad unapred zadatog procesa *barijere/prepreke* $L = \{L_t, t \in [0,T]\}$ (barijernog procesa), koji je specifičan za ovaj tip jednačina. Shodno tome, rešenje BSDJ sa barijerom je uređena trojka procesa $\{(Y_t, Z_t, K_t), t \in [0,T]\}$ koji zadovoljava jednačinu

$$
\begin{aligned}
&Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)\,ds + K_T - K_t - \int_t^T Z_s\,dB_s, \quad 0 \le t \le T, \\
&Y_t \ge L_t,\ t \le T \ i \ \int_0^T (Y_s - L_s)\,dK_s = 0 \ s.i. \qquad (5.1)
\end{aligned}
$$

pri čemu je proces K neopadajući i on održava proces Y iznad barijernog procesa L. U ovom radu su dokazane egzistencija i jedinstvenost rešenja jednačine (5.1) pod uslovom da ξ, $\sup_{t\leq T}(L_t^+)$ i $\int_0^T |f(t,0,0)|dt$ (ξ, f i L se nazivaju parametrima jednačine (5.1)) pripadaju prostoru L^2 i da koeficijent f ispunjava Lipschitzov uslov. Takođe, autori su u istom radu izveli formulu kojom se rešenje PDJ sa barijerom može izraziti u terminima rešenja BSDJ sa barijerom. Neke od najvažnijih primena ovog tipa jednačina su u ocenjivanju vrednosti američkih opcija, u problemima stohastičke kontrole i diferencijalnih igara, u vezama sa stohastičkim parcijalnim diferencijalnim jednačinama, itd (videti [7], [25], [48], [70], [72]).

Pardoux i Rascanu su u [111] dokazali egzistenciju i jedinstvenost rešenja BSDJ sa barijerom za neograničen vremenski interval. Osim toga, Ouknine [104] i Bahlali, Essaky i Ouknine [10, 11] su diskutovali BSDJ sa barijerom u kojima se javlja kombinacija Brownovog kretanja i Poissonove mere, za slučajeve kada generatorska funkcija zadovoljava Lipschitzov uslov, lokalni Lipschitzov uslov ili uslov monotonosti. Od tada, pojavilo se više radova na temu BSDJ sa barijerom, na primer, Hamadène i ostali [44, 45, 46], Matoussi [90], Lepeltier i Xu [78, 79] i radovi Rena i ostalih [118, 119, 122].

U poslednje vreme više autora se bavilo oslabljivanjem uslova egzistencije i jedinstvenosti rešenja. Postoji samo nekoliko radova u kojima su dokazani egzistencija i jedinstvenost rešenja kada se ne zahteva da parametri jednačine budu kvadratno integrabilni. Takođe treba istaći da su El-Karoui i ostali u radu [72] kao i Briand sa grupom autora u [19], dokazali egzistenciju i jedinstvenost rešenja za standardnu (osnovnu) BSDJ kada su parametri jednačine iz L^p prostora, za neko $p \in]1,2[$.

Hamèdene i Popier su u radu [49] dokazali da BSDJ (5.1) sa jednom barijerom ima jedinstveno rešenje pod uslovom da su ξ, $\sup_{t\leq T}(L_t^+)$ i $\int_0^T |f(t,0,0)|dt$ iz L^p, $p \in]1,2[$, i da funkcija f zadovoljava Lipschitzov uslov. Aman je u [2] dokazao sličan rezultat za klasu uopštenih BSDJ sa barijerom kada je zadovoljen Lipschitzov uslov za parametre jednačine. On je proširio ovaj svoj rezultat u radu [3] za isti problem, ali sa pretpostavkom nelipšicovskog uslova za parametre jednačine.

U ovoj glavi su sumirani i uopšteni rezultati vezani za BSDJ (5.1) u slučaju kada su finalni uslov ξ i generatorska funkcija f, p-integrabilni, za $p \in]1,2[$. Glavna motivacija ove glave je široka primena ovih jednačina u realnim problemima, u finansijama, kontroli, stohastičkim igrama, stohastičkim PDJ, gde se ne zahteva kvadratna integrabilnost parametara matematičkog modela.

5.1.1 Uvodni pojmovi i poznati rezultati

U prethodnim glavama su razmatrane perturbovane BSDJ i istaknut je značaj perturbacija u počavanju promena u stohastičkim modelima nekih kompleksnih fenomena. Poznato je da se u stohastičkom modelu koji se može opisati nekom SDJ, novo stanje modela opisuje perturbovanom jednačinom, i potom upoređuje sa početnim stanjem koje je opisano neperturbovanom jednačinom. Na ovaj način, složeniji problemi se posredno svode na poznate i jednostavnije slučajeve koje je lakše rešiti.

Ova glava je posvećena najopštijem tipu perturbacija za BSDJ sa barijerom (5.1), pri čemu se finalni uslov, funkcija f i barijerni broces L proizvoljno perturbuju.

Kao i do sada, osnovna pretpostavka je da su sve slučajne promenljive i slučajni procesi definisani na datom prostoru verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ i da je na njemu definisano d-dimenzionalno Brownianovo kretanje $B = \{B_t, t \in [0,T]\}$ sa prirodnom filtracijom $\{\mathcal{F}_t, t \in [0,T]\}$ koja ispunjava uobičajne uslove.

Stohastički procesi su definisani na $t \in [0,T]$ i uzimaju vrednosti u prostoru $\mathbb{R}^n$, sa Euklidovom normom.

Za realnu vrednost $p \in]1,2[$, neka je:

(i) $\mathcal{S}^p(\mathbb{R}^n)$ skup adaptiranih i neprekidnih procesa $\{X_t, t \in [0,T]\}$ sa vrednostima u R^n, takvi da je

$$||X||_{\mathcal{S}^p} = E\left[\sup_{t\in[0,T]} |X_t|^p\right]^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Prostor $\mathcal{S}^p(\mathbb{R}^n)$ sa normom $||\cdot||_{\mathcal{S}^p}$ je Banachov prostor.

(ii) $\mathcal{M}^p(\mathbb{R}^n)$ je skup predskazivih procesa $\{Z_t, t \in [0,T]\}$ sa vrednostima u $\mathbb{R}^n$ takvih da je

$$||Z||_{\mathcal{M}^p} = E\left[\left(\int_0^T |Z_t|^2\, dt\right)^{\frac{p}{2}}\right]^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Takođe, prostor $\mathcal{M}^p(\mathbb{R}^n)$ sa normom $||\cdot||_{\mathcal{M}^p}$ je Banachov prostor.

Sa $\mathcal{B}^p$ je označen prostor $\mathcal{S}^p \times \mathcal{M}^p$. Neka je ξ slučajna promenljiva iz $\mathbb{R}$ koja je $\mathcal{F}_T$ -merljiva, funkcija $f : \Omega \times [0,T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ je merljiva u odnosu na $\mathcal{P} \times \mathcal{B}(\mathbb{R})\times\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ gde $\mathcal{P}$ označava sigma algebru podskupova iz $\Omega \times [0,T]$, i $L := \{L_t, t \in [0,T]\}$ je neprekidan, progresivno merljiv proces sa vrednostima u $\mathbb{R}$.

Za trojku (ξ, f, L) kojom je definisana jednačina (5.1) uvode se sledeće hipoteze:

($\mathbf{H_1}$) $\xi \in L^p(\Omega)$;

($\mathbf{H_2}$) (i) proces $\{f(t,0,0), t \in [0,T]\}$ zadovoljava uslov $E(\int_0^T |f(t,0,0)|dt)^p < \infty$;
(ii) postoji konstanta k tako da je za svako $(t,y,z), (t,y',z') \in [0,T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$

$$|f(t,y,z) - f(t,y',z')| \le k(|y-y'| + |z-z'|)\ s.i.$$

($\mathbf{H_3}$) Za barijerni proces L, važi:
(i) $L_T \le \xi$, s.i.
(ii) $L^+ := L \vee 0 \in \mathcal{S}^p(\mathbb{R})$.

Analogno ranijim tipovima BSDJ, uvodi se definicija rešenja BSDJ sa barijerom određenom trojkom (ξ, f, L) (videti Hamadène i Popier [49]).

Definicija 5.1.1 *Trojka procesa $\{(Y_t, Z_t, K_t), t \in [0,T]\}$ je L^p-rešenje, $p \in]1,2[$ BSDJ (5.1) sa finalnim uslovom ξ, generatorom f i neprekidnom donjom barijerom L ako važi sledeće:*

(1) $\{(Y_t, Z_t), t \in [0,T]\}$ *pripada prostoru* $\mathcal{B}^p$*;*

(2) $K = \{K_t, t \in [0,T]\}$ *je adaptiran, neprekidan, neopadajući proces, pri čemu je* $K_0 = 0$ *i* $K_T \in L^p(\Omega)$*;*

(3) $Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)ds + K_T - K_t - \int_t^T Z_s dB_s$, $t \in [0,T]$, *s.i.;*

(4) $Y_t \ge L_t$, $t \in [0,T]$ *s.i.*;

(5) $\int_0^T (Y_s - L_s)dK_s = 0\, s.i.$

Definicija 5.1.2 *BSDJ (5.1) sa donjom barijerom L ima jedinstveno L^p-rešenje, $p \in]1,2[$, $\{(Y_t, Z_t, K_t), t \in [0,T]\}$ ako za svako drugo rešenje $\{(\bar{Y}_t, \bar{Z}_t, \bar{K}_t), t \in [0,T]\}$ važi da je $||Y_t - \bar{Y}_t||_{\mathcal{S}^p} = 0$, $||Z_t - \bar{Z}_t||_{\mathcal{M}^p} = 0$ i $||K_t - \bar{K}_t||_{\mathcal{S}^p} = 0$.*

U radu Hamèdena i Popiera [49] dokazane su egzistencija i jedinstvenost rešenja jednačine (5.1), pri čemu se uvek pretpostavlja da je $p \in]1,2[$.

Propozicija 5.1.1 (Hamèdene, Popier [49]) *Neka važe hipoteze $(\mathbf{H_1})-(\mathbf{H_3})$ za ξ, f i L. Tada jednačina (5.1) kojoj su pridruženi parametri (ξ, f, L) ima jedinstveno L^p-rešenje, tj. postoji trojka procesa $\{(Y_t, Z_t, K_t), t \in [0,T]\}_{0 \le t \le T}$ takva da je*

$$
\begin{aligned}
&Y \in \mathcal{S}^p,\ Z \in \mathcal{M}^p,\ K \in \mathcal{S}^p, K \text{ je neopadajući proces za koji je } K_0 = 0,\\
&Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)\, ds + K_T - K_t - \int_t^T Z_s\, dB_s,\ t \in [0,T],\\
&Y_t \ge L_t,\ t \le T \text{ i } \int_0^T (Y_s - L_s)\, dK_s = 0 \text{ s.i.}
\end{aligned}
$$

Primetimo da se formula Itôa (Teorema 1.3.4) ili njen integralni oblik (2.3) za backward jednačine, ne mogu direktno primeniti na BSDJ sa barijerom. Problem je u specifičnosti pridruženog barijernog procesa. Međutim, može se koristiti uopštena formula Itôa koja sadrži i neopadajući proces skoro izvesno ograničene varijacije.

Lema 5.1.1 (Formula Itôa [68]) *Ako skalarni proces $X = \{X_t, \mathcal{F}_t\}_{t \ge 0}$ ima dekompoziciju*

$$X_t = X_0 + A_t + M_t,$$

gde je X_0 $\mathcal{F}_0$-merljiva slučajna promenljiva, $M = \{M_t, \mathcal{F}_t\}_{t \ge 0}$ je lokalni martingal, $A = \{A_t, \mathcal{F}_t\}_{t \ge 0}$ je neopadajući, adaptiran proces sa $A_0 = 0$ skoro izvesno i $\{\mathcal{F}_t\}_{t \ge 0}$ zadovoljava uobičajne uslove. Ako je funkcija $F(t,x), t \in [0,\infty), x \in \mathbb{R}$ jednom neprekidno diferencijabilna po t i dva puta po x, tada je

$$
\begin{aligned}
F(t, X_t) = F(0, X_0) &+ \int_0^t F'_t(s, X_s)\, ds + \int_0^t F'_x(s, X_s)\, dA_s + \int_0^t F'_x(s, X_s)\, dM_s\\
&+ \frac{1}{2} \int_0^t F''_{xx}(s, X_s)\, d\langle M \rangle_s, \quad t \ge 0,\ s.i.
\end{aligned}
$$

U [19] je izvedena relacija, koja će se koristiti u dokazivanju glavnih rezultata. Ovde se navodi samo jedna njena verzija.

Lema 5.1.2 (Hamédene, Popier [49]) *Neka je $(Y, Z) \in \mathcal{B}^p$ rešenje sledeće BSDJ*

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)\, ds + A_T - A_t - \int_t^T Z_s\, dB_s,\ s.i., t \in [0,T],$$

pri čemu je:
(i) f funkcija koja ispunjava prethodno opisane uslove;
(ii) Proces $\{A_t\}_{t \le T}$ je s.i. ograničene varijacije.

Tada, za svako $0 \le t \le u \le T$ *važi*

$$|Y_t|^p + c(p) \int_t^u |Y_s|^{p-2} I_{\{Y_s \neq 0\}} |Z_s|^2 ds \le |Y_u|^p + p \int_t^u |Y_s|^{p-1} \hat{Y}_s \, dA_s + p \int_t^u |Y_s|^{p-1} \hat{Y}_s f(s, Y_s, Z_s) \, ds - p \int_t^u |Y_s|^{p-1} \hat{Y}_s Z_s \, dB_s,$$

gde je $c(p) = \frac{p(p-1)}{2}$ *i* $\hat{y} = \frac{y}{|y|} I_{\{y \neq 0\}}$.

5.1.2 Formulacija problema i preliminarni rezultati

Uporedo sa jednačinom (5.1) posmatra se i sledeća jednačina zavisna od parametra ε,

$$Y_t = \xi^\varepsilon + \int_t^T f^\varepsilon(s, Y_s^\varepsilon, Z_s^\varepsilon, \varepsilon) \, ds + K_T^\varepsilon - K_t^\varepsilon - \int_t^T Z_s^\varepsilon \, dB_s, \;\; 0 \le t \le T, \quad (5.2)$$
$$Y_t^\varepsilon \ge L_t^\varepsilon, \; t \le T \;\; i \;\; \int_0^T (Y_s^\varepsilon - L_s^\varepsilon) \, dK_s^\varepsilon = 0, \;\; s.i.$$

gde su $\xi^\varepsilon, f^\varepsilon$ i barijerni proces L^ε definisani na isti način kao i ξ, f, L, respektivno. Za uređenu trojku $(\xi^\varepsilon, f^\varepsilon, L^\varepsilon)$, trojka adaptiranih procesa $\{(Y_t^\varepsilon, Z_t^\varepsilon, K_t^\varepsilon), t \in [0,T]\}$ je L^p-rešenje jednačine (5.2). Parametri $\xi^\varepsilon, f^\varepsilon, L^\varepsilon$ jednačine (4.2) su dobijeni kada se proizvoljno perturbuju ξ, f, L iz (5.1), ali tako da zavise od malog parametra ε. Ovaj tip perturbacija je najopštiji, i u posebnim slučajevima se može svesti na aditivne i linearne perturbacije, razmatrane u glavama 2 i 3. Kao i ranije, jednačina (5.1) se smatra *neperturbovanom*, a jednačina (5.2) *perturbovanom* jednačinom. I u ovom slučaju se očekuje da kada su $\xi^\varepsilon, f^\varepsilon, L^\varepsilon$ bliski u nekom smislu sa ξ, f, L, da i rešenja $\{(Y_t^\varepsilon, Z_t^\varepsilon, K_t^\varepsilon), t \in [0,T]\}$ i $\{(Y_t, Z_t, K_t), t \in [0,T]\}$ budu bliska u odgovarajućem smislu. Zbog toga se uvode sledeće pretpostavke:

A0. Za finalne uslove $\xi, \xi^\varepsilon \in L^p(\Omega)$ postoji neslučajna funkcija $\alpha_0(\varepsilon)$, takva da je

$$E|\xi^\varepsilon - \xi|^p \le \alpha_0(\varepsilon).$$

A1. Za generatorske funkcije f i f^ε postoji neslučajna funkcija $\alpha_1(\varepsilon)$, takva da je

$$\sup_{(t,y,z) \in [0,T] \times B^p} |f^\varepsilon(t, y, z, \varepsilon) - f(t, y, z)| \le \alpha_1(\varepsilon) \;\; s.i.$$

A2. Za barijerne procese L i L^ε postoji neslučajna funkcija $\alpha_2(\varepsilon)$, takva da je

$$E \sup_{t \in [0,T]} |L_t^\varepsilon - L_t|^p \le \alpha_2(\varepsilon).$$

Narednim tvrđenjem je predstavljen pomoćni rezultat – ocena za $E|Y_t^\varepsilon - Y_t|^p$, koja je značajna u opisu glavnih rezultata. Metodologija dokaza je slična dokazu Leme 3 iz [49].

Propozicija 5.1.2 *Neka su zadovoljene hipoteze* $(\mathbf{H_1})-(\mathbf{H_3})$ *i pretpostavke* $\boldsymbol{A0}-\boldsymbol{A2}$ *i neka su* $\{(Y_t, Z_t, K_t), t\in[0,T]\}$ *i* $\{(Y_t^\varepsilon, Z_t^\varepsilon, K_t^\varepsilon), t\in[0,T]\}$ *rešenja jednačina (5.1) i (5.2), respektivno. Tada je*

$$E|Y_t^\varepsilon - Y_t|^p \le C_1\, e^{c_1(T-t)}, \quad t\in[0,T], \tag{5.3}$$

gde su $c_1 = p-1+pk+\frac{pk^2}{p-1}$ *i* $C_1 = \alpha_0(\varepsilon)+\alpha_1^p(\varepsilon)\,T+\alpha_2^{\frac{p-1}{p}}(\varepsilon)\,(E|\widehat{K}_T|^p)^{\frac{1}{p}}$, *konačne konstante.*

Dokaz. Za $t\in[0,T]$ označimo

$$\widehat{\xi}=\xi^\varepsilon-\xi, \quad \widehat{Y}_t = Y_t^\varepsilon - Y_t, \quad \widehat{Z}_t = Z_t^\varepsilon - Z_t, \quad \widehat{K}_t = K_t^\varepsilon - K_t.$$

Oduzimanjem jednačina (5.1) i (5.2) imamo

$$\widehat{Y}_t = \widehat{\xi} + \int_t^T (f^\varepsilon(s,Y_s^\varepsilon,Z_s^\varepsilon,\varepsilon) - f(s,Y_s,Z_s))\,ds + \widehat{K}_T - \widehat{K}_t - \int_t^T \widehat{Z}_s\,dB_s,\ 0\le t\le T. \tag{5.4}$$

Primenom Leme 5.1.2 na $|\widehat{Y}_t|^p$ dobija se

$$\begin{aligned}
&|\widehat{Y}_t|^p + c(p)\int_t^T |\widehat{Y}_s|^{p-2}1_{\widehat{Y}_s\neq 0}|\widehat{Z}_s|^2\,ds \qquad (5.5)\\
&\le |\widehat{\xi}|^p + p\int_t^T |\widehat{Y}_s|^{p-1} sgn(\widehat{Y}_s)(f^\varepsilon(s,Y_s^\varepsilon,Z_s^\varepsilon,\varepsilon) - f(s,Y_s,Z_s))\,ds\\
&\quad + p\int_t^T |\widehat{Y}_s|^{p-1} sgn(\widehat{Y}_s) d(\Delta\widehat{K}_s) - p\int_t^T |\widehat{Y}_s|^{p-1} sgn(\widehat{Y}_s)\widehat{Z}_s\,dB_s\\
&\le |\widehat{\xi}|^p + p\int_t^T |\widehat{Y}_s|^{p-1}|f^\varepsilon(s,Y_s^\varepsilon,Z_s^\varepsilon,\varepsilon) - f(s,Y_s^\varepsilon,Z_s^\varepsilon)|\,ds\\
&\quad + pk\int_t^T |\widehat{Y}_s|^{p-1}|Y_s^\varepsilon - Y_s|\,ds + pk\int_t^T |\widehat{Y}_s|^{p-1}|Z_s^\varepsilon - Z_s|\,ds\\
&\quad + p\int_t^T |\widehat{Y}_s|^{p-1} sgn(\widehat{Y}_s) d(\Delta\widehat{K}_s) - p\int_t^T |\widehat{Y}_s|^{p-1} sgn(\widehat{Y}_s)\widehat{Z}_s\,dB_s\\
&= |\widehat{\xi}|^p + I_1(t) + pk\int_t^T |\widehat{Y}_s|^p ds + I_2(t) + I_3(t) + I_4(t),
\end{aligned}$$

gde su $I_1(t)$, $I_2(t)$, $I_3(t), I_4(t)$ odgovarajući integrali koje treba oceniti. Primenom (1.11) i pretpostavke $\boldsymbol{A1}$

$$\begin{aligned}
I_1(t) &= p\int_t^T |\widehat{Y}_s|^{p-1}|f^\varepsilon(s,Y_s^\varepsilon,Z_s^\varepsilon,\varepsilon) - f(s,Y_s^\varepsilon,Z_s^\varepsilon)|ds \qquad (5.6)\\
&\le (p-1)\int_t^T |\widehat{Y}_s|^p ds + \int_t^T |f^\varepsilon(s,Y_s^\varepsilon,Z_s^\varepsilon,\varepsilon) - f(s,Y_s^\varepsilon,Z_s^\varepsilon)|^p ds.\\
&\le (p-1)\int_t^T |\widehat{Y}_s|^p ds + \alpha_1^p(\varepsilon)(T-t).
\end{aligned}$$

Za ocenu integrala $I_2(t)$ koristi se nejednakost $2ab \leq \frac{a^2}{2} + 2b^2$,

$$I_2(t) = 2p\sqrt{\frac{2}{p(p-1)}}\frac{\sqrt{c(p)}}{2}k\int_t^T |\widehat{Y}_s|^{p-1}|\widehat{Z}_s|\,ds \tag{5.7}$$
$$\leq \frac{pk^2}{p-1}\int_t^T |\widehat{Y}_s|^p\,ds + \frac{c(p)}{2}\int_t^T |\widehat{Y}_s|^{p-2}I_{\{\widehat{Y}_s\neq 0\}}|\widehat{Z}_s|^2\,ds,$$

gde je $c(p) = p(p-1)/2$.

Da bi se ocenio integral $I_3(t)$, za par $(x,a) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ se uvodi preslikavanje $(x,a) \to \widetilde{\theta}(x,a) = |x-a|^{p-2}I_{\{x\neq a\}}(x-a)$. Funkcija $x \to \widetilde{\theta}(x,a)$ je neopadajuća, dok je funkcija $a \to \widetilde{\theta}(x,a)$ nerastuća. Za $\widehat{L}_s = L^\varepsilon_s - L_s$, kako je $Y^\varepsilon_s \geq L^\varepsilon_s$ i $Y_s \geq L_s$, to je

$$\begin{aligned} I_3(t) &= p\int_t^T |\widehat{Y}_s|^{p-1}sgn(\widehat{Y}_s)\,d(\Delta\widehat{K}_s) \qquad (5.8)\\ &= p\int_t^T |\widehat{Y}_s|^{p-1}sgn(\widehat{Y}_s)\,dK^\varepsilon_s - p\int_t^T |\widehat{Y}_s|^{p-1}sgn(\widehat{Y}_s)\,dK_s\\ &= p\int_t^T \widetilde{\theta}(Y^\varepsilon_s, Y_s)I_{\{Y^\varepsilon_s = L^\varepsilon_s\}}dK^\varepsilon_s - p\int_t^T \widetilde{\theta}(Y^\varepsilon_s, Y_s)I_{\{Y_s = L_s\}}\,dK_s\\ &= p\int_t^T \widetilde{\theta}(L^\varepsilon_s, Y_s)\,dK^\varepsilon_s - p\int_t^T \widetilde{\theta}(Y^\varepsilon_s, L_s)\,dK_s\\ &\leq p\int_t^T |L^\varepsilon_s - L_s|^{p-2}I_{\{L^\varepsilon_s - L_s\neq 0\}}(L^\varepsilon_s - L_s)\,dK^\varepsilon_s\\ &\quad - p\int_t^T |L^\varepsilon_s - L_s|^{p-2}I_{\{L^\varepsilon_s - L_s\neq 0\}}(L^\varepsilon_s - L_s)\,dK_s\\ &= p\int_t^T |\widehat{L}_s|^{p-2}I_{\{\widehat{L}_s\neq 0\}}\widehat{L}_s\,dK^\varepsilon_s - p\int_t^T |\widehat{L}_s|^{p-2}I_{\{\widehat{L}_s\neq 0\}}\widehat{L}_s\,dK_s\\ &= p\int_t^T |\widehat{L}_s|^{p-1}\,d(\widehat{K}_s). \end{aligned}$$

Zamenom ocena (5.6),(5.7) i (5.8) u (5.5) sledi

$$\begin{aligned} &|\widehat{Y}_t|^p + \frac{c(p)}{2}\int_t^T |\widehat{Y}_s|^{p-2}I_{\{\widehat{Y}_s\neq 0\}}|\widehat{Z}_s|^2\,ds\\ &\quad\leq |\widehat{\xi}|^p + \left(p-1+pk+\frac{pk^2}{p-1}\right)\int_t^T |\widehat{Y}_s|^p\,ds + p\int_t^T |\widehat{L}_s|^{p-1}\,d(\widehat{K}_s),\\ &\quad\quad + \alpha_1^p(\varepsilon)(T-t) + I_4(t). \end{aligned}$$

Primenom očekivanja na poslednju nejednakost, a zatim Hölderove nejednakosti na drugi integral, dobija se

$$
\begin{aligned}
E|\widehat{Y}_t|^p &\leq E|\widehat{Y}_t|^p + \frac{c(p)}{2} E \int_t^T |\widehat{Y}_s|^{p-2} I_{\{\widehat{Y}_s \neq 0\}} |\widehat{Z}_s|^2 \, ds \qquad (5.9)\\
&\leq \alpha_0(\varepsilon) + \left(p - 1 + pk + \frac{pk^2}{p-1}\right) \int_t^T E|\widehat{Y}_s|^p \, ds \\
&\quad + \left(E \sup_{s\in[0,T]} |\widehat{L}_s|^p\right)^{\frac{p-1}{p}} (E|\widehat{K}_T|^p)^{\frac{1}{p}} + \alpha_1(\varepsilon)(T-t) \\
&\leq \alpha_0(\varepsilon) + \alpha_1^p(\varepsilon)T + +\alpha_2^{\frac{p-1}{p}}(\varepsilon)(E|\widehat{K}_T|^p)^{\frac{1}{p}} \\
&\quad + \left(p - 1 + pk + \frac{pk^2}{p-1}\right) \int_t^T E|\widehat{Y}_s|^p \, ds.
\end{aligned}
$$

Kako je $K_T, K_T^\varepsilon \in L^p(\Omega)$ to je $E|\widehat{K}_T|^p < \infty$. Iz poslednje nejednakosti, primenom Gronwallove–Bellmanove nejednakosti, Teorema 1.5.4, neposredno sledi (5.3). $\diamondsuit$

5.1.3 Ocena L^p-razlike rešenja

Propozicija 5.1.2 omogućava da se oceni razlika rešenja perturbovane i neperturbovane BSDJ sa barijerom (5.1) i (5.2), preciznije, razlika procesa stanja, kontrolnih procesa i procesa koji održavaju proces stanja iznad barijere.

Teorema 5.1.1 *Neka su zadovoljeni uslovi Propozicije 5.1.2 i neka* $\alpha_0(\varepsilon)$, $\alpha_1(\varepsilon), \alpha_2(\varepsilon)$ *teže nuli kada* ε *teži nuli. Tada,*

$$E \sup_{t\in[0,T]} |Y_t^\varepsilon - Y_t|^p \to 0, \ \ \varepsilon \to 0, \qquad (5.10)$$

$$E \left(\int_0^T |Z_s^\varepsilon - Z_s|^2 \, ds\right)^{\frac{p}{2}} \to 0, \ \ \varepsilon \to 0, \qquad (5.11)$$

$$E \sup_{t\in[0,T]} E|K_t^\varepsilon - K_t|^p \to 0, \ \ \varepsilon \to 0. \qquad (5.12)$$

Dokaz. Označimo

$$\phi(\varepsilon) = \max\left\{\alpha_0(\varepsilon), \alpha_1^p(\varepsilon), \alpha_2^{\frac{p-1}{p}}(\varepsilon)\right\}. \qquad (5.13)$$

Na osnovu Propozicije 5.1.2 je $C_1 \leq \phi(\varepsilon)\,\widetilde{C}$, gde je $\widetilde{C} = 1 + T + (E|\widehat{K}_T|^p)^{\frac{1}{p}}$, i

$$E|\widehat{Y}_t|^p \leq \phi(\varepsilon)\,\widetilde{C} e^{c_1(T-t)}, \quad t \in [0,T]. \qquad (5.14)$$

Kako $\phi(\varepsilon) \to 0$ kada $\varepsilon \to 0$, za proizvoljno $t_0 \in [0,T]$ je

$$\sup_{t\in[t_0,T]} E|\widehat{Y}_t|^p \leq \phi(\varepsilon)\,\widetilde{C}\, e^{c_1(T-t_0)} \to 0, \quad \varepsilon \to 0. \qquad (5.15)$$

Vrednost $E\sup_{t\in[0,T]}|\widehat{Y}_t|^p$ je moguće oceniti na osnovu (5.5). Pošto su integrali $I_1(t_0)$, $I_2(t_0)$ i $I_3(t_0)$ prethodno ocenjeni, neophodna je i ocena za supremum funkcije $I_4(t)$, za $t \in [t_0, T]$.

Koristeći Burkholder–Davis–Guandy nejednakost (Teorema 1.5.3) i Youngovu nejednakost (1.8), za $t \in [t_0, T]$ se dobija ocena

$$\begin{aligned} E\sup_{t\in[t_0,T]}(I_4(t)) &= E\sup_{t\in[t_0,T]}\left(-p\int_t^T |\widehat{Y}_s|^{p-1} sgn(\widehat{Y}_s)\widehat{Z}_s\, dB_s\right) \qquad (5.16)\\ &= E\sup_{t\in[t_0,T]}\left(p\int_{t_0}^t |\widehat{Y}_s|^{p-1} sgn(\widehat{Y}_s)\widehat{Z}_s\, dB_s\right)\\ &\leq 4\sqrt{2}pE\left(\int_{t_0}^T |\widehat{Y}_s|^{2p-2}|\widehat{Z}_s|^2\, ds\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\leq 4\sqrt{2}pE\left(\sup_{t\in[t_0,T]}|\widehat{Y}_t|^p \int_{t_0}^T |\widehat{Y}_s|^{p-2}|\widehat{Z}_s|^2\, ds\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\leq \frac{1}{2}E\sup_{t\in[t_0,T]}|\widehat{Y}_t|^p + 16p^2 E\int_{t_0}^T |\widehat{Y}_s|^{p-2}|\widehat{Z}_s|^2\, ds. \end{aligned}$$

Iz (5.5),(5.9), (5.15) i (5.16) sledi

$$E\sup_{t\in[t_0,T]}(I_4(t)) \leq \frac{1}{2}E\sup_{t\in[t_0,T]}|\widehat{Y}_t|^p + \frac{32p^2}{c(p)}\,\phi(\varepsilon)\,\widetilde{C}e^{c_1(T-t_0)}. \qquad (5.17)$$

Iz (5.9) i prethodnih ocena, dobija se

$$\begin{aligned} E\sup_{t\in[t_0,T]}|\widehat{Y}_t|^p &\leq \frac{1}{2}E\sup_{t\in[t_0,T]}|\widehat{Y}_s|^p + \frac{32p^2}{c(p)}\,\phi(\varepsilon)\,\widetilde{C}\,e^{c_1(T-t_0)}\\ &\quad + c_1\int_{t_0}^T E|\widehat{Y}_s|^p\, ds + \phi(\varepsilon)\,\widetilde{C}. \end{aligned}$$

Odavde je

$$E\sup_{t\in[t_0,T]}|\widehat{Y}_t|^p \leq 2\phi(\varepsilon)\,\widetilde{C}\left[e^{c_1(T-t_0)}\left(1+\frac{32p^2}{c(p)}\right)+1\right] \equiv \phi(\varepsilon)A_1(t_0), \qquad (5.18)$$

gde je $A_1(t_0)$ generisana pozitivna konstanta. Kako $\phi(\varepsilon)$ teži nuli kada $\varepsilon \to 0$, sledi da $E\sup_{t\in[t_0,T]}|\widehat{Y}_t|^p \to 0$ kada ε teži nuli. Prema tome, (5.11) sledi za $t_0 = 0$.

Sada se mogu oceniti i druga dva dela rešenja.

Za svako $i \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ i proizvoljno $t_0 \in [0, T]$, definišimo

$$\tau_i = \inf\left\{t \in [0,T],\ \int_{t_0}^t |\widehat{Z}_s|^2\, ds \geq i\right\} \wedge T.$$

Niz $\{\tau_i\}_{i\geq 0}$ je vreme zaustavljanja i $\tau_i \uparrow T$ skoro izvesno kada $i \to \infty$. Primenom formule Itôa (Lema 5.1.1) na $e^{kt}|\widehat{Y}_t|^2$ dobija se

$$\begin{aligned}
&|\widehat{Y}_{t_0}|^2 + \int_{t_0}^{\tau_i} e^{ks}|\widehat{Z}_s|^2\, ds \\
&\quad = e^{k\tau_i}|\widehat{Y}_{\tau_i}|^2 + \int_{t_0}^{\tau_i} e^{ks}\widehat{Y}_s\Big[2(f^\varepsilon(s,Y_s^\varepsilon,Z_s^\varepsilon,\varepsilon) - f(s,Y_s,Z_s)) - k\widehat{Y}_s\Big]\, ds \\
&\quad\quad + 2\int_{t_0}^{\tau_i} e^{ks}\widehat{Y}_s d\widehat{K}_s - 2\int_{t_0}^{\tau_i} e^{ks}\widehat{Y}_s\widehat{Z}_s\, dB_s \\
&\quad = e^{k\tau_i}|\widehat{Y}_{\tau_i}|^2 + J_1 + J_2 - 2\int_{t_0}^{\tau_i} e^{ks}\widehat{Y}_s\widehat{Z}_s\, dB_s,
\end{aligned} \tag{5.19}$$

gde integrale J_1 i J_2 treba oceniti. Za $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ je

$$\begin{aligned}
J_1 &= 2\int_{t_0}^{\tau_i} e^{ks}\widehat{Y}_s(f^\varepsilon(s,Y_s^\varepsilon,Z_s^\varepsilon) - f(s,Y_s,Z_s))\, ds - k\int_{t_0}^{\tau_i} e^{ks}\widehat{Y}_s^2\, ds \qquad (5.20)\\
&= 2\int_{t_0}^{\tau_i} e^{ks}\widehat{Y}_s(f^\varepsilon(s,Y_s^\varepsilon,Z_s^\varepsilon,\varepsilon) - f(s,Y_s^\varepsilon,Z_s^\varepsilon))\, ds \\
&\quad + 2\int_{t_0}^{\tau_i} e^{ks}\widehat{Y}_s(f(s,Y_s^\varepsilon,Z_s^\varepsilon,\varepsilon) - f(s,Y_s,Z_s))\, ds - k\int_{t_0}^{\tau_i} e^{ks}\widehat{Y}_s^2\, ds \\
&\leq 2\sup_{s\in[t_0,\tau_i]} e^{ks}|\widehat{Y}_s|\,\alpha_1(\varepsilon)(T-t_0) - k\int_{t_0}^{\tau_i} e^{ks}\widehat{Y}_s^2\, ds + 2k\int_{t_0}^{\tau_i} e^{ks}|\widehat{Y}_s|(|\widehat{Y}_s| + |\widehat{Z}_s|)\, ds \\
&\leq \frac{1}{\lambda_1}\sup_{s\in[t_0,\tau_i]} e^{2ks}|\widehat{Y}_s|^2 + \lambda_1(T-t_0)^2\alpha_1^2(\varepsilon) \\
&\quad + \left(\frac{k}{\lambda_2} + k\right)\int_{t_0}^{\tau_i} e^{ks}|\widehat{Y}_s|^2\, ds + k\lambda_2\int_{t_0}^{\tau_i} e^{ks}|\widehat{Z}_s|^2\, ds.
\end{aligned}$$

Slično, za proizvoljno $\lambda_3 > 0$ je

$$\begin{aligned}
J_2 &= 2\int_{t_0}^{\tau_i} e^{ks}\widehat{Y}_s\, d\widehat{K}_s \leq 2\sup_{s\in[t_0,\tau_i]} e^{ks}|\widehat{Y}_s|\int_{t_0}^{\tau_i} d\widehat{K}_s \\
&\leq \frac{1}{\lambda_3}\sup_{s\in[t_0,\tau_i]} e^{2ks}|\widehat{Y}_s|^2 + \lambda_3\left(\int_{t_0}^{\tau_i} d\widehat{K}_s\right)^2 \\
&= \frac{1}{\lambda_3}\sup_{s\in[t_0,\tau_i]} e^{2ks}|\widehat{Y}_s|^2 + \lambda_3(\widehat{K}_{\tau_i} - \widehat{K}_{t_0})^2.
\end{aligned} \tag{5.21}$$

Kako je

$$\begin{aligned}
(\widehat{K}_{\tau_i} - \widehat{K}_{t_0})^2 &= \left(\widehat{Y}_{\tau_i} - \widehat{Y}_{t_0} - \int_{t_0}^{\tau_i}(f^\varepsilon(s,Y_s^\varepsilon,Z_s^\varepsilon,\varepsilon) - f(s,Y_s,Z_s))\, ds + \int_{t_0}^{\tau_i}\widehat{Z}_s\, dB_s\right)^2 \\
&\leq 4\left[|\widehat{Y}_{\tau_i}|^2 + |\widehat{Y}_{t_0}|^2 + \left|\int_{t_0}^{T}(f^\varepsilon(s,Y_s^\varepsilon,Z_s^\varepsilon,\varepsilon) - f(s,Y_s,Z_s))1_{\{s=T\wedge\tau_i\}}\, ds\right|^2\right. \\
&\quad \left. + \left|\int_{t_0}^{\tau_i}\widehat{Z}_s\, dB_s\right|^2\right]
\end{aligned} \tag{5.22}$$

$$\leq 4\left[|\widehat{Y}_{\tau_i}|^2+|\widehat{Y}_{t_0}|^2+(T-t_0)\int_{t_0}^{\tau_i}|f^\varepsilon(s,Y_s^\varepsilon,Z_s^\varepsilon,\varepsilon)-f(s,Y_s,Z_s)|^2\,ds\right.$$
$$\left.+\left|\int_{t_0}^{\tau_i}\widehat{Z}_s\,dB_s\right|^2\right]$$
$$\leq 4\left[|\widehat{Y}_{\tau_i}|^2+|\widehat{Y}_{t_0}|^2+2(T-t_0)^2\alpha_1^2(\varepsilon)+4k^2(T-t_0)\int_{t_0}^{\tau_i}|\widehat{Z}_s|^2\,ds\right.$$
$$\left.+4k^2(T-t_0)\int_{t_0}^{\tau_i}|\widehat{Y}_s|^2\,ds+\left|\int_{t_0}^{\tau_i}\widehat{Z}_s\,dB_s\right|^2\right],$$

zamenom (5.20), (5.21) i (5.22) u (5.19), dobija se

$$\begin{aligned}(1-4\lambda_3)|\widehat{Y}_{t_0}|^2+(1-k\lambda_2)\int_{t_0}^{\tau_i}e^{ks}|\widehat{Z}_s|^2ds-16\lambda_3k^2(T-t_0)\int_{t_0}^{\tau_i}|\widehat{Z}_s|^2ds \quad (5.23)\\
\leq (e^{k\tau_i}+4\lambda_3)|\widehat{Y}_{\tau_i}|^2+\left(\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_3}\right)\sup_{s\in[t_0,\tau_i]}e^{2ks}|\widehat{Y}_s|^2\\
+4\lambda_3\left|\int_{t_0}^{\tau_i}\widehat{Z}_sdB_s\right|^2-2\int_{t_0}^{\tau_i}e^{ks}\widehat{Y}_s\widehat{Z}_sdB_s\\
+\left(\frac{k}{\lambda_2}+k+16k^2(T-t_0)\lambda_3\right)\int_{t_0}^{\tau_i}e^{ks}|\widehat{Y}_s|^2ds\\
+(\lambda_1+8\lambda_3)(T-t_0)^2\alpha_1^2(\varepsilon).\end{aligned}$$

Kako je,

$$\begin{aligned}&\left[1-k\lambda_2+16k^2(T-t_0)\lambda_3\right]\int_{t_0}^{\tau_i}|\widehat{Z}_s|^2\,ds \qquad (5.24)\\
&\leq (1-4\lambda_3)\ |\widehat{Y}_{t_0}|^2+(1-k\lambda_2)\int_{t_0}^{\tau_i}e^{ks}|\widehat{Z}_s|^2\,ds-16\lambda_3k^2(T-t_0)\int_{t_0}^{\tau_i}|\widehat{Z}_s|^2\,ds\end{aligned}$$

iz (5.23) i (5.24) je

$$\begin{aligned}\left[1-k\lambda_2-16k^2(T-t_0)\lambda_3\right]\int_{t_0}^{\tau_i}|\widehat{Z}_s|^2ds\\
\leq\left(e^{\alpha\tau_i}+4\lambda_3+\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_3}\right)\sup_{s\in[t_0,\tau_i]}e^{2ks}|\widehat{Y}_s|^2\\
+4\lambda_3\left|\int_{t_0}^{\tau_i}\widehat{Z}_sdB_s\right|^2-2\int_{t_0}^{\tau_i}e^{ks}\widehat{Y}_s\widehat{Z}_s\,dB_s\\
+\left(\frac{k}{\lambda_2}+k+16k^2(T-t_0)\lambda_3\right)\int_{t_0}^{\tau_i}e^{ks}|\widehat{Y}_s|^2\,ds\\
+(\lambda_1+8\lambda_3)(T-t_0)^2\alpha_1^2(\varepsilon), \qquad (5.25)\end{aligned}$$

odnosno,

$$\begin{aligned}c_2(t_0)\int_{t_0}^{\tau_i}|\widehat{Z}_s|^2ds\leq c_3(t_0)\sup_{s\in[t_0,\tau_i]}|\widehat{Y}_s|^2+4\lambda_3\left|\int_{t_0}^{\tau_i}\widehat{Z}_sdB_s\right|^2-2\int_{t_0}^{\tau_i}e^{ks}\widehat{Y}_s\widehat{Z}_sdB_s\\
+(\lambda_1+8\lambda_3)(T-t_0)^2\alpha_1^2(\varepsilon), \qquad (5.26)\end{aligned}$$

gde je

$$c_2(t_0) = 1 - k\lambda_2 - 16k^2(T-t_0)\lambda_3,$$
$$c_3(t_0) = \left[e^{kT} + 4\lambda_3 + \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_3} + \left(\frac{k}{\lambda_2} + k + 16k^2(T-t_0)\lambda_3\right)(T-t_0)\right]e^{2kT}.$$

Kako je $p \in]1,2[$, to je $4^{\frac{p}{2}-1} \vee 1 = 1$. Primenom nejednakosti (1.10) na (5.26) sledi

$$\begin{aligned} c_2^{\frac{p}{2}}(t_0)\left(\int_{t_0}^{\tau_i} |\widehat{Z}_s|^2\,ds\right)^{\frac{p}{2}} \le c_3^{\frac{p}{2}}(t_0) \sup_{s\in[t_0,\tau_i]} |\widehat{Y}_s|^p \\ + 4^{\frac{p}{2}}\lambda_3^{\frac{p}{2}}\left|\int_{t_0}^{\tau_i} \widehat{Z}_s\,dB_s\right|^p + 2^{\frac{p}{2}}\left|\int_{t_0}^{\tau_i} e^{ks}\widehat{Y}_s\widehat{Z}_s\,dB_s\right|^{\frac{p}{2}} \\ + (\lambda_1 + 8\lambda_3)^{\frac{p}{2}}(T-t_0)^p\phi(\varepsilon). \end{aligned}$$

Iz poslednje ocene je

$$\begin{aligned} c_2^{\frac{p}{2}}(t_0)E\left(\int_{t_0}^{\tau_i} |\widehat{Z}_s|^2\,ds\right)^{\frac{p}{2}} \le c_3^{\frac{p}{2}}(t_0)E \sup_{s\in[t_0,\tau_i]} |\widehat{Y}_s|^p \\ + 4^{\frac{p}{2}}\lambda_3^{\frac{p}{2}}E\left|\int_{t_0}^{\tau_i} \widehat{Z}_s\,dB_s\right|^p + 2^{\frac{p}{2}}E\left|\int_{t_0}^{\tau_i} e^{ks}\widehat{Y}_s\widehat{Z}_s\,dB_s\right|^{\frac{p}{2}} \\ + (\lambda_1 + 8\lambda_3)^{\frac{p}{2}}(T-t_0)^p\phi(\varepsilon). \end{aligned} \tag{5.27}$$

Drugi i treći sabirak poslednje nejednakosti se ocenjuju primenom Burkholder–Davis–Guandy nejednakosti, kao

$$\begin{aligned} E\left|\int_{t_0}^{\tau_i} \widehat{Z}_s\,dB_s\right|^p &\le C_pE\left(\int_{t_0}^{\tau_i} |\widehat{Z}_s|^2\,ds\right)^{\frac{p}{2}}, \\ 2^{\frac{p}{2}}E\left|\int_{t_0}^{\tau_i} e^{ks}\widehat{Y}_s\widehat{Z}_s\,dB_s\right|^{\frac{p}{2}} &\le C_{\frac{p}{2}}2^{\frac{p}{2}}e^{\frac{pkT}{2}}E\left[\left(\int_{t_0}^{\tau_i} |\widehat{Y}_s|^2|\widehat{Z}_s|^2\,ds\right)^{\frac{p}{4}}\right] \\ &\le c_4E\sup_{s\in[t_0,\tau_i]} |\widehat{Y}_t|^p + \lambda_4\left(\int_{t_0}^{\tau_i} |\widehat{Z}_s|^2\,ds\right)^{\frac{p}{2}}, \end{aligned}$$

gde je $\lambda_4 > 0$ proizvoljna konstanta, $c_4 = \frac{1}{\lambda_4}C_{\frac{p}{2}}^2 2^{p-2}e^{pkT}$, a C_p i $C_{\frac{p}{2}}$ su generisane konstante iz Burkholder–Davis–Guandy nejednakosti. Iz prethodnih ocena i (5.27) se dobija

$$\begin{aligned} c_2^{\frac{p}{2}}(t_0)E\left(\int_{t_0}^{\tau_i} |\widehat{Z}_s|^2\,ds\right)^{\frac{p}{2}} \le c_3^{\frac{p}{2}}(t_0)E\sup_{s\in[t_0,\tau_i]} |\widehat{Y}_s|^p + 4^{\frac{p}{2}}\lambda_3^{\frac{p}{2}}C_pE\left(\int_{t_0}^{\tau_i} |\widehat{Z}_s|^2\,ds\right)^{\frac{p}{2}} \\ + c_4E\sup_{s\in[t_0,\tau_i]} |\widehat{Y}_t|^p + \lambda_4E\left(\int_{t_0}^{\tau_i} |\widehat{Z}_s|^2\,ds\right)^{\frac{p}{2}} \\ + (\lambda_1 + 8\lambda_3)^{\frac{p}{2}}(T-t_0)^p\phi(\varepsilon). \end{aligned}$$

Iz poslednje nejednakosti sledi

$$\left(c_2^{\frac{p}{2}}(t_0) - 4^{\frac{p}{2}}\lambda_3^{\frac{p}{2}}C_p - \lambda_4\right) E\left(\int_{t_0}^{\tau_i} |\widehat{Z}_s|^2\, ds\right)^{\frac{p}{2}} \tag{5.28}$$
$$\leq (c_3^{\frac{p}{2}}(t_0) + c_4) E \sup_{s\in[t_0,\tau_i]} |\widehat{Y}_s|^p + (\lambda_1 + 8\lambda_3)^{\frac{p}{2}}(T-t_0)^p\phi(\varepsilon).$$

Konstante λ_2, λ_3 i λ_4 se mogu izabrati tako da je $c_2^{\frac{p}{2}}(t_0) - 4^{\frac{p}{2}}\lambda_3^{\frac{p}{2}}C_p - \lambda_4 > 0$, na primer, $\lambda_2 = \frac{1}{2k}, \lambda_3 = \frac{1}{4\left[16k^2(T-t_0)+4C_p^{\frac{2}{p}}\right]}, \lambda_4 = \frac{1}{8}$. Tada iz (5.18) i (5.28) sledi da je

$$E\left(\int_{t_0}^{\tau_i} |\widehat{Z}_s|^2\, ds\right)^{\frac{p}{2}} \leq \frac{(c_3^{\frac{p}{2}}(t_0) + c_4)A_1(t_0) + (8\lambda_3 + \lambda_1)^{\frac{p}{2}}(T-t_0)^p}{c_2^{\frac{p}{2}}(t_0) - 4^{\frac{p}{2}}\lambda_3^{\frac{p}{2}}C_p - \lambda_4}\,\phi(\varepsilon)$$
$$\equiv A_2(t_0)\,\phi(\varepsilon),$$

pri čemu je $A_2(t_0)$ pozitivna generisana konstanta. Primenom Fatouove leme na poslednju ocenu, sledi

$$E\left(\int_{t_0}^{T} |\widehat{Z}_s|^2\, ds\right)^{\frac{p}{2}} \leq A_2(t_0)\,\phi(\varepsilon) \to 0, \quad \varepsilon \to 0. \tag{5.29}$$

Iz ovoga neposredno sredi (5.12) stavljajući $t_0 = 0$.

Na kraju, potrebno je oceniti razliku procesa K i K_ε. Iz (5.4) je

$$\widehat{K}_t = \widehat{\xi} - \widehat{Y}_t + \int_t^T (f^\varepsilon(s, Y_s^\varepsilon, Z_s^\varepsilon, \varepsilon) - f(s, Y_s, Z_s))\, ds - \int_t^T \widehat{Z}_s\, dB_s + \widehat{K}_T.$$

Imajući u vidu ocene (5.18) i (5.29), sledi da je

$$\begin{aligned}
E \sup_{t\in[t_0,T]} |\widehat{K}_t|^p \leq 5^{p-1} \Bigg\{ & E|\xi|^p + E \sup_{t\in[t_0,T]} |\widehat{Y}_t|^p \\
& + \left|\int_{t_0}^T (f^\varepsilon(s, Y_s^\varepsilon, Z_s^\varepsilon, \varepsilon) - f(s, Y_s, Z_s))\, ds\right|^p \\
& + E \sup_{t\in[t_0,T]} \left|\int_t^T \widehat{Z}_s\, dB_s\right|^p + E|\widehat{K}_T|^p \Bigg\} \\
\leq 5^{p-1} \Bigg\{ & \phi(\varepsilon) + A_1(t_0)\phi(\varepsilon) + (T-t_0)^{\frac{p}{2}} 2^{\frac{p}{2}} \Bigg[2^{\frac{p}{2}} k^p E\left(\int_{t_0}^T \left[|\widehat{Y}_t|^2 + |\widehat{Z}_t|^2\right] ds\right)^{\frac{p}{2}} \\
& + E\left(\int_{t_0}^T |f^\varepsilon(s, Y_s^\varepsilon, Z_s^\varepsilon, \varepsilon) - f(s, Y_s^\varepsilon, Z_s^\varepsilon)|^2\, ds\right)^{\frac{p}{2}} \Bigg] \\
& + C_p A_2(t_0)\phi(\varepsilon) + E|\widehat{K}_T|^p \Bigg\} \\
\leq 5^{p-1} \Big\{ & 1 + A_1(t_0) + (T-t_0)^{\frac{p}{2}} 2^{\frac{p}{2}} \Big[2^{p-1} k^p [(T-t_0)^{\frac{p}{2}}\, \widetilde{C}\, e^{c_1(T-t_0)} + A_2(t_0)] \\
& + (T-t_0)^{\frac{p}{2}} \Big] + C_p A_2(t_0) \Big\}\, \phi(\varepsilon) + 5^{p-1} E|\widehat{K}_T|^p.
\end{aligned} \tag{5.30}$$

Kako je

$$\widehat{K}_T = \widehat{Y}_0 - \widehat{\xi} - \int_0^T (f^\varepsilon(s, Y_s^\varepsilon, Z_s^\varepsilon, \varepsilon) - f(s, Y_s, Z_s))\, ds + \int_0^T \widehat{Z}_s\, dB_s,$$

to je na osnovu prethodne ocene

$$\begin{aligned} E|\widehat{K}_T|^p &\le 4^{p-1}\Big[E|\widehat{Y}_0|^p + E|\widehat{\xi}|^p + E\Big|\int_0^T (f^\varepsilon(s, Y_s^\varepsilon, Z_s^\varepsilon, \varepsilon) - f(s, Y_s, Z_s))\, ds\Big|^p \\ &\qquad + E\Big|\int_0^T \widehat{Z}_s\, dB_s\Big|^p\Big] \\ &\le 4^{p-1}\Big[\widetilde{C}\, e^{c_1 T} + 1 + T^{\frac{p}{2}} 2^{\frac{p}{2}}\big[2^{p-1} k^p (T^{\frac{p}{2}}\, \widetilde{C}\, e^{c_1 T} + A_2(0)) + T^{\frac{p}{2}}\big] + A_2(0)\Big]\phi(\varepsilon). \end{aligned}$$

Sada, iz (5.30) sledi da postoji generisana konstanta $A_3(t_0) > 0$ tako da je

$$E \sup_{t\in[0,T]} |\widehat{K}_t|^p \le A_3(t_0)\phi(\varepsilon) \to 0, \quad \varepsilon \to 0. \tag{5.31}$$

Na taj način, tvrđenje (5.12) neposredno sledi za $t_0 = 0$. $\diamondsuit$

5.1.4 Ocena dužine intervala za zadatu L^p-bliskost rešenja

Iz Teoreme 5.1.1 sledi da su vrednosti procesa stanja Y_t^ε i Y_t, kontrolnih procesa Z_t^ε i Z_t, i procesa K_t^ε i K_t, bliske u određenom smislu za dovoljno malo ε. Međutim, pri modeliranju nije neophodno zahtevati bliskost rešenja na celom vremenskom intervalu, već samo u blizini krajnjeg trenutka T. U skladu sa ovim zahtevom, za neku dopustivu vrednost $\eta > 0$ i ε dovoljno malo, može se odrediti vremenski trenutak $\bar{t}(\eta) = \bar{t} \in [0,T]$ tako da L^p-razlika između procesa Y_t^ε i Y_t ne prelazi zadatu vrednost η na $[\bar{t}, T]$. Naredna teorema se upravo odnosi na ovaj problem.

Teorema 5.1.2 *Neka su zadovoljeni uslovi Teoreme 5.1.1. Tada, za proizvoljnu konstantu $\eta > 0$ i svako $\varepsilon \in \big(0, \Phi^{-1}(\eta)\big]$, postoji $\bar{t} \in [0,T]$ oblika*

$$\bar{t} = \max\left\{0, T - \frac{1}{c_1}\ln\frac{\eta}{\phi(\varepsilon)c_3}\right\},$$

tako da je

$$\sup_{t\in[\bar{t},T]} E|Y_t^\varepsilon - Y_t|^p \le \eta, \tag{5.32}$$

$$E\left(\int_{\bar{t}}^T |\widehat{Z}_s|^2\, ds\right)^{\frac{p}{2}} \le A_2(\bar{t})\,\phi(\varepsilon), \tag{5.33}$$

$$E \sup_{t\in[\bar{t},T]} |\widehat{K}_t|^p \le A_3(\bar{t})\,\phi(\varepsilon), \tag{5.34}$$

gde su $A_2(\bar{t})$ i $A_3(\bar{t})$ generisane konstante (iz dokaza Teoreme 5.1.1).

Dokaz. Definišimo funkciju $S(\varepsilon, T-t), t \in [0,T]$ na sledeći način,

$$S(\varepsilon, T-t) = \phi(\varepsilon)\, \widetilde{C} e^{c_1(T-t)}.$$

Za proizvoljno $\eta > 0$ važi $S(\varepsilon, 0) \leq \eta$. Osim toga, iz (5.14) je

$$S(\varepsilon, 0) \leq \eta \leq S(\varepsilon, T)$$

tj.

$$\phi(\varepsilon)\, \widetilde{C} \leq \eta \leq \phi(\varepsilon)\, \widetilde{C} e^{c_1 T}.$$

U skladu sa prethodnom diskusijom, gde se pretpostavljalo da $\phi(\varepsilon)$ opada kada ε opada, sledi da je

$$\varepsilon_1 = \phi^{-1}\left(\frac{\eta}{\widetilde{C} e^{c_1 T}}\right) \leq \varepsilon \leq \phi^{-1}\left(\frac{\eta}{\widetilde{C}}\right) = \varepsilon_2,$$

gde je Φ^{-1} inverzna funkcija funkcije ϕ. Za svako $\varepsilon \in [\varepsilon_1, \varepsilon_2]$, jednostavno se određuje $\hat{t}$ iz relacije $S(\varepsilon, T-\hat{t}) = \eta$,

$$\hat{t} = T - \frac{1}{c_1} \ln \frac{\eta}{\phi(\varepsilon)\widetilde{C}}.$$

Primetimo da je $S(\varepsilon, T) < \eta$ za $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$. Za $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2)$ neka je

$$\bar{t} = \max\{0, \hat{t}\} = \max\left\{0, T - \frac{1}{c_1} \ln \frac{\eta}{\phi(\varepsilon)\widetilde{C}}\right\}.$$

Za svako $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2)$, lako se uočava da je

$$\sup_{t\in[\bar{t},T]} E|Y_s^\varepsilon - Y_s|^p \leq S(\varepsilon, T-\bar{t}) = \eta.$$

Očigledno, $\bar{t} \uparrow T$ kada $\varepsilon \uparrow \varepsilon_2$ i $\bar{t} \downarrow 0$ kada $\varepsilon \downarrow \varepsilon_1$, odnosno, $\bar{t} \downarrow 0$ kada $\varepsilon \downarrow 0$.

Na kraju, (5.33) i (5.34) jednostavno slede iz (5.29) i (5.31), respektivno. $\diamondsuit$

Specijalno, u slučaju aditivnih perturbacija, generatorska funkcija jednačine (5.2) ima oblik

$$f^\varepsilon(t, y, z, \varepsilon) = f(t, y, z) + \alpha_1(t, y, z, \varepsilon),$$

pri čemu je funkcija α_1 definisana isto kao i funkcija f, zavisna od ε. Tada se pretpostavka ***A1*** svodi na uslov da postoji neslučajna funkcija $\widehat{\alpha}_1(\varepsilon)$, takva da je

$$\sup_{(t,y,z)\in[0,T]\times B^p} |\alpha_1(t, y, z, \varepsilon)| \leq \widehat{\alpha}_1(\varepsilon) \ s.i.$$

Barijerni proces perturbovane jednčine (5.2) se perturbuje aditivno, tj.

$$L_t^\varepsilon = L_t + l_t^\varepsilon,$$

gde je proces l_t^ε definisan isto kao barijerni proces L_t. Pretpostavka ***A2*** se u tom slučaju svodi na uslov

$$E \sup_{t\in[0,T]} |l_t^\varepsilon|^p \leq \widehat{\alpha}_2(\varepsilon),$$

za neku neslučajnu funkciju $\widehat{\alpha}_2(\varepsilon)$. Pri ovako zadatim uslovima, sva prethodna tvrđenja koja se odnose na opšti tip perturbacija, važe u nepromenjenom obliku i u slučaju aditivnih perturbacija.

Zaključak

U ovoj disertaciji se razmatra više tipova perturbovanih backward stohastičkih diferencijalnih jednačina. Perturbovane backward stohastičke diferencijalne jednačine su analizirane pri različitim uslovima za koeficijente jednačine, pre svega pri Lipschitzovim uslovom i pri nekoliko varijanti nelipšicovskog uslova. Opisani problemi ne iscrpljuju sve ideje na temu perturbovanih backward stohastičkih diferencijalnih jednačina. Neka od budućih istraživanja se mogu odnositi na različite oblike perturbovanih backward stohastičkih diferencijalnih jednačina, na primer, na backward stohastičke diferencijalne jednačine sa barijerom i kašnjenjem, backward stohastičke diferencijalne jednačine sa barijerom i Poissonovim skokom, backward doubly stohastičke diferencijalne jednačine sa barijerom, kao i na primene teorijskih rezultata pre svega u ekonomiji i finansijama.

Klasa backward stohastičkih diferencijalnih jednačina sa jednom ili dve barijere bi se mogla proširiti na nehomogen slučaj. Analogno već prethodno opisanim problemima, mogla bi se uspostaviti veza rešenja homogene i nehomogene jednačine. Problem se može posmatrati pri Lipschitzov uslovu, kao i pri nekim slabijim, nelipšicovskim uslovima.

Zbog značaja Feynman–Kac formule u primenama, mogle bi se proučavati veze rešenja još nekih tipova backward stohastičkih diferencijalnih jednačina i odgovarajućih stohastičkih parcijalnih diferencijalnih jednačina.

Teoreme upoređivanja rešenja koje su dokazane u ovoj disertaciji, mogle bi se dopuniti Kneserovim problemom u daljem istraživanju, koji sa sobom povlači novo polje ideja.

Poznato je da se rešenja forward-backward stohastičkih diferencijalnih jednačina u velikoj meri primenjuju u finansijama i ekonomiji za modeliranje cena finansijskih ugovora. U tom smislu, promene okolnosti na tržištu u modelu koji se opisuje nekom forward-backward stohastičkom diferencijalnom jednačinom, mogle bi se opisati odgovarajućom perturbovanom forward-backward stohastičkom diferencijalnom jednačinom. Samim tim, ocena intervala bliskosti rešenja perturbovane i neperturbovane jednačine bi bila bitna, jer bi se time odredio vremenski interval na kome se cena odgovarajućeg finansijskog ugovora kreće u unapred zadatim granicama.

Summary

This thesis explores several types of perturbed backward stochastic differential equations. They are thoroughly analyzed under the different conditions, first of all – the Lipschitz condition, and then under the non-Lipschitz conditions. The thesis tackles many of the issues faced in the application of perturbed backward stochastic differential equations, but by no means it is fully comprehensive. Some future research could and should focus on perturbations of different types of backward stochastic differential equations, such as reflected backward stochastic differential equations with time delay, reflected backward stochastic differential equations with Poisson jump and particularly the applications of those equations in finance and economics.

The class of backward stochastic differential equations with one or two barriers could be extended to an inhomogeneous one. Consequently, an appropriate relation between the solution of homogeneous and inhomogeneous equations might be established. Further on, the problem may be considered under the Lipschitz condition, and also under some weaker, i.e. non-Lipschitz conditions.

Because of the significance of Feynman-Kac formula in applications, some relations between solutions of the backward stochastic differential equations and appropriate stochastic partial differential equations might be explored.

Comparison theorems which have successfully been proven in this thesis could also be extended with the Kneser problem in further research, which would open a new field of ideas and research opportunities.

It is generally agreed that the prices of some financial instrument may be determined by applying forward-backward stochastic differential equation, which is an important application of these equations in finance and economy. Consequently, any change of circumstances in the market can be included in the model with an appropriate perturbed forward-backward stochastic differential equation. Bearing this in mind, estimation of the interval of closeness of the solutions of perturbed and unperturbed equation is important, because in that way we could determine the time interval during which the prices of the corresponding financial instrument stay within the limits, which are given in advance.

Bibliografija

[1] A. Aman, M. N'zi, Backward stochastic nonlinear Volterra integral equations with local Lipschitz drift, Prob. Math. Stat. 25 (1) (2005) 105-127.

[2] A. Aman, Lp-solutions of reflected generalized backward stochastic differential equations with non-Lipschitz coefficients, Random Operators/Stochastic. Eqs. 17 (2008) 12-31.

[3] A. Aman, L^p-solutions of generalized backward stochastic differential equations with barrier, Afr. Diaspora J. Math 8 (1) (2009) 68-80.

[4] A. Aman, L^p-solutions of backward doubly stochastic differential equations, DOI: 10.1142/S0219493711500250.

[5] A. Aman, J.M. Owo, Generalized backward doubly stochastic differential equations driven by Lévy processes with non-Lipschitz coefficients, Acta Mathematica Sinica, English Series 28 (2012) 2011-2020.

[6] V. Anh, J. Yong, backward stochastic Volterra integral equations in Hilbert spaces, In: Differential and Difference Equations and Applications, Hindawi, New York (2006) 57-66.

[7] B. El-Asri and S. Hamadène, The finite horizon optimal multi-modes switching problem: The viscosity solution approach, Appl. Math. Optim., DOI: 10.1007/s00245-009- 9071-3

[8] L. Bachélier, Théorie de la speculation, Annales Scientifique de l'Ecole Normal Superieur (1990) 21-86.

[9] K. Bahlali, E.H. Essaky, M. Hassani, E. Pardoux, Existence, uniqueness and stability of backward stochastic differential equations with locally monotone coefficients, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 757-762.

[10] K. Bahlali, El. Essaky, Y. Ouknine, Reflected backward stochastic dif- ferential equations with jumps and locally Lipschitz coefficient, Random Oper. Stochastic Equations 10 (2002) 335-350.

[11] K. Bahlali, El. Essaky, Y. Ouknine, Reflected backward stochastic dif- ferential equations with jumps and locally monotone coefficient, Stoch. Anal. Appl. 22 (2004) 939-970.

[12] K. Bahlali, M. Hassani, B. Mansouri, N. Mrhardy, One barrier reflected backward doubly stochastic differential equations with continuous generator, C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009) 1201-1206.

[13] D. Bainov, P. Simeonov, Integral Inequalities and Applications, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Netherlands, 1992.

[14] H. Baoyan, Z. Bo, The solutions of backward doubly stochastic differential equations with non-Lipschitz coefficients, J. Appl. Math. and Informatics 29 (2011) 1143-1155.

[15] I. Bihari, A generalization of a lemma of Bellman and its application to uniqueness problems of differential equations, Acta Math. Acad. Sci. Hungar 7 (1956) 81-94.

[16] J. M. Bismut, Conjugate Convex Functions in Optimal Stochastic Control, J. Math. Anal. Appl. 44 (1973) 384-404.

[17] F. Black, M. Scholes, The Pricing of Options and Corporate Liabilities, J. Political Econ. 3 (1973) 637-654.

[18] B. Boufoussi, J. Casteren, N. Mrhardy, Generalized backward doubly stochastic differential equations and SPDEs with nonlinear Neumann boundary conditions, Bernoulli 13 (2007) 423-446.

[19] Ph. Briand, B. Delyon, Y. Hu, E. Pardoux and L. Stoica, Lp solutions of backward stochastic differential equations, Stoch. Process. Appl. 108 (2003) 109-129

[20] R. Brown, A brief account of microscopical observations made on the particles contained in the pollen of plants, London and Edinburgh philosophical magazine and journal of science 4 (1928) 161-173.

[21] D. Burkholder, B. Davis, R. Gundy, Integral inequalities for convex functions of operators on martingales, Proc. 6th Berkley Symp. Math. Statis. Prob., Berkley, Univ. of California Press 2 (1972) 223-240.

[22] H. Cramer, On the theory of random processes, Ann. Math. 41 (1940) 215-230.

[23] J. Cvitanić, I. Kartzas, Convex Duality in Constrained Portfolio Optimization, Ann. Appl. Probab. 2 (1992) 767-818.

[24] C. Dellacherie, Capacites et Processus Stochastiques, Springer-Verlag, Berlin, 1972.

[25] B. Djehiche, S. Hamadène and A. Popier, A finite horizon optimal multiple switching problem, arXiv:0707.2663.

[26] J. Djordjević, S. Janković, *Relations between solutions of some classes of backward stochastic Volterra integral equations*, predat za štampu.

[27] C. Dolean-Dade, P. Meyer, Integrales stochastiques par rapport aux matringales locales, Lect. Notes Math. 124 (1970) 77–107.

[28] J. L. Doob, Stochastic Processes, John Wiley, New York, 1953.

[29] D. Duffie, Security Markets: Stochastic Models. Boston: Academic Press, (1988).

[30] D. Duffie, L.Epstein, Stochastic Differential Utility, Econometrica 60 (2) (1992) 353-394.

[31] D. Duffie, l. Epstein, Asset Pricing with Stochastic Differential Utility, Rev. Financial Stud. 5 (1992) 411-436.

[32] A. Einstein, On the movement of small particles suspended in a stationary liquid demanded by the molecular-kinetic theory of heat, Ann. Physik 17 (1905) 891-921.

[33] H. Follmer, M. Schweizer, Hedging of Contigent Claims under Incomplete Information, Applied Stochastic Analysis, eds. M.H.A. Davis and R.J.Elliot.London: Gordon and Brach, 1990.

[34] M.I. Friedlin, A.D. Wentzell, Random Perturbations of Dynamical Systems, Springer, Berlin, 1984.

[35] A. Friedman, Stochastic Differential Equations and Applications, Academic Press, New York, 1975.

[36] I. I. Gikhman, Certain differential equations with random functions, Ukr. Math. J. 2 (3) (1950) 45-69. (In Russian)

[37] I. I. Gikhman, On the theory of differential equations of random processes, Ukr. Math. J. 2 (4) (1950) 37-63. (In Russian)

[38] I. I. Gikhman, A.V. Skorokhod, Stochastic Differential Equations, Naukova Dumka, Kiev, 1968. (In Russian)

[39] I. I. Gikhman, A.V. Skorokhod, Theory of Stochastic Prpcesses I,II,III, Nauka, Moskova, 1971. (In Russian)

[40] I. I. Gikhman, A.V. Skorokhod, Introduction to the Theory of Random Processes, Nauka, Moskova, 1977. (In Russian)

[41] I. I. Gikhman, A.V. Skorokhod, Stochastic Differential Equations and Their Applications, Naukova Dumka, Kiev, 1982. (In Russian)

[42] S. Hamadène, J.P. Lepeltier, Zero-sum stochastic differential games and BSDEs, Systems Control Lett. 24 (1995) 259-263.

[43] S. Hamadène and J.-P. Lepeltier, Backward equations, stochastic control and zero-sum stochastic differential games, Stoch. Stoch. Rep. 54 (1995) 221-231.

[44] S. Hamadène, J.P. Lepeltier, Reflected BSDEs and mixed game problem, Stochastic Processes and Their Appl. 85 (2) (2000) 177-188.

[45] S. Hamadène, Reflected BSDEs with discontinuous barrier and applications, Stoch. Stoch. Rep. 74 (2002) 571-596.

[46] S. Hamadène and Y. Ouknine, Reflected backward stochastic differential equations with jumps and random obstacle, Electron. J. Probab. 8 (2003) 1-20.

[47] S. Hamadène, BSDEs and risk sensitive control, zero-sum and nonzero-sum game problems of stochastic functional differential equations, Stochastic Process. Appl. 107 (2003) 145-169.

[48] S. Hamadène and M. Jeanblanc, On the stopping and starting problem: Application to reversible investment, Math. Oper. Res. 32 (2007) 182-192.

[49] S. Hamadène, A. Popier, L^p solutions for reflected backward stochastic differential equations, 12 (2012), DOI: 10.1142/S0219493712003651.

[50] M. Harrison, D. Kreps, Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets, J. Econ. Theory 20 (1979), 381-408.

[51] M. Harrison, S.R. Pliska, Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading, Stoch. Process. Appl. 11 (1981) 215-260.

[52] Y. Hu, S. Peng, A stability theorem of backward stochastic differential equations and its applications, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 324 (1997) 1059-1064.

[53] L. Hu, Y. Ren, Stochastic PDIEs with nonlinear Neumann boundary conditions and generalized backward doubly stochastic differential equations driven by Lévy processes, J. Computat. Appl. Math. 229 (2009) 230-239.

[54] K. Itô, Stochastic integrals, Proc. Imperial Acad. Tokyo 20 (1944) 519-524.

[55] K. Itô, On a stochastic integral equation, Proc. Imperial Acad. Tokyo, 22 (1946) 32-35.

[56] K. Itô, On stochastic differential equations, Memorial Math. Society 4 (1951) 1-51.

[57] K. Itô, On a formula concerning stochastic differentials, Nagoya Math. J. 3 (1951) 55-65.

[58] K. Itô, On a formula of stochastic differentials, Mathematika, Sbornik perevodov inost. statei 3 (1959) 131-141.

[59] S. Janković, M. Jovanović, Perturbed stochastic hereditary differential equations with integral contractors, Computers & Math. with Appl. 42 (2001) 871–881.

[60] S. Janković, M. Jovanović, Generalized stochastic perturbation-depending differential equations, Stochastic Analysis and Appl. 20 (6) (2002) 1281-1307.

[61] S. Janković, M. Jovanović, Analytic Approximations of Solutions to Stochastic Differential Equations (monograph), Faculty of Science and Mathematics, University of Niš, 2008.

[62] S. Janković, J. Djordjević, M. Jovanović, *On a class of backward doubly stochastic differential equations*, Applied Mathematics and Computation, 217 (2011), 8754-8764.(S. Jankovć, J. Djordjević, M. Jovanović: Corrigendum to *On a class of backward doubly stochastic differential equations*[Applied Mathematics and Computation 217 (2011) 8754-8764] Applied Mathematics and Computation, Volume 218, Issue 17, 1 May 2012, Pages 9033-9034.)

[63] S. Janković, M. Jovanović, J. Djordjević, Perturbed backward stochastic dfferential equations, Mathematical and Computer Modelling 55 (2012) 1734-1745.

[64] M. Jovanović, S. Janković, On perturbed nonlinear Itô type stochastic integro-differential equations, J. Math. Analysis and Appl. 269 (2002) 301-316.

[65] M. Jovanović, S. Janković, Functionally perturbed stochastic differential equations, Mathematishe Nachrihten 279 (16) (2006) 1808-1822.

[66] M. Jovanović, S. Janković, Neutral stochastic functional differential equations with additive perturbations, Applied Math. and Computations 213 (2009) 370-379.

[67] I. Karatzas, Optimization problems in in the theory of continuous trading, SIAM, J. Control Optim. 27 (1989) 1221-1259.

[68] I. Karatzas, S.E. Shreve, Brownian Motion and Stochastic Calculus, 2nd edition, Springer-Verlag, Berlin, 1991.

[69] N. El Karoui, M.C. Quenez, Dynamic progamming and pricing of contigent claims in incomplete market, Siam J. Control Optim. 33 (1995) 29-66.

[70] N. El-Karoui, E. Pardoux, M.C. Quenez, Reflected backwards SDEs and Ametican options, Numerical Methods in Finance, Publ. Newton Inst., Cambridge University Press, Cambridge (1997) 215-231.

[71] N. El-Karoui, C. Kapoudjian and E. Pardoux, S. Peng and M.-C. Quenez, Reflected solutions of backward SDEs, and related obstacle problems for PDEs, Ann. Probab. 25 (1997) 702-737.

[72] N. El-Karoui, S. Peng, M.C. Quenez, Backward stochastic differential equations in finance, Math. Finance 7 (1) (1997) 1-71.

[73] N. El-Karoui, S. Hamadène, BSDEs and risk-sensitive control, zero-sum and nonzero sum game problems of stochastic functional differential equations, Stochastic Processes and Their Appl. 107 (1) (2003) 145–169.

[74] R. Khasminskii, On stochastic processes defined by differential equations with a small parameter. Theory Prob. Appl. 11 (1966) 211-228.

[75] A. J. Khinchin, Correlation theory of stationar processes, Uspehi Matem. Nauk, 5 (1939) 42–51. (in Russian)

[76] A. N. Kolmogorov, Basic Notions in Probability Theory, ONTI, (1936). (in Russian)

[77] A. N. Kolmogorov, Analytic Methods in Probability Theory, Uspehi Matem. Nauk (1938) 5–41. (in Russian)

[78] J.-P. Lepeltier, A. Matoussi and M. Xu, Reflected backward stochastic differential equations under monotonicity and general increasing growth conditions, Adv. Appl. Probab. 37 (2005) 134-159.

[79] J.-P. Lepeltier and M. Xu, Penalization method for reflected backward stochastic differential equations with one r.c.l.l. barrier, Statist. Probab. Lett. 75 (2005) 58-66.

[80] R.S. Liptser, A.N. Shiryaev, Statistics of Random Processes I,II, Springer, New York, 1977.

[81] R.S. Liptser, A.N. Shiryaev, Theory of Martingales, Nauka, Moscow, 1986.(In Russian)

[82] N.V. Krylov, B.L.Rozovskii, Stochastic evolution equations, J. Sov. Math. 16, (1981) 1233-1277.

[83] H. Kunita, S. Watanabe, On square integrable martingales, Nagoya Math. J., 30 (1967) 209–245.

[84] J. Lin, Adapted solution of a backward stochastic nonlinear Volterra integral equation, Stoch. Anal. Appl. 20 (1) (2002) 165–183.

[85] Q. Lin, A class of backward doubly stochastic differential equations with non-Lipschitz conditions, Stat. Prob. Letters 79 (2009) 2223–2229.

[86] J. Ma, P. Protter, J. Yong, Solving Forward-Backward Stochastic Differential Equations Explicitly - a Four Step Scheme, Probab. Theory Relat. Fields. 98 (1994) 339-359.

[87] B.J. Ma, P. Protter, J.S. Martin, S. Torres, Numerical method for backward stochastic differential equations, The Annals of Applied Prob. 12 (1) (2002) 302-316.

[88] X. Mao, Adapted solutions of backward stochastic differential equations with non-Lipschitz coefficients, Stochastic Processes and Their Applications 58 (1995) 281-292.

[89] X. Mao, Stochastic Differential Equations and Applications, Horvood, Chichester, UK (Second Edition), 2008.

[90] A. Matoussi, Reflected solutions of backward stochastic differential equations with continuous coefficient, Statist. Probab. Lett. 34 (1997) 347-354.

[91] R. Merton, Theory of Rational Optional Pricing, Bell J. Econ. Manage. Sci. 4 (1973) 141-183.

[92] R. Merton, Continious Time Finance, Basil Blackwell, 1991.

[93] P. A. Meyer, A decomposition theorem for supermartingales, Ilinois J. Math. 2 (1962) 193-205.

[94] P. A. Meyer, Decomposition of supermartingales; the uniqueness theorem, Ilinois J. Math. 7 (1963) 1-17.

[95] P. A. Meyer, Probability and Potentials, Blaisdell, Waltham, 1966.

[96] P. A. Meyer, Un cours sur les intégrales stochastiques, Lecture Notes in Math. 511 (1976) 245-398.

[97] D.S. Mitrinović, J.E. Pečarić, A.M. Fink, Inequalities Involving Functions and Their Integrals and Derivatives, Kluwer Academic Publishers, 1991.

[98] D. Nualart, E. Pardoux, Stochastic calculus with anticipating integrals, Probab. Theory Related Fields 78 (1988) 535-581.

[99] D. Nualart, The Malliavin Calculus and Related Topics, Springer, 1995.

[100] M. El Otmani, N. Mrhardy, Converse comparison theorems for backward doubly stochastic differential equations, Communications on Stoch. Anal. 3 (3) (2009) 433-441.

[101] M. N'zi, J.M. Owo, Backward doubly stochastic differential equations with non-Lipschitz coefficients, Random Oper. Stochastic Equations 16 (2008) 307-324.

[102] M. N'zi, J.M. Owo, Backward doubly stochastic differential equations with discontinuous coefficients, Stat. Prob. Letters 79 (2009) 920-926.

[103] D. Ocone, Pardoux, A stochastic Feynman-Kac formula for anticipating SPDEs, and application to nonlinear smoothing, Stochastics 45 (1993) 79-126.

[104] Y. Ouknine, Reflected BSDE with jumps, Stoch. Stoch. Rep. 65 (1998) 111-125.

[105] E. Pardoux, Un résultat sur les équations aux dérivés partielles stochastiques et filtrage des processus de diffusion, Note C.R. Acad. Sci., Paris Sér. A 287 (1978) 1065-1068.

[106] E. Pardoux, Stochastic PDEs, and filtering of diffusion processes, Stochastics 3, (1979) 127-167.

[107] E. Pardoux, S.G. Peng, Adapted solution of a backward stochastic differential equation, Systems & Control Letters 14 (1) (1990) 55-61.

[108] E. Pardoux, S.G. Peng, Backward stochastic differential equations and quasilinear parabolic partial differential equations, in: Stochastic Partial Differential Equations and Their Applications, (Charlotte, NC, 1991) (B. Rozowskii and R. Sowers, eds.), Lecture Notes in Control and Information Systems, Vol. 176, Springer, Berlin (1992) 200-217.

[109] E. Pardoux, S, Peng, Some Backward Stochastic Differential Equations with non-Lipschitz Coefficients, Proc. Conf. Metz, 1993, $http : //mathfinance.sdu.edu.cn/peng/publications_2.html$.

[110] E. Pardoux, S. Peng, Backward doubly stochastic differential equations and systems of quasilinear SPDEs, Probab. Theory Related Fields 98 (1994) 209-227.

[111] E Pardoux and A. Rascanu, Backward stochastic differential equations with subdifferential operator and related variational inequalities, Stochastic Process. Appl. 76 (1998) 191-215.

[112] E. Pardoux, BSDEs, Weak convergence and homogenization of semilinear parabolic PDEs, in: Nonlinear Analysis, Differential Equations and Control, (Montreal, QC, 1998) (F.H. Clarke, R.J. Stern, and G.Sabidussi, eds.), NATO Sci.Ser.C. Math.Phys.Sci, vol. 528, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht (1999) 503-549.

[113] S. Peng, Probabilistic interpretation for systems of quasilinear parabolic partial differential equations, Stochastics 37 (1991) 61-74 .

[114] S. Peng, Stochastic Hamilton-Jacobi-Bellman Equations, SIAM J. Control Optim 30 (1992) 284-304.

[115] S. Peng, A generalized dynamic programming principle and Hamiliton-Jacobi-Bellmann equation, Stochastics 38 (1992) 119-134.

[116] S. Peng, A non linear Feynman-Kac formula and applications, Chen, S.P., Yong, J.M.(eds.) Proc. of Symposium on system science and control theory, Singapore World Scientific (1992), 173-184.

[117] S.Peng, Backward stochastic differential equations and exact controllability of stochastic control systems, Progress in Natural Science 4 (1994) 274-284.

[118] Y. Ren and N. Xia, Generalized reflected BSDEs and an obstacle problem for PDEs with a nonlinear Neumann boundary condition, Stoch. Anal. Appl. 24 (2006) 1013-1033.

[119] Y. Ren and L. Hu, Reflected backward stochastic differential equations driven by Levy processes, Statist. Probab. Lett. 77 (2007) 1559-1566.

[120] Y. Ren, A. Lin, L. Hu, Stochastic PDIEs and backward doubly stochastic differential equations driven by Lévy processes, J. Computat. Appl. Math. 223 (2009) 901-907.

[121] Y. Ren, On solutions of backward stochastic Volterra integral equations with jumps in Hilbert spaces, J. Optim. Theory Appl. 144 (2010) 319-333.

[122] Y. Ren, Reflected backward doubly stochastic differential equations driven by Lévy processes, C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 384 (2010), 439-444.

[123] B.L. Rozovskii, Stochastic Evaluation Systems, Dordrecht: Reidel 1991.

[124] Y. Shi, Y. Gu, Reflected solutions of backward doubly stochastic differential equations and applications, arXiv:0806.0917v2 [math.PR] 8 Jun 2009.

[125] Y. Shi, Y. Gu, K. Liu, Comparison theorems of backward doubly stochastic differential equations and applications, Stoh. Anal. Appl. 23 (2005) 97-110.

[126] E. E. Sluckii, Sur les fonctiones éventelles continues intégrables et dérivables dans le sens stochastique, Comptes Rendus Acad. Sci. 187 (1928) 370-372.

[127] J. Stoyanov, Regularly perturbed stochastic differential systems with an internal random noise, in: Proc. 2nd World Congress Nonlin. Anal., Athens, July 96. Athens: 1996.

[128] J. Stoyanov, D. Botev, Quantitative results for perturbed stochastic differential equations, J. Appl. Math. Stoch. Anal. 9 (3) (1996) 255-261.

[129] Z. Wang, X. Zhang, Non-Lipschitz backward stochastic Volterra type equations with jumps, Stoch. Dyn. 7 (4) (2007) 479-496.

[130] Y. Wang, Z. Huang, Backward stochastic differential equations with non-Lipschitz coefficients, Statistics and Probability Letters 79 (2009) 1438-1443.

[131] N. Wiener, Differential spaces, J. Math. Phys. 2 (1923) 131-174.

[132] N. Wiener, The homogeneous chaos, Amer. J. Math. 60 (1930) 897-936.

[133] J Yong, Backward stochastic Volterra integral equations and some related problems, Stochastic Processes and their Application 116 (2006) 779-795.

[134] J Yong, Well- Posedness and Regularity of Backward stochastic Volterra integral equations, Probab. Theory Related Fields vol 142 Nos 1-2 (2008) 1-312.

[135] L. Zhang, Y. Shi, Comparison theorem of multi-dimensional backward doubly stochastic differential equations on infinite horizon, J. Appl. Math. (2012), doi:10.1155/2012/304781 (14str.).

[136] Q. Zhou, Y. Ren, Reflected backward stochastic differential equations with time delayed generators, Statistics and Probability Letters 82 (2012) 979-990.

ПРИРОДНО - МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ НИШ
КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА

Редни број, **РБР**:	
Идентификациони број, **ИБР**:	
Тип документације, **ТД**:	**монографска**
Тип записа, **ТЗ**:	**текстуални / графички**
Врста рада, **ВР**:	**докторска дисертација**
Аутор, **АУ**:	**Јасмина С. Ђорђевић**
Ментор, **МН**:	**Светлана Јанковић**
Наслов рада, **НР**:	**BACKWARD СТОХАСТИЧКЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ СА ПЕРТУРБАЦИЈАМА**
Језик публикације, **ЈП**:	**српски**
Језик извода, **ЈИ**:	**енглески**
Земља публиковања, **ЗП**:	**Србија**
Уже географско подручје, **УГП**:	**Србија**
Година, **ГО**:	**2013.**
Издавач, **ИЗ**:	**ауторски репринт**
Место и адреса, **МА**:	**Ниш, Вишеградска 33.**
Физички опис рада, **ФО**: (поглавља/страна/ цитата/табела/слика/графика/прилога)	**125 стр., граф. приказ**
Научна област, **НО**:	**математика**
Научна дисциплина, **НД**:	**вероватноћа и статистика**
Предметна одредница/Кључне речи, **ПО**:	**стохастички процеси, дифренцијалне једначине**
УДК	**519.216:517.9(043.3)**
Чува се, **ЧУ**:	**библиотека**
Важна напомена, **ВН**:	

Извод, **ИЗ**:	**У овој дисертацији је описано више типова пертурбованих backward стохастичких диференцијалних једначина. Оне су проучаване при различитим условима, пре свега при Lipschitzovom услову за коефицијенте једначина, као и при неким нелипшицовским условима. Оцењују се интервали блискости решења пертурбоване и непертурбоване једначине у случају адитивних пертурбација backward стохастичких диференцијалних једначина, линеарних пертурбација backward doubly стохастичких диференцијалних једначина и општих пертурбација backward стохастичких диференцијалних једначина са баријером. За специјалан тип пертурбација изведена је веза решења хомогене и нехомогене backward doubly стохастичке диференцијалне једначине, као и веза решења хомогене и нехомогене Volterra backward стохастичке диференцијалне једначине. За једну класу backward doubly стохастичких диференцијалних једначина доказане су теореме упоређивања. Описана је веза решења ових једначина са решењима одговарајућих стохастичких парцијалних диференцијалних једначина, тј. изведена је Feynman-Kac формула.**
Датум прихватања теме, **ДП**:	**24.09.2012.**
Датум одбране, **ДО**:	
Чланови комисије, **КО**: Председник:	
Члан:	
Члан, ментор:	

Образац Q4.09.13 - Издање 1

ПРИРОДНО - МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
НИШ

KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number, **ANO**:	
Identification number, **INO**:	
Document type, **DT**:	**monograph**
Type of record, **TR**:	**textual / graphic**
Contents code, **CC**:	**doctoral dissertation**
Author, **AU**:	**Jasmina S. Đorđević**
Mentor, **MN**:	**Svetlana Janković**
Title, **TI**:	**BACKWARD STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH PERTURBATIONS**
Language of text, **LT**:	**Serbian**
Language of abstract, **LA**:	**English**
Country of publication, **CP**:	**Serbia**
Locality of publication, **LP**:	**Serbia**
Publication year, **PY**:	**2013.**
Publisher, **PB**:	**Author's reprint**
Publication place, **PP**:	**Niš, Višegradska 33.**
Physical description, **PD**: (chapters/pages/ref./tables/pictures/graphs/appendixes)	**125 p. ; graphic representation**
Scientific field, **SF**:	**mathematics**
Scientific discipline, **SD**:	**probability and statistics**
Subject/Key words, **S/KW**:	**stochastic processes, differential equation**
UC	**519.216:517.9(043.3)**
Holding data, **HD**:	**library**
Note, **N**:	

Abstract, **AB**:	**This thesis explores several types of perturbed backward stochastic differential equations. They are thoroughly studied under the different conditions for their coefficients, first of all -- the Lipschitz condition, and then under the non-Lipschitz conditions. In the case of additive perturbations for backward stochastic differential equations, linear perturbations for backward doubly stochastic differential equations and general type of perturbations for reflected backward stochastic differential equations, the intervals of the closeness of the solutions of perturbed and unperturbed equations are established. As a consequence of a special case of perturbations, an appropriate relation between solutions of homogeneous and inhomogeneous equations is established for backward doubly stochastic differential equations, as well as for Volterra backward stochastic differential equations. Comparison theorems for a class the backward doubly stochastic differential equations are stated. Some relations between their solutions and the solutions of appropriate stochastic partial differential equations is given, that is, the Feynman-Kac formula is obtained.**
Accepted by the Scientific Board on, **ASB**:	**September, 24th, 2012**
Defended on, **DE**:	
Defended Board, **DB**: President:	
Member:	
Member, Mentor:	