UNIVERZITET U NIŠU
PRIRODNO–MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU

Marina Tošić

GENERALISANI I HIPERGENERALISANI PROJEKTORI

Doktorska disertacija

Mentor: Prof. dr Dragana S. Cvetković-Ilić

Niš, 2013.

Sadržaj

Predgovor

U ovoj doktorskoj disertaciji izloženi su novi i originalni rezultati vezani za generalisane i hipergeneralisane projektore, koji su objavljeni u radovima [115], [116], [117] i [118] i rezultati iz neobjavljenog rada [119].

Kao prirodno uopštenje ortogonalnih projektora, pojam generalisanog i hipergeneralisanog projektora definisali su 1997. godine Groß i Trenkler [53]. Naime, generalisan projektor je normalna kvadripotentna matrica, dok je hipergeneralisan projektor EP kvadripotentna matrica. U navedenom radu izložene su i osnovne osobine i rezultati vezani za sumu, razliku i proizvod generalisanih i hipergeneralisanih projektora. Nakon toga slede radovi [2], [12], [10], [110], [35] u kojima se detaljnije izučavaju osobine generalisanih i hipergeneralisanih projektora.

Predmet proučavanja ove disertacije je invertibilnost linearne kombinacije generalisanih i hipergeneralisanih projektora, kao i oblik Moore-Penrose-ovog inverza linearne kombinacije generalisanih i hipergeneralisanih projektora.

Generalisani inverzi proučavaju se u mnogim matematičkim disciplinama, npr. u linearnoj algebri, teoriji operatora, teoriji semigrupa, prstena itd. i nalaze primenu u mnogim naučnim i praktičnim disciplinama, kao što su: statistika, operaciona istraživanja, fizika, ekonomija i elektrotehnika. Jedan od najčešće korišćenih uopštenih inverza je Moore-Penrose-ov inverz. Osim Moore-Penrose-ovog inverza, teorija uopštenih inverza prepoznaje različite tipove generalisanih inverza kao što su: Drazin-ov inverz, grupni inverz, težinski Moore-Penrose-ov inverz, $\{i, j, k\}$-inverzi, Bott-Duffin -ov inverz itd. Glavna i najvažnija karakteristika svih navedenih inverza je to što su za datu matricu oni jedinstveni i što poseduju sva svojstva tipična za njih.

Ova doktorska disertacija sastoji se iz pet glava, a svaka glava iz više poglavlja.

Prva glava je uvodnog tipa. U Poglavlju 1.1 uvode se uobičajene oznake i pojmovi koji će biti korišćeni. U Poglavljima 1.2 i 1.3 navode se definicije i osnovne osobine projektora i uopštenih inverza kompleksnih matrica, redom, dok se u Poglavlju 1.4 mogu naći osnovne informacije o EP matricama. Involutivne matrice i njihova linearna kombinacija su predmet proučavanja u Poglavlju 1.5.

Druga glava sastoji se iz tri poglavlja. U Poglavlju 2.1 definišu se pojmovi generalisanih i hipergeneralisanih projektora i izlažu kako njihovi međusobni odnosi, tako i njihovi odnosi sa skupovima parcijalne izometrije, normalnih, EP, WEP, WN i kvadripotentnih matrica, projektora i ortogonalnih projektora. Takođe, predstavljeno je njihovo razlaganje uz pomoć singularnih vrednosti. Uopštenje generalisanih projektora, tzv. k-generalisani projektori proučavaju se u Poglavlju 2.2. U ovom delu izloženi su rezultati koji karakterišu k-generalisane projektore i razmatra se kada je linearna kombinacija dva komutativna k-generalisana projektora k-generalisani projektor. Na kraju druge glave, u Poglavlju 2.3, definiše se nekoliko vrsta parcijalnih uređenja: zvezda, levo-zvezda, desno-zvezda i minus (rang razlika) parcijalno uređenje, grupno uređenje i zvezda ortogonalnost, posmatra se veza između datih binarnih relacija i navode rezultati vezani za projektore, ortogonalne projektore, generalisane i hipergeneralisane projektore, EP matrice i proizvoljne matrice povezane nekom od gore navedenih relacija.

Rezultati iz treće glave predstavljaju originalne rezultate radova [115] i [117].

Osnovni motiv za rezultate iz Poglavlja 3.1 i 3.2 bio je rad Koliha-e, Rakočevića i Straškraba-e [71] u kome su autori posmatrali invertibilnost sume i razlike idempotentnih matrica P i Q. Rezultati predstavljeni u ovim poglavljima uopštavaju rezultate iz [71] na skup generalisanih i hipergeneralisanih projektora. Razmatraju se uslovi pod kojima je linearna kombinacija $c_1A^k + c_2B^l$ dva komutativna generalisana, odnosno hipergeneralisana projektora A i B invertibilna. Takođe su dati i potrebni i dovoljni uslovi dobijeni pri rešavanju ovog problema kada generalisani ili hipergeneralisani projektori, koji čine linearnu kombinaciju, zadovoljavaju određene uslove. Pokazuje se nezavisnost invertibilnosti linearne kombinacije $c_1A^k + c_2B^l$ od izbora konstanti

$c_1, c_2 \in C \setminus \{0\}$ koje zadovoljavaju $c_1^3 + c_2^3 \neq 0$ i $k, l \in N$, što je prilično neočekivani rezultat.

U Poglavlju 3.3 proučava se invertibilnost linearne kombinacije dve matrice koje su uređene nekim od parcijalnih uređenja. U slučaju EP matrica koje su zvezda-ortogonalne ili povezane zvezda-parcijalnim uređenjem dobijaju se rezultati koji uopštavaju rezultate iz Poglavlja 3.2. Takođe se pokazuje da je linearna kombinacija dve matrice A i B povezane bilo kojom vrstom parcijalog uređenja invertibilna ako i samo ako je matrica B invertibilna. Ovim je ujedno pokazana i nezavisnost invertibilnosti linearne kombinacije takvih matrica od izbora konstanti.

Orginalni rezultati iz radova [116] i [118] čine četvrtu glavu.

U Poglavlju 4.1 prikazan je oblik Moore-Penrose-ovog inverza linearne kombinacije $c_1A^m + c_2B^k$ kao i, specijalno, linearnih kombinacija $c_1A + c_2B$, $c_1A^m + c_2A^k$ i $A^k(c_1A^m + c_2B^n)$, pri čemu su A i B komutativni generalisani ili hipergeneralisani projektori, $c_1, c_2 \in \mathbf{C}$ i $n, m, k \in \mathbf{N}$. Jedan deo rezultata je dobijen proučavanjem invertibilnosti linearne kombinacije $c_1A + c_2B + c_3C$, pri čemu su A, B i C komutativni generalisani ili hipergeneralisani projektori i $BC = 0$. Specijalno, pokazuje se da je matrica $c_1I_n + c_2\prod_{i=1}^{m} A_i^{k_i}$ invertibilna, gde je I jedinična matrica, $A_i \in C^{n\times n}$, $i = \overline{1,m}$ komutativni generalisani ili hipergeneralisani projektori, $m, k_1, \ldots, k_m \in \mathbf{N}$, $c_1, c_2 \in \mathbf{C}$, $c_1 \neq 0$ i $c_1^3 + c_2^3 \neq 0$.

U Poglavlju 4.2 navode se osobine skupa hipergeneralisanih k-projektora, tj. matrica sa svojstvom $A^k = A^\dagger$, $k \in \mathbf{N}$, $k \geq 2$, koje predstavljaju prirodno uopštenje hipergeneralisanih projektora.

Rezultati iz Poglavlja 4.3 predstavljaju uopštenje rezultata iz Poglavlja 4.1 sa skupa hipergeneralisanih projektora na skup hiperegeneralisanih k-projektora. Dat je oblik Moore-Penrose-ovog inverza linearne kombinacije $c_1A + c_2B$, razmatra se invertibilnost linearne kombinacije $c_1A + c_2B + c_3C$ i dokazuje invertibilnost matrice $c_1I_n + c_2\prod_{i=1}^{m} A_i^{k_i}$ hipergeneralisanih k-projektora.

Rezultati iz pete glave predstavljaju originalne rezultate rada [119].

U Poglavlju 5.1 razmatra se kada je linearna kombinacija $c_1A + c_2B$ komutativnih involutivnih matrica k-potent, pri čemu je $k \in N$ i $k \geq 2$. Problem se razmatra u dva slučaja: kada je k neparan broj i kada je k paran broj. Motiv za ove rezultate bio je rad [93], u kome su autori okarakterisali sve slučajeve u kojima je linearna kombinacija involutivnih matrica tripotentna, idempotentna ili involutivna matrica.

Takođe, u radu [93] opisani su svi slučajevi u kojima je linearna kombinacija c_1A+c_2B involutivna matrica, kada su A i B idempotentne ili tripotentne matrice. U Poglavlju 5.2 daje se rešenje problema kada je linearna kombinacija oblika $c_1I_n+c_2A+c_3B$ invertibilna ili involutivna matrica, pri čemu idempotentne matrice A i B zadovoljavaju jedan od slecećih uslova: $A-B=0$ ili $AB=B$ i $BA=A$ ili $(A-B)^2=A-B$ ili $(A+B)^2=A+B$. Takođe, posmatra se da li je mogiće da je linearna kombinacija oblika $c_1I_n+c_2A+c_3B$ involutivna matrica, kada idempotentne matrice A i B zadovoljavaju $ABA=BAB$ ili $AB=BA$.

Posebno se zahvaljujem svom mentoru, prof. dr Dragani S. Cvetković-Ilić, na posvećenom vremenu, podršci i savetima u mom naučnom radu, kao i na izuzetnom strpljenju, korisnim sugestijama i nesebičnoj pomoći u pripremi ove disertacije.

Takođe se zahvaljujem svojoj porodici na podršci i razumevanju.

Glava 1

Uvod

1.1 Oznake i pojmovi

Neka je $\mathbf{C}^{m\times n}$ skup svih matrica tipa $m \times n$ nad poljem kompleksnih brojeva. Za podskup skupa $\mathbf{C}^{m\times n}$ kome pripadaju sve matrice ranga r koristi se oznaka $\mathbf{C}_r^{m\times n}$. Takođe se koriste oznake A^T, A^* i $r(A)$ za transponovanu, odnosno adjungovanu matricu matrice A i rang matrice A, redom. Sa I ili I_n označavaće se jedinična matrica reda n. Takođe koristiće se sledeće oznake: za $k \in N$ i $k > 1$ skup kompleksnih korena od 1 označavaće se sa σ_k i ako je $\omega_k = e^{2\pi i/k}$, tada je $\sigma_k = \{\omega_k^0, \omega_k^1, ..., \omega_k^{k-1}\}$. Za proizvoljnu matricu $\mathrm{A} \in \mathrm{C}^{m\times n}$ skup: $\mathcal{R}(A) = \{y \in \mathbf{C}^m : y = Ax, \text{ za neko x} \in \mathrm{C}^\mathrm{n}\}$ je slika (prostor kolona) matrice A, dok sa $\mathcal{N}(A) = \{x \in C^n : Ax = 0\}$ označavamo nula prostor ili jezgro matrice A.

Kvadratna kompleksna matrica je hermitska ako važi $A = A^*$, normalna ukoliko je $AA^* = A^*A$, unitarna ako je $A^* = A^{-1}$, a kvadripotentna ako je $A^4 = A$. Sa C_n^N, C_n^U i C_n^{QP} označavamo podskupove skupa $\mathbf{C}^{n\times n}$ koji se sastoje od normalnih, unitarnih i kvadripotentnih matrica, redom. Matrica $A \in C^{n\times n}$ je involutivna ako važi $A^2 = I$, k-potent ako je $A^k = A$ za $k \in N$, $k \geq 2$. Ako je $k = 3$, onda je matrica $A \in C^{n\times n}$ tripotent. Za matricu A kažemo da se može dijagonalizovati ako postoji invertibilna matrica P takva da je matrica $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$ dijagonalna. Sa $tr(A)$ označavamo trag matrice $A \in C^{n\times n}$, tj. zbir elemenata matrice A na glavnoj dijagonali.

Broj $\lambda \in \mathbf{C}$ je sopstvena vrednost matrice $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$, ako važi $Ax = \lambda x$, za neki nenula vektor $x \in \mathbf{C}^n$, koji se u tom slučaju naziva sopstveni vektor matrice A. Spektar matrice A predstavlja skup svih njenih sopstvenih vrednosti i označava se sa $\sigma(A)$. Indeks matrice $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$, u oznaci $ind(A)$, je najmanji $k \in \mathbf{N}$ za koji $r(A^{k+1}) = r(A^k)$.

Neka su X i Y proizvoljni Banahovi prostori. $\mathcal{L}(X,Y)$ je skup svih ograničenih linearnih operatora iz X u Y; u slučaju kada je $X = Y$ koristimo oznaku $\mathcal{L}(X)$. Poznato je da $\mathcal{L}(X)$ predstavlja Banahovu algebru ograničenih linearnih operatora.

Neka je $A \in \mathcal{L}(X,Y)$. Nula-prostor (jezgro) operatora A, u oznaci $\mathcal{N}(A)$, je skup $\mathcal{N}(A) = \{x \in X : Ax = 0\}$. Slika operatora A, u oznaci $\mathcal{R}(A)$, je skup $\mathcal{R}(A) = \{Ax : x \in X\}$. Skupovi $\mathcal{N}(\mathcal{A})$ i $\mathcal{R}(A)$ su redom potprostori prostora X i Y. Ako je $\mathcal{N}(A) = \{0\}$, kažemo da je operator A injektivan ("1-1"); ako je $\mathcal{R}(A) = Y$, tada je operator A surjektivan ("na"). A je bijekcija ako je "1-1" i "na". Svaki linearan operator sa jednog konačnodimenzionalnog vektorskog prostora na drugi može se predstaviti matricom, jednoznačno određenom linearnim operatorom i izborom baza u odgovarajućim prostorima. Ova jednoznačna korespodencija dopušta da se koristi isti simbol za označavanje operatora i njegove matrice.

1.2 Neka interesantna svojstva projektora

Neka su M i N potprostori vektorskog prostora X. Tada:

$$Z \equiv M + N = \{z : z = x + y, x \in M, y \in N\}$$

označava sumu potprostora M i N. Ako je $M \cap N = \{0\}$, Z je direktna suma potprostora M i N, u oznaci $Z = M \oplus N$. Ako je $X = M \oplus N$ kaže se da je potprostor N algebarski komplement potprostora M. U vektorskom prostoru X svaki potprostor ima algebarski komplement.

Preslikavanje $P : X \to X$ za koje važi $P^2 = P$ je idempotent. Linearni idempotent je projektor. Sa C_n^P označavamo skup svih projektora iz prostora $\mathbf{C}^{n\times n}$. Za svaki projektor P potprostori $\mathcal{R}(P)$ i $\mathcal{N}(\mathcal{P})$ su algebarski komplementarni, odnosno $X = \mathcal{R}(P) \oplus \mathcal{N}(\mathcal{P})$.

Sa druge strane, ako je $X = M \oplus N$, tada se svako $x \in X$ može jednoznačno prikazati kao $x = x_1 + x_2$, gde je $x_1 \in M$, $x_2 \in N$. Preslikavanje $P : X \to X$, definisano sa $Px = x_1$ je projektor, $\mathcal{R}(P) = M$, $\mathcal{N(P)} = \mathcal{N}$, i naziva se projektor iz prostora X na M paralelno sa N, u oznaci $P_{M,N}$.

Ako je X normirani prostor, M i N zatvoreni potprostori u X i $X = M \oplus N$, tada kažemo da je X topološka direktna suma potprostora M i N. Potprostor N je topološki komplement potprostora M.

Neka je X Hiblertov prostor i M zatvoren podprostor u X. Kako je $X = M \oplus M^{\perp}$, svako $x \in X$ može se jednostavno prikazati kao $x = x_1 + x_2$, gde je $x_1 \in M$, $x_2 \in M^{\perp}$. Preslikavanje $P : X \to X$, definisano sa $Px = x_1$ je ortogonalni projektor na M, u oznaci P_M. Sa C_n^{OP} označavaće se skup ortogonalnih projektora iz prostora $\mathbf{C}^{n \times n}$, tj.

$$C_n^{OP} = \{A \in C^{n \times n} : A^2 = A = A^*\}.$$

U sledećim teoremama date su osnovne osobine projektora:

Teorema 1.2.1 *Neka je X vektorski prostor i neka je operator $P \in \mathcal{L(X)}$ projektor. Tada važi:*

(i) *$I - P$ je projektor,*

(ii) $P(I - P) = (I - P)P = 0$,

(iii) $\mathcal{R}(P) = \mathcal{N(I - P)}$.

Teorema 1.2.2 *Neka je X Hilbertov prostor i $P \in \mathcal{B(X)}$. Ako je P projektor i $P \neq 0$, tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(i) *P je ortogonalan projektor,*

(ii) $||P|| = 1$,

(iii) *P je hermitski operator,*

(iv) *P je normalan operator,*

(v) *P je pozitivan operator.*

Osim projektora, predmet proučavanja predstavljaju i neke druge klase operatora:

Definicija 1.2.1 *Neka su X i Y Hilbertovi prostori. Operator $V \in \mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ je parcijalna izometrija ako je:*

$$||Vx|| = ||x|| \text{ za svako } x \in \mathcal{N}(\mathcal{V})^{\perp}.$$

Potprostori $\mathcal{N}(\mathcal{V})^{\perp}$ i $\mathcal{R}(V)$ nazivaju se, respektivno, početni i krajnji prostor parcijalne izometrije V.

Očigledno, ako je V parcijalna izometrija, tada je $||V|| \leq 1$ i V je izometrija ako i samo ako je $\mathcal{N}(V) = \{0\}$. Neke od interesantnih osobina parcijalne izometrije date su u narednim tvrđenjima:

Lema 1.2.1 *Neka su X i Y Hilbertovi prostori. Ako je $V \in \mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ parcijalna izometrija, tada je njegova slika $\mathcal{R}(V)$ zatvoren potprostor u Y.*

Lema 1.2.2 *Neka su X i Y Hilbertovi prostori. Ako je $V \in \mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ parcijalna izometrija, tada je V^* parcijalna izometrija i važi: $V^*V = P_{\mathcal{N}(\mathcal{V})^{\perp}}$, $VV^* = P_{\mathcal{R}(V)}$.*

Teorema 1.2.3 *Neka su X i Y Hilbertovi prostori i $V \in \mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. Sledeća tvrđenja su ekvivalentna:*

(i) *V je parcijalna izometrija,*

(ii) *V^* je parcijalna izometrija,*

(iii) *V^*V je ortogonalan projektor,*

(iv) *VV^* je ortogonalan projektor,*

(v) *$VV^*V = V$,*

(vi) *$V^*VV^* = V^*$.*

Od posebnog značaja su idempotentne matrice, koje su bile predmet proučavanja u mnogim radovima: [4], [5], [6], [7], [9], [19], [31], [51], [71], [72], [110], [114] itd. U radu sa idempotentnim matricama od značaja je sledeći rezultat: matrica $A \in C_r^{n \times n}$ je idempotent ako i samo ako se A može predstaviti u obliku:

$$A = U \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^{-1}. \tag{1.1}$$

Naredni rezultati sadržani su u radu Koliha-e, Rakočevića i Straškraba-e [71] u kome je izučavana invertibilnost sume i razlike idempotentnih matrica.

Potrebni i dovoljni uslovi za invertibilnost razlike dve invertibilne matrice sadrzani su u sledećem rezultatu:

Teorema 1.2.4 [71] *Neka su $P, Q \in C^{n\times n}$ projektori. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(i) $\mathcal{R}(P) \oplus \mathcal{R}(Q) = C^{n\times 1}$ *i* $\mathcal{R}(P^*) \oplus \mathcal{R}(Q^*) = C^{n\times 1}$,

(ii) $\mathcal{R}(P) \oplus \mathcal{R}(Q) = C^{n\times 1}$ *i* $\mathcal{N}(P) \oplus \mathcal{N}(Q) = C^{n\times 1}$,

(iii) $\mathcal{R}(P) \cap \mathcal{R}(Q) = \{0\}$ *i* $\mathcal{N}(P) \cap \mathcal{N}(Q) = \{0\}$,

(iv) $P - Q$ *je invertibilna matrica,*

(v) $I - PQ$ *i* $P + Q - PQ$ *su invertibilne matrice.*

Kao posledica prethodnog rezultata dobijaju se potrebni i dovoljni uslovi za invertibilnost matrice $PQ - QP$.

Posledica 1.2.1 [71] *Neka su $P, Q \in C^{n\times n}$ projektori. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(i) $\mathcal{R}(P) \oplus \mathcal{R}(Q) = \mathcal{N}(P) \oplus \mathcal{N}(Q) = \mathcal{N}(P) \oplus \mathcal{R}(Q) = \mathcal{R}(P) \oplus \mathcal{N}(Q) = C^{n\times 1}$,

(ii) $P - Q$ *i* $I - P - Q$ *su invertibilne matrice,*

(iii) $PQ - QP$ *je invertibilna matrica.*

Nova karakterizacija invertibilnosti razlike $P - Q$ u zavisnosti od invertibilnosti $P + Q$ i $I - PQ$ data je u narednom rezultatu:

Teorema 1.2.5 [71] *Neka su $P, Q \in C^{n\times n}$ projektori. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(i) $P - Q$ *je invertibilna matrica,*

(ii) $P + Q$ *i* $I - PQ$ *su invertibilne matrice.*

Naredna teorema je od izuzetnog značaja jer osim egzistencije daje i oblik inverza sume i razlike projektora.

Teorema 1.2.6 [71] *Neka su* $P, Q \in C^{n\times n}$ *projektori tako da je* $P - Q$ *invertibilna i neka su* $F = P_{\mathcal{R}(P),\mathcal{R}(Q)}$ *i* $G = P_{\mathcal{N}(Q),\mathcal{N}(P)}$ *projektori, čija egzistencija je dokazana u Teoremi 1.2.4. Tada je:*

$$(P - Q)^{-1} = F - (I - G),$$

$$\begin{aligned}(P + Q)^{-1} &= I - (I - G)F - G(I - F),\\ (P - Q)^{-1} &= (P + Q)^{-1}(P - Q)(P + Q)^{-1},\\ (P + Q)^{-1} &= (P - Q)^{-1}(P + Q)(P - Q)^{-1}.\end{aligned}$$

1.3 Uopšteni inverzi kompleksnih matrica

Definicija 1.3.1 *Kvadratna matrica* $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$ *je regularna ili invertibilna matrica ako postoji matrica* $B \in \mathbf{C}^{n\times n}$ *takva da je* $\mathrm{AB} = \mathrm{BA} = \mathrm{I}$. *Jedinstvena matrica* B *naziva se inverzna matrica matrice* A *i obeležava sa* A^{-1}. *Matrica koja nije regularna naziva se singularna matrica.*

Neke od osnovnih karakteristika inverzne matrice su:

(i) $(\mathrm{A}^{-1})^{-1} = \mathrm{A}$;

(ii) $(\mathrm{A}^{\mathrm{T}})^{-1} = (\mathrm{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$;

(iii) $(\mathrm{A}^{*})^{-1} = (\mathrm{A}^{-1})^{*}$;

(iv) $(\mathrm{AB})^{-1} = \mathrm{B}^{-1}\mathrm{A}^{-1}$.

Teorema 1.3.1 *Matrica* $\mathrm{A} \in \mathrm{C}^{m\times n}$ *je regularna ako i samo ako je* $det(\mathrm{A}) \neq 0$. *U tom slučaju je:* $\mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathrm{A})}|\mathrm{A_{ij}}|$, *gde je* $|\mathrm{A_{ij}}|$ *algebarski komplement elementa* a_{ij}.

Kako se u praktičnim problemima često javljaju nesingularne i pravougaone matrice, bilo je neophodno naći matricu, koja ima što više osobina sličnih običnom inverzu. Upravo iz tih razloga je i uveden pojam uopštenog inverza. Pod uopštenim inverzom date matrice A podrazumeva se matrica X koja je povezana sa A na sledeći način:

a) postoji za klasu matrica opštiju od nesingularnih kvadratnih;

b) ima određena svojstva običnih inverza;

c) svodi se na A^{-1} kad je A invertibilna.

Istorijski gledano, još 1809. kod C. F. Gauss-a je implicitno sadržana ideja o uopštenim inverzima, i to u vezi sa uvodjenjem principa metoda najmanjih kvadrata kod nekozinstentnih sistema. I. Fredholm je 1903. godine u [46] definisao pseudoinverz linearnog integralnog operatora koji nije invertibilan u običnom smislu, dok je W. A. Hurwitz [65] 1912. godine uveo pojam pseudorezolventnog operatora. E. H. Moore [87] je prvi definisao i proučio jedinstveni generalisani inverz proizvoljne matrice, nazvavši ga "uopštena recipročnost matrice". Moguće da je do ovih rezultata došao još 1906. godine, mada su prvi put objavljeni tek 1920. godine. Nažalost njegov rad nije bio poznat široj javnosti, verovatno zbog načina na koji je izložen, kao i komlikovane i nestandardne notacije. Tek fundamentalan rad R. Penrose-a [96], objavljen 1955. godine, pobudio je pravi interes u ovoj oblasti. Penrouse je pokazao da za svaku konačnu kompleksnu (kvadratnu ili pravougaonu) matricu $A \in \mathbf{C}^{m\times n}$ postoji jedinstvena kompleksna matrica $X \in \mathbf{C}^{n\times m}$ koja zadovoljava sledeće četiri jednačine, tzv. Penrouse-ove jednačine:

1) $AXA = A$;

2) $XAX = X$;

3) $(AX)^* = AX$;

4) $(XA)^* = XA$.

Kako je Penrose do svojih rezultata došao nezavisno od radova Moore-a, danas se ovaj uopšteni inverz naziva Moore-Penrose-ov inverz matrice A, i označava sa $A^\dagger$.

Neka od osnovnih svojstava Moore-Penrose-ovog inverza data su u sledećim teoremama:

Teorema 1.3.2 *Neka je $A \in \mathbf{C}^{m\times n}$ i $\lambda \in R$. Tada važi:*

(i) $A^\dagger = A^{-1}$ *ako je A nesingularna matrica;*

(ii) $(A^\dagger)^\dagger = A$;

(iii) $(A^*)^\dagger = (A^\dagger)^*$;

(iv) $(\lambda A)^\dagger = \lambda^\dagger A^\dagger$, *gde je* $\lambda^\dagger = \begin{cases} \lambda^{-1}, & \lambda \neq 0, \\ 0, & \lambda = 0; \end{cases}$

(v) $(A^*A)^\dagger = A^\dagger (A^\dagger)^*$;

(vi) $A^* = A^\dagger A A^* = A^* A A^\dagger$;

(vii) $A = AA^*(A^\dagger)^* = (A^\dagger)^* A^* A$;

(viii) $A^\dagger = (A^*A)^\dagger A^* = A^*(AA^*)^\dagger$.

Teorema 1.3.3 *Neka je $A \in \mathbf{C}^{m\times n}$. Tada važi:*

(i) *Matrice $A^\dagger A$, $AA^\dagger$, $I - A^\dagger A$ i $I - AA^\dagger$ su ortogonalni projektori;*

(ii) $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(AA^\dagger) = \mathcal{R}(AA^*)$;

(iii) $\mathcal{R}(A^\dagger) = \mathcal{R}(A^*) = \mathcal{R}(A^\dagger A) = \mathcal{R}(A^*A)$;

(iv) $\mathcal{R}(I - AA^\dagger) = \mathcal{N}(AA^\dagger) = \mathcal{N}(A^*) = \mathcal{N}(A^\dagger) = \mathcal{R}(A)^\perp$*;*

(v) $\mathcal{R}(I - A^\dagger A) = \mathcal{N}(A^\dagger A) = \mathcal{N}(A) = \mathcal{R}(A^*)^\perp$

(vi) $r(A) = r(A^*A) = r(A^\dagger) = r(A^\dagger A)$.

U sledećoj definiciji dato je prirodno uopštenje Moore-Penrose-ovog inverza.

Definicija 1.3.2 *Neka je $A \in \mathbf{C}^{m\times n}$ i neka su M i N pozitivno definitne matrice reda m i n, respektivno. Težinski Moore-Penrouse-ov inverz matrice A je jedinstvena matrica $A^{\dagger}_{M,N} \in \mathbf{C}^{n\times m}$ takva da je*

1) $AXA = A$;

2) $XAX = X$;

3M) $(MAX)^* = MAX$;

4N) $(NXA)^* = NXA$.

Ako je $M = I_m$ i $N = I_n$, tada je $A^{\dagger}_{I_m,I_n} = A^{\dagger}$.

Uopšteni inverzi koji zadovoljavaju samo neke od pomenute četiri Penrose-ove jednačine imaju svoju primenu kod raznih tipova rešavanja linearnih sistema.

Za matricu $A \in \mathbf{C}^{m\times n}$ sa $A\{i,j,k\}$ označavaćemo skup svih matrica $X \in \mathbf{C}^{n\times m}$ koje zadovoljavaju jednačine (i), (j), (k) iz skupa $(1)-(4)$ Penrouse-ovih jednačina. Matrica $X \in A\{i,j,k\}$ naziva se $\{i,j,k\}-$inverz od A, u oznaci $A^{(i,j,k)}$. Često se za $\{1\}$-inverz koristi termin unutrašnji inverz, za $\{2\}-$inverz spoljašnji, dok se $\{1,2\}-$inverz naziva refleksivnim inverzom.

Glavna primena $\{1\}-$inverza je pri rešavanju raznih linearnih sistema, gde se oni koriste na sličan način kao obični inverzi. Elementi klase $\{1,3\}-$inverza tesno su povezani sa najmanje kvadratnim rešenjem linearnog sistema $Ax = b$ u smislu da je $||Ax-b||$ najmanje kada je $x = A^{(1,3)}b$, gde je $A^{(1,3)} \in A\{1,3\}$. Obrnuto, ako $X \in C^{n\times m}$ poseduje svojstvo da za svako b, $||Ax-b||$ je najmanja kada je $x = Xb$, tada je $X \in A\{1,3\}$. S druge strane, $\{1,4\}-$ inverzi povezani su sa rešenjima sa minimalnom normom na sledeći način: ako pomenuti sistem ima rešenja, ono rešenje za koje je $||x||$ najmanje dato je sa $x = A^{(1,4)}b$, gde $A^{(1,4)} \in A\{1,4\}$. Obrnuto, ako $X \in C^{n\times m}$ poseduje svojstvo da kada jednačina $Ax = b$ ima rešenja, $x = Xb$ je rešenje sa minimalnom normom, tada je $X \in A\{1,4\}$.

Jedinstveno najmanje kvadratno rešenje jednačine $Ax = b$ sa minimalnom normom i Moore-Penrose-ov inverz $A^{\dagger}$ povezani su na sledeći način:

Teorema 1.3.4 *(Penrose [97]) Neka je $A \in C^{m\times n}$, $b \in C^m$. Među najmanje kvadratnim rešenjima jednačine $Ax = b$, $A^\dagger b$ je rešenje sa minimalnom normom. Obrnuto, ako $X \in C^{n\times m}$ poseduje svojstvo da za svako b, Xb je najmanje kvadratno rešenje jednačine $Ax = b$ sa minimalnom normom, tada je $X = A^\dagger$.*

Među svim uopštenim inverzima poseban značaj imaju oni čija su slika i jezgro unapred zadati:

Definicija 1.3.3 *Neka je $A \in \mathbf{C}^{m\times n}$ ranga r, neka je T potprostor od $\mathbf{C}^n$ dimenzije $s \leq r$, i neka je S potprostor od $\mathbf{C}^m$ dimenzije $m - s$. Ako matrica $X \in \mathbf{C}^{n\times m}$ zadovoljava uslove*

$$XAX = X, \quad \mathcal{R}(X) = T, \quad \mathcal{N}(X) = S,$$

tada je X spoljašnji inverz matrice A sa unapred definisanom slikom T i jezgrom S, u oznaci $X = A^{(2)}_{T,S}$.

Na sličan način definišu se $\{1\}$ i $\{1,2\}-$inverzi sa zadatom slikom i jezgrom:

Definicija 1.3.4 *Neka je $A \in \mathbf{C}^{m\times n}$ ranga r, $\mathcal{R}(A) = L$, $\mathcal{N}(A) = M$, $L \oplus S = C^m$ i $M \oplus T = C^n$.*

(a) *Ako matrica $X \in \mathbf{C}^{n\times m}$ zadovoljava uslove*

$$AXA = A, \quad \mathcal{N}(AX) = S, \quad \mathcal{R}(XA) = T,$$

tada je X unutrašnji inverz matrice A sa unapred definisanom slikom T i jezgrom S, u oznaci $X = A^{(1)}_{T,S}$.

(b) *Ako matrica $X \in \mathbf{C}^{n\times m}$ zadovoljava uslove*

$$AXA = A, \quad XAX = X, \quad \mathcal{N}(AX) = S, \quad \mathcal{R}(XA) = T,$$

tada je X refleksivni inverz matrice A sa unapred definisanom slikom T i jezgrom S, u oznaci $X = A^{(1,2)}_{T,S}$.

Primetimo da je $A^{\dagger} = A^{(1,2)}_{\mathcal{R}(A^*),\mathcal{N}(A^*)}$. Takođe, ako uzmemo $S = L^{\perp}$ i $T = M^{\perp}$, klasa $\{1\}-$inverza sa slikom T i jezgrom S je klasa $\{1,3,4\}-$inverza.

Naredni inverz definisao je Drazin [41] 1958, u asocijativnim prstenima i polugrupama, bez posebnog pominjanja matrica. Definicija Drazin-ovog inverza na skupu matrica je:

Definicija 1.3.5 *Neka je $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$ matrica indeksa k. Drazin-ov inverz matrice A, u oznaci A^d, je jedinstvena matrica koja zadovoljava sledeće uslove:*

1k) $A^{k+1}A^d = A^k$;

2) $A^dAA^d = A^d$;

5) $AA^d = A^dA$.

Primetimo da je $A^d = A^{(2)}_{\mathcal{R}(A^k),\mathcal{N}(A^k)}$.

Specijalni slučaj Drazin-ovog inverza matrica je je grupni inverz:

Definicija 1.3.6 *Neka je $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$ matrica indeksa 1. Jedinstvena matrica $A^{\sharp}$ koja zadovoljava uslove:*

1k) $AA^{\sharp}A = A$;

2) $A^{\sharp}AA^{\sharp} = A^{\sharp}$;

5) $AA^{\sharp} = A^{\sharp}A$

zove se grupni inverz matrice A.

Neke osobine Drazin-ovog inverza i, specijalno, grupnog inverza date su u sledećim tvrđenjima:

Teorema 1.3.5 *Neka je $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$ i $m, l \in N$. Tada važi:*

(i) $A^l(A^d)^m = A^{l-m}$, *za* $m > 0$, $l - m \geq ind(A)$;

(ii) $(A^*)^d = (A^d)^*$;

(iii) $(A^T)^d = (A^d)^T$;

(iv) $(A^l)^d = (A^d)^l$;

(v) $ind(A^d) = 1$ *i* $(A^d)^\sharp = A^2 A^d$;

(vi) $(A^d)^d = A$ *ako i samo ako je* $indA = 1$;

(vii) $((A^d)^d)^d = A^d$;

(viii) $A^d(A^d)^\sharp = AA^d$.

Posledica 1.3.1 *Neka je* $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$ *i* $indA = 1$. *Tada važi:*

(i) $(A^*)^\sharp = (A^\sharp)^*$;

(ii) $(A^T)^\sharp = (A^\sharp)^T$;

(iii) $(A^\sharp)^\sharp = A$;

(iv) $ind(A^l) = 1$ *i* $(A^l)^\sharp = (A^\sharp)^l$ *za svako* $l \in N$;

(v) $r(A^\sharp) = r(A)$, $\mathcal{R}(A^\sharp) = \mathcal{R}(A)$ *i* $\mathcal{N}(A^\sharp) = \mathcal{N}(A)$;

(vi) $\mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{N}(A) = C^{n\times 1}$

(vii) $AA^\sharp = A^\sharp A$ *je projektor na* $\mathcal{R}(A)$ *duž* $\mathcal{N}(A)$.

Teorema 1.3.6 *Neka je* $A \in \mathbf{C}^{m\times n}$ *i* $indA = k$. *Tada je za svako* $l \geq k$, $l \in N$:

$$A^d = A^l(A^{2l+1})^{(1)}A^l,$$

gde je $(A^{2l+1})^{(1)}$ *proizvoljan element iz* $A^{2l+1}\{1\}$.

Posledica 1.3.2 *Ako je* $A \in \mathbf{C}^{m\times n}$ *i* $indA = 1$, *tada je* $A^g = A(A^3)^{(1)}A$.

Generalisani inverzi definisani su i na različitim algebarskim i topološkim strukturama, npr. na skupu ograničenih operatora, u prstenima s involucijom, C^*-algebrama, itd. Više o uopštenim inverzima operatora na Banahovim i Hilbertovim prostorima može se naći u knjigama [21], [36] i [121].

1.4 Osnovne osobine EP matrica

Za proizvoljnu matricu $A \in C^{n\times n}$ u opštem slučaju ne važi $AA^\dagger = A^\dagger A$. Specijalna klasa matrica za koje je $AA^\dagger = A^\dagger A$, tj. $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(A^*)$ predstavlja EP (rang-hermitska) matrice. Ime EP-matrica je od "Equal Projection" jer je $AA^\dagger$ ortogonalni projektor na $\mathcal{R}(A)$, a $A^\dagger A$ ortogonalan projektor na $\mathcal{R}(A^*)$. Skup svih EP-matrica iz $C^{n\times n}$ označavamo sa C_n^{EP}. Dakle,

$$C_n^{EP} = \{A \in C^{n\times n} : \mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(A^*)\} = \{A \in C^{n\times n} : AA^\dagger = A^\dagger A\}.$$

Napomenimo da je za kompleksnu matricu A, uslov $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(A^*)$ ekvivalenan uslovu $\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(A^*)$.
S. L. Campbell i C. D. Meyer Jr. [28] dokazali su da se proizvoljna EP matrica $A \in \mathbf{C}_r^{n\times n}$ može prikazati kao

$$A = U \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^*, \tag{1.2}$$

gde je $U \in C^{n\times n}$ unitarna i $K \in \mathbf{C}^{r\times r}$ invertibilna matrica.
Očigledno važi:

$$C_n^{\mathrm{U}} \subseteq C_n^{\mathrm{N}} \subseteq C_n^{\mathrm{EP}}. \tag{1.3}$$

Neke od osobina EP matrica, koje se mogu naći u radovima [18, 24, 21, 29, 30, 56, 60, 79, 69, 84, 94, 95, 122], su:

Teorema 1.4.1 *Neka je $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

1. *A je EP, tj. $\mathcal{R}(A^*) = \mathcal{R}(A)$.*
2. *A^* je EP.*
3. *$\overline{A}$ je EP, tj. $\mathcal{R}(\overline{A}) = \mathcal{R}(A^T)$.*
4. *A^T je EP.*
5. *AA^*A je EP.*
6. *$A^\dagger$ je EP.*

7. $r(A) = r(A^2)$ *i* $A^\sharp$ *je EP.*

8. $\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(A^*)$.

9. $\mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{N}(A) = C^{n\times 1}$ *(i/ili* $\mathcal{R}(A^*) \oplus \mathcal{N}(A^*) = C^{n\times 1}$*).*

10. UAU^* *je EP za svaku/neku unitarnu matricu* U.

11. PAP^* *je EP za svaku/neku nesingularnu matricu* P.

12. *Postoji nesingularna matrica* P *tako da je* $PAP^* = \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, *gde je* K *nesingularna.*

13. A *se može predstaviti kao* $PAP^* = \begin{bmatrix} K & KX^* \\ XK & XKX^* \end{bmatrix}$, *gde je* P *permutaciona, a* K *nesingularna matrica.*

14. *Postoji matrica* V *tako da je* $A^* = AV$ *(i/ili* $A^* = V_1A$, $A = A^*V_2$, $A = V_3A^*$*).*

15. *Postoji matrica* V *tako da je* $A^\dagger = AV$ *(i/ili* $A^\dagger = V_1A$, $A = A^\dagger V_2$, $A = V_3A^\dagger$*).*

16. $r(A) = r(A^2)$ *i postoji matrica* V *tako da je* $A^\sharp = A^*V$ *(i/ili* $A^\sharp = VA^*$*).*

17. $AA^\dagger = A^\dagger A$.

18. $r(A) = r(A^2)$ *i* $A^\dagger = A^\sharp$.

19. A *komutira sa* $AA^\dagger$ *(i/ili* $A^\dagger A$*).*

20. $A^\dagger$ *komutira sa* $AA^\dagger$ *(i/ili* $A^\dagger A$*).*

21. $r(A) = r(A^k)$ *i* A^k *je EP za svaki/neki prirodni broj* $k \geq 2$.

22. $r(A) = r(A^2)$ *i* $(A^2)^\dagger = (A^\dagger)^2$.

23. $r(A) = r(A^2)$ *i* $A^2(A^\dagger)^2A^2 = A^2$.

24. $r(A) = r(A^2)$ *i* $A(A^\dagger)^2A = AA^\sharp$.

24. $(AA^\dagger)^2 = A^2(A^\dagger)^2$ *(i/ili* $(A^\dagger A)^2 = (A^\dagger)^2 A^2$*).*

25. $r(A) = r(A^2)$ *i* $(AA^\dagger)(A^\dagger A) = (A^\dagger A)(AA^\dagger)$.

26. $r(A) = r(A^2)$ *i* $(AA^\dagger)(A^* A) = (A^* A)(AA^\dagger)$ *(i/ili* $(A^\dagger A)(AA^*) = (AA^*)(A^\dagger A)$*).*

27. $r(A) = r(A^2)$ *i* $AA^\dagger$ *komutira sa* $AA^* + \lambda A^* A$ *(i/ili* $A^\dagger A$ *komutira sa* $AA^* + \lambda A^* A$*) za svaki/neki kompleksan broj* $\lambda \neq 0$.

28. $A^2 A^\dagger + A^\dagger A^2 = 2A$.

29. $A^* A^\sharp A + A A^\sharp A^* = 2A^*$.

30. $A^\dagger A^\sharp A + A A^\sharp A^\dagger = 2A^\dagger$.

31. $A^2 A^\dagger + (A^2 A^\dagger)^* = A + A^*$ *(i/ili* $A^\dagger A^2 + (A^\dagger A^2)^* = A + A^*$*).*

32. *Postoji polinom* $p(x)$ *tako da je* $A^\dagger = p(A)$ *(i/ili postoji polinom* $q(x)$ *tako da je* $A = q(A^\dagger)$*).*

Y. Tian i H. Wang u radu [113] navode još neke osobine EP matrica.

Teorema 1.4.2 *Neka je* $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$*. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

1. *A je EP.*

2. *Za svaku unitarnu matricu* U *za koju je* $UAU^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$, *gde su* A_{11} *i* A_{22} *kvadratne matrice,* A_{11} *i* A_{22} *su EP i* $\mathcal{R}(A_{12}) \subseteq \mathcal{R}(A_{12})$ *i* $\mathcal{R}(A_{12}^*) \subseteq \mathcal{R}(A_{22}^*)$.

3. *Za svaku nesingularnu matricu* P *za koju je* $PAP^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$, *gde su* A_{11} *i* A_{22} *kvadratne matrice,* A_{11} *i* A_{22} *su EP i* $\mathcal{R}(A_{12}) \subseteq \mathcal{R}(A_{12})$ *i* $\mathcal{R}(A_{12}^*) \subseteq \mathcal{R}(A_{22}^*)$.

4. $r(A) = r(A^{s+t})$ *i* $(A^{s+t})^\dagger = (A^s)^\dagger (A^t)^\dagger$ *za sve/neke prirodne brojeve* s, t.

5. $A^\dagger B = BA^\dagger$ *ako je* $AB = BA$.

6. $AA^\dagger(A+\lambda A^\dagger) = (A+\lambda A^\dagger)AA^\dagger$ *(i/ili* $A^\dagger A(A+\lambda A^\dagger) = (A+\lambda A^\dagger)A^\dagger A$*) za svaki/neki kompleksan broj* $\lambda \neq 0$.

7. $AA^\dagger(A+\lambda A^*) = (A+\lambda A^*)AA^\dagger$ *(i/ili* $A^\dagger A(A+\lambda A^*) = (A+\lambda A^*)A^\dagger A$*) za svaki/neki kompleksan broj* $\lambda \neq 0$.

8. $\mathcal{R}(A+\lambda A^\dagger) = \mathcal{R}(\lambda A + A^3)$ *za svaki/neki kompleksan broj* $\lambda \neq 0$.

9. $\mathcal{N}(A+\lambda A^\dagger) = \mathcal{N}(\lambda A + A^3)$ *za svaki/neki kompleksan broj* $\lambda \neq 0$.

10. $r(A) = r(A^2)$ *i* $AA^\sharp$ *je hermitska.*

11. $r(A) = r(A^2)$ *i* $AA^\dagger = AA^\sharp$ *(i/ili* $A^\dagger A = A^\sharp A$).

12. $r(A) = r(A^2)$ *i* $AA^\sharp A^* = A^* A^\sharp A$.

13. $r(A) = r(A^2)$ *i* $AA^\sharp A^\dagger = A^\dagger A^\sharp A$.

14. $r(A) = r(A^2)$ *i* $(AA^*)(AA^\sharp) = (AA^\sharp)(AA^*)$ *(i/ili* $(A^*A)(A^\sharp A) = (A^\sharp A)(A^*A)$*).*

15. $r(A) = r(A^2)$ *i* $(AA^\sharp)(AA^* + \lambda A^*A) = (AA^* + \lambda A^*A)(AA^\sharp)$ *za svaki/neki kompleksan broj* $\lambda \neq 0$.

16. $r(A) = r(A^2)$ *i* $(AA^\dagger)(A^*A)^\dagger = (A^*A)^\dagger(AA^\dagger)$ *(i/ili* $(A^\dagger A)(AA^*)^\dagger = (AA^*)^\dagger(A^\dagger A)$).

17. $r(A) = r(A^k)$ *i* $A^k A^\dagger = A^\dagger A^k$ *za sve/neke prirodne brojeve* $k \geq 2$.

18. $r(A) = r(A^k)$ *i* $A^{k+1}A^\dagger + A^\dagger A^{k+1} = 2A^k$ *za sve/neke prirodne brojeve* k.

19. $r(A) = r(A^k)$ *i* $A^{k+1}A^\dagger + (A^\dagger A^{k+1})^* = A^k + (A^k)^*$ *za sve/neke prirodne brojeve* k.

1.5 Linearna kombinacija involutivnih matrica

M. Sarduvan i H. Özdemir su u radu [93] okarakterisali sve situacije u kojima je linearna kombinacija $c_1A + c_2B$ tripotent ili idempotent ili involutivna matrica, pri čemu su A, B involutivne matrice i $c_1, c_2 \in C \setminus \{0\}$. Ovaj problem je interesantan ne samo sa algebarske tačke gledišta već i po ulozi koju ova vrsta matrica ima u primenjenim naukama, posebno u statističkoj teoriji. Na primer, ako je $A \in \mathcal{R}^{n\times n}$ simetrična matrica i x $n \times 1$ realni proizvoljni vektor koji ima normalnu raspodelu $N_n(0, I)$, tada su potrebni i dovoljni uslovi $A = A^2$ i $A = A^3$ da se kvadratna forma $x'Ax$ predstavi kao hi-kvadratna promenljiva ili kao razlika dve nezavisne hi-kvadratne promenljive, redom (videti [17, 48, 107, 109]).
Involutivne matrice nemaju primenu samo u statističkoj teoriji, već i u mnogim oblastima primenjene nauke. Na primer matrica $\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$, koja je element klase matrica poznate kao Pauli spin matrice i Dirac spin matrice sa podmatricom $\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$ su involutivne i one se često primenjuju u kvantnoj mexanici.

Napomenimo da je svaku involutivnu matricu moguće dijagonalizovati (videti [64, Posledica 3.3.10]). Primenjujući Spektralnu teoremu za dijagonalizovane matrice (videti [83]), zaključujemo: ako je A involutivna matrica, tada postoje dve idempotente matrice P_1 i P_2 tako da važi: $A = P_1 - P_2$, $I = P_1 + P_2$ i $P_1P_2 = 0$.

Neki od interesantnih rezultata iz rada [110] su sledeći:

Teorema 1.5.1 [*93*] *Neka su A, $B \in C^{n\times n}$ komutativne involutivne matrice takve da je $A \neq \pm B$ i neka su $c_1, c_2 \in C \setminus \{0\}$. Tada je linearna kombinacija $T = c_1A + c_2B$ tripotenta matrica ako i samo ako je*

$$(c_1, c_2) \in \Big\{(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}), (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\Big\}.$$

Odgovor na pitanje kada je linearna kombinacija involutivnih matrica idempotent sadržan je u sledećoj teoremi:

Teorema 1.5.2 [93] *Neka su* $c_1, c_2 \in C \backslash \{0\}$ *i* A, $B \in C^{n\times n}$ *involutivne matrice za koje važi* $A \neq \pm B$. *Neka je* $T = c_1 A + c_2 B$.

(a) *Ako je* $AB = BA$, *tada je matrica* T *idempotent ako i samo ako je*

   (i) $(c_1, c_2) = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ *i* $I + AB = -A - B$,

   (ii) $(c_1, c_2) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ *i* $I + AB = A + B$,

   (iii) $(c_1, c_2) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ *i* $I - AB = -A + B$,

   (iv) $(c_1, c_2) = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ *i* $I - AB = A - B$.

(b) *Ne postoji situacija u kojoj je matrica* T *idempotent ako je* $AB \neq BA$.

U sledećem rezultatu razmatra se kada je linearna kombinacija dve idempotentne matrice involutivna matrica.

Teorema 1.5.3 [93] *Za* $c_1, c_2 \in C \setminus \{0\}$ *i idempotente matrice* $A, B \in C^{n\times n}$, *neka je* T *njihova linearna kombinacija oblika*

$$T = c_1 A + c_2 B. \tag{1.4}$$

(a) *Ako je* $AB = BA$, *tada je matrica* T *involutivna ako i samo ako važi jedan os sledećih uslova:*

   (a_1) $(c_1, c_2) = (\pm 1, \pm 1)$ *i* $A + B = I_n$,

   (a_2) $(c_1, c_2) = (1, -2)$ *or* $(c_1, c_2) = (-1, 2)$ *i* $A = I_n$,

   (a_3) $(c_1, c_2) = (2, -1)$ *ili* $(c_1, c_2) = (-2, 1)$ *i* $B = I_n$.

(b) *Pod pretpostavkom da je* $AB \neq BA$, *matrica* T *je involutivna ako je* $c_1 + c_2 = 0$ *i* $\frac{1}{c_1^2} I_n + AB + BA = A + B$.

Glava 2

Generalisani i hipergeneralisani projektori

2.1 Pojam i karakterizacija generalisanih i hipergeneralisanih projektora

Pojam generalisanog i hipergeneralisanog projektora definisali su Groß i Trenkler u radu [53].

Definicija 2.1.1 *[53] Matrica* $\mathrm{A} \in \mathrm{C}^{n\times n}$ *je:*

(i) *generalisani projektor ako važi* $\mathrm{A}^2 = \mathrm{A}^*$,

(ii) *hipergeneralisani projektor ako važi* $\mathrm{A}^2 = \mathrm{A}^\dagger$.

Odgovarajuče skupove generalisanih i hipergeneralisanih projektora definisanih u Definiciji 2.1.1 nadalje ćemo označavati sa C_n^{GP} i C_n^{HGP}, redom. Dalje, sa C^{PI} i C^{CA} označavamo podskup od $C^{n\times m}$ sačinjen od svih parcijalnih izometrija i kontakcija, to jest:

$$C^{\mathrm{PI}} = \{A \in \mathbf{C}^{n\times m} : AA^*A = A\} = \{A \in \mathbf{C}^{n\times m} : A^\dagger = A^*\},$$

$$C^{\mathrm{CA}} = \{A \in \mathbf{C}^{n\times m} : ||Ax|| \leq ||x||\ \textit{za svako}\ x \in \mathbf{C}^{n\times 1}\}.$$

C_n^{SD} označava podskup od $C^{n\times n}$ tzv. star-dagger matrica, to jest:

$$C_n^{\mathrm{SD}} = \{A \in \mathbf{C}^{n\times n} : A^*A^\dagger = A^\dagger A^*\}.$$

U radu [53] pokazano je da se množenjem izraza $\mathrm{A}^2 = \mathrm{A}^*$ sa leve i desne strane matricom A dobija $\mathrm{AA}^* = \mathrm{A}^3 = \mathrm{A}^*\mathrm{A}$, tj. da je

$$C_n^{\mathrm{GP}} \subseteq C_n^{\mathrm{N}}. \tag{2.1}$$

Takođe se na osnovu jednakosti $\mathrm{A}^2 = \mathrm{A}^*$ dobija da važi:

$$\mathrm{AA}^*\mathrm{A} = \mathrm{A}^4 = (\mathrm{A}^*)^2 = (\mathrm{A}^*)^* = \mathrm{A}.$$

Odavde sledi da

$$C_n^{\mathrm{GP}} \subseteq C_{n,n}^{\mathrm{PI}} \quad \mathrm{i} \quad \mathrm{C}_n^{\mathrm{GP}} \subseteq \mathrm{C}_n^{\mathrm{QP}}. \tag{2.2}$$

Naredna tvrđenja daju interesantne karakterizacije skupa generalisanih projektora.

Lema 2.1.1 [*53*] *Neka je* $\mathrm{A} \in \mathrm{C}_\mathrm{r}^{\mathrm{n}\times\mathrm{n}}$. *Sledeća tvrđenja su ekvivalentna:*

1. *A je kvadripotentna normalna parcijalna izometrija,*
2. *A je kvadripotentna normalna matrica,*
3. $\mathrm{A}^* = \mathrm{A}^2$.

Posledica 2.1.1 [*53*] *Neka je* $\mathrm{A} \in \mathrm{C}^{n\times n}$. A *je generalisani projektor ako i samo ako važi* $\mathrm{A}^2 = \mathrm{A}^\dagger$ *i* $\mathrm{A}^\dagger = \mathrm{A}^*$.

Lema 2.1.2 [*53*] *Neka je* $\mathrm{A} \in \mathrm{C}_r^{n\times n}$. A *je generalisani projektor ako i samo ako postoji* $\mathrm{U} \in \mathrm{C}_n^{\mathrm{U}}$ *tako da važi:*

$$\mathrm{A} = \mathrm{U}\begin{pmatrix} \mathrm{E} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\mathrm{U}^*, \tag{2.3}$$

gde je E dijagonalna matrica sa dijagonalnim elementima:

$$e_{j,j} \in \left\{1, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\},\ j = \overline{1,\mathrm{r}}.$$

Slične karakterizacije dobijene su i u slučaju hipergeneralisanih projektora.

Lema 2.1.3 [53] *Neka je* $\mathrm{A} \in \mathrm{C}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{n}\times\mathrm{n}}$. *Sledeća tvrđenja su ekvivalentna:*

1. *A je kvadripotentna EP matrica,*
2. $\mathrm{A} = (\mathrm{A}^{\dagger})^2$,
3. $\mathrm{A}^{\dagger} = \mathrm{A}^2$.

Lema 2.1.4 [53] *Neka je* $\mathrm{A} \in \mathrm{C}_{r}^{n\times n}$. *Tada je* $\mathrm{A} \in \mathrm{C}_{n}^{\mathrm{HGP}}$ *ako i samo ako postoji* $\mathrm{U} \in \mathrm{C}_{n}^{\mathrm{U}}$ *tako da važi:*

$$\mathrm{A} = \mathrm{U}\begin{pmatrix} \mathrm{T} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\mathrm{U}^*, \tag{2.4}$$

pri čemu je T gornje trougaona matrica sa dijagonalnim elementima: $t_{j,j} \in \left\{1, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$, $j = \overline{1,\mathrm{r}}$, *za koju je* $\mathrm{T}^3 = \mathrm{I}_{\mathbf{r}}$.

Uslov $\mathrm{T}^3 = \mathrm{I}_k$ je veoma važan jer bez toga rezultat ne važi, što se može videti za $\mathrm{U} = \mathrm{I}_2$ i $\mathrm{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Tada je $\mathrm{UTU}^*(= \mathrm{T})$ i matrica A je oblika (2.4), ali je $\mathrm{A}^{\dagger}(= \mathrm{A}^{-1}) \neq \mathrm{A}^2$.
Na osnovu Leme 2.1.1 dobija se još jedna karakterizacija skupa generalisnih projektora:

$$C_n^{\mathrm{GP}} = C_n^{\mathrm{QP}} \cap C_n^{\mathrm{N}} \cap C_n^{\mathrm{PI}} = C_n^{\mathrm{QP}} \cap C_n^{\mathrm{N}} = C_n^{\mathrm{QP}} \cap C_n^{\mathrm{PI}}. \tag{2.5}$$

Primetimo da važi i sledeće: ako je $\mathrm{A}^2 = \mathrm{A}^{\dagger}$, tada je $\mathrm{A}^4 = \mathrm{A}$, odnosno:

$$C_n^{\mathrm{HGP}} \subseteq C_n^{\mathrm{QP}}. \tag{2.6}$$

Kako je još i $\mathrm{AA}^{\dagger} = \mathrm{A}^3 = \mathrm{A}^{\dagger}\mathrm{A}$, sledi:

$$C_n^{\mathrm{HGP}} \subseteq C_n^{\mathrm{EP}}. \tag{2.7}$$

Zapravo, na osnovu dela (1) $\Leftrightarrow$ (3) Leme 2.1.3 može se zaključiti da inkluzije (2.6) i (2.7) impliciraju jednakost:

$$C_n^{\mathrm{HGP}} = C_n^{\mathrm{QP}} \cap C_n^{\mathrm{EP}}. \tag{2.8}$$

Na osnovu (2.6) i Posledice 2.1.1 dobija se restriktivnija karaterizacija skupa generalisanih projektora:

$$C_n^{\mathrm{GP}} = C_n^{\mathrm{HGP}} \cap C_{n,n}^{\mathrm{PI}}. \tag{2.9}$$

Treba istaći da, u opštem slučaju, skup svih projektora C_n^{P} nije sadržan ni u C_n^{GP} ni u C_n^{HGP} i obratno. Detaljnija veza između tih skupova data je u narednoj teoremi.

Teorema 2.1.1 [*11*] *Za matricu* $\mathrm{A} \in \mathrm{C}^{n\times n}$ *sledeća tvrđenja su ekvivalentna:*

1. *A je generalisan projektor i projektor,*
2. *A je hipergeneralisani projektor i projektor,*
3. *A je ortogonalni projektor.*

Jedna od karakterizacija generalisanih i hipergeneralisanih projektora može se dobiti korišćenjem SVD dekompozicija (razlaganje korišćenjem singularnih vrednosti):

Teorema 2.1.2 [*11*] *Neka je* $\mathrm{A} \in \mathrm{C}_r^{n\times n}$ *data sa:*

$$\mathrm{A} = \mathrm{UDV}^*, \tag{2.10}$$

gde su $\mathrm{U}, \mathrm{V} \in \mathrm{C}^{n\times r}$ *takvi da važi da je* $\mathrm{U}^*\mathrm{U} = \mathrm{I}_r = \mathrm{V}^*\mathrm{V}$, *a D je pozitivno definisana dijagonalna matrica. Neka je:*

$$\mathrm{W} = \mathrm{V}^*\mathrm{U}. \tag{2.11}$$

Tada važi:

1. $\mathrm{A} \in \mathrm{C}_{n,n}^{\mathrm{PI}} \Leftrightarrow \mathrm{D} = \mathrm{I}_r$,
2. $\mathrm{A} \in \mathrm{C}_n^{\mathrm{EP}} \Leftrightarrow \mathrm{W} \in \mathrm{C}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{U}}$,
3. $\mathrm{A} \in \mathrm{C}_n^{\mathrm{N}} \Leftrightarrow \mathrm{W} \in \mathrm{C}_r^{\mathrm{U}}, \mathrm{WD}^2 = \mathrm{D}^2\mathrm{W} \Leftrightarrow \mathrm{W} \in \mathrm{C}_r^{\mathrm{U}}, \mathrm{WD} = \mathrm{DW}$,
4. $\mathrm{A} \in \mathrm{C}_n^{\mathrm{GP}} \Leftrightarrow \mathrm{D} = \mathrm{I}_r, \mathrm{W} \in \mathrm{C}_r^{\mathrm{U}}, \mathrm{W}^3 = \mathrm{I}_r$,

5. $A \in \mathbf{C}_n^{\mathrm{HGP}} \Leftrightarrow W \in C_r^{U}, (WD)^3 = I_r.$

Teorema 2.1.2 omogućava da se na jednostavan način dođe do još nekih osobina generalisanih i hipergeneralisanih projektora. Na primer, na osnovu prvog, četvrtog i petog tvrđenja ove teoreme dobija se da važi:

$$A \in \mathbf{C}_{\mathbf{n}}^{\mathrm{HGP}} \cap \mathbf{C}_{\mathbf{n},\mathbf{n}}^{\mathrm{PI}} \Leftrightarrow W \in \mathbf{C}_k^{U},\ (WD)^{\mathbf{3}} = I_{\mathbf{k}},\ D = I_{\mathbf{k}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow D = I_{\mathbf{k}},\ W \in C_k^{U},\ W^3 = I_{\mathbf{k}} \Leftrightarrow A \in {C_n}^{\mathrm{GP}},$$

što je potvrda formule (2.9). Štaviše, pošto $A \in C^{n\times n}$ u obliku 2.10 zadovoljava jednakost:

$$A^4 = A \Leftrightarrow UDWDWDWDV^* = UDV^* \Leftrightarrow (WD)^{\mathbf{3}} = I_{\mathbf{k}}, \tag{2.12}$$

iz drugog i petog tvrđenja Teoreme 2.1.2 sledi da važi:

$$A \in \mathbf{C}_n^{\mathrm{QP}} \cap \mathbf{C}_n^{\mathrm{EP}} \Leftrightarrow (WD)^{\mathbf{3}} = I_{\mathbf{k}},\ W \in C_k^{U} \Leftrightarrow A \in C_n^{\mathrm{HGP}},$$

što je zapravo još jedna potvrda da važi ekvivalencija prvog i trećeg dela Leme 2.1.3 data u ovom radu kao (2.8). Relacija (2.8) može se iskombinovati sa (2.9), što vodi do:

$$A \in \mathbf{C}_n^{\mathrm{GP}} \Leftrightarrow A \in C_n^{\mathrm{QP}} \cap C_{n,n}^{\mathrm{PI}} \cap \mathbf{C}_n^{\mathrm{EP}},$$

što je još jedna karakterizacija skupa C_n^{GP}. Sa druge strane, to se može uopštiti koristeći pojam slabih EP-matrica definisanih na sledeći način:

Definicija 2.1.2 [*11*] *Matrica* $A \in C^{\mathbf{n}\times\mathbf{n}}$ *je slabo-EP matrica ako važi sledeća jednakost:* $P_A P_{A^*} = P_{A^*} P_A$.

Skup svih matrica koje zadovoljavaju Definiciju 2.1.2 označava se sa C_n^{WEP}. Na osnovu $A \in C_n^{\mathrm{EP}} \Leftrightarrow P_A = P_{A^*}$, očigledno važi:

$$C_n^{\mathrm{EP}} \subseteq C_n^{\mathrm{WEP}}. \tag{2.13}$$

Dublji uvid u ovu relaciju omogućen je sledećom lemom.

Lema 2.1.5 [*11*] *Matrica* $\mathrm{A} \in \mathrm{C}^{\mathbf{n}\times\mathbf{n}}$ *je EP ako i samo ako je slabo-EP i indeksa ne većeg od 1, to jest:*

$$\mathrm{r}(\mathrm{A}^2) = \mathrm{r}(\mathrm{A}). \tag{2.14}$$

Teorema 2.1.3 [*11*] *Za svako* $\mathrm{A} \in \mathrm{C}^{n\times n}$ *važi:*

$$\mathrm{A} \in \mathrm{C}_n^{\mathrm{HGP}} \Leftrightarrow \mathrm{A} \in \mathrm{C}_{\mathbf{n}}^{\mathrm{QP}} \cap \mathbf{C}_n^{\mathrm{WEP}}.$$

Po analogiji sa Definicijom 2.1.2 uveden je pojam slabe normalnosti.

Definicija 2.1.3 [*11*] *Matrica* $\mathrm{A} \in \mathrm{C}^{\mathbf{n}\times\mathbf{n}}$ *je slabo-normalna ako zadovoljava uslov* $\mathrm{AA^*A^*A} = \mathrm{A^*AAA^*}$.

Skup svih matrica koje zadovoljavaju Definiciju 2.1.3 označava se sa C_n^{WN}. Očigledno je $C_n^{\mathrm{N}} \subseteq C_n^{\mathrm{WN}}$.

Ako je $\mathrm{A} \in \mathrm{C}^{n\times n}$ kvadripotentna i normalna, ona je generalisani projektor. Naredna teorema pokazuje da se zamenom normalnosti u ovom tvrđenju slabom-normalnošću dolazi do novih osobina hipergeneralisanih projektora.

Teorema 2.1.4 [*11*] *Za svako* $\mathrm{A} \in \mathrm{C}^{\mathbf{n}\times\mathbf{n}}$ *važi:*

$$\mathrm{A} \in \mathrm{C}_n^{\mathrm{QP}} \cap \mathbf{C}_n^{\mathrm{WN}} \Rightarrow \mathrm{A} \in \mathrm{C}_n^{\mathrm{HGP}}.$$

Prema $(\mathrm{A}^2)^* = (\mathrm{A}^*)^{\mathbf{2}}$ i $(\mathrm{A}^\dagger)^* = (\mathrm{A}^*)^\dagger$, jasno je da iz trećeg i četvrtog tvrđenja Definicije 2.1.1 važi:

$$\mathrm{A} \in \mathrm{C}_{\mathbf{n}}^{\mathrm{GP}} \Leftrightarrow \mathrm{A}^* \in \mathrm{C}_{\mathbf{n}}^{\mathrm{GP}} \quad \text{i} \quad \mathrm{A} \in \mathrm{C}_n^{\mathrm{HGP}} \Leftrightarrow \mathrm{A}^* \in \mathrm{C}_n^{\mathrm{HGP}}.$$

Analogne ekvivalencije važe i kad se A^* zameni sa Moore-Penrose-ovim inverzom $\mathrm{A}^\dagger$.

Teorema 2.1.5 [*11*] *Za svako* $\mathrm{A} \in \mathrm{C}^{\mathbf{n}\times\mathbf{n}}$ *važi:*

$$\mathrm{A} \in \mathrm{C}_{\mathbf{n}}^{\mathrm{GP}} \Leftrightarrow \mathrm{A}^\dagger \in \mathbf{C}_{\mathbf{n}}^{\mathrm{GP}} \quad \text{i} \quad \mathrm{A} \in \mathrm{C}_{\mathbf{n}}^{\mathrm{HGP}} \Leftrightarrow \mathrm{A}^\dagger \in \mathbf{C}_{\mathbf{n}}^{\mathrm{HGP}}. \tag{2.15}$$

Naredne karakterizacije skupa generalisanih i hipergeneralisanih projektora sadržane su u radu [12].

Prema Posledici 6 [57] svaka matrica $\mathrm{A} \in \mathrm{C}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{n}\times\mathrm{n}}$ može biti predstavljena u obliku:

$$\mathrm{A} = \mathrm{U}\begin{pmatrix} \Sigma\mathrm{K} & \Sigma\mathrm{L} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\mathrm{U}^*, \tag{2.16}$$

pri čemu je $\mathrm{U} \in \mathrm{C}^{n\times n}$ unitarna matrica, $\Sigma = diag(\sigma_1 \mathrm{I}_{\mathrm{r}_1}, \ldots, \sigma_{\mathrm{t}} \mathrm{I}_{\mathrm{r}_{\mathrm{t}}})$ dijagonalna matrica singularnih vrednosti matrice A, $\sigma_1 > \sigma_2 > \cdots > \sigma_t > 0$, $r_1 + r_2 + \cdots + r_t = r$ i $\mathrm{K} \in \mathrm{C}^{r,r}$, $\mathrm{L} \in \mathrm{C}^{\mathrm{r},\mathrm{n}-\mathrm{r}}$ zadovoljavaju:

$$\mathrm{KK}^* + \mathrm{LL}^* = \mathrm{I}_{\mathrm{r}}. \tag{2.17}$$

Dalje je:

$$\mathrm{A}^\dagger = \mathrm{U}\begin{pmatrix} \mathrm{K}^*\Sigma^{-1} & 0 \\ \mathrm{L}^*\Sigma^{-1} & 0 \end{pmatrix}\mathrm{U}^*. \tag{2.18}$$

Lema 2.1.6 [*12*] *Neka je* $\mathrm{A} \in \mathrm{C}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{n}\times\mathrm{n}}$ *oblika* (2.16). *Tada važi:*

1. $\mathrm{A} \in \mathrm{C}_{n,n}^{\mathrm{PI}} \Leftrightarrow \Sigma = \mathrm{I}_{\mathrm{r}}$,
2. $\mathrm{A} \in \mathrm{C}_{n,n}^{\mathrm{CA}} \Leftrightarrow \mathrm{I}_{\mathrm{r}} - \Sigma^2 = \mathrm{CC}^*, \mathrm{zanekoC} \in \mathrm{C}_{\mathrm{r}\times\mathrm{r}}$,
3. $\mathrm{A} \in \mathrm{C}_{n}^{\mathrm{P}} \Leftrightarrow \Sigma\mathrm{K} = \mathrm{I}_{\mathrm{r}}$,
4. $\mathrm{A} \in \mathrm{C}_{n}^{\mathrm{OP}} \Leftrightarrow \mathrm{L} = 0, \Sigma = \mathrm{I}_r, \mathrm{K} = \mathrm{I}_{\mathrm{r}}$
5. $\mathrm{A} \in \mathrm{C}_{n}^{\mathrm{QP}} \Leftrightarrow (\Sigma\mathrm{K})^3 = \mathrm{I}_{\mathrm{r}}$,
6. $\mathrm{A} \in \mathrm{C}_{n}^{\mathrm{N}} \Leftrightarrow \mathrm{L} = 0, \mathrm{K}\Sigma = \Sigma\mathrm{K}$,
7. $\mathrm{A} \in \mathrm{C}_{n}^{\mathrm{SD}} \Leftrightarrow \mathrm{K}^*\Sigma = \Sigma\mathrm{K}^*$,
8. $\mathrm{A} \in \mathrm{C}_{n}^{\mathrm{EP}} \Leftrightarrow \mathrm{L} = 0$,
9. $\mathrm{A} \in \mathrm{C}_{n}^{\mathrm{WEP}} \Leftrightarrow \mathrm{L}^*\mathrm{K} = 0$,
10. $\mathrm{A} \in \mathrm{C}_{n}^{\mathrm{GP}} \Leftrightarrow \mathrm{L} = 0, \Sigma = \mathrm{I}_r, \mathrm{K}^3 = \mathrm{I}_r$,

11. $\mathrm{A} \in \mathrm{C}_n^{\mathrm{HGP}} \Leftrightarrow \mathrm{L} = 0, (\Sigma\mathrm{K})^3 = \mathrm{I}_\mathrm{r}$.

Nekoliko interesantnih karakterizacija skupova C_n^{GP} i C_n^{HGP} dobija se kao direktna posledica Leme 2.1.2. Na primer, lako se uočava da je:

$$C_n^{\mathrm{HGP}} = C_n^{\mathrm{QP}} \cap C_n^{\mathrm{EP}} = C_n^{\mathrm{QP}} \cap C_n^{\mathrm{WEP}}. \tag{2.19}$$

Još jedno neposredno opažanje koje nastaje iz Leme 2.1.2 je:

$$C_n^{\mathrm{GP}} = C_{n,n}^{\mathrm{PI}} \cap C_n^{\mathrm{QP}} \cap C_n^{\mathrm{WEP}} = C_{n,n}^{\mathrm{PI}} \cap C_n^{\mathrm{HGP}}, \tag{2.20}$$

što je još jedna potvrda jednakosti (2.9).

Na osnovu drugog tvrđenja Posledice 3 [43] dobija se da ako je $\mathrm{A} \in \mathrm{C}_n^{\mathrm{GP}}$ onda je A^3 ortogonalni projektor na $\mathcal{R}(\mathrm{A})$. Sa druge strane, Stewart je u svom radu [110] primetio da ako je $\mathrm{A} \in \mathrm{C}_n^{\mathrm{HGP}}$ onda je A^3 ortogonalni projektor:

Teorema 2.1.6 [*12*] *Neka je* $\mathrm{A} \in \mathrm{C}^{\mathrm{n}\times\mathrm{n}}$. *Tada je* $\mathrm{A} \in \mathrm{C}_\mathrm{n}^{\mathrm{HGP}}$ *ako i samo ako je* A^3 *ortogonalni projektor na* $\mathcal{R}(\mathrm{A})$.

Kao direktna posledica prethodnog tvrđenja sledi:

Posledica 2.1.2 [*12*] *Neka je* $\mathrm{A} \in \mathrm{C}_n^{\mathrm{HGP}}$. *Tada je* $\mathrm{r}(\mathrm{A}) = \mathrm{tr}(\mathrm{A}^3)$.

Na osnovu Teoreme 2.1.5 dobija se da za svako $\mathrm{A} \in \mathrm{C}^{\mathrm{n}\times\mathrm{n}}$ važi:

$$\mathrm{A} \in \mathrm{C}_n^{\mathrm{GP}} \Leftrightarrow \mathrm{A}^\dagger \in \mathrm{C}_n^{\mathrm{GP}} \quad \mathrm{i} \quad \mathrm{A} \in \mathrm{C}_n^{\mathrm{HGP}} \Leftrightarrow \mathrm{A}^\dagger \in \mathrm{C}_n^{\mathrm{HGP}}. \tag{2.21}$$

Pitanje koje se nameće je: da li analogna ekvivalencija važi kada se Moore-Penrose-ov inverz matrice A zameni sa grupnim inverzom $\mathrm{A}^\#$? Odgovor na to pitanje dat je u narednoj teoremi:

Teorema 2.1.7 [*12*] *Neka je* $\mathrm{A} \in \mathrm{C}_\mathrm{r}^{\mathrm{n}\times\mathrm{n}}$ *matrica indeksa jedan. Tada važi:*

$$\mathrm{A} \in \mathrm{C}_\mathrm{n}^{\mathrm{GP}} \Leftrightarrow \mathrm{A}^\# \in \mathrm{C}_\mathrm{n}^{\mathrm{GP}} \quad \mathrm{i} \quad \mathrm{A} \in \mathrm{C}_\mathrm{n}^{\mathrm{HGP}} \Leftrightarrow \mathrm{A}^\# \in \mathrm{C}_\mathrm{n}^{\mathrm{HGP}}. \tag{2.22}$$

Druge dve karakterizacije skupa generalisanih projektora date su u naredne dve teoreme.

Teorema 2.1.8 [*12*] *Za svako* $\mathrm{A} \in \mathrm{C}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{n}\times\mathrm{n}}$ *važi:*

$$\mathrm{A} \in \mathrm{C}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{GP}} \Leftrightarrow \mathrm{A} \in \mathrm{C}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{SD}} \cap \mathrm{C}_{n}^{\mathrm{QP}} \cap \mathrm{C}_{n}^{\mathrm{WEP}}. \tag{2.23}$$

Teorema 2.1.9 [*12*] *Za svako* $\mathrm{A} \in \mathrm{C}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{n}\times\mathrm{n}}$ *važi:*

$$\mathrm{A} \in \mathrm{C}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{GP}} \Leftrightarrow \mathrm{A} \in \mathrm{C}^{\mathrm{CA}} \cap \mathrm{C}_{n}^{\mathrm{QP}} \cap \mathrm{C}_{n}^{\mathrm{WEP}}. \tag{2.24}$$

Pitanje zatvorenosti operacije množenja na skupu generalisanih projektora proučavan je u radu [53]. Groß i Trenkler zapazili su da je komutativnost dva generalisana projektora dovoljan uslov da je i njihov proizvod takođe generalisani projektor. Kasnije je taj rezultat uopšten u narednoj teoremi:

Teorema 2.1.10 [*12*] *Neka su* $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathrm{C}_{n}^{\mathrm{GP}}$ *i neka je jedan od njih idempotent. Sledeća tvrđenja su ekvivalentna:*

1. $\mathrm{AB} \in \mathrm{C}_{n}^{\mathrm{GP}}$,

2. $\mathrm{AB} \in \mathrm{C}_{n}^{\mathrm{N}}$,

3. $\mathrm{AB} = \mathrm{BA}$.

Iz same definicije projektora dobija se da je $\mathrm{A} \in \mathrm{C}_{n}^{\mathrm{P}}$ ako i samo ako je $\mathrm{I}_{\mathrm{n}} - \mathrm{A} \in \mathrm{C}_{n}^{\mathrm{P}}$ i, slično, iz definicije ortogonalnih projektora dobija se da je $\mathrm{A} \in \mathrm{C}_{n}^{\mathrm{OP}}$ ako i samo ako je $\mathrm{I}_{\mathrm{n}} - \mathrm{A} \in \mathrm{C}_{n}^{\mathrm{OP}}$. Ova osobina ne važi za generalisane i hipergeneralisane projektore, što pokazuje naredni primer:

Primer 2.1.1

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{pri čemu je c} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \text{ ili c} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i. \tag{2.25}$$

Ova matrica zadovoljava uslov $\mathrm{A}^2 = \mathrm{A}^*$ (time i $\mathrm{A}^2 = \mathrm{A}^\dagger$) ali ne zadovoljava $(\mathrm{I}_2 - \mathrm{A})^4 = \mathrm{I}_2 - \mathrm{A}$, što je, imajući u vidu (2.19) i (2.20), neophodan uslov da je $\mathrm{A} \in \mathrm{C}_n^{\mathrm{HGP}}$ (i time i $\mathrm{A} \in \mathrm{C}_n^{\mathrm{GP}}$).

Groß i Trenkler su u radu [53] zapazili da ako je $\mathrm{A} \in \mathrm{C}_n^{\mathrm{GP}}$, onda je $\mathrm{I_n} - \mathrm{A} \in \mathrm{C}_n^{\mathrm{EP}}$. Bitno ojačana verzija ovog razmatranja data je u sledećoj teoremi.

Teorema 2.1.11 [*12*] *Ako je* $\mathrm{A} \in \mathrm{C}_n^{\mathrm{GP}}$, *tada je* $\mathrm{I_n} - \mathrm{A} \in \mathrm{C}_n^{\mathrm{N}}$. *Ako je* $\mathrm{A} \in \mathrm{C}_n^{\mathrm{GP}}$, *onda je* $\mathrm{I_n} - \mathrm{A} \in \mathrm{C}_n^{\mathrm{GP}}$ *ako i samo ako je* $\mathrm{A} \in \mathrm{C}_n^{\mathrm{OP}}$. *Slično, ako je* $\mathrm{I_n} - \mathrm{A} \in \mathrm{C}_n^{\mathrm{GP}}$, *tada je* $\mathrm{A} \in \mathrm{C}_n^{\mathrm{N}}$. *Ako je* $\mathrm{I_n} - \mathrm{A} \in \mathrm{C}_n^{\mathrm{GP}}$, *tada je* $\mathrm{A} \in \mathrm{C}_n^{\mathrm{GP}}$ *ako i samo ako je* $\mathrm{A} \in \mathrm{C}_n^{\mathrm{OP}}$.

Posledica 2.1.3 [*12*] *Ako je* $\mathrm{A} \in \mathrm{C}_n^{\mathrm{GP}}$, *tada je* $\mathrm{I}_n - \mathrm{A} \in \mathrm{C}_n^{\mathrm{GP}}$ *ako i samo ako je* $\mathrm{I}_n - \mathrm{A} \in \mathrm{C}_n^{\mathrm{QP}}$ *i, analogno, ako je* $\mathrm{I}_n - \mathrm{A} \in \mathrm{C}_n^{\mathrm{GP}}$, *tada je* $\mathrm{A} \in \mathrm{C}_n^{\mathrm{GP}}$ *ako i samo ako je* $\mathrm{A} \in \mathrm{C}_n^{\mathrm{QP}}$.

Iz (2.20) zaključuje se da je klasa matrica C_n^{PI} još jedna od klasa matrica korisna u karakterizaciji C_n^{GP}. Pitanje koje se prirodno nameće jeste, slično razmatranju u Teoremi 3.3.2, da li tvrđenje $\mathrm{A} \in \mathrm{C}_n^{\mathrm{GP}}$ povlači sa sobom i tvrđenje $\mathrm{I}_n - \mathrm{A} \in \mathrm{C}_n^{\mathrm{PI}}$ i da li tvrđenje $\mathrm{I}_n - \mathrm{A} \in \mathrm{C}_n^{\mathrm{GP}}$ povlači za sobom tvrđenje $\mathrm{A} \in \mathrm{C}_n^{\mathrm{PI}}$. Odgovor na oba pitanja je negativan. Matrica A određena u (2.25) je generalisani projektor, ali $\mathrm{I}_2 - \mathrm{A}$ nije parcijalna izometrija, dok sa druge strane $\mathrm{I}_2 - \mathrm{A}$, kojoj je jedini nenula element c jednak $\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ili $\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$, jeste generalisani projektor, ali A nije parcijalna izometrija.

Negativni odgovori se dobijaju kada se posmatraju analogna pitanja za hipergeneralisani projektor, što pokazuje sledeći primer:

Primer 2.1.2

Matrica

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} \end{pmatrix}, \quad \text{pri čemu je x} \in \mathrm{C},$$

koja zadovoljava uslov $\mathrm{A}^2 = \mathrm{A}^{-1}$, je hipergeneralisani projektor. Ako je $x \neq 0$, onda $\mathrm{I}_2 - \mathrm{A}$, čiji je Moore-Penrose-ov inverz:

$$(\mathrm{I}_2 - \mathrm{A})^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{\bar{x}}{3+x\bar{x}} & \frac{3-\sqrt{3}i}{2(3+x\bar{x})} \end{pmatrix},$$

nije slaba EP-matrica. Obrnuto, za $\widetilde{\mathrm{A}}$ izabrano tako da važi $\mathrm{I}_2 - \widetilde{\mathrm{A}} = \mathrm{A}$, analogni argumenti pokazuju da važi da je $\mathrm{I}_2 - \widetilde{\mathrm{A}} \in \mathrm{C}_n^{\mathrm{HGP}}$, ali $\widetilde{\mathrm{A}} \notin C_n^{\mathrm{WEP}}$.

Iako je opšta formula za Moore-Penrose-ov inverz linearne kombinacije dve matrice data od strane Hung-a i Markham-a [67], u praksi je veoma teško primenjivati je. Poslednji rezultat u ovoj oblasti pokazuje da je reprezentacija (2.16) veoma korisna za nalaženje Moore-Penrose-ovog inverza linearne kombinacije oblika $\alpha\mathrm{A} + \beta\mathrm{A}^*$, gde je $\mathrm{A} \in \mathrm{C}_n^{\mathrm{GP}}$ i α, $\beta \in C$. Glavnu ulogu u dokazivanju ovog rezultata igra naredna lema:

Lema 2.1.7 *Neka su* α, $\beta \in C$ *i neka je* $\mathrm{K} \in \mathrm{C}^{r\times r}$ *takvo da zadovoljava uslove* $\mathrm{K}^3 = \mathrm{I}_r$ *i* $\mathrm{K}^* = \mathrm{K}^{-1}$. *Neka je G linearna kombinacija oblika* $\mathrm{G} = \alpha\mathrm{K} + \beta\mathrm{K}^*$ *i* $\gamma = \alpha^3 + \beta^3$. *Ako je* $\gamma \neq 0$, *tada je G nesingularna i važi:*

$$\mathrm{G}^{-1} = \frac{1}{\gamma}(\beta^2\mathrm{K} + \alpha^2\mathrm{K}^* - \alpha\beta\mathrm{I}_r). \tag{2.26}$$

Ako je matrica A data u obliku (2.16) generalisani projektor, tada važi:

$$\alpha\mathrm{A} + \beta\mathrm{A}^* = \begin{pmatrix} \alpha\mathrm{K} + \beta\mathrm{K}^* & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Na osnovu Leme 2.1.7 očigledno je da, pod pretpostavkom da je $\alpha^3 + \beta^3 \neq 0$, važi:

$$(\alpha\mathrm{A} + \beta\mathrm{A}^*)^\dagger = \begin{pmatrix} \mathrm{G}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

pri čemu je G^{-1} oblika (2.26).

2.2 Karaterizacija k-generalisanih projektora

Pojam k-generalisanih projektora definisan je u radu [24] kao uopštenje generalisanih projektora.

Definicija 2.2.1 [24] *Neka je $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$, $k \in N$ i $k > 1$. Za matricu A kaže se da je generalisani k-projektor ako je $A^k = A^*$.*

Očigledno ova klasa matrica generalizuje klasu generalisanih projektora. Kako je matrica A normalna ako i samo ako postoji polinom p tako da je $A^* = p(A)$ (videti [50]), očigledno je k-generalisani projektor normalna matrica. Međutim normalnost nije dovoljan uslov da bi matrica bila k-generalisani projektor. Potrebni i dovoljni uslovi za to dati su u sledećoj teoremi.

Teorema 2.2.1 [24] *Neka je $A \in C^{n\times n}$ i $k \in \mathbf{N}$, $k > 1$. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(i) *A je k-generalisani projektor;*

(ii) *A je normalna matrica i $\sigma(A) \subseteq \sigma_{k+1} \cup \{0\}$;*

(iii) *A je normalna matrica i $A^{k+2} = A$.*

Posledica 2.2.1 [24] *Neka je $A \in C^{n\times n}$ hermitska matrica i k-generalisani projektor za $k \in \mathbf{N}$, $k > 1$. Ako je k paran broj, onda je A ortogonalan projektor. Ako je k neparan broj, onda je $A^3 = A$ i A je normalna matrica.*

Posledica 2.2.2 [24] *Neka je $A \in \mathbf{C}_r^{n\times n}$. Tada su sledeća tvrđenja ekvivalentna:*

(i) *$A^4 = A$ i A je normalna matrica;*

(ii) *A je oblika*

$$A = U \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^*, \tag{2.27}$$

gde je $U \in \mathbf{C}^{n\times n}$ unitarna i $D \in \mathbf{C}^{r\times r}$ dijagonalna matrica sa dijagonalnim elementima koji pripadaju skupu σ_3;

(iii) $A^2 = A^*$.

U narednoj teoremi izloženi su potrebni i dovoljni uslovi da bi linearna kombinacija dva komutativna k-generalisana projektora takođe bila k-generalisani projektor.

Teorema 2.2.2 [24] *Neka su* $G_1, G_2 \in \mathbf{C}^{n\times n}$ *komutativni k-generalisani projektori i* $c_1, c_2 \in C\setminus\{0\}$. *Ako je* $c_1G_1+c_2G_2$ *k-generalisani projektor, tada važi jedan od sledećih uslova:*

(i) $c_1, c_2 \in \sigma_{k+1}$;

(ii) $c_1 \in \sigma_{k+1}$ *i postoji* $t \in \{0, 1, \ldots, \; k\}$ *tako da je* $\omega_{k+1}^t c_1 + c_2 \in \{0\} \cup \sigma_{k+1}$;

(iii) $c_2 \in \sigma_{k+1}$ *i postoji* $s \in \{0, 1, \ldots, \; k\}$ *tako da je* $c_1 + \omega_{k+1}^s c_2 \in \{0\} \cup \sigma_{k+1}$;

(iv) *Posoje* $t, s \in \{0, 1, \ldots, \; k\}$ *tako da važi jedan od sledećih uslova:*

  (a) $t + s \in \{0, k+1\}$ *i* $\omega_{k+1}^t c_1 + c_2 \in \{0\} \cup \sigma_{k+1}$;

  (b) $t + s$ *nije veći od* $k+1$ *i postoje* $\varphi_1, \varphi_2 \in \{0\} \cup \sigma_{k+1}$ *tako da je* $\varphi_1\varphi_2 \neq 0$ *i*

$$\varphi_1 = \frac{\varphi_1\omega_{k+1}^s - \varphi_2}{\omega_{k+1}^{t+s} - 1}, \quad \varphi_2 = \frac{\varphi_2\omega_{k+1}^t - \varphi_1}{\omega_{k+1}^{t+s} - 1}.$$

U radu [35] pojam k-generalisanih projektora uopšten je na skup svih ograničenih linearnih operatora na Hilbertovom prostoru: Neka je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor i $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ skup ograničenih linearnih operatora na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ je generalisani k-projektor ako postoji prirodan broj $k > 1$ za koji važi $A^k = A^*$. Dalje su generalisani k-projektori na Hilbertovom prostoru bili predmet izučavanja u radovima [44] i [81].

2.3 Rezultati vezani za parcijalna uređenja matrica

U ovom poglavlju razmatraćemo neka parcijalna uređenja matrica koja se u opštem slučaju definišu na skupu $C^{m\times n}$. Drazin [42] je 1978. definisao zvezda parcijalno uređenje: Za matrice $A, B \in \mathbf{C}^{m\times n}$ kaže se da je matrica A manja ili jednaka od B u odnosu na zvezda parcijalno uređenje, i označava se sa $A \overset{*}{\leq} B$,

$$\mathrm{A} \overset{*}{\leq} \mathrm{B} \Leftrightarrow \mathrm{A}^*\mathrm{A} = \mathrm{A}^*\mathrm{B} \quad \mathrm{i} \quad \mathrm{AA}^* = \mathrm{BA}^*. \tag{2.28}$$

Modifikacijom uslova (2.28), Baksalary i Mitra uvode još dva uređenja u radu [13], takozvano levo-zvezda i desno-zvezda uređenje. Matrice $A, B \in C^{m\times n}$ su levo-zvezda uređene, u oznaci $A* \leq B$,

$$A* \leq B \Leftrightarrow A^*A = A^*B \ \text{ i } \ \mathcal{R}(A) \subseteq \mathcal{R}(B) \tag{2.29}$$

i desno-zvezda uređene, u oznaci $A \leq *B$,

$$A \leq *B \Leftrightarrow AA^* = BA^* \ \text{ i } \ \mathcal{R}(A^*) \subseteq \mathcal{R}(B^*). \tag{2.30}$$

Četvrto parcijalno uređenje definisano od strane Hartwig-a [55] i Nambooripad-a [90], nezavisno, jeste takozvano minus (rang razlika) uređenje definisano u $C^{m\times n}$. Ono može biti definisano na nekoliko načina od kojih mi, za dalji rad, koristimo sledeća dva:

$$A \overset{-}{\leq} B \Leftrightarrow r(B-A) = r(B) - r(A) \tag{2.31}$$

$$A \overset{-}{\leq} B \Leftrightarrow BB^\dagger A = AB^\dagger B = AB^\dagger A = A. \tag{2.32}$$

Grupno uređenje definisao je Mitra [86] na skupu grupno invertibilnih matrica na sledeći način:

$$A \overset{\sharp}{\leq} B \Leftrightarrow (A^\sharp A = A^\sharp B \ \ i \ \ AA^\sharp = BA^\sharp). \tag{2.33}$$

Očigledno važi:

$$A \overset{\sharp}{\leq} B \Leftrightarrow AB = A^2 = BA.$$

Pojam zvezda-ortogonalnosti definisao je Hestenes [63]. Za matrice $A, B \in \mathbf{C}^{n\times m}$ kaže se da su zvezda-ortogonalne, i označava se sa $A \overset{*}{\perp} B$,

$$A \overset{*}{\perp} B \Leftrightarrow AB^* = 0 \quad i \quad A^*B = 0. \tag{2.34}$$

Opšte je poznato da za $A, B \in C_n^{EP}$ važi:

$$A \overset{*}{\perp} B \Leftrightarrow AB = 0 \Leftrightarrow BA = 0. \tag{2.35}$$

Može se pokazati da su levo-zvezda i desno-zvezda uređenja smeštena između zvezda i minus uređenja:

$$A \overset{*}{\leq} B \Leftrightarrow A* \leq B \quad i \quad A \leq *B, \tag{2.36}$$

$$A* \leq B \Rightarrow A \overset{-}{\leq} B \quad i \quad A \leq *B \Rightarrow A \overset{-}{\leq} B. \tag{2.37}$$

Definicije 2.29 i 2.30 modifikovane su na skupu EP matrica, što se može videti iz sledećih tvrđenja.

Teorema 2.3.1 [12] *Za svako* $\mathrm{A} \in \mathrm{C}_n^{\mathrm{EP}}$ *i* $\mathrm{B} \in \mathrm{C}^{\mathrm{n}\times\mathrm{n}}$ *za koje je* $\mathrm{A}^2 = \mathrm{AB}$ *važi:*

$$A* \leq B \Leftrightarrow A^2 = AB \quad i \quad \mathcal{R}(A) \subseteq \mathcal{R}(B).$$

Analogno, ako je $\mathrm{A}^2 = \mathrm{BA}$, *tada važi:*

$$A \leq *B \Leftrightarrow A^2 = BA \quad i \quad \mathcal{R}(A^*) \subseteq \mathcal{R}(B^*).$$

Uslov $\mathrm{A}^2 = \mathrm{AB}$ ekvivalentan je sa uslovom $\mathrm{A} = \mathrm{A}^\dagger\mathrm{AB}$. Analogno, uslov $\mathrm{A}^2 = \mathrm{BA}$ ekvivalentan je sa uslovom $\mathrm{A} = \mathrm{BAA}^\dagger$. Primetimo da uslov $\mathrm{A} = \mathrm{A}^\dagger\mathrm{AB}$ implicira $\mathcal{R}(\mathrm{A}) \subseteq \mathcal{R}(\mathrm{B})$, dok uslov $\mathrm{A} = \mathrm{BAA}^\dagger$ implicira $\mathcal{R}(\mathrm{A}^*) \subseteq \mathcal{R}(\mathrm{B}^*)$.

Posledica 2.3.1 [12] *Ako je* $\mathrm{A} \in \mathrm{C}_n^{\mathrm{EP}}$, *tada za* $\mathrm{B} \in \mathrm{C}^{\mathrm{n}\times\mathrm{n}}$ *važi:*

$$A \overset{*}{\leq} B \Leftrightarrow AB = A^2 = BA. \tag{2.38}$$

Slično važi: Ako su $A, B \in C_n^{EP}$, tada je

$$A \overset{*}{\perp} B \Leftrightarrow AB = 0 \Leftrightarrow BA = 0. \tag{2.39}$$

Interesantno pitanje je kada su sva parcijalna uređenja, ili bar neka od njih, ekvivalentna. Hartwig i Styan [61] su pokazali da su minus i zvezda parcijalno uređenje ekvivalentna unutar skupa C_n^{OP}, tj. ako su $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathrm{C}_n^{\mathrm{OP}}$, tada važi:

$$A \overset{-}{\leq} B \Leftrightarrow A* \leq B \Leftrightarrow A \leq *B \Leftrightarrow A \overset{*}{\leq} B. \tag{2.40}$$

Pomenute ekvivalencije važe i na široj klasi matrica. Naime, može se pokazati ([52], Lema 2) da ekvivalencije (2.40) važe za svako $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathrm{C}_n^{\mathrm{PI}}$. Kako je $C_n^{\mathrm{GP}} \subseteq C_n^{\mathrm{PI}}$, očigledno (2.40) važi za sve generalisane projektore. Imajući u vidu inkluziju $C_n^{\mathrm{GP}} \subseteq C_n^{\mathrm{HGP}}$, postavlja se pitanje da li neke od ekvivalencija iz (2.40) važe unutar klase hipergeneralisanih projektora. Odgovor je negativan, što pokazuje naredni primer.

Primer 2.3.1

Prvo zapažanje koje se tiče odnosa ovih relacija na skupu hipergeneralisanih projektora je: za $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathrm{C}_n^{\mathrm{HGP}}$ minus uređenje $A \overset{-}{\leq} B$ ne povlači ni uređenje $A* \leq B$ ni uređenje $A \leq *B$ (a samim time ni uređenje $A \overset{*}{\leq} B$) što pokazuje sledeći primer:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathrm{i} \quad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} c & 1 \\ 0 & c^{-1} \end{pmatrix},$$

pri čemu je $c = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ili je $c = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Lako se može pokazati da ove matrice zadovoljavaju uslove $\mathrm{A}^2 = \mathrm{A}^\dagger$, $\mathrm{B}^2 = \mathrm{B}^\dagger$ i $r(\mathrm{B} - \mathrm{A}) = r(B) - r(A)$, ali ne zadovoljavaju uslov $\mathrm{A}^*\mathrm{A} = \mathrm{A}^*\mathrm{B}$, što pokazuje da je $\mathrm{A} \in \mathrm{C}_n^{\mathrm{HGP}}$ u relaciji minus sa $\mathrm{B} \in \mathrm{C}_n^{\mathrm{HGP}}$, ali da nije u relaciji levo zvezda sa B. Analogno, kako je $\mathrm{K} \in \mathrm{C}_n^{\mathrm{HGP}} \Leftrightarrow \mathrm{K}^* \in \mathrm{C}_n^{\mathrm{HGP}}$, to su konjugovano transponovane matrice hipergeneralisani projektori, ali $\mathrm{A}^* \overset{-}{\leq} \mathrm{B}^*$ ne povlači $\mathrm{A}^* \leq *\mathrm{B}^*$.

U narednom rezultatu razmatramo uslove pod kojima je skup hipergeneralisanih projektora ekvivalentan sa skupom EP matrica.

Teorema 2.3.2 [*53*] *Neka su* $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathrm{C}^{\mathrm{n}\times\mathrm{n}}$. *Ako je* $\mathrm{B} \in \mathrm{C}_n^{\mathrm{HGP}}$ *i* $\mathrm{A} \overset{*}{\leq} \mathrm{B}$, *tada je* $\mathrm{A} \in \mathrm{C}_n^{\mathrm{HGP}}$ *ako i samo ako je* $\mathrm{A} \in \mathrm{C}_n^{\mathrm{EP}}$.

Ovo zapažanje je ojačano u narednoj teoremi. Naime, pokazuje se da rezultat važi i kada se uslov $\mathrm{A} \overset{*}{\leq} \mathrm{B}$ zameni uslovom $\mathrm{A}^2 = \mathrm{AB}$ (ili uslovom $\mathrm{A}^2 = \mathrm{BA}$).

Teorema 2.3.3 [*12*] *Neka su* $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathrm{C}^{\mathrm{n}\times\mathrm{n}}$ *takvi da je* $\mathrm{B} \in \mathrm{C}_n^{\mathrm{HGP}}$ *i* $\mathrm{A}^2 = \mathrm{AB}$ *ili* $\mathrm{A}^2 = \mathrm{BA}$. *Tada je* $\mathrm{A} \in \mathrm{C}_n^{\mathrm{HGP}}$ *ako i samo ako je* $\mathrm{A} \in \mathrm{C}_n^{\mathrm{EP}}$.

Neka je $\mathrm{A} \in \mathrm{C}^{\mathrm{HGP}}$. Ako je A oblika

$$\mathrm{A} = \mathrm{U}\begin{pmatrix} \Sigma\mathrm{K} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\mathrm{U}^*, \qquad \text{gde je } (\Sigma\mathrm{K})^3 = \mathrm{I_r}. \tag{2.41}$$

i $\mathrm{B} \in \mathrm{C}^{\mathrm{n}\times\mathrm{n}}$ oblika

$$\mathrm{B} = \mathrm{U}\begin{pmatrix} \mathrm{D} & \mathrm{E} \\ \mathrm{F} & \mathrm{G} \end{pmatrix}\mathrm{U}^*, \quad \text{gde je } \mathrm{D} \in \mathrm{C}^{r\times r},\ \mathrm{G} \in \mathrm{C}^{(n-r)\times(n-r)}, \tag{2.42}$$

tada važi:
(1) ako je $\mathrm{A} \overset{*}{\leq} \mathrm{B}$, tada je:

$$\mathrm{B} = \mathrm{U}\begin{pmatrix} \Sigma\mathrm{K} & 0 \\ 0 & \mathrm{G} \end{pmatrix}\mathrm{U}^*,$$

i, kao posledica dobija se da je $\mathrm{B} \in \mathrm{C}_n^{\mathrm{HGP}}$ ako i samo ako je $\mathrm{G} \in \mathrm{C}_{n-r}^{\mathrm{HGP}}$,
(2) ako je $\mathrm{B} \overset{*}{\leq} \mathrm{A}$, tada je:

$$\mathrm{B} = \mathrm{U}\begin{pmatrix} \mathrm{D} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\mathrm{U}^*$$

i, kao posledica dobija se da je $\mathrm{B} \in \mathrm{C}_n^{\mathrm{HGP}}$ ako i samo ako je $\mathrm{D} \in \mathrm{C}_r^{\mathrm{HGP}}$.

U narednom rezultatu dajemo potrebne i dovoljne uslove da je zbir dva generalisana projektora generalisani projektor. Rezultat važi i slučaju projektora i ortogonalnih projektora.

Teorema 2.3.4 [53] *Neka je $\mathcal{G}$ podskup $C^{n\times n}$ koji označava skup idempotenata, ortogonalnih projektora ili generalisanih projektora i neka $A, B \in \mathcal{G}$. Tada je $A + B \in \mathcal{G}$ ako i samo ako je $AB = BA = 0$, tj. $A \overset{*}{\perp} B$.*

Ako su A i B hipergeneralisani projektori i $AB = BA = 0$, tada je $A+B$ hipergeneralisani projektor. Zaista, uslov $AB = BA = 0$ implicira $(A + B)^{\dagger} = A^{\dagger} + B^{\dagger}$.

U narednom rezultatu dajemo oblik matrice koja je povezana levo-zvezda parcijalnim uređenjem sa EP matricom.

Lema 2.3.1 [23] *Neka je $A \in C_n^{EP}$ oblika (4.9) i $B \in C^{n\times n}$. Tada je $A* \leq B$ ako i samo ako postoje $S \in C^{(n-r)\times(n-r)}$ i $Z \in C^{(n-r)\times r}$ tako da je*

$$B = U \begin{bmatrix} K & 0 \\ -SZ & S \end{bmatrix} U^*, \tag{2.43}$$

gde je $U \in C^{n\times n}$ unitarna i $K \in C^{r\times r}$ invertibilna matrica.

Ako je $A \in C_n^{EP}$ i B grupno invertibilna matrica, tada je $A \overset{*}{\leq} B$ ako i samo ako je $A \overset{\sharp}{\leq} B$. Moglo bi se očekivati da sledeće ekvivalencije važe:

(i) Ako je $A \in C^{n\times n}$ i $B \in C_n^{EP}$, tada je $A* \leq B \Leftrightarrow A \leq *B$.

(ii) Ako je A grupno invertibilna matrica i $B \in C_n^{EP}$, tada je $A* \leq B \Leftrightarrow A \overset{*}{\leq} B$.

(ii) Ako je A grupno invertibilna matrica i $B \in C_n^{EP}$, tada je $A \leq *B \Leftrightarrow A \overset{*}{\leq} B$.

Međutim sledeći primer pokazuje da ni jedna od navedenih ekvivalencija ne važi.

Primer: Neka su

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ i C} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 1 \end{pmatrix},$$

gde su $a, b, c \in C$ i $a \neq bc$. A je grupno invertibilna matrica, $B \in C_n^{EP}$, $\mathcal{R}(A) \subseteq \mathcal{R}(B)$ i $\mathcal{R}(A^*) \subseteq \mathcal{R}(B^*)$. Takođe je:

(i) $A^*A = A^*B \Leftrightarrow a = b = 1$,

(ii) $AA^* = BA^* \Leftrightarrow a + b = 2$ i c $= -1$,

(iii) $AB = A^2 = BA \Leftrightarrow a = 1,\ b = 0,\ c = 0$,

što pokazuje da su relacije $A* \leq B$, $A \leq *B$ i $A \overset{*}{\leq} B$ nezavisne i pod pretpostavkom da je B EP matrica.

Naredni rezultati odnose se na matrice povezane minus parcijalnim uređenjem.

Lema 2.3.2 *[57] Neka $A, B \in C^{m\times n}$ i $a = r(A) < r(B) = b$. Tada je $A \overset{-}{\leq} B$ ako i samo ako je matrica A oblika:*

$$A = U \begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^* \tag{2.44}$$

i matrica B oblika:

$$B = U \begin{bmatrix} D_1 + RD_2S & RD_2 \\ D_2S & D_2 \end{bmatrix} V^*, \tag{2.45}$$

gde $U \in C^{m\times b}$, $V \in C^{n\times b}$ zadovoljavaju $U^*U = I_b = V^*V$, D_1, D_2 su pozitivno definitne dijagonalne matrice ranga a, $b - a$, respektivno, i $R \in C^{a\times(b-a)}$, $S \in C^{(b-a)\times a}$ su proizvoljne matrice.

U narednom tvrđenju dajemo potrebne i dovoljne uslove da je razlika dva generalisana projektora generalisani projektor. Rezultat važi i za skup projektora i ortogonalnih projektora.

Teorema 2.3.5 *[53] Neka je $\mathcal{G}$ podskup $C^{n\times n}$ koji označava skup idempotenata, ortogonalnih projektora ili generalisanih projektora i neka $A, B \in \mathcal{G}$. Tada je $B - A \in \mathcal{G}$ ako i samo ako je $A \overset{-}{\leq} B$, tj.* A $\overset{*}{\leq}$ B.

Ako su A i B hipergeneralisani projektori i A $\overset{*}{\leq}$ B, tada je $B - A$ hipergeneralisani projektor. Zaista, uslov A $\overset{*}{\leq}$ B implicira $(B - A)^\dagger = B^\dagger - A^\dagger$. Sada je $(B - A)^\dagger = B^2 - A^2 = (B - A)^2$.

Teorema 2.3.6 [*53*] *Neka je $\mathcal{H}$ podskup $C^{n\times n}$ koji označava skup idempotenata, ortogonalnih projektora, generalisanih projektora ili hipergeneralisanih projektoria i neka $A, B \in \mathcal{H}$. Tada je $AB \in \mathcal{H}$ ako je $AB = BA$.*

Ako su A, B i AB ortogonalani projektori, tada je $AB = BA$. Međutim, analogno tvrđenje ne važi za projektore, generalisane i hipergeneralisane projektore.

Glava 3

Invertibilnost linearne kombinacije matrica

3.1 Invertibilnost generalisanih projektora

U ovom poglavlju izložićemo orginalne rezultate iz rada [115], koji se odnose na pitanje invertibilnosti linearne kombinacije dva komutativna generalisana projektora.
U Lemi 2.1.2 dokazano je da je generalisani projektor $A \in \mathbf{C}_r^{n\times n}$ oblika

$$A = U \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^*, \tag{3.1}$$

gde je $U \in \mathbf{C}^{n\times n}$ unitarna i $K \in \mathbf{C}^{r\times r}$ matrica za koju važi $K^3 = I_r$ i $K^* = K^{-1}$, kao i da je matrična forma hipergeneralisanog projektora $A \in \mathbf{C}_r^{n\times n}$,

$$A = U \begin{bmatrix} \Sigma K & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^*, \tag{3.2}$$

gde je $U \in \mathbf{C}^{n\times n}$ unitarna, $\Sigma = diag(\sigma_1 I_{r_1}, \dots, \sigma_t I_{r_t})$ dijagonalna matrica sopstvenih vrednosti matrice A, $\sigma_1 > \sigma_2 > \dots > \sigma_t > 0$, $r_1 + r_2 + \dots + r_t = r = r(A)$ i $K \in \mathbf{C}^{r\times r}$ matrica za koju važi $(\Sigma K)^3 = I_r$ i $KK^* = I_r$.
Ove reprezentacije generalisanih i hipergeneralisanih projektora bile su od značaja prilikom dobijanja narednih rezultata. Takođe je od interesa i sledeća lema:

Lema 3.1.1 *Neka su $A, B \in \mathbf{C}^{n\times n}$ generalisani ili hipergeneralisani projektori. Ako je $AB = BA$, tada je oblik matrice B*

$$B = U \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix} U^*, \tag{3.3}$$

gde su $D \in C^{r\times r}$ i $G \in C^{(n-r)\times(n-r)}$ generalisani ili hipergeneralisani projektori i $KD = DK$.

Dokaz: Dokaz ćemo izvesti u slučaju kada su A i B komutativni generalisani projektori. Tvrđenje se analogno dokazuje i za komutativne hipergeneralisane projektore.
Neka je $A \in \mathbf{C}_r^{n\times n}$ oblika (3.1). Pretpostavimo da je oblik matrice $B \in C^{n\times n}$

$$B = U \begin{bmatrix} D & E \\ F & G \end{bmatrix} U^*, \tag{3.4}$$

gde je $D \in C^{r\times r}$ i $G \in \mathbf{C}^{(n-r)\times(n-r)}$. Primenom $AB = BA$ dobija se

$$U \begin{bmatrix} KD & KE \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^* = U \begin{bmatrix} DK & 0 \\ FK & 0 \end{bmatrix} U^*,$$

što implicira da je $KD = DK$ i $KE = 0 = FK$. Kako je K invertibilna matrica, iz $KE = 0 = FK$ sledi da je $E = 0 = F$. S obzirom na to da je B generalisani projektor, važi $D^* = D^2$ i $G^* = G^2$. $\square$

U narednom rezultatu dajemo potrebne i dovoljne uslove za istovremenu invertibilnost razlike $A-B$ i linearne kombinacije $A^* + AB + B^*$, u slučaju kada su A i B komutativni generalisani projektori.

Teorema 3.1.1 *Neka su A, $B \in \mathbf{C}^{n\times n}$ generalisani projektori i $AB = BA$. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(i) $\mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{R}(B) = C^{n\times 1}$,

(ii) $\mathcal{N}(A) \oplus \mathcal{N}(B) = C^{n\times 1}$,

(iii) $\mathcal{R}(A) \cap \mathcal{R}(B) = \{0\}$ *i* $\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{N}(B) = \{0\}$,

(iv) $A - B$, $A^* + AB + B^*$ *su invertibilne matrice.*

Dokaz: $(i) \Rightarrow (ii)$ Koristeći da je $\mathcal{N}(A^*) = \mathcal{N}(A)$ i $\mathcal{N}(B^*) = \mathcal{N}(B)$ za generalisane projektore, dobija se

$$(\mathcal{N}(A) + \mathcal{N}(B))^{\perp} = (\mathcal{N}(A^*) + \mathcal{N}(B^*))^{\perp} = \mathcal{N}(A^*)^{\perp} \cap \mathcal{N}(B^*)^{\perp} = \mathcal{R}(A) \cap \mathcal{R}(B) = \{0\}.$$

Dakle, $\mathcal{N}(A) + \mathcal{N}(B) = C^{n\times 1}$.
Slično,

$$(\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{N}(B))^{\perp} = (\mathcal{N}(A^*) \cap \mathcal{N}(B^*))^{\perp} = \mathcal{N}(A^*)^{\perp} + \mathcal{N}(B^*)^{\perp} = \mathcal{R}(A) + \mathcal{R}(B) = C^{n\times 1}.$$

Dakle, $\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{N}(B) = \{0\}$.
$(ii) \Rightarrow (iii)$ Kako iz uslova $\mathcal{N}(A) \oplus \mathcal{N}(B) = C^{n\times 1}$ direktno sledi $\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{N}(B) = \{0\}$, dovoljno je dokazati da važi $\mathcal{R}(A) \cap \mathcal{R}(B) = \{0\}$. Slično kao u dokazu $(i) \Rightarrow (ii)$, koristeći da je $\mathcal{R}(A^*) = \mathcal{R}(A)$ i $\mathcal{R}(B^*) = \mathcal{R}(B)$ za generalisane projektore, dobija se

$$(\mathcal{R}(A) \cap \mathcal{R}(B))^{\perp} = (\mathcal{R}(A^*) \cap \mathcal{R}(B^*))^{\perp} = \mathcal{R}(A^*)^{\perp} + \mathcal{R}(B^*)^{\perp} = \mathcal{N}(A) + \mathcal{N}(B) = C^{n\times 1}.$$

Dakle, $\mathcal{R}(A) \cap \mathcal{R}(B) = \{0\}$.
$(iii) \Rightarrow (iv)$ Dokažimo da je razlika $A-B$ bijekcija. Dovoljno je dokazati injektivnost $A - B$.
Neka je $(A - B)x = 0$. Tada je $Ax = Bx \in \mathcal{R}(A) \cap \mathcal{R}(B) = \{0\}$, pa sledi da je $x \in \mathcal{N}(A) \cap \mathcal{N}(B) = \{0\}$. Time je dokazana injektivnost $A - B$. Dakle, $A - B$ je invertibilna matrica.
Dokaz invertibilnosti $A^* + AB + B^*$ je sličan.
Neka je $(A^* + AB + B^*)x = 0$. Kako je $ABx = BAx = 0$, važi $(A^* + B^*)x = 0$, pa $A^*x = -B^*x \in \mathcal{R}(A^*) \cap \mathcal{R}(B^*) = \mathcal{R}(A) \cap \mathcal{R}(B) = \{0\}$. Iz poslednje relacije sledi da je $x \in \mathcal{N}(A^*) \cap \mathcal{N}(B^*) = \mathcal{N}(A) \cap \mathcal{N}(B) = \{0\}$, čime je pokazano da je A^*+AB+B^* "jedan-jedan". Dakle, A^*+AB+B^* je invertibilna matrica.
$(iv) \Rightarrow (i)$ Kako je $AB = BA$, važi

$$A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2) = (A - B)(A^* + AB + B^*).$$

Na osnovu (iv) sledi da je $A^3 - B^3$ invertibilna. Kako su A^3 i B^3 ortogonalni projektori, na osnovu Teoreme 1.2.4 $(iv) \Leftrightarrow (i)$ dobija se da je $\mathcal{R}(A^3) \oplus \mathcal{R}(B^3) = C^{n\times 1}$ što je ekvivalentno sa (i). $\square$

Posledica 3.1.1 *Neka su* $A, B \in C_n^{GP}$ *pri čemu je* $AB \in C_n^{GP}$ *(ili* $AB \in C_n^N$*) i neka je* A *ili* B *idempotent. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(i) $\mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{R}(B) = C^{n\times 1}$,

(ii) $\mathcal{N}(A) \oplus \mathcal{N}(B) = C^{n\times 1}$,

(iii) $\mathcal{R}(A) \cap \mathcal{R}(B) = \{0\}$ *i* $\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{N}(B) = \{0\}$,

(iv) $A - B$, $A^* + AB + B^*$ *su invertibilne.*

Dokaz: Na osnovu Teoreme 2.1.10 dobija se $AB = BA$. Sada dokaz sledi na osnovu Teoreme 3.1.1. $\square$

Naredni rezultat daje potrebne i dovoljne uslove za invertibilnost linearne kombinacije $c_1A^k + c_2B^l$ u slučaju kada su A i B komutativni generalisani projektori.

Teorema 3.1.2 *Neka su* A, $B \in \mathbf{C}^{n\times n}$ *komutativni generalisani projektori i neka su* $c_1, c_2 \in C \setminus \{0\}$, $c_1^3 + c_2^3 \neq 0$ *i* $k, l \in N$. *Tada je* $c_1A^k + c_2B^l$ *invertibilna ako i samo ako je* $(I_n - AA^\dagger)B + AA^\dagger$ *invertibilna.*

Dokaz: Neka je $A \in C_n^{GP}$ oblika (3.1) i $r(A) = r$. Na osnovu Leme 3.1.1, uslov $AB = BA$ je ekvivalentan sa činjenicom da je B oblika (3.3). Sada je

$$c_1A^k + c_2B^l = U \left[\begin{array}{cc} c_1K^k + c_2D^l & 0 \\ 0 & c_2G^l \end{array} \right] U^*.$$

Kako je D^3 ortogonalan projektor i $(c_1K^k)^3 + (c_2D^l)^3 = c_1^3I_r + c_2^3D^3$, dobija se da je $(c_1K^k)^3 + (c_2D^l)^3$ invertibilna za sve konstante $c_1, c_2 \in C \setminus \{0\}$ takve da je $c_1^3 + c_2^3 \neq 0$. Iz invertibilnosti matrice $(c_1K^k)^3 + (c_2D^l)^3$ sledi invertibilnost matrice $c_1K^k + c_2D^l$. Dakle, $c_1A^k + c_2B^l$ je invertibilna ako i samo ako je G invertibilna, tj. ako je $(I_n - A^3)B + A^3 = (I_n - AA^\dagger)B + AA^\dagger$ invertibilna matrica. $\square$

Očigledno da iz prethodnog rezultata dobijamo nezavisnost invertibilnosti linearne kombinacije $c_1A^k + c_2B^l$ od izbora konstanti $c_1, c_2 \in C \setminus \{0\}$ koje zadovoljavaju $c_1^3 + c_2^3 \neq 0$ i $k, l \in N$.

Posledica 3.1.2 *Neka su* A, $B \in \mathbf{C}^{n\times n}$ *komutativni generalisani projektori i neka su* $c_1, c_2 \in C\setminus\{0\}$, $c_1^3+c_2^3 \neq 0$ *i* $k, l \in N$. *Tada je invertibilnost linearne kombinacije* $c_1A^k + c_2B^l$ *nezavisna od izbora konstanti* c_1, c_2, k, l.

U sledećem tvrđenju dajemo potrebne i dovoljne uslove za invertibilnost linearne kombinacije $c_1A^k + c_2B^l$, u slučaju kada su A, $B \in C_n^{GP}$ i $A + B \in C_n^{GP}$. Osim toga data je i forma inverza od $c_1A^k + c_2B^l$ u funkciji od A i B.

Teorema 3.1.3 *Neka su* $A \in \mathbf{C}_r^{n\times n}$ *i* $B \in \mathbf{C}^{n\times n}$ *generalisani projektori i neka su* $k, l \in N$, $c_1, c_2 \in C \setminus \{0\}$. *Ako je* $A + B \in C_n^{GP}$, *tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(i) $\mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{R}(B) = C^{n\times 1}$,

(ii) $\mathcal{N}(A) \oplus \mathcal{N}(B) = C^{n\times 1}$,

(iii) $\mathcal{R}(A) \cap \mathcal{R}(B) = \{0\}$ *i* $\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{N}(B) = \{0\}$,

(iv) $c_1A^k + c_2B^l$ *je invertibilna.*

Ako jedan od uslova $(i) - (iv)$ *važi, tada je*

$$(c_1A^k + c_2B^l)^{-1} = c_1^{-1}A^{2k} + c_2^{-1}B^{2k}. \tag{3.5}$$

Dokaz: Na osnovu Teoreme 2.3.4, imamo da za generalisane projektore A, B važi da je $A + B \in C_n^{GP}$ ako i samo ako je $AB = BA = 0$. Neka su A i B oblika (3.1) i (3.3), respektivno. Koristeći $AB = BA = 0$, dobija se da je B oblika

$$B = U \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix} U^*,$$

gde je $G \in C^{(n-r)\times(n-r)}$ generalisani projektor.
$(i) \Leftrightarrow (ii) \Leftrightarrow (iii)$ Dokazuje se analogno kao u Teoremi 3.1.1.
$(iii) \Rightarrow (iv)$ Da bi dokazali da je $c_1A^k + c_2B^l$ invertibilna matrica, dovoljno je dokazati da je $c_1A^k + c_2B^l$ "jedan-jedan".
Neka je $(c_1A^k + c_2B^l)x = 0$. Tada je $A^kx = c_1^{-1}c_2B^lx \in \mathcal{R}(A^k) \cap \mathcal{R}(B^l) = \mathcal{R}(A) \cap \mathcal{R}(B) = \{0\}$. Na osnovu poslednje relacije sledi da je

$x \in \mathcal{N}(A^k) \cap \mathcal{N}(B^l) = \{0\}$. Dakle, linearna kombinacija $c_1A^k + c_2B^l$ je invertibilna matrica.
$(iv) \Rightarrow (iii)$ Neka je $x \in \mathcal{R}(A) \cap \mathcal{R}(B)$. Tada je $x = Ay = Bz$ za neke y, z. Kako je $A^kx = A^kBz = 0$ i $B^lx = B^lAy = 0$, sledi da je $(c_1A^k + c_2B^l)x = 0$, tj. $x \in \mathcal{N}(c_1A^k + c_2B^l)$. Kako je $c_1A^k + c_2B^l$ invertibilna matrica, zaključujemo da je $x = 0$.
Ako je $x \in \mathcal{N}(A) \cap \mathcal{N}(B)$, tada je $Ax = Bx = 0$ i $(c_1A^k + c_2B^l)x = 0$ što implicira da je $x = 0$. Dakle, (iii) važi.
Kako je

$$(c_1A^k + c_2B^l) = U \begin{bmatrix} c_1K^k & 0 \\ 0 & c_2G^l \end{bmatrix} U^*,$$

ako jedan od uslova $(i) - (iv)$ važi, tada je

$$(c_1A^k + c_2B^l)^{-1} = U \begin{bmatrix} c_1^{-1}K^{-k} & 0 \\ 0 & c_2^{-1}G^{-l} \end{bmatrix} U^*, \tag{3.6}$$

gde je $U \in C^{n\times n}$ unitarna, $K \in \mathbf{C}^{r\times r}$ takva da je $K^3 = I_r$, $K^* = K^{-1}$,

$$K^{-k} = \begin{cases} I_r, & k \equiv_3 0 \\ K^*, & k \equiv_3 1 \\ K, & k \equiv_3 2 \end{cases} \tag{3.7}$$

i $G \in C^{(n-r)\times(n-r)}$ invertibilan generalisani projektor takav da je

$$G^{-l} = \begin{cases} I_{n-r}, & l \equiv_3 0 \\ G^*, & l \equiv_3 1 \\ G, & l \equiv_3 2. \end{cases} \tag{3.8}$$

Očigledno je (3.6) ekvivalentan sa (3.5). □

Očigledno da iz prethodnog tvrđenja dobijamo da za dva generalisana projektora za koji je zbir $A + B$ takođe generalisani projektor, njihova razlika $A - B$ je invertibilna matrica ako i samo ako je njihov zbir $A + B$ invertibilna matrica.

Posledica 3.1.3 *Neka su $A \in \mathbf{C}_r^{n\times n}$ i $B \in \mathbf{C}^{n\times n}$ generalisani projektori. Ako je $A + B \in C_n^{GP}$, tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(i) $\mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{R}(B) = C^{n\times 1}$,

(ii) $\mathcal{N}(A) \oplus \mathcal{N}(B) = C^{n\times 1}$,

(iii) $\mathcal{R}(A) \cap \mathcal{R}(B) = \{0\}$ *i* $\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{N}(B) = \{0\}$,

(iv) $A - B$ *je invertibilna matrica,*

(v) $A + B$ *je invertibilna matrica.*

Ako jedan od uslova $(i) - (iv)$ *važi, tada je*

$$(A \pm B)^{-1} = A^2 \pm B^2.$$

U sledećem rezultatu su dobijeni uslovi pod kojima je invertibilnost linearne kombinacije $c_1A^k + c_2B^l$ ekvivalentna sa ivertibilnošu matrice B, u slučaju kada su A i B generalisani projektori i $B - A \in C_n^{GP}$. Naredna lema je značajna u dokazu ovog rezultata.

Lema 3.1.2 *Neka je* $K \in C^{r\times r}$ *takva da je* $K^3 = I_r$ *i neka su* $c_1, c_2 \in C$. *Ako je* $c_1^3 + c_2^3 \neq 0$, *onda su* $c_1K + c_2I_r$ *i* $c_1K^2 + c_2I_r$ *invertibilne matrice i njihov inverz je oblika:*

$$(c_1K + c_2I_r)^{-1} = \frac{1}{c_1^3 + c_2^3}(c_1^2K^2 - c_1c_2K + c_2^2I_r)$$

i

$$(c_1K^2 + c_2I_r)^{-1} = \frac{1}{c_1^3 + c_2^3}(c_1^2K - c_1c_2K^2 + c_2^2I_r).$$

Dokaz: Dokaz sledi na osnovu

$$(c_1K + c_2I_r)(c_1^2K^2 - c_1c_2K + c_2^2I_r) = c_1^3K^3 + c_2^3I_r = (c_1^3 + c_2^3)I_r$$

i

$$(c_1K^2 + c_2I_r)(c_1^2K - c_1c_2K^2 + c_2^2I_r) = c_1^3K^6 + c_2^3I_r = (c_1^3 + c_2^3)I_r. \;\Box$$

Teorema 3.1.4 *Neka su* $A \in \mathbf{C}_r^{n\times n}$ *i* $B \in \mathbf{C}^{n\times n}$ *generalisani projektori takvi da je* $B - A \in C_n^{GP}$ *i neka su* $c_1, c_2 \in C$, $c_2 \neq 0$, $c_1^3 + c_2^3 \neq 0$ *i* $k, l \in N$. *Tada je* $c_1A^k + c_2B^l$ *invertibilna matrica ako i samo ako je* B *invertibilna matrica.*

Dokaz: Na osnovu Teoreme 2.3.5 sledi da je $B - A \in C_n^{GP}$ ako i samo ako je $AB = A^2 = BA$. Pretpostavimo da je A oblika (3.1) i da je B oblika (3.3). Primetimo da je $AB = A^2 = BA$ ekvivalentno sa uslovom $KD = DK = K^2$. Kako je K invertibilna matrica, to je $KD = DK = K^2$ ako je $D = K$, tj.

$$B = U \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix} U^*,$$

gde je $G \in \mathbf{C}^{(n-r)\times(n-r)}$ generalisani projektor. Sada je $c_1A^k + c_2B^l$ oblika

$$c_1A^k + c_2B^l = U \begin{bmatrix} c_1K^k + c_2K^l & 0 \\ 0 & c_2G^l \end{bmatrix} U^*,$$

gde je

$$c_1K^k + c_2K^l = \begin{cases} (c_1 + c_2)I_r, & k \equiv_3 0,\ l \equiv_3 0 \\ c_1I_r + c_2K, & k \equiv_3 0,\ l \equiv_3 1 \\ c_1I_r + c_2K^*, & k \equiv_3 0,\ l \equiv_3 2 \\ c_1K + c_2I_r, & k \equiv_3 1,\ l \equiv_3 0 \\ (c_1 + c_2)K, & k \equiv_3 1,\ l \equiv_3 1 \\ c_1K + c_2K^*, & k \equiv_3 1,\ l \equiv_3 2 \\ c_1K^* + c_2I_r, & k \equiv_3 2,\ l \equiv_3 0 \\ c_1K^* + c_2K, & k \equiv_3 2,\ l \equiv_3 1 \\ (c_1 + c_2)K^*, & k \equiv_3 2,\ l \equiv_3 2 \end{cases}$$

i

$$G^l = \begin{cases} I_{n-r}, & l \equiv_3 0 \\ G, & l \equiv_3 1 \\ G^*, & l \equiv_3 2. \end{cases}$$

Na osnovu Leme 3.1.2 i Leme 2.1.7 sledi da je $c_1K^k + c_2K^l$ nesingularna matrica za svako $l, k \in N$ i da je

$$
(c_1K^k + c_2K^l)^{-1} = \begin{cases} (c_1+c_2)^{-1}I_r, & k \equiv_3 0,\ l \equiv_3 0 \\ \frac{1}{c_1^3+c_2^3}(c_2^2K^* - c_1c_2K + c_1^2I_r), & k \equiv_3 0,\ l \equiv_3 1 \\ \frac{1}{c_1^3+c_2^3}(c_2^2K - c_1c_2K^* + c_1^2I_r), & k \equiv_3 0,\ l \equiv_3 2 \\ \frac{1}{c_1^3+c_2^3}(c_1^2K^* - c_1c_2K + c_2^2I_r), & k \equiv_3 1,\ l \equiv_3 0 \\ (c_1+c_2)^{-1}K^*, & k \equiv_3 1,\ l \equiv_3 1 \\ \frac{1}{c_1^3+c_2^3}(c_2^2K + c_1^2K^* - c_1c_2I_r), & k \equiv_3 1,\ l \equiv_3 2 \\ \frac{1}{c_1^3+c_2^3}(c_1^2K - c_1c_2K^* + c_2^2I_r), & k \equiv_3 2,\ l \equiv_3 0 \\ \frac{1}{c_1^3+c_2^3}(c_1^2K + c_2^2K^* - c_1c_2I_r), & k \equiv_3 2,\ l \equiv_3 1 \\ (c_1+c_2)^{-1}K, & k \equiv_3 2,\ l \equiv_3 2. \end{cases}
$$

Očigledno je $c_1A^k + c_2B^l$ nesingularna ako i samo ako je G nesinularna, tj. ako i samo ako je B nesingularna matrica. U tom slučaju je $G^3 = I_{n-r}$, $G^{-1} = G^*$ i G^{-l} je definisana sa (3.8). □

Primetimo da ako su $A, B \in C_n^{GP}$, $A \neq 0$ i $B - A \in C_n^{GP}$, tada je:

$$
B - A = U \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix} U^*.
$$

Očigledno je $B - A$ singularna.

Kao direktnu posledicu prethodnog tvrđenja dobijamo da za dva generalisana projektora za koji je razlika $B - A$ takođe generalisani projektor, invertibilnost njihovog zbira $A + B$ zavisi samo od invertibilnosti matrice B.

Posledica 3.1.4 *Neka su A, $B \in \mathbf{C}^{n\times n}\mathbf{C}^{n\times n}$ generalisani projektori i $B - A \in C_n^{GP}$. Tada je $A + B$ invertibilna ako i samo ako je B invertibilna i*

$$
(A + B)^{-1} = \frac{1}{2}A^2 + (I - AA^\dagger)B^2.
$$

Još jedna posledica Teoreme 3.1.4 je nezavisnost invertibilnosti linearne kombinacije $c_1A^k + c_2B^l$ od izbora konstanti c_1, c_2, k, l u slučaju kada je razlika $B - A$ dva generalisana projektora takođe generalisani projektor.

Posledica 3.1.5 *Neka su $A, B \in \mathbf{C}^{n\times n}$ generalisani projektori tako da je $B - A \in C_n^{GP}$ i neka su $c_1, c_2 \in C$, $c_2 \neq 0$, $c_1^3 + c_2^3 \neq 0$ i $k, l \in N$. Tada je nesingularnost linearne kombinacije $c_1A^k + c_2B^l$ nezavisna od izbora konstanti c_1, c_2, k, l.*

3.2 Invertibilnost hipergeneralisanih projektora

U ovom poglavlju izložićemo orginalne rezultate iz rada [115], koji se odnose na pitanje invertibilnosti linearne kombinacije dva komutativna hipergeneralisana projektora.
Opšte je poznato da za hipergeneralisani projektor $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$ važi

$$\mathcal{R}(A^2) = \mathcal{R}(A^\dagger) = \mathcal{R}(A^*) = \mathcal{R}(A)$$

i

$$\mathcal{N}(A^2) = \mathcal{N}(A^\dagger) = \mathcal{N}(A^*) = \mathcal{N}(A).$$

Zato analogno dokazu Teoreme 3.1.1, može se dokazati sledeća teorema za hipergeneralisane projektore.

Teorema 3.2.1 *Neka su A, $B \in \mathbf{C}^{n\times n}$ hipergeneralisani projektori i $AB = BA$. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(i) $\mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{R}(B) = C^{n\times 1}$;

(ii) $\mathcal{N}(A) \oplus \mathcal{N}(B) = C^{n\times 1}$;

(iii) $\mathcal{R}(A) \cap \mathcal{R}(B) = \{0\}$ *i* $\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{N}(B) = \{0\}$;

(iv) $A - B$, $A^\dagger + AB + B^\dagger$ *su invertibilne.*

U narednom rezultatu su razmatrani hipergeneralisani projektori uređeni relacijom zvezda-ortogonalnosti.

Teorema 3.2.2 *Neka su A, $B \in C_n^{HGP}$ i neka su $c_1, c_2 \in C \setminus \{0\}$ i $k, l \in N$. Ako je $A \overset{*}{\perp} B$, tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(i) $\mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{R}(B) = C^{n\times 1}$,

(ii) $\mathcal{N}(A) \oplus \mathcal{N}(B) = C^{n\times 1}$,

(iii) $\mathcal{R}(A) \cap \mathcal{R}(B) = \{0\}$ *i* $\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{N}(B) = \{0\}$,

(iv) $c_1 A^k + c_2 B^l$ *je invertibilna matrica.*

Ako jedan od uslova $(i) - (iv)$ *važi, tada je*

$$(c_1 A^k + c_2 B^l)^{-1} = c_1^{-1} A^{2k} + c_2^{-1} B^{2k}.$$

Dokaz: Kako su $A, B \in C_n^{EP}$, važi:

$$A \overset{*}{\perp} B \Leftrightarrow AB = 0 \Leftrightarrow BA = 0, \tag{3.9}$$

Zato je dokaz $(i) \Leftrightarrow (ii) \Leftrightarrow (iii) \Leftrightarrow (iv)$ analogan dokazu Teoreme 3.1.3. Pretostavimo da je jedan od uslova $(i) - (iv)$ ispunjen. Neka su A i B oblika (3.2) i (3.3), respektivno. Primenom (3.9) dobija se da je

$$B = U \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix} U^*,$$

gde je $G \in \mathbf{C}^{(n-r)\times(n-r)}$ hipergeneralisani projektor. Sada je

$$c_1 A^k + c_2 B^l = U \begin{bmatrix} c_1(\Sigma K)^k & 0 \\ 0 & c_2 G^l \end{bmatrix} U^*.$$

Dakle,

$$(c_1 A^k + c_2 B^l)^{-1} = U \begin{bmatrix} c_1^{-1}(\Sigma K)^{-k} & 0 \\ 0 & c_2^{-1} G^{-l} \end{bmatrix} U^*, \tag{3.10}$$

gde je $U \in C^{n\times n}$ unitarna, $\Sigma = diag(\lambda_1 I_{r_1}, \ldots, \lambda_t I_{r_t})$ dijagonalna matrica sopstvenih vrednosti matrice A, $\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_t > 0$, $r_1 + r_2 + \ldots + r_t = r = r(A)$, $K \in \mathbf{C}^{r\times r}$ zadovoljava $(\Sigma K)^3 = I_r$ i $KK^* = I_r$ i

$$(\Sigma K)^{-k} = \begin{cases} I_r, & k \equiv_3 0 \\ K^*\Sigma^{-1}, & k \equiv_3 1 \\ K\Sigma, & k \equiv_3 2, \end{cases} \tag{3.11}$$

i $G \in \mathbf{C}^{(n-r)\times(n-r)}$ je hipergeneralisani projektor takav da je

$$G^{-l} = \begin{cases} I_{n-r}, & l \equiv_3 0 \\ G^{\dagger}, & l \equiv_3 1 \\ G, & l \equiv_3 2. \end{cases} \tag{3.12}$$

□

Primetimo da ako važe uslovi Teoreme 3.2.2, onda je zbir $A+B$ hipergeneralisani projektor. Zaista, ako su A,B hipergeneralisani projektori, tada je $A \overset{*}{\perp} B$ ili $AB = BA = 0$ dovoljan uslov da je $A+B$ hipergeneralisani projektor (videti [53]).

Posledica 3.2.1 *Neka su A, $B \in C_n^{HGP}$ i $A \overset{*}{\perp} B$. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(i) $\mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{R}(B) = C^{n\times 1}$;

(ii) $\mathcal{N}(A) \oplus \mathcal{N}(B) = C^{n\times 1}$;

(iii) $\mathcal{R}(A) \cap \mathcal{R}(B) = \{0\}$ *i* $\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{N}(B) = \{0\}$;

(iv) $A - B$ *je invertibilna;*

(v) $A + B$ *je invertibilna;*

Ako jedan od uslova $(i) - (iv)$ važi, tada je

$$(A \pm B)^{-1} = A^2 \pm B^2.$$

U narednom rezultatu smo posmatrali hipergeneralisane projektore povezane zvezda parcijalnim uređenjem.

Teorema 3.2.3 *Neka su A, $B \in \mathbf{C}^{n\times n}$ i neka $c_1, c_2 \in C$, $c_2 \neq 0$, $c_1^3 + c_2^3 \neq 0$ i $k, l \in N$. Ako je jedan od sledećih uslova ispunjen:*

(1) $A \in C_n^{HGP}$ *i* $A \overset{*}{\leq} B$,

(2) $A \in C_n^{EP}$, $B \in C_n^{HGP}$ *i* $A \overset{*}{\leq} B$,

tada je matrica $c_1A^k+c_2B^l$ invertibilna ako i samo ako je B invertibilna.

Dokaz: Najpre pretpostavimo da uslov (1) važi. Tada je:

$$B = U \begin{bmatrix} \Sigma K & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix} U^*$$

i $c_1A^k + c_2B^l$ je oblika

$$c_1A^k + c_2B^l = U \begin{bmatrix} c_1(\Sigma K)^k + c_2(\Sigma K)^l & 0 \\ 0 & c_2G^l \end{bmatrix} U^*,$$

gde je

$$c_1(\Sigma K)^k + c_2(\Sigma K)^l = \begin{cases} (c_1+c_2)I_r, & k \equiv_3 0,\ l \equiv_3 0 \\ c_1I_r + c_2\Sigma K, & k \equiv_3 0,\ l \equiv_3 1 \\ c_1I_r + c_2(\Sigma K)^2, & k \equiv_3 0,\ l \equiv_3 2 \\ c_1\Sigma K + c_2I_r, & k \equiv_3 1,\ l \equiv_3 0 \\ (c_1+c_2)\Sigma K, & k \equiv_3 1,\ l \equiv_3 1 \\ c_1\Sigma K + c_2(\Sigma K)^2, & k \equiv_3 1,\ l \equiv_3 2 \\ c_1(\Sigma K)^2 + c_2I_r, & k \equiv_3 2,\ l \equiv_3 0 \\ c_1(\Sigma K)^2 + c_2\Sigma K, & k \equiv_3 2,\ l \equiv_3 1 \\ (c_1+c_2)(\Sigma K)^2, & k \equiv_3 2,\ l \equiv_3 2. \end{cases}$$

Na osnovu Leme 3.1.2 i Leme 2.1.7, sledi da je $c_1(\Sigma K)^k + c_2(\Sigma K)^l$ invertibilna za svako $l, k \in N$ i važi

$$(c_1(\Sigma K)^k + c_2(\Sigma K)^l)^{-1} = \begin{cases} (c_1+c_2)^{-1}I_r, & k \equiv_3 0,\ l \equiv_3 0 \\ \frac{1}{c_1^3+c_2^3}(c_2^2(\Sigma K)^2 - c_1c_2\Sigma K + c_1^2I_r), & k \equiv_3 0,\ l \equiv_3 1 \\ \frac{1}{c_1^3+c_2^3}(c_2^2\Sigma K - c_1c_2(\Sigma K)^2 + c_1^2I_r), & k \equiv_3 0,\ l \equiv_3 2 \\ \frac{1}{c_1^3+c_2^3}(c_1^2(\Sigma K)^2 - c_1c_2\Sigma K + c_2^2I_r), & k \equiv_3 1,\ l \equiv_3 0 \\ (c_1+c_2)^{-1}K^*\Sigma^{-1}, & k \equiv_3 1, l \equiv_3 1 \\ \frac{1}{c_1^3+c_2^3}(c_2^2\Sigma K + c_1^2(\Sigma K)^2 - c_1c_2I_r), & k \equiv_3 1,\ l \equiv_3 2 \\ \frac{1}{c_1^3+c_2^3}(c_1^2\Sigma K - c_1c_2(\Sigma K)^2 + c_2^2I_r), & k \equiv_3 2,\ l \equiv_3 0 \\ \frac{1}{c_1^3+c_2^3}(c_1^2\Sigma K + c_2^2(\Sigma K)^2 - c_1c_2I_r), & k \equiv_3 2,\ l \equiv_3 1 \\ (c_1+c_2)^{-1}\Sigma K, & k \equiv_3 2,\ l \equiv_3 2. \end{cases} \quad (3.13)$$

Očigledno je $c_1A^k+c_2B^l$ nesingularna ako i samo ako je G nesingularna, tj. ako i samo ako je B nesingularna. Dakle,

$$(c_1A^k + c_2B^l)^{-1} = U \begin{bmatrix} (c_1(\Sigma K)^k + c_2(\Sigma K)^l)^{-1} & 0 \\ 0 & c_2^{-1}G^{-l} \end{bmatrix} U^*,$$

gde je $(c_1(\Sigma K)^k + c_2(\Sigma K)^l)^{-1}$ dato sa (3.15).
Pretpostavimo da uslov (2) važi. Pod pretpostavkom da je $A \in C_n^{EP}$, $B \in C_n^{HGP}$ i $A \overset{*}{\leq} B$, dobija se $A \in C_n^{HGP}$ (Teorema 2.3.3). Kako je $B \in C_n^{HGP}$, to je i $G \in C_{n-r}^{HGP}$. U slučaju invertibilnosti G^{-l} je definisana sa (3.12). Ostatak dokaza je isti kao u delu (1). □

Napomenimo sledeće: (1) Ako A i B zadovoljavaju uslove Teoreme 3.3.2 i ako je $A \neq 0$, tada je

$$B - A = U \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix} U^*.$$

Očigledno razlika $B - A$ je singularna.

(2) Ako $A \in C_n^{EP}$, $B \in C_n^{HGP}$ i $A \overset{*}{\leq} B$, može se zaključiti da je $B - A$ hipergeneralisani projektor (ako su A i B hipergeneralisani projektori, tada je $A \overset{*}{\leq} B$ ili $AB = A^2 = BA$ dovoljan uslov da je $B - A$ hipergeneralisani projektor [53]).

Posledica 3.2.2 *Neka su A, $B \in \mathbf{C}^{n\times n}$. Ako je jedan od sledećih uslova ispunjen:*

(1) $A \in C_n^{HGP}$ *i* $A \overset{*}{\leq} B$,

(2) $A \in C_n^{EP}$, $B \in C_n^{HGP}$ *i* $A \overset{*}{\leq} B$,

tada je matrica $A + B$ invertibilna ako i samo ako je B invertibilna. U tom slučaju važi:

$$(A + B)^{-1} = \frac{1}{2}A^2 + (I - AA^\dagger)B^{-1}.$$

Ako je $B \in C_n^{HGP}$, tada je

$$(A + B)^{-1} = \frac{1}{2}A^2 + (I - AA^\dagger)B^2.$$

Naredni rezultat za hipergeneralisane projektore je analogan Teoremi 3.1.2 za generalisane projektore.

Teorema 3.2.4 *Neka su A, $B \in \mathbf{C}^{n\times n}$ hipergeneralisani projektori i $AB = BA$, $c_1, c_2 \in C \setminus \{0\}$, $c_1^3 + c_2^3 \neq 0$ i $k, l \in N$. Tada je $c_1A^k + c_2B^l$ invertibilna ako i samo ako je $(I_n - AA^\dagger)B + P_AA^\dagger$ invertibilna.*

Dokaz: Neka je A oblika (3.2). Primenom Leme 3.1.1, dobija se da je B oblika (3.3). Sada je

$$c_1A^k + c_2B^l = U \begin{bmatrix} c_1(\Sigma K)^k + c_2D^l & 0 \\ 0 & c_2G^l \end{bmatrix} U^*.$$

Kako je D^3 ortogonalan projektor i $(c_1(\Sigma K)^k)^3 + (c_2D^l)^3 = c_1^3I_r + c_2^3D^3$, dobija se da je $(c_1(\Sigma K)^k)^3 + (c_2D^l)^3$ invertibilna za sve konstante $c_1, c_2 \in C \setminus \{0\}$ za koje važi $c_1^3 + c_2^3 \neq 0$. Iz invertibilnosti matrice $(c_1(\Sigma K)^k)^3 + (c_2D^l)^3$ sledi invertibilnost matrice $c_1(\Sigma K)^k + c_2D^l$. Dakle, $c_1A^k + c_2B^l$ je invertibilna ako i samo ako je G invertibilna, tj. ako je $(I_n - A^3)B + A^3 = (I_n - P_{\mathcal{R}(A)})B + P_{\mathcal{R}(A)}$ invertibilna. $\square$

Kao posledica prethodnog rezultata dobijaju se potrebni i dovoljni uslovi za invertibilnost zbira dva komutativna hipergeneralisana projektora.

Posledica 3.2.3 *Neka su A, $B \in \mathbf{C}^{n\times n}$ hipergeneralisani projektori i $AB = BA$. Tada je $A+B$ invertibilna ako i samo ako je $(I_n - AA^\dagger)B + AA^\dagger$ invertibilna.*

Očigledna je i nezavisnost invertibilnosi linearne kombinacije $c_1A^k + c_2B^l$ koju čine dva komutativna hipergeneralisna projektora od izbora konstanti c_1, c_2, k, l.

Posledica 3.2.4 *Neka su A, $B \in \mathbf{C}^{n\times n}$ komutativni hipergeneralisani projektori i neka $c_1, c_2 \in C \setminus \{0\}$, $c_1^3 + c_2^3 \neq 0$ i $k, l \in N$. Tada je invertibilnost $c_1A^k + c_2B^l$ nezavisna od izbora konstanti c_1, c_2, k, l.*

3.3 Invertibilnost dve matrice i parcijalna uređenja

U ovoj sekciji izloženi su rezultati rada [117], koji se odnose na invertibilnost linearne kombinacije dve matrice povezane nekom vrstom parcijalnog uređenja.

1. Zvezda ortogonalnost. U sledećem tvrđenju se daju potrebni i dovoljni uslovi za invertibilnost linearne kombinacije $c_1A + c_2B$, kada su A, B zvezda-ortogonalne EP-matrice. Ona predstavlja uopštenje Teoreme 3.1.3.

Teorema 3.3.1 *Neka A, $B \in C_n^{EP}$ i neka su $c_1, c_2 \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$. Ako je $A \overset{*}{\perp} B$, tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(i) $\mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{R}(B) = \mathbf{C}^n$,

(ii) $\mathcal{N}(A) \oplus \mathcal{N}(B) = \mathbf{C}^n$,

(iii) $\mathcal{R}(A) \cap \mathcal{R}(B) = \{0\}$ *i* $\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{N}(B) = \{0\}$,

(iv) $c_1A + c_2B$ *je invertibilna.*

Ako jedan od uslova $(i) - (iv)$ važi, tada je:

$$(c_1A + c_2B)^{-1} = c_1^{-1}A^\dagger + c_2^{-1}B^\dagger$$

Dokaz: Deo $(i) \Leftrightarrow (ii) \Leftrightarrow (iii)$ dokazuje se analogno kao u Teoremi 3.1.1.

$(iii) \Rightarrow (iv)$ Da bi se dokazala invertibilnost matrice c_1A+c_2B, dovoljno je pokazati da je $c_1A + c_2B$ injektivno preslikavanje.
Neka je $(c_1A + c_2B)x = 0$. Tada je $Ax = -c_1^{-1}c_2Bx \in \mathcal{R}(A) \cap \mathcal{R}(B) = \{0\}$. Iz poslednje relacije zaključujemo da je $x \in \mathcal{N}(A) \cap \mathcal{N}(B) = \{0\}$, čime je dokazana injektivnost linearne kombinacije $c_1A + c_2B$.
$(iv) \Rightarrow (iii)$ Neka je $x \in \mathcal{R}(A) \cap \mathcal{R}(B)$. Tada je $x = Ay = Bz$, za neke y, z, pa je $Ax = ABz = 0$ i $Bx = BAy = 0$, što povlači $(c_1A+c_2B)x = 0$, tj. $x \in \mathcal{N}(c_1A+c_2B)$. Kako je c_1A+c_2B invertibilna, to je $x = 0$.

Ako je $x \in \mathcal{N}(A) \cap \mathcal{N}(B)$, tada je $Ax = Bx = 0$ i $(c_1A + c_2B)x = 0$ Invertibilnost linearne kombinacije $c_1A + c_2B$ povlači $x = 0$. Dakle, (iii) važi.

Neka važi jedan od uslova $(i) - (iv)$. Neka je A i oblika (1.2). Kako je $AB = BA = 0$, to koristeći oblik (3.4) matrice B, dobijamo da je $D = E = F = 0$, tj. da je matrica B oblika

$$B = U \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix} U^*,$$

gde je $G \in C^{(n-r)\times(n-r)}$ EP matrica. Sada je matrica $c_1A + c_2B$ oblika

$$c_1A + c_2B = U \begin{bmatrix} c_1K & 0 \\ 0 & c_2G \end{bmatrix} U^*. \tag{3.14}$$

Dakle,

$$(c_1A + c_2B)^{-1} = U \begin{bmatrix} c_1^{-1}K^{-1} & 0 \\ 0 & c_2^{-1}G^{-1} \end{bmatrix} U^*,$$

tj.

$$(c_1A + c_2B)^{-1} = c_1^{-1}A^\dagger + c_2^{-1}B^\dagger.\Box$$

Interesantno je primetiti da je svaki od uslova $(i) - (iv)$ ekvivalentan sa invertibilnošću zbira $A+B$ ili razlike $A-B$. U tom slučaju je inverz obilka:

$$(A \pm B)^{-1} = A^\dagger \pm B^\dagger.$$

Kao i prethodno tvrđenje, i naredni rezultat daje potrebne i dovoljne uslove za invertibilnost matrice $c_1A + c_2B$, pri čemu su A, B zvezda-ortogonalne EP-matrice.

Posledica 3.3.1 *Neka A, $B \in C_n^{EP}$ i neka su $c_1, c_2 \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$. Ako je $A \overset{*}{\perp} B$, tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(i) $c_1A + c_2B$ *je invertibilna,*

(ii) $A - B$ *je invertibilna,*

(iii) $A + B$ *je invertibilna.*

2. Zvezda parcijalno uređenje. U narednom rezultatu smo posmatrali invertibilnost linaerne kombinacije $c_1A^n + c_2B^n$, u slučaju kada je A EP-matrica manja ili jednaka od matrice B u odnosu na zvezda parcijalno uređenje. Sledeći rezultat predstavlja uopštenje Teoreme 3.1.4.

Teorema 3.3.2 *Neka su A, $B \in C^{n\times n}$, $c_1, c_2 \in \mathbf{C}$, $c_2 \neq 0$, $c_1 + c_2 \neq 0$ i $n \in \mathbf{N}$. Ako je $A \in C_n^{EP}$ i $A \overset{*}{\leq} B$, tada je $c_1A^n + c_2B^n$ invertibilna ako i samo ako je B invertibilna. Tada je:*

$$(c_1A^n + c_2B^n)^{-1} = (c_1 + c_2)^{-1}(A^\dagger)^n + c_2^{-1}(I_n - AA^\dagger)B^{-n}.$$

Dokaz: Neka su A i B oblika (1.2) i (3.4), redom. Primenom uslova $A \overset{*}{\leq} B$, dobijamo $KD = DK = K^2$. Kako je K invertibilna, to relacija $KD = DK = K^2$ važi ako je $D = K$. U tom slučaju je:

$$B = U \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix} U^*.$$

i

$$c_1A^n + c_2B^n = U \begin{bmatrix} (c_1 + c_2)K^n & 0 \\ 0 & c_2G^n \end{bmatrix} U^*. \tag{3.15}$$

Očigledno, linearna kombinacija $c_1A^n + c_2B^n$ je invertibilna ako i samo ako je G invertibilna, tj. $c_1A^n + c_2B^n$ je inveribilna ako i samo ako je B invertibilna. Tada je inverz $(c_1A^n + c_2B^n)^{-1}$ oblika:

$$(c_1A^n + c_2B^n)^{-1} = U \begin{bmatrix} (c_1 + c_2)^{-1}K^{-n} & 0 \\ 0 & c_2^{-1}G^{-n} \end{bmatrix} U^*,$$

tj.

$$(c_1A^n + c_2B^n)^{-1} = (c_1 + c_2)^{-1}(A^\dagger)^n + c_2^{-1}(I_n - AA^\dagger)B^{-n}. \ \square$$

Posledica 3.3.2 *Neka $A \in C_n^{EP}$, $B \in C^{n\times n}$, $A \overset{*}{\leq} B$ i neka su $c_1, c_2 \in \mathbf{C}$, $c_2 \neq 0$, $c_1 + c_2 \neq 0$,$n \in \mathbf{N}$. Tada je invertibilnost linearne kombinacije $c_1A^n + c_2B^n$ nezavisna od izbora konstanti c_1, c_2, n.*

Primetimo da se uslov $c_1+c_2 \neq 0$ ne može izostaviti iz Teoreme 3.3.2, jer pod uslovima navedene teoreme i uslovom $A \neq 0$, oblik razlike $B-A$ je:

$$B - A = U \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix} U^*.$$

Očigledno je $B - A$ singularna.

3. Levo-zvezda i desno-zvezda uređenje. U narednom rezultatu smo posmatrali invertibilnost linearne kombinacije $c_1A^n + c_2B^n$, pri čemu smo koristili Lemu 2.3.1 za levo-zvezda uređenje.

Teorema 3.3.3 *Neka su $A \in C_n^{EP}$, $B \in C^{n\times n}$ i $c_1, c_2 \in \mathbf{C}$, $c_2 \neq 0$, $c_1 + c_2 \neq 0$ i $n \in \mathbf{C}$. Ako je jedan od sledećih uslova ispunjen:*

(i) $A* \leq B$,

(ii) $A \leq *B$,

tada je $c_1A^n+c_2B^n$ invertilna ako i samo ako je B invertibilna. Takođe važi:

$$(c_1A^n + c_2B^n)^{-1} = (c_1 + c_2)^{-1}B^{-n} + (c_2^{-1} - (c_1 + c_2)^{-1}) \\ (I - AA^\dagger)B^{-n}(I - AA^\dagger). \tag{3.16}$$

Dokaz: Najpre pretpostavimo da uslov (i) važi. Na osnovu Leme 2.3.1 možemo pretpostaviti da A i B imaju formu (1.2) i (2.43), respektivno i da je $r(A) = r$. Tada je

$$B^n = U \begin{bmatrix} K^n & 0 \\ -\sum_{k=1}^n S^kZK^{n-k} & S^n \end{bmatrix} U^*$$

i

$$c_1A^n + c_2B^n = U \begin{bmatrix} (c_1 + c_2)K^n & 0 \\ -c_2\sum_{k=1}^n S^kZK^{n-k} & c_2S^n \end{bmatrix} U^*, \tag{3.17}$$

gde je K invertibilna. Očigledno je $c_1A^n+c_2B^n$ invertibilna ako i samo ako je B invertibilna. Dalje, ako je matrica B invertibilna, tada je

$$B^{-1} = U \begin{bmatrix} K^{-1} & 0 \\ ZK^{-1} & S^{-1} \end{bmatrix} U^*$$

i

$$(c_1A^n + c_2B^n)^{-1} = U \begin{bmatrix} (c_1+c_2)^{-1}K^{-n} & 0 \\ (c_1+c_2)^{-1}\sum_{k=1}^{n} S^{k-n}ZK^{-k} & c_2^{-1}S^{-n} \end{bmatrix} U^*.$$

Kako je

$$B^{-n} = U \begin{bmatrix} K^{-n} & 0 \\ \sum_{k=1}^{n} S^{k-n}ZK^{-k} & S^{-n} \end{bmatrix} U^*$$

možemo zaključiti da važi (3.16).
Pretpostavimo da uslov (ii) važi. Da bi dokazali ovaj deo, podsetićemo se sledećih činjenica:

(1) $A \leq *B \Leftrightarrow A^* * \leq B^*$,

(2) A je EP ako i samo ako A^* je EP,

(3) $(A^n)^* = (A^*)^n$ važi za svaku matricu A,

(4) A je invertibilna ako i samo ako je A^* invertibilna.

Primenom pretpostavke teoreme dobija se da je $A^* * \leq B^*$ i da je A^* EP matrica. Sada, primenom prvog dela na matrice A^* i B^* dobija se: $\overline{c_1}(A^*)^n + \overline{c_2}(B^*)^n = \overline{c_1}(A^n)^* + \overline{c_2}(B^n)^*$ je invertibilna ako i samo ako je B^* invertibilna. Konačno primenom (4) sledi da je $c_1A^n + c_2B^n$ invertibilna ako i samo ako je B invertibilna. □

Posledica 3.3.3 *Neka su $A \in C_n^{EP}$, $B \in C^{n\times n}$ i $c_1, c_2 \in \mathbf{C}$, $c_2 \neq 0$, $c_1 + c_2 \neq 0$ i $n \in \mathbf{N}$. Ako je jedan od sledećih uslova ispunjen:*

(i) $A* \leq B$,

(ii) $A \leq *B$,

tada je invertibilnost linearne kombinacije $c_1A^n + c_2B^n$ nezavisna od izbora konstanti c_1, c_2, n.

Primetimo da analogno kao u Teoremi 3.3.2, uslov $c_1 + c_2 \neq 0$ se ne može izostaviti iz Teoreme 4.2.2, jer pod uslovima navedene teoreme i uslova $A \neq 0$, matrična forma $B^n - A^n$ je:

$$B^n - A^n = U \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\sum_{k=1}^{n} S^kZK^{n-k} & S^n \end{bmatrix} U^*.$$

Očigledno je $B^n - A^n$ singularna.

4. Grupno uređenje. U narednoj teoremi dokazaćemo da invertibilnost linearne kombinacije grupno invertibilnih matrica A i B za koje važi $A \overset{\sharp}{\leq} B$ zavisi samo od invertibilnosti matrice B.

Teorema 3.3.4 *Neka su $A, B \in C^{n\times n}$ grupno invertibilne matrice, $c_1, c_2 \in \mathbf{C}$, $c_2 \neq 0$, $c_1 + c_2 \neq 0$ i $n \in \mathbf{N}$. Ako je $A \overset{\sharp}{\leq} B$, tada je $c_1 A + c_2 B$ invertibilna ako i samo ako je B invertibilna. Takođe važi:*

$$(c_1 A + c_2 B)^{-1} = B^{-1}(c_1 A A^{\sharp} + c_2 I_n)^{-1}. \tag{3.18}$$

Dokaz: Najpre primetimo da važi:

$$A \overset{\sharp}{\leq} B \Leftrightarrow AB = A^2 = BA.$$

Ako je B grupno invertibilna matrica, kor-nilpotenta dekompozicija matrice B (Vežba 5.10.12 [83]) obezbeđuje da postoji nesingularna matrica $W \in C^{n\times n}$ i $K \in C^{r\times r}$ tako da je

$$B = W \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} W^{-1}.$$

Pretpostavimo da je matrica A oblika:

$$A = W \begin{bmatrix} D & E \\ F & G \end{bmatrix} W^{-1},$$

gde su $D \in C^{r\times r}$ i $G \in C^{(n-r)\times(n-r)}$.
Primenom $AB = BA$ dobija se da je A oblika:

$$A = W \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix} W^{-1}$$

i $KD = DK$.
Iz uslova $A^2 = AB$ sledi $D^2 = DK$ i $G^2 = 0$. Kako je A grupno invertibilna matrica, to su D i G grupno invertibilne matrice. Množeći jednakost $D^2 = DK$ sa $D^{\sharp}$ dobija se $D = D^{\sharp}DK$. Takođe, iz $G^2 = 0$

sledi da je $0 = r(G^2) = r(G)$. Poslednja jednakost implicira da je $G = 0$. Sada je linearna kombinacija $c_1A + c_2B$ forme:

$$c_1A+c_2B = W \begin{bmatrix} c_1D + c_2K & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} W^{-1} = W \begin{bmatrix} c_1D^\sharp DK + c_2K & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} W^{-1},$$

tj.

$$c_1A + c_2B = W \begin{bmatrix} (c_1D^\sharp D + c_2I_r)K & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} W^{-1}.$$

Kako je $D^\sharp D$ projektor, to je $c_1D^\sharp D+c_2I_r$ nesingularna za sve konstante $c_1, c_2 \in \mathbf{C}$, $c_2 \neq 0$, $c_1 + c_2 \neq 0$. Dakle $(c_1D^\sharp D + c_2I_r)K$ je nesingularna. Kako je $r((c_1D^\sharp D + c_2I_r)K) = r$, to $c_1A + c_2B$ je nesingularna ako i samo ako je $r = n$, tj. $c_1A + c_2B$ je nesingularna ako i samo ako je B nesingularna . U tom slučaju je inverz oblika:

$$(c_1A + c_2B)^{-1} = WK^{-1}(c_1D^\sharp D + c_2I_n)^{-1}W^{-1}.$$

Dakle, možemo zaključiti da (3.18) važi. □

Prethodni rezultat važi i kada se umesto grupno invertibilne matrice B posmatra matrica B koja je EP.

Posledica 3.3.4 *Neka je $A \in C^{n\times n}$ grupno invertibilna matrica, $B \in C_n^{EP}$, $c_1, c_2 \in \mathbf{C}$, $c_2 \neq 0$, $c_1 + c_2 \neq 0$ i $n \in \mathbf{N}$. Ako je $A \overset{\sharp}{\leq} B$, tada je $c_1A + c_2B$ invertibilna ako i samo ako je B invertibilna. U tom slučaju je:*

$$(c_1A + c_2B)^{-1} = B^{-1}(c_1AA^\sharp + c_2I_n)^{-1}.$$

5. Minus uređenje. U narednom rezultatu posmatrali smo matrice A i B povezane minus delimičnim uređenjem i dali smo potrebne i dovoljne uslove za invertibilnost njihove linearne kombinacije, pri čemu A i B ne moraju biti EP-matrice. Koristićemo Lemu 2.3.2, koja je rezultat Hartwig-a i Styan-a iz rada [57].

Teorema 3.3.5 *Neka $A, B \in C^{n\times n}$, $a = r(A) < r(B) = b$, $c_1, c_2 \in \mathbf{C}$, $c_2 \neq 0$ i $c_1 + c_2 \neq 0$. Ako je $A \overset{-}{\leq} B$, tada je $c_1A + c_2B$ invertibilna ako i samo ako je B invertibilna. U tom slučaju je:*

$$\begin{aligned}(c_1A + c_2B)^{-1} = (c_1 + c_2)^{-1}B^{-1} + (c_2^{-1} - (c_1 + c_2)^{-1}) \\ \Big[(0 \oplus I_{n-a})B(0 \oplus I_{n-a})\Big]^\dagger.\end{aligned} \tag{3.19}$$

Dokaz: Kako važi $A \overset{-}{\leq} B$, to na osnovu Leme 2.3.2 možemo pretpostaviti da su A i B oblika (2.44) i (2.45), respektivno, za neke $U, V \in C^{n\times b}$ takve da je $U^*U = I_b = V^*V$, za pozitivno definitne dijagonalne matrice D_1, D_2 ranga a, $b-a$, respektivno, i proizvoljne matrice $R \in C^{a\times(b-a)}$ i $S \in C^{(b-a)\times a}$. Sada je matrica $c_1A + c_2B$ oblika:

$$c_1A + c_2B = U \begin{bmatrix} (c_1+c_2)D_1 + c_2RD_2S & c_2RD_2 \\ c_2D_2S & c_2D_2 \end{bmatrix} V^*.$$

Jednostavno je proveriti da je

$$\begin{bmatrix} D_1 + RD_2S & RD_2 \\ D_2S & D_2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} D_1^{-1} & -D_1^{-1}R \\ -SD_1^{-1} & D_2^{-1} + SD_1^{-1}R \end{bmatrix}$$

i

$$\begin{bmatrix} (c_1+c_2)D_1 + c_2RD_2S & c_2RD_2 \\ c_2D_2S & c_2D_2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} tD_1^{-1} & -tD_1^{-1}R \\ -tSD_1^{-1} & c_2^{-1}D_2^{-1} + tSD_1^{-1}R \end{bmatrix},$$

gde je $t = (c_1+c_2)^{-1}$. Očigledno je $c_1A + c_2B$ invertibilna ako i samo ako je B invertibilna. Takođe, može se zaključiti da (3.19) važi. $\square$

Glava 4

Moore-Penrose-ov inverz generalisanih i hipergeneralisanih projektora

4.1 Moore-Penrose-ov inverz linearne kombinacije komutativnih generalisanih i hipergeneralisanih projektora

U ovom poglavlju izložićemo rezultate sadržane u radu [116], koji se odnose na oblik Moore-Penrose-ovog inverza linearne kombinacije komutativnih generalisanih i hipergeneralisanih projektora.
Koristićemo drugu reprezentaciju generalisanih i hipergeneralisanih projektora u odnosu na rezultate izložene do sada. Naime, koristeći činjenicu da je svaki generalisani projektor $A \in \mathbf{C}_r^{n\times n}$ i normalna matrica, na osnovu spektralne teoreme zaključujemo da se A može predstaviti u obliku $A = Udiag(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)U^*$, gde je $U \in \mathbf{C}^{n\times n}$ unitarna i λ_j, $j = 1, ..., n$ sopstvene vrednosti matrice A. Na osnovu Teoreme 2.2.1 sledi $\lambda_j \in \{0, 1, \omega, \overline{\omega}\}$, $j = 1, ..., n$, gde je $\omega = e^{2\pi i/3}$. Dakle,

$$A \in C_n^{GP} \Leftrightarrow A = Udiag(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)U^*, \tag{4.1}$$

gde je $U^* = U^{-1}$ i $\lambda_j \in \{0, 1, \omega, \overline{\omega}\}$, $j = 1, ..., n$, $\omega = e^{2\pi i/3}$.

Slično, za $A \in C_n^{HGP}$ koristeći da je A EP matrica i koristeći oblik

1.2 EP matrice, može se zaključiti da je

$$A \in C_n^{HGP} \Leftrightarrow A = Udiag(K \oplus 0)U^*, \tag{4.2}$$

gde je $U \in C^{n\times n}$ unitarna i $K \in C^{r\times r}$ invertibilna matrica za koju važi $K^3 = I_r$, gde je $r = rank(A)$.

Na osnovu gornjih reprezentacija očigledno je svaki generalisani projektor i hipergeneralisani projektor.

Teorema 4.1.1 *Neka su $A \in C^{n\times n}$ i $B \in C^{n\times n}$ komutativni generalisani ili hipergeneralisani projektori, $c_1, c_2 \in \mathbf{C}\setminus\{0\}$ i $c_1^3+c_2^3 \neq 0$. Tada je*

$$\begin{aligned}(c_1A + c_2B)^\dagger = &\frac{1}{c_1^3+c_2^3}\Big(c_1^2A^2B^3 - c_1c_2AB + c_2^2A^3B^2\Big)\\ &+ \frac{1}{c_1}A^2(I_n - B^3) + \frac{1}{c_2}B^2(I_n - A^3).\end{aligned} \tag{4.3}$$

Dalje, $c_1A + c_2B$ je invertibilna matrica ako i samo ako je $n = \mathrm{r(A)} + \mathrm{r(B)} - \mathrm{r(AB)}$ i u tom slučaju je inverz $(c_1A + c_2B)^{-1}$ dat sa (4.3).

Dokaz: Kako su A i B dve komutativne EP matrice, na osnovu Posledice 3.9 iz [22], može se pretpostaviti da A i B imaju sledeću formu:

$$A = U(A_1 \oplus A_2 \oplus 0_t \oplus 0)U^*, B = U(B_1 \oplus 0_s \oplus B_2 \oplus 0)U^*,$$

gde je $U \in C^{n\times n}$ unitarna, $A_1, B_1 \in C^{r\times r}$, $A_2 \in C^{s\times s}$, $B_2 \in C^{t\times t}$ su invertibilne, $A_1B_1 = B_1A_1$. S obzirom na to da su A i B hipergeneralisani projektori (sledeće razmatranje važi ako su A i B generalisani projektori), onda je $A_1^3 = B_1^3 = I_r$, $A_2^3 = I_s$ i $B_2^3 = I_t$. Primetimo da je

$$A^3 = U(I_r \oplus I_s \oplus 0_t \oplus 0)U^*, \quad B^3 = U(I_r \oplus 0_s \oplus I_t \oplus 0)U^*, \tag{4.4}$$

i

$$c_1A + c_2B = U\Big((c_1A_1 + c_2B_1) \oplus c_1A_2 \oplus c_2B_2 \oplus 0_{n-(r+s+t)}\Big)U^*. \tag{4.5}$$

Na osnovu Leme 3.1.2, zaključuje se da je $c_1A_1 + c_2B_1$ invertibilna i da je

$$(c_1A_1 + c_2B_1)^{-1} = \frac{1}{c_1^3+c_2^3}(c_1^2A_1^2 - c_1c_2A_1B_1 + c_2^2B_1^2).$$

Koristeći da je

$$I_n - A^3 = U(0 \oplus 0 \oplus I_t \oplus I_{n-(r+t+s)})U^*, \quad A^3B^3 = U(I_r \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0)U^*$$

i

$$I_n - B^3 = U(0 \oplus I_s \oplus 0 \oplus I_{n-(r+t+s)})U^*,$$

dobija se

$$\begin{aligned}(c_1A + c_2B)^\dagger &= U\Big((c_1A_1 + c_2B_1)^{-1} \oplus \frac{1}{c_1}A_2^2 \oplus \frac{1}{c_2}B_2^2 \oplus 0)U^* \\ &= \frac{1}{c_1^3 + c_2^3}\Big(c_1^2A^2 - c_1c_2AB + c_2^2B^2\Big)A^3B^3 \\ &+ \frac{1}{c_1}A^2\Big(I_n - B^3\Big) + \frac{1}{c_2}B^2\Big(I_n - A^3\Big).\end{aligned}$$

Kako je $A^4 = A$ i $B^4 = B$, može se zaključiti da važi 4.3.
Takođe, iz (4.5) može se zaključiti da je $c_1A + c_2B$ invertibilna ako je $n = r + t + s$. Kako je r(A) = r + s, r(B) = r + t i r(AB) = r, dobija se da je $c_1A + c_2B$ invertibilna ako i samo ako je $n =$ r(A) + r(B) − r(AB).
□

Kao posledicu dobijamo da u slučaju kada je A generalisani ili hipergeneralisani projektor i $c_1, c_2 \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$, $c_1 \neq 0$, $c_1^3 + c_2^3 \neq 0$, linearna kombinacija $c_1I_n + c_2A$ je uvek invertibilna.

Posledica 4.1.1 *Neka je $A \in C^{n\times n}$ generalisani ili hipergeneralisani projektor, $c_1, c_2 \in \mathbf{C}$, $c_1 \neq 0$ i $c_1^3+c_2^3 \neq 0$. Tada je $c_1I_n+c_2A$ invertibilna i*

$$(c_1I_n + c_2A)^{-1} = \frac{1}{c_1^3 + c_2^3}\Big(c_1^2A^3 - c_1c_2A + c_2^2A^2\Big) + \frac{1}{c_1}(I_n - A^3).$$

Ako je $\{A_i\}_{i=1}^m$ konačna komutativna familja generalisanih ili hipergeneralisanih projektora, tada je $\prod_{i=1}^m A_i^{k_i}$ takođe generalisani ili hipergeneralisani projektor, gde su $m, k_1, \ldots, k_m \in \mathbf{N}$. Dakle, važi sledeći rezultat:

Tvrđenje 4.1.1 *Neka su $A_i \in C^{n\times n}$, $i = \overline{1,m}$ komutativni generalisani ili hipergeneralisani projektori, $m, k_1, \ldots, k_m \in \mathbf{N}$, $c_1, c_2 \in \mathbf{C}$, $c_1 \neq 0$ i $c_1^3 + c_2^3 \neq 0$. Tada je $c_1I_n + c_2\prod_{i=1}^m A_i^{k_i}$ invertibilna.*

Uz dodatne uslove u Teoremi 4.1.1 moguće je dati precizniji oblik Moore-Penrose-ovog, tj. grupnog inverza linearne kombinacije $c_1A + c_2B$.

Posledica 4.1.2 *Neka su $c_1, c_2 \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$. Ako su A i B generalizani ili hipergeneralisani projektori za koje važi $AB = 0$, tada je*

$$(c_1A + c_2B)^\dagger = \frac{1}{c_1}A^2 + \frac{1}{c_2}B^2.$$

U sledećem rezultatu dajemo oblik Moore-Penrose-ovog, tj. grupnog inverza $c_1A^m + c_2A^k$, gde su $c_1, c_2 \in \mathbf{C}$, $m, k \in \mathbf{N}$ i A generalisani ili hipergeneralisani projektor.

Posledica 4.1.3 *Neka je $A \in C_r^{n\times n}$ generalisani ili hipergeneralisani projektor i $c_1, c_2 \in \mathbf{C}$, $c_1^3 + c_2^3 \neq 0$, $m, k \in \mathbf{N}$. Tada je*

$$(c_1A^m + c_2A^k)^\dagger = \frac{1}{c_1^3 + c_2^3}\Big(c_1^2A^{2m} - c_1c_2A^{m+k} + c_2^2A^{2k}\Big),$$

gde je $A^t = \begin{cases} A^3, & t \equiv_3 0, \\ A, & t \equiv_3 1, \\ A^2, & t \equiv_3 2 \end{cases}$. *Dalje, $c_1A^m + c_2A^k$ je invertibilna ako i samo ako je A invertibilna i u tom slučaju inverz $(c_1A^m + c_2A^k)^{-1}$ je oblika:*

$$(c_1A^m + c_2A^k)^{-1} = \frac{1}{c_1^3 + c_2^3}\Big(c_1^2A^p - c_1c_2A^q + c_2^2A^r\Big),$$

gde je $2m \equiv_3 p$, $m + k \equiv_3 q$ i $2k \equiv_3 r$.

Dokaz: Sledi na osnovu Teoreme 4.1.1 i činjenice da je $\mathrm{r}(\mathrm{A}^\mathrm{p}) = \mathrm{r}(\mathrm{A})$ za svaki $p \in \mathbf{N}$. $\square$

Kao posledicu prethodnog rezultata dobijamo rezultat iz rada [12].

Posledica 4.1.4 [*12*] *Neka je $A \in C_r^{n\times n}$ generalisani ili hipergeneralisani projektor i $c_1, c_2 \in \mathbf{C}$, $c_1^3 + c_2^3 \neq 0$. Tada je*

$$(c_1A + c_2A^*)^\dagger = \frac{1}{c_1^3 + c_2^3}\Big(c_1^2A^2 - c_1c_2A^3 + c_2^2A\Big).$$

U narednom tvrđenju predstavljen je oblik Moore-Penrose-ovog, tj. grupnog inverza linearne kombinacije $c_1A^m + c_2B^k$ pod uslovom da su A i B generalisani ili hipergeneralisani projektori i $AB = BA = A^2$. Isti rezultat važi pod pretpostavkom da su A i B generalisani projektori i $B - A \in C_n^{GP}$ ili $A \in C_n^{EP}$, $B \in C_n^{HGP}$ i $A \overset{*}{\leq} B$.

Teorema 4.1.2 *Neka su $c_1, c_2 \in C$, $c_2 \neq 0$, $c_1^3 + c_2^3 \neq 0$ i $m, k \in \mathbf{N}$. Ako su $A, B \in C^{n\times n}$ hipergeneralisani projektori i $AB = BA = A^2$, tada je*

$$\begin{aligned}(c_1A^m + c_2B^k)^\dagger = & \frac{1}{c_1^3 + c_2^3}\Big(c_1^2A^{2m} - c_1c_2A^{m+k} + c_2^2A^{2k}\Big) + \\ & \frac{1}{c_2}B^{2k}(I_n - A^3), \end{aligned} \tag{4.6}$$

gde je $A^t = \begin{cases} A^3, & t \equiv_3 0, \\ A, & t \equiv_3 1, \\ A^2, & t \equiv_3 2 \end{cases}$ *i* $B^s = \begin{cases} B^3, & s \equiv_3 0, \\ B, & s \equiv_3 1, \\ B^2, & s \equiv_3 2 \end{cases}$.

Dokaz: Na osnovu Posledice 3.9 iz [22] i uslova $AB = BA = A^2$ dobija se da A i B imaju sledeći oblik:

$$A = U(A_1 \oplus 0_{t,t} \oplus 0)U^*, \quad B = A = U(B_1 \oplus B_2 \oplus 0)U^*,$$

gde su $A_1, B_1 \in C^{r\times r}$, $B_2 \in C^{t\times t}$ invertibilne i $A_1B_1 = B_1A_1 = A_1^2$. Iz uslova $A_1B_1 = B_1A_1 = A_1^2$ i invertibilnosti datih matrica sledi da je $A_1 = B_1$. Kako su A i B hipergeneralisani projektori, onda je $A_1^3 = I_r$ i $B_2^3 = I_t$. Sada je

$$c_1A^m + c_2B^k = U\Big((c_1A_1^m + c_2A_1^k) \oplus c_2B_2^k \oplus 0\Big)U^*.$$

Na osnovu Leme 3.1.2 zaključuje se da je $c_1A_1^m + c_2A_1^k$ invertibilna i

$$(c_1A_1^m + c_2A_1^k)^{-1} = \frac{1}{c_1^3 + c_2^3}\Big(c_1^2A_1^{2m} - c_1c_2A_1^{m+k} + c_2^2A_1^{2k}\Big).$$

Koristeći

$$A^3 = U(I_r \oplus 0 \oplus 0)U^*, \quad B^3 - A^3 = U(0 \oplus I_t \oplus 0)U^*,$$

dobijamo da važi (4.6). $\square$

Teorema 4.1.3 *Neka su $A \in C_r^{n\times n}$ i $B \in C^{n\times n}$ komutativni hipergeneralisani projektori i $c_1, c_2 \in C \setminus \{0\}$, $c_1^3 + c_2^3 \neq 0$, $m, k \in \mathbf{N}$. Tada je*

$$\left[A^m(c_1A^k + c_2B^l)\right]^\dagger = \frac{1}{c_1^3 + c_2^3}\left(c_1^2A^{2(m+k)} - c_1c_2A^{(m+k)}B^l + c_2^2A^3B^{2l}\right) + \frac{1}{c_1}A^{2(m+k)}(I_n - B^3),$$

gde je $A^t = \begin{cases} A^3, & t \equiv_3 0, \\ A, & t \equiv_3 1, \\ A^2, & t \equiv_3 2 \end{cases}$ *i* $B^s = \begin{cases} B^3, & s \equiv_3 0, \\ B, & s \equiv_3 1, \\ B^2, & s \equiv_3 2 \end{cases}.$

Dokaz: Dokaz je analogan dokazu Teoreme 4.1.2. □

Sledeći rezultat daje potrebne i dovoljne uslovi za invertibilnost linearne kombinacije $c_1A + c_2B + c_3C$ u slučaju kada su A, B, C komutativni hipergeneralisani projektori i $BC = 0$, pri čemu za konstante $c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ važi $c_1^3 + c_2^3 \neq 0$ i $c_1^3 + c_3^3 \neq 0$. Isti rezultat važi pod pretpostavkom da su A, B i C generalisani projektori i $B + C \in C_n^{GP}$ ili $A, B, C \in C^{n\times n}$ hipergeneralisani projektori i $B \overset{*}{\perp} C$ sa istim uslovima za skalare.

Teorema 4.1.4 *Neka su $c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$, $c_1^3 + c_2^3 \neq 0$ i $c_1^3 + c_3^3 \neq 0$. Ako su $A, B, C \in C^{n\times n}$ komutativni hipergeneralisani projektori i $BC = 0$, tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(i) $c_1A + c_2B + c_3C$ *je invertibilna,*

(ii) $B^3 + C^3 + A(I_n - B^3 - C^3)$ *je invertibilna,*

(iii) $\mathrm{r(A(I_n - B^3 - C^3)) = n - (r(B) + r(C))}$.

Dokaz: Na osnovu Posledice 3.9 iz [22], može se pretpostaviti da su B i C oblika:

$$B = U(B_1 \oplus 0_t \oplus 0)U^*, B = U(0_r \oplus C_1 \oplus 0)U^*,$$

gde je $U \in C^{n\times n}$ unitarna, $B_1 \in C^{r\times r}$, $C_1 \in C^{t\times t}$ su invertibilne. Iz $B^2 = B^\dagger$ i $C^2 = C^\dagger$ sledi $B_1^3 = I_r$ i $C_1^3 = I_t$. Kako su A, B, C komutativni hipergeneralisani projektori, sledi da je A oblika

$$A = U(A_1 \oplus A_2 \oplus A_3)U^*,$$

gde su A_1, A_2, A_3 hipergeneralisani projektori i $A_1B_1 = B_1A_1$, $A_2C_1 = C_1A_2$. Sada je

$$c_1A + c_2B + c_3C = U\Big((c_1A_1 + c_2B_1) \oplus (c_1A_2 + c_3C_1) \oplus c_1A_3\Big)U^*.$$

Očigledno je $c_1A + c_2B + c_3C$ invertibilna ako i samo ako su matrice $c_1A_1 + c_2B_1$ i $c_1A_2 + c_3C_1$ invertibilne. Na osnovu Teoreme 4.1.1 sledi da je $c_1A_1B_1^2 + c_2I$ invertibilna za sve konstante $c_1, c_2 \in \mathbf{C}$ koje zadovoljavaju $c_2 \neq 0$ i $c_1^3 + c_2^3 \neq 0$. Kako je $c_1A_1 + c_2B_1 = (c_1A_1B_1^2 + c_2I)B_1$, zaključuje se da je $c_1A_1 + c_2B_1$ invertibilna. Analogno, može se zaključiti da je $c_1A_2 + c_3C_1$ invertibilna za sve konstante $c_1, c_3 \in \mathbf{C}$ koje zadovoljavaju da je $c_3 \neq 0$ i $c_1^3 + c_3^3 \neq 0$. Na osnovu gore navedenog razmatranja sledi da je $c_1A + c_2B + c_3C$ invertibilna ako i samo ako je A_3 invertibilna za sve konstante $c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ za koje važi da je $c_1^3 + c_2^3 \neq 0$ i $c_1^3 + c_3^3 \neq 0$. Sada se može dokazati da je $(i) \Leftrightarrow (ii)$ i $(i) \Leftrightarrow (iii)$. Zaista, A_3 je invertibilna ako i samo ako je $B^3 + C^3 + A(I_n - B^3 - C^3)$ invertibilna, čime je dokazano $(i) \Leftrightarrow (ii)$. Sa druge strane, A_3 je invertibilna ako i samo ako je $\mathrm{r(A_3) = n - (r + t)}$, tj. $\mathrm{r(A(I_n - B^3 - C^3)) = n - (r(B) + r(C))}$. Ovim je dokazano i $(i) \Leftrightarrow (iii)$. □

Naredna dva rezultata govore o nezavisnosti invertibilnosti linearne kombinacije $c_1A + c_2B + c_3C$ od izbora konstanti u slučaju kada za B i C važi $BC = 0$, tj. $B \overset{*}{\perp} C$.

Posledica 4.1.5 *Neka su $c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$, $c_1^3 + c_2^3 \neq 0$ i $c_1^3 + c_3^3 \neq 0$. Ako su $A, B, C \in C^{n\times n}$ komutativni hipergeneralisani projektori i $BC = 0$, tada je invertibilnost linearne kombinacije $c_1A + c_2B + c_3C$ nezavisna od izbora konstanti c_i, $i = \overline{1,3}$.*

Posledica 4.1.6 *Neka su $c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$, $c_1^3 + c_2^3 \neq 0$ i $c_1^3 + c_3^3 \neq 0$. Ako su $A, B, C \in C^{n\times n}$ generalisani projektori i $B + C \in C_n^{GP}$ ili*

$A, B, C \in C^{n\times n}$ hipergeneralisani projektori i $B \overset{*}{\perp} C$, tada je invertibilnost linearne kombinacije $c_1A+c_2B+c_3C$ nezavisna od izbora konstanti c_i, $i = \overline{1,3}$.

Na osnovu Teoreme 4.1.1 i Teoreme 4.1.4, ako jedan od uslova $(i) - (iii)$ važi, dobija se formula za inverz linearne kombinacije $c_1A + c_2B + c_3C$:

$$\begin{aligned}(c_1A + c_2B + c_3C)^{-1} = {} & \frac{1}{c_1^3 + c_2^3}\Big(c_1^2A^2B^3 - c_1c_2AB + c_2^2A^3B^2\Big) \\ & + \frac{1}{c_2}B^2(I_n - A^3) \\ & + \frac{1}{c_1^3 + c_3^3}\Big(c_1^2A^2C^3 - c_1c_3AC + c_3^2A^3C^2\Big) \\ & + \frac{1}{c_3}C^2(I_n - A^3) \\ & + \frac{1}{c_1}\Big(B^3 + C^3 + A(I_n - B^3 - C^3)\Big),\end{aligned} \tag{4.7}$$

koja će se koristiti u narednoj teoremi.

Teorema 4.1.5 *Neka su $c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{C}$, $c_1 \neq 0$, $c_1^3+c_2^3 \neq 0$ i $c_1^3+c_3^3 \neq 0$. Ako su $A, B \in C^{n\times n}$ komutativni hipergeneralisani projektori i $AB = 0$, tada je $c_1I_n + c_2A + c_3B$ invertibilna i*

$$\begin{aligned}(c_1I_n + c_2A + c_3B)^{-1} = {} & \frac{1}{c_1^3 + c_2^3}\Big(c_1^2A^3 - c_1c_2A + c_2^2A^2\Big) \\ & + \frac{1}{c_1^3 + c_3^3}\Big(c_1^2B^3 - c_1c_3B + c_3^2B^2\Big) \\ & + \frac{1}{c_1}\Big(I_n - A^3 - B^3\Big).\end{aligned}$$

Dokaz: Sledi na osnovu Teoreme 4.1.4 i (4.7). □

Primetimo da Teorema 4.1.5 važi i pod pretpostavkom da su A, B generalisani projektori i $A + B \in C_n^{GP}$ ili $A, B, \in C^{n\times n}$ hipergeneralisani projektori i $A \overset{*}{\perp} B$ sa istim uslovima za skalare.

4.2 Karakterizacija hipergeneralisanih k-projektora

U radu [35] autori su uveli pojam hypergeneralisanih k-projektora na skupu ograničenih linearnih operatora na Hilbertovom prostoru:
Neka je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor i $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ skup ograničenih linearnih operatora na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ je hipergeneralisani k-projektor ako postoji prirodan broj $k > 1$ za koji važi $A^k = A^\dagger$.
Takođe, oni su dokazali da je skup svih generalisanih k-projektora (videti Sekciju 2.4) podskup skupa svih hipergeneralisanih k-projektora. Dakle, klasa generalisanih k-projektora može se uopštiti posmatranjem klase hipergeneralisanih k-projektora. Zbog toga je interesantno posmatrati klasu hipergeneralisanih k-projektora. U ovom poglavlju daćemo karakterizaciju hipergeneralisanog k-projektora A sa svojstvom $A^k = A^\dagger$ za $k \in \mathbf{N}$ i $k > 1$. Primetimo da ako je $k = 2$, onda se dobija klasa hipergeneralisanih projektora.

Najpre navodimo potrebne i dovoljne uslove da je matrica A hipergeneralisani k-projektor.

Teorema 4.2.1 *Neka je $A \in C^{n\times n}$ i $k \in \mathbf{N}$, $k > 1$. Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(i) *A je hipergeneralisani k-projektor (tj. $A^k = A^\dagger$);*

(ii) *A je EP matrica, $\sigma(A) \subseteq \sigma_{k+1} \cup \{0\}$ i A se može dijagonalizovati;*

(iii) *A je EP matrica i $A^{k+2} = A$.*

Dokaz: Dokažimo da je (i) ekvivalentno sa (iii).
$(i) \Rightarrow (iii)$ Matrica A je EP jer je $AA^\dagger = AA^k = A^kA = A^\dagger A$. Takođe, matrica A je (k+2)-potent jer je $A^{k+2} = AA^kA = AA^\dagger A = A$.
$(iii) \Rightarrow (i)$ Kako je A EP matrica, to postoji unitarna matrica $U \in C^{n\times n}$ i invertibilna matrica $K \in C^{r\times r}$ tako da važi

$$A = U(K \oplus 0)U^*. \tag{4.8}$$

Takođe je

$$A^\dagger = U(K^{-1} \oplus 0)U^*. \tag{4.9}$$

Kako je $A^{k+2} = A$, to važi $K^k = K^{-1}$. Dakle, A je hipergeneralisani k-projektor, tj. (i) važi.
$(ii) \Leftrightarrow (iii)$ Sledi na osnovu dobro poznatog tvrđenja da je $A^{k+2} = A$ ako i samo ako se A može dijagonalizovati i ako je spektar matrice A sadržan u $\sigma_{k+1} \cup \{0\}$ (videti [25, Theorem 2.1]). $\square$

Na osnovu Teoreme 5.1.3 dobija se da je A hipergeneralisani k-projektor ako i samo ako je

$$A = U(K \oplus 0)U^*, \tag{4.10}$$

gde je $U \in C^{n\times n}$ unitarna i $K \in C^{r\times r}$ invertibilna matrica za koju važi $K^{k+1} = I_r$.

Ako je A hipergeneralisani k-projektor, tada je $A^{k+1} = AA^{\dagger}$, tj. A^{k+1} je ortogonalni projektor na $\mathcal{R}(A)$. Obrnuta implikacija takođe važi.

Teorema 4.2.2 *Neka je $A \in C^{n\times n}$. Tada je A hipergeneralisani k-projektor ako i samo ako je A^{k+1} ortogonalan projektor na $\mathcal{R}(A)$.*

Dokaz: $(\Leftarrow)$ U Posledici 6 iz rada [57] dokazano je da se svaka matrica $A \in C^{n\times n}$ ranga r može predstaviti u obliku:

$$A = U \begin{bmatrix} DK & DL \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^*, \tag{4.11}$$

gde je $U \in C^{n\times n}$ unitarna, $D = diag(\lambda_1 I_{r_1}, \ldots, \lambda_t I_{r_t})$ je dijagonalna matrica sopstvenih vrednosti matrice A, $\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_t > 0$, $r_1 + r_2 + \ldots + r_t = r$ i $K \in C^{r\times r}$, $L \in C^{r\times(n-r)}$ koje zadovoljavaju

$$KK^* + LL^* = I_r.$$

Iz (4.11), sledi da je

$$A^{k+1} = U \begin{bmatrix} (DK)^{k+1} & (DK)^k DL \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^* \tag{4.12}$$

i

$$A^{\dagger} = U \begin{bmatrix} K^* D^{-1} & 0 \\ L^* D^{-1} & 0 \end{bmatrix} U^*.$$

Dakle,

$$AA^{\dagger} = P_{\mathcal{R}(A)} = U(I_r \oplus 0)U^*.$$

Sada je $P_A = A^{k+1}$ ako i samo ako je $(DK)^{k+1} = I_r$ i $L = 0$. Ovim je dokazano da je A forme (4.10), što je ekvivalentno sa činjenicom da je A hipergeneralisani k-projektor. □

Posledica 4.2.1 *Neka je $A \in C^{n\times n}$ hipergeneralisani k-projektor. Tada je* $\mathrm{r(A)} = \mathrm{tr(A^{k+1})}$.

Dokaz: Na osnovu Teoreme 4.2.2, dobija se da je $\mathrm{r(A)} = \mathrm{r(A^{k+1})} = \mathrm{tr(A^{k+1})}$. □

Obrnuta implikacija ne važi, kao što pokazuje sledeći primer:

Primer 4.2.1

Matrica

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

je takva da je $\mathrm{r(A)} = \mathrm{tr(A^k)}$ i $A^{\dagger} = A^{-1} \neq A^k$ za $k \in \mathbf{N}$. Međutim, A nije hipergeneralisani k-projektor.

Primetimo da su Teorema 2.1.6 i Posledica 2.1.2 posledice Teoreme 4.2.2.

Na osnovu definicija Moore-Penrose-ovog inverza, grupnog inverza i Drazin-ovog inverza, lako je videti da ako je A hipergeneralisani k-projektor, tada je

$$A^{\dagger} = A^{\sharp} = A^d = A^k = A^{m(k+1)+k}, \qquad m \in \mathbf{N}.$$

U opštem slučaju A je hipergeneralisani k-projektor ako i samo ako za njegov Moore-Penrose-ov inverz $A^{\dagger}$ važi:

Teorema 4.2.3 *Neka je $A \in C^{n\times n}$. Sldeći uslovi su ekvivalentni:*

(i) *A je hipergeneralisani k-projektor;*

(ii) *A^* je hipergeneralisani k-projektor;*

(iii) $A^\dagger$ *je hipergeneralisani k-projektor.*

Dokaz: Neka su A i $A^\dagger$ forme (4.8) i (4.9), respektivno.
$(i) \Leftrightarrow (ii)$ Sledi iz $K^k = K^{-1} \Leftrightarrow (K^*)^k = (K^*)^{-1}$.
$(ii) \Leftrightarrow (iii)$ Sledi iz $K^k = K^{-1} \Leftrightarrow K = (K^{-1})^k$.

Pod određenim uslovima skup hipergeneralisanih k-projektora je ekvivalentan skupu EP matrica.

Teorema 4.2.4 *Neka je $A \in C^{n\times n}$. Ako postoji matrica $B \in C^{n\times n}$ takva da je B hipergeneralisani k-projektor i $A^2 = AB$ ili $A^2 = BA$, tada je A hipergeneralisani k-projektor ako i samo ako je $A \in C_n^{EP}$.*

Dokaz: $(\Rightarrow)$ Sledi na osnovu Teoreme 5.1.3.
$(\Leftarrow)$ Koristeći da je B hipergeneralisani k-projektor i $A^2 = AB$ može se zaključiti da je

$$A^2 = ABB^\dagger B = AB^{k+2} = A^{k+3}.$$

Kako je $AA^\dagger = A^\dagger A$ i množeći $A^2 = A^{k+3}$ tri puta sa $A^\dagger$, dobija se $A^\dagger = A^k$. Dokaz u slučaju uslova $A^2 = BA$ je analogan. □

Napomenimo da je Teorema 2.3.3 posledica Teoreme 4.2.4.

4.3 Moore-Penrose-ov inverz linearne kombinacije komutativnih hipergeneralisanih k-projektora

Naredni rezultati predstavljaju uopštenje rezultata iz Poglavlja 4.1.

Dobro je poznato da je svaki generalisani k-projektor i hipergeneralisani k-projektor. Zato naredni rezultati važe i za generalisane k-projektore. Tokom dokaza glavnih rezultata koristićemo narednu lemu:

Lema 4.3.1 *Neka su* $X, Y \in C^{n\times n}$ *i* $c_1, c_2 \in \mathbf{C}$. *Ako je* $X^{k+1} = Y^{k+1} = I_n$ *i* $XY = YX$, *tada je*

$$(c_1X + c_2Y)\sum_{i=0}^{k}(-1)^i c_1^{k-i} c_2^i X^{k-i} Y^i = (c_1^{k+1} + (-1)^k c_2^{k+1}) I_n. \quad (4.13)$$

Dokaz: Rezultat sledi na osnovu sledećeg razmatranja.

$$(c_1X + c_2Y)\sum_{i=0}^{k}(-1)^i c_1^{k-i} c_2^i X^{k-i} Y^i = c_1^{k+1} X^{k+1} + (-1)^k c_2^{k+1} Y^{k+1}$$
$$= (c_1^{k+1} + (-1)^k c_2^{k+1}) I_n. \ \square$$

U narednom tvrđenju ćemo predstaviti oblik Moore-Penrose-ovog inverza i dati potrebne i dovoljne uslove za invertibilnost linearne kombinacije $c_1A + c_2B$, gde su A i B komutativni hipergeneralisani k-projektori.

Teorema 4.3.1 *Neka su* $A \in C^{n\times n}$ *i* $B \in C^{n\times n}$ *komutativni hipergeneralisani k-projektori i* $c_1, c_2 \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$, $c_1^{k+1} + (-1)^k c_2^{k+1} \neq 0$. *Tada je*

$$\begin{aligned}(c_1A + c_2B)^\dagger = {} & \frac{1}{c_1^{k+1} + (-1)^k c_2^{k+1}}\Big(\sum_{i=0}^{k}(-1)^i c_1^{k-i} c_2^i A^{k-i} B^i\Big) \\ & A^{k+1}B^{k+1} + \frac{1}{c_1}A^k(I_n - B^{k+1}) \\ & + \frac{1}{c_2}B^k(I_n - A^{k+1}). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Takođe, $c_1A + c_2B$ *je invertibilna ako i samo ako je* $n = \mathrm{r(A)} + \mathrm{r(B)} - \mathrm{r(AB)}$ *i tom slučaju je* $(c_1A + c_2B)^{-1}$ *dat sa* (4.14).

Dokaz: Na osnovu Teoreme 5.1.3 i Posledice 3.9 iz [22], može se pretpostaviti da matrice A i B imaju sledeću formu:

$$A = U(A_1 \oplus A_2 \oplus 0_t \oplus 0)U^*, B = U(B_1 \oplus 0_s \oplus B_2 \oplus 0)U^*,$$

gde je $U \in C^{n\times n}$ unitarna, $A_1, B_1 \in C^{r\times r}$, $A_2 \in C^{s\times s}$, $B_2 \in C^{t\times t}$ su invertibilne, $A_1B_1 = B_1A_1$, $A_1^{k+1} = B_1^{k+1} = I_r$, $A_2^{k+1} = I_s$ i $B_2^{k+1} = I_t$. Primetimo da je

$$A^{k+1} = U(I_r \oplus I_s \oplus 0_t \oplus 0)U^*, \quad B^{k+1} = U(I_r \oplus 0_s \oplus I_t \oplus 0)U^*, \tag{4.15}$$

i

$$c_1A + c_2B = U\Big((c_1A_1 + c_2B_1) \oplus c_1A_2 \oplus c_2B_2 \oplus 0_{n-(r+s+t)}\Big)U^*. \tag{4.16}$$

Na osnovu Leme 4.3.1, zaključujemo da je $c_1A_1 + c_2B_1$ invertibilna i da je

$$(c_1A_1 + c_2B_1)^{-1} = \frac{1}{c_1^{k+1} + (-1)^k c_2^{k+1}} \sum_{i=0}^{k} (-1)^i c_1^{k-i} c_2^i A_1^{k-i} B_1^i.$$

Takođe, c_1A_2 i c_2B_2 su invertibilne matrice i njihovi inverzi su $(c_1A_2)^{-1} = \frac{1}{c_1}A_2^k$ i $(c_2B_2)^{-1} = \frac{1}{c_2}B_2^k$. Sada je

$$(c_1A + c_2B)^\dagger = U\Big(\frac{1}{c_1^{k+1} + (-1)^k c_2^{k+1}} \sum_{i=0}^{k} (-1)^i c_1^{k-i} c_2^i A_1^{k-i} B_1^i \oplus \frac{1}{c_1}A_2^k \oplus \frac{1}{c_2}B_2^k \oplus 0\Big)U^*.$$

Koristeći (4.15), dobija se (4.14).
Takođe, iz (4.16) može se zaključiti da je $c_1A + c_2B$ invertibilna ako je $n = r + t + s$. Kako je r(A) = r + t, r(B) = r + s i r(AB) = r, dobija se da je $c_1A + c_2B$ invertibilna ako i samo ako je $n =$ r(A) + r(B) − r(AB). □

U sledećim posledicama razmatrali smo kada su linearne kombinacije $c_1I_n + c_2\prod_{i=1}^m A_i^{k_i}$ i $c_1I_n + c_2A$ invertibilne, gde je $\{A_i\}_{i=1}^m$ konačna komutativna familja hipergeneralisanih k-projektora i A hipergeneralisani k-projektor, respektivno. Najpre ćemo navesti lemu:

Lema 4.3.2 *Neka su $A \in C^{n\times n}$ i $B \in C^{n\times n}$ komutativni hipergeneralisani k-projektori. Tada je AB hipergeneralisani k-projektor.*

Dokaz: Kako su A i B dva komutativna hipergeneralisana k-projektora, važi $BB^\dagger A^* AB = A^* AB$ i $ABB^* A^\dagger A = ABB^*$. Sada je $(AB)^\dagger = A^\dagger B^\dagger$ (videti [49]) i

$$(AB)^\dagger = A^\dagger B^\dagger = A^k B^k = (AB)^k.$$

Dakle, AB je hipergeneralisani k-projektor. □

Posledica 4.3.1 *Neka su $A_i \in C^{n\times n}$, $i = \overline{1,m}$ komutativni hipergeneralisani k-projektori, $m, k_1, \ldots, k_m \in \mathbf{N}$, $c_1, c_2 \in \mathbf{C}$, $c_1 \neq 0$ i $c_1^{k+1} + (-1)^k c_2^{k+1} \neq 0$. Tada je matrica $c_1 I_n + c_2 \prod_{i=1}^m A_i^{k_i}$ invertibilna.*

Dokaz: Na osnovu Leme 4.3.2 dobijamo: ako je $\{A_i\}_{i=1}^m$ konačna komutativna familja hipergeneralisanih k-projektora, tada je $\prod_{i=1}^m A_i^{k_i}$ takođe hipergeneralisani k-projektor, gde su $m, k_1, \ldots, k_m \in \mathbf{N}$. Sada dokaz sledi na osnovu Teoreme 4.3.1. □

Posledica 4.3.2 *Neka je $A \in C^{n\times n}$ hipergeneralisani k-projektor, $c_1, c_2 \in \mathbf{C}$, $c_1 \neq 0$ i $c_1^{k+1} + (-1)^k c_2^{k+1} \neq 0$. Tada je $c_1 I_n + c_2 A$ invertibilna i*

$$(c_1 I_n + c_2 A)^{-1} = \frac{1}{c_1^{k+1} + (-1)^k c_2^{k+1}} \Big(\sum_{i=0}^{k} (-1)^i c_1^{k-i} c_2^i A^i \Big) A^{k+1} + \frac{1}{c_1}(I_n - A^{k+1}).$$

U sledećoj posledici predstavljen je oblik Moore-Penrose-ovog inverza i dati su potrebni i dovoljni uslovi za invertibilnost linearne kombinacije $c_1 A + c_2 B$, gde su A i B komutativni hipergeneralisani k-projektori za koje važi $AB = 0$.

Posledica 4.3.3 *Neka su $c_1, c_2 \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$. Ako su A i B komutativni hipergeneralisani k-projektori takvi da je $AB = 0$, tada je*

$$(c_1 A + c_2 B)^\dagger = \frac{1}{c_1} A^k + \frac{1}{c_2} B^k. \tag{4.17}$$

Takođe, $c_1 A + c_2 B$ je invertibilna ako i samo ako je $n = \mathrm{r(A)} + \mathrm{r(B)}$ i tom slučaju je $(c_1 A + c_2 B)^{-1}$ dat sa (4.17).

U sledećem rezultatu dati su potrebni i dovoljni uslovi za invertibilnost linearne kombinacije $c_1A+c_2B+c_3C$, gde su A, B i C komutativni hipergeneralisani k-projektori za koje važi $BC = 0$.

Teorema 4.3.2 *Neka su* $c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$, $c_1^{k+1} + (-1)^k c_2^{k+1} \neq 0$ *i* $c_1^{k+1} + (-1)^k c_3^{k+1} \neq 0$. *Ako su* $A, B, C \in C^{n\times n}$ *komutativni hipergeneralisani k-projektori takvi da je* $BC = 0$, *tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(i) $c_1A + c_2B + c_3C$ *je invertiiblna,*

(ii) $B^{k+1} + C^{k+1} + A(I_n - B^{k+1} - C^{k+1})$ *je invertiiblna,*

(iii) $\mathrm{r(A(I_n - B^{k+1} - C^{k+1})) = n - (r(B) + r(C))}$.

Dokaz: Na osnovu Teoreme 5.1.3 i Posledice 3.9 iz [22], može se pretpostaviti da su B i C oblika:

$$B = U(B_1 \oplus 0_t \oplus 0)U^*, C = U(0_r \oplus C_1 \oplus 0)U^*,$$

gde je $U \in C^{n\times n}$ unitarna, $B_1 \in C^{r\times r}$, $C_1 \in C^{t\times t}$ su invertibilne, $B_1^{k+1} = I_r$ i $C_1^{k+1} = I_t$. Kako su A, B, C komutativni hipergeneralisani k-projektori, sledi da je A oblika $A = U(A_1 \oplus A_2 \oplus A_3)U^*$, gde su A_1, A_2, A_3 hipergeneralisani k-projektori, A_1 komutira sa B_1 i A_2 komutira sa C_1. Sada je

$$c_1A + c_2B + c_3C = U\Big((c_1A_1 + c_2B_1) \oplus (c_1A_2 + c_3C_1) \oplus c_1A_3\Big)U^*.$$

Matrice $c_1A_1 + c_2B_1$ i $c_1A_2 + c_3C_1$ su invertibilne. Zaista, kako je $(c_1A_1)^{k+1}+(-1)^k(c_2B_1)^{k+1} = c_1^{k+1}A_1^{k+1}+(-1)^k c_2^{k+1}I_r$, tada je $(c_1A_1)^{k+1}+(-1)^k(c_2B_1)^{k+1}$ invertibilna kao suma ortogonalnog projektora i jedinične matrice za sve konstante $c_1, c_2 \in \mathbf{C}$ takve da je $c_2 \neq 0$ i $c_1^{k+1} + (-1)^k c_2^{k+1} \neq 0$. Na osnovu invertibilnosti matrice $(c_1A_1)^{k+1} + (-1)^k(c_2B_1)^{k+1}$ i Leme 4.3.1, sledi da je $c_1A_1 + c_2B_1$ invertibilna matrica. Analogno, može se zaključiti da je $c_1A_2+c_3C_1$ invertibilna za sve konstante $c_1, c_3 \in \mathbf{C}$, $c_3 \neq 0$ i $c_1^{k+1} + (-1)^k c_3^{k+1} \neq 0$. Na osnovu gore navedenog razmatranja sledi da je $c_1A + c_2B + c_3C$ invertibilna ako i samo ako je A_3 invertibilna za sve konstante $c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ za koje važi da je $c_1^{k+1} + (-1)^k c_2^{k+1} \neq 0$ i $c_1^{k+1} + (-1)^k c_3^{k+1} \neq 0$. Sada se može dokazati da je $(i) \Leftrightarrow (ii)$ i $(i) \Leftrightarrow (iii)$. Zaista, A_3 je invertibilna ako i samo ako je $B^{k+1} + C^{k+1} + A(I_n - B^{k+1} - C^{k+1})$ invertibilna, čime je dokazano $(i) \Leftrightarrow (ii)$. Sa druge strane, A_3 je invertibilna ako i samo ako je $\mathrm{r}(A_3) = n - (r + t)$, tj. $\mathrm{r}(A(I_n - B^{k+1} - C^{k+1})) = n - (\mathrm{r}(B) + \mathrm{r}(C))$. Ovim je dokazano $(i) \Leftrightarrow (iii)$. $\Box$

U sledećoj posledici proučava se invertibilnost linearne kombinacije $c_1 I_n + c_2 A + c_3 B$ komutativnih hipergeneralisanih k-projektora A i B za koje važi $AB = 0$.

Posledica 4.3.4 *Neka su $c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{C}$, $c_1 \neq 0$, $c_1^{k+1} + (-1)^k c_2^{k+1} \neq 0$ i $c_1^{k+1} + (-1)^k c_3^{k+1} \neq 0$. Ako su $A, B \in C^{n\times n}$ komutativni hipergeneralisani k-projektori takvi da je $AB = 0$, tada je $c_1 I_n + c_2 A + c_3 B$ invertbilna matrica i*

$$\begin{aligned}(c_1 I_n + c_2 A + c_3 B)^{-1} &= \frac{1}{c_1^{k+1} + (-1)^k c_2^{k+1}} \Big(\sum_{i=0}^{k} (-1)^i c_1^{k-i} c_2^i A^i \Big) A^{k+1} \\ &+ \frac{1}{c_1^{k+1} + (-1)^k c_3^{k+1}} \Big(\sum_{i=0}^{k} (-1)^i c_1^{k-i} c_2^i B^i \Big) B^{k+1} \\ &+ \frac{1}{c_1}(I_n - A^{k+1} - B^{k+1}). \qquad (4.18)\end{aligned}$$

Dokaz: Invertibilnost linearne kombinacije $c_1 I_n + c_2 A + c_3 B$ sledi na osnovu Teoreme 4.3.2. Takođe, iz dokaza Teoreme 4.3.2 sledi da je $c_1 I_n + c_2 A + c_3 B$ oblika:

$$c_1 I_n + c_2 A + c_3 B = U(c_1 I_r + c_2 A_1 \oplus c_1 I_t + c_3 B_1 \oplus c_1 I_{n-r-t})U^*,$$

gde je $U \in C^{n\times n}$ unitarna, $A_1 \in C^{r\times r}$, $B_1 \in C^{t\times t}$ su invertibilne, $A_1 B_1 = B_1 A_1$, $A_1^{k+1} = I_r$ i $B_1^{k+1} = I_t$. Na osnovu Posledice 4.3.2 dobija se

$$(c_1 I_r + c_2 A_1)^{-1} = \frac{1}{c_1^{k+1} + (-1)^k c_2^{k+1}} \Big(\sum_{i=0}^{k} (-1)^i c_1^{k-i} c_2^i A_1^i \Big) A_1^{k+1}$$

i

$$(c_1 I_t + c_3 B_1)^{-1} = \frac{1}{c_1^{k+1} + (-1)^k c_3^{k+1}} \Big(\sum_{i=0}^{k} (-1)^i c_1^{k-i} c_2^i B_1^i \Big) B_1^{k+1}.$$

Sada je

$$
\begin{aligned}
(c_1 I_n + c_2 A + c_3 B)^{-1} = U\Big(&\frac{1}{c_1^{k+1} + (-1)^k c_2^{k+1}}\Big(\sum_{i=0}^{k}(-1)^i c_1^{k-i} c_2^i A_1^i\Big) \\
&A_1^{k+1} \oplus \frac{1}{c_1^{k+1} + (-1)^k c_3^{k+1}}\Big(\sum_{i=0}^{k}(-1)^i c_1^{k-i} c_2^i B_1^i\Big) \\
&B_1^{k+1} \oplus \frac{1}{c_1} I_{n-r-t}\Big)U^*,
\end{aligned}
$$

što je ekvivalentno sa (4.18). □

Glava 5

Linearna kombinacija komutativnih involutivnih matrica i projektora

5.1 Linearna kombinacija komutativnih involutivnih matrica

U ovoj sekciji razmatraće se kada je linearna kombinacija

$$c_1 A + c_2 B \tag{5.1}$$

k-potent, pri čemu su A, B involutivne matrice koje komutiraju, $k \in N$, $k \geq 2$ i $c_1, c_2 \in C \setminus \{0\}$. Problem će se razmatrati u dva slučaja: kada je k neparan broj i kada je k paran broj.
Podsetimo da ako su A i B involutivne matrice i $A = \lambda B$, tada je $A = B$ ili $A = -B$.
Takođe, ako je $A = B$, tada je $c_1 A + c_2 B$ k-potent, gde je k neparan ako i samo ako je $c_1 = -c_2$ ili ako postoji $t \in \sigma_{k-1}$ tako da je $c_1 + c_2 = t$. Ako je $A = -B$, tada je $c_1 A + c_2 B$ k-potent, gde je k neparan ako i samo ako je $c_1 = c_2$ ili ako postoji $t \in \sigma_{k-1}$ tako da je $c_1 - c_2 = t$. Ako je k paran broj i $A = B$, matrica $c_1 A + c_2 B$ je k-potent ako i samo ako je $c_1 = -c_2$ ili $A = (c_1 + c_2)^{k-1} I$. Ako je $A = -B$, tada je $c_1 A + c_2 B$ k-potent, pri čemu je k paran ako i samo ako je $c_1 = c_2$ ili $A = (c_1 - c_2)^{k-1} I$. Specijalno, ako je $A = B = I$, tada je $c_1 A + c_2 B$ k-potent ako i samo ako je $c_1 = -c_2$ ili ako postoji $t \in \sigma_{k-1}$ tako da je $c_1 + c_2 = t$. Takođe, ako je $A = -B = I$, tada je $c_1 A + c_2 B$ k-potent

ako i samo ako je $c_1 = c_2$ ili ako postoji $t \in \sigma_{k-1}$ tako da je $c_1 - c_2 = t$. Ako je $A = B = -I$, tada je $c_1A + c_2B$ k-potent ako i samo ako je $c_1 = -c_2$ ili ako postoji $t \in \sigma_{k-1}$ tako da je $c_1 + c_2 = -t$.

Rezultati u ovom poglavlju sadržani su u radu [119].

Sledeća teorema je od velikog značaja u dokazu narednih rezultata iz ove sekcije.

Teorema 5.1.1 *Neka je* $\{A_i\}_{i=1}^m$ *konačna komutativna nenula familija involutivnih matrica i* $k_1, k_2, ..., k_m \in N$ *tako da je* $\prod_{i=1}^m A_i^{k_i} \neq \pm I$ *i neka su* $c_1, c_2 \in C \setminus \{0\}$, $k \in N$, $k \geq 2$. *Tada je linearna kombinacija* $c_1I + c_2 \prod_{i=1}^m A_i^{k_i}$ *k-potent ako i samo ako važi jedan od sledećih uslova:*

(i) $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}t, \ \ t \in \sigma_{k-1},$

(ii) $c_1 = -c_2 = \frac{1}{2}t, \ \ t \in \sigma_{k-1},$

(iii) *postoje* $t_1, t_2 \in \sigma_{k-1}$, $t_1 \neq \pm t_2$ *tako da je* $c_1 = \frac{t_1+t_2}{2}$ *i* $c_2 = \frac{t_1-t_2}{2}$.

Dokaz: Primetimo da za proizvoljnu konačnu komutativnu nenula familiju involutivnih matrica $\{A_i\}_{i=1}^m$ i proizvoljne prirodne brojeve $k_1, k_2, ...,$ k_m, $\prod_{i=1}^m A_i^{k_i}$ je involutivna matrica. Dakle, $\prod_{i=1}^m A_i^{k_i}$ može se dijagonalizovati i predstaviti u obliku $\prod_{i=1}^m A_i^{k_i} = S(I \oplus -I)S^{-1}$, gde je S nesingularna matrica. Oba sabirka moraju biti prisutna, jer, inače, $AB = \pm I$ dovodi do $A = \pm B$. Sada je $c_1I + c_2 \prod_{i=1}^m A_i^{k_i}$ k-potent ako i samo ako je $c_1(I \oplus I) + c_2(I \oplus -I)$ k-potent. Kako je $c_1(I \oplus I) + c_2(I \oplus -I) = (c_1 + c_2)I \oplus (c_1 - c_2)I$, $c_1I + c_2 \prod_{i=1}^m A_i^{k_i}$ je k-potent ako i samo ako je $c_1 + c_2 \in \{0\} \cup \sigma_{k-1}$ i $c_1 - c_2 \in \{0\} \cup \sigma_{k-1}$. S obzirom na to da je $c_1, c_2 \in C \setminus \{0\}$, odmah sledi da c_1 i c_2 zadovoljavaju jedan od uslova $(i) - (iii)$. $\square$

U narednoj posledici razmatrali smo kada je linearna kombinacija $c_1I + c_2 \prod_{i=1}^m A_i^{k_i}$ idempotent, gde je $\{A_i\}_{i=1}^m$ konačna komutativna nenula familija involutivnih matrica.

Posledica 5.1.1 *Neka je* $\{A_i\}_{i=1}^m$ *konačna komutativna nenula familija involutivnih matrica i* $k_1, k_2, ..., k_m \in N$ *tako da je* $\prod_{i=1}^m A_i^{k_i} \neq \pm I$

i neka je $c_1, c_2 \in C \setminus \{0\}$*,* $k \in N$*,* $k \geq 2$*. Linearna kombinacija* $c_1 I + c_2 \prod_{i=1}^{m} A_i^{k_i}$ *je idempotent ako i samo ako je*

$$(c_1, c_2) \in \Big\{ (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) \Big\}.$$

U sledećim tvrđenjima dati su potrebni i dovoljni uslovi za k-potentnost linearne kombinacije (5.1), kada je k neparan broj i kada je k paran broj. Prvo se navode potrebni i dovoljni uslovi za k-potentnost linearne kombinacije (5.1) u slučaju kada je $k \in N$, $k \geq 2$ i $k \equiv_2 1$.

Teorema 5.1.2 *Neka su* A*,* $B \in C^{n\times n}$ *komutativne involutivne matrice takve da je* $A \neq \pm B$ *i* $c_1, c_2 \in C \setminus \{0\}$*,* $k \in N$*,* $k \geq 2$ *i* $k \equiv_2 1$*. Tada je linearna kombinacija* $T = c_1 A + c_2 B$ *k-potent ako i samo ako važi jedan od sledećih uslova:*

(i) $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}t$*,* $t \in \sigma_{k-1}$*,*

(ii) $c_1 = -c_2 = \frac{1}{2}t$*,* $t \in \sigma_{k-1}$*,*

(iii) *postoje* $t_1, t_2 \in \sigma_{k-1}$*,* $t_1 \neq \pm t_2$ *tako da je* $c_1 = \frac{t_1+t_2}{2}$ *i* $c_2 = \frac{t_1-t_2}{2}$*.*

Dokaz: Kako je $A^{k+1} = I$ i $AB = BA$, množeći $T^k = T$ nensingularnom matricom A dobija se da je T k-potent ako i samo ako je $c_1 I + c_2 AB$ k-potent. Primetimo da je $(AB)^2 = I$. Dakle, tvrđenje sledi na osnovu Teoreme 5.1.1. □

Posledica prethodne teoreme je Teorema 1.5.1.

U narednom rezultatu dati su potrebni i dovoljni uslovi za k-potentnost linearne kombinacije (5.1) u slučaju kada je $k \in N$, $k \geq 2$ i $k \equiv_2 0$:

Teorema 5.1.3 *Neka su* A*,* $B \in C^{n\times n}$ *komutativne involutivne matrice takve da je* $A \neq \pm B$ *i* $A, B \neq \pm I$ *i* $c_1, c_2 \in C \setminus \{0\}$*,* $k \in N$*,* $k \geq 2$ *i* $k \equiv_2 0$*. Tada je linearna kombinacija* $T = c_1 A + c_2 B$ *k-potent ako i samo ako važi jedan od sledećih uslova:*

(i) $c_1 = -c_2 = \frac{1}{2}t$*,* $t \in \sigma_{k-1}$ *i* $A - B = I - AB$*,*

(ii) $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}t,\ \ t \in \sigma_{k-1}\ i\ A + B = I + AB,$

(iii) $-c_1 = c_2 = \frac{1}{2}t,\ \ t \in \sigma_{k-1}\ i\ -A + B = I - AB,$

(iv) $c_1 = c_2 = -\frac{1}{2}t,\ \ t \in \sigma_{k-1}\ i\ -A - B = I + AB.$

Dokaz: Kako su matrice A i B komutativne involutivne matrice, one su simultano dijagonalizovane, tj. postoji nesingularna matrica S tako da su $S^{-1}AS$ i $S^{-1}BS$ dijagonalne matrice. Neka su $(\lambda_i)_{i=1}^n$ i $(\mu_i)_{i=1}^n$ elementi za koje važi: $\lambda_i, \mu_i \in \{1, -1\}$, $A = Sdiag(\lambda_1, .., \lambda_n)S^{-1}$ i $B = Sdiag(\mu_1, .., \mu_n)S^{-1}$. Bez umanjenja opštosti pretpostavimo da da je $\lambda_i = 1$ za svako $i \in \{1, ..., r\}$, $0 < r < n$ i $\lambda_j = -1$ za svako $j \in \{r+1, ..., n\}$. Kako je $A \neq \pm B$, mogući su sledeći slučajevi: (a_1) $\lambda_i = \mu_i$ i $\lambda_{i+1} \neq \mu_{i+1}$ za neke $i \in \{1, ..., r\}$, $\lambda_j = \mu_j$ i $\lambda_{j+1} \neq \mu_{j+1}$ za neke $j \in \{r+1, ..., n\}$; (a_2) $\lambda_i = \mu_i$ i $\lambda_{i+1} \neq \mu_{i+1}$ za neke $i \in \{1, ..., r\}$ i $\lambda_j = \mu_j$ za svaki $j \in \{r+1, ..., n\}$; (a_3) $\lambda_i = \mu_i$ i $\lambda_{i+1} \neq \mu_{i+1}$ za neke $i \in \{1, ..., r\}$ i $\lambda_j \neq \mu_j$ za svaki $j \in \{r+1, ..., n\}$; (a_4) $\lambda_i = \mu_i$ za svaki $i \in \{1, ..., r\}$ i $\lambda_j = \mu_j$ i $\lambda_{j+1} \neq \mu_{j+1}$ za neke $j \in \{r+1, ..., n\}$; (a_5) $\lambda_i \neq \mu_i$ za svaki $i \in \{1, ..., r\}$, $\lambda_j = \mu_j$ i $\lambda_{j+1} \neq \mu_{j+1}$ za neke $j \in \{r+1, ..., n\}$.

(a_1) Kako je $\lambda_i = \mu_i$ i $\lambda_{i+1} \neq \mu_{i+1}$ za neke $i \in \{1, ..., r\}$ i $\lambda_j = \mu_j$ i $\lambda_{j+1} \neq \mu_{j+1}$ za neke $j \in \{r+1, ..., n\}$, matrica T je k-potent ako i samo ako je $(c_1 + c_2)^k = c_1 + c_2$, $(c_1 - c_2)^k = c_1 - c_2$, $(-c_1 + c_2)^k = -c_1 + c_2$ i $(-c_1 - c_2)^k = -c_1 - c_2$. S obzirom na to da je $c_1, c_2 \in C \setminus \{0\}$, nemoguće je da je matrica T k-potent.

(a_2) Sada je $\lambda_i = \mu_i$ i $\lambda_{i+1} \neq \mu_{i+1}$ za neke $i \in \{1, ..., r\}$ i $\lambda_j = \mu_j$ za svaki $j \in \{r+1, ..., n\}$. Matrice A i B zadovoljavaju $A - B = I - AB$ i T je k-potent ako i samo ako je $(c_1 + c_2)^k = c_1 + c_2$, $(c_1 - c_2)^k = c_1 - c_2$ i $(-c_1 - c_2)^k = -c_1 - c_2$, tj. $c_1 = -c_2 = \frac{1}{2}t,\ \ t \in \sigma_{k-1}$. Dakle, (i) važi.

(a_3) Slično, kako je $\lambda_i = \mu_i$ i $\lambda_{i+1} \neq \mu_{i+1}$ za neke $i \in \{1, ..., r\}$ i $\lambda_j \neq \mu_j$ za svaki $j \in \{r+1, ..., n\}$, za matrice A i B važi $A + B = I + AB$ i T k-potent ako i smo ako je $(c_1 + c_2)^k = c_1 + c_2$, $(c_1 - c_2)^k = c_1 - c_2$ and $(-c_1 + c_2)^k = -c_1 + c_2$, tj. $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}t,\ \ t \in \sigma_{k-1}$. Dakle, (ii) važi.

(a_4) Iz $\lambda_i = \mu_i$ za svaki $i \in \{1, ..., r\}$ i $\lambda_j = \mu_j$ i $\lambda_{j+1} \neq \mu_{j+1}$ za neke $j \in \{r+1, ..., n\}$ sledi da A i B zadovoljavaju $-A + B = I - AB$ i T je k-potent ako i samo ako je $(c_1 + c_2)^k = c_1 + c_2$, $(-c_1 + c_2)^k = -c_1 + c_2$ i $(-c_1 - c_2)^k = -c_1 - c_2$, tj. $-c_1 = c_2 = \frac{1}{2}t,\ \ t \in \sigma_{k-1}$. Dakle, (iii) važi.

(a_5) Sada je $\lambda_i \neq \mu_i$ za svaki $i \in \{1, ..., r\}$, $\lambda_j = \mu_j$ i $\lambda_{j+1} \neq \mu_{j+1}$ za neke $j \in \{r+1, ..., n\}$. Za matrice A i B važi $-A - B = I + AB$ i T je k-potent ako i samo ako je $(c_1 - c_2)^k = c_1 - c_2$, $(-c_1 + c_2)^k = -c_1 + c_2$ i $(-c_1 - c_2)^k = -c_1 - c_2$, tj. $c_1 = c_2 = -\frac{1}{2}t,\ t \in \sigma_{k-1}$. Dakle, (iv) važi. $\square$

Kao posledica Teoreme 5.1.3 i Teoreme 5.1.1 dobija se deo (a) Teoreme 1.5.2.

Ako je A generalisani projektor ili hipergeneralisani projektor, tada je $A^4 = A$. Dakle, važi sledeća posledica:

Posledica 5.1.2 *Neka su $A,\ B \in C^{n\times n}$ komutativne involutivne matrice takve da je $A \neq \pm B$ i $A, B \neq \pm I$ i neka je $c_1, c_2 \in C \setminus \{0\}$. Ako je linearna kombinacija $c_1A + c_2B$ generalisani projektor ili hipergeneralisani projektor, tada važi jedan od sledećih uslova:*

(i) $c_1 = -c_2 = \frac{1}{2}t,\ \ t \in \{1, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\}$ *i* $A - B = I - AB$,

(ii) $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}t,\ \ t \in \{1, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\}$ *i* $A + B = I + AB$,

(iii) $-c_1 = c_2 = \frac{1}{2}t,\ \ t \in \{1, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\}$ *i* $-A + B = I - AB$,

(iv) $c_1 = c_2 = -\frac{1}{2}t,\ \ t \in \{1, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\}$ *i* $-A - B = I + AB$.

5.2 Linearna kombinacija idempotentnih matrica

Rezultati u ovom poglavlju sadržani su u radu [119].

Za konstante $c_1, c_2, c_3 \in C \setminus \{0\}$ i idempotentne matrice $A, B \in C^{n\times n}$, neka je P linearna kombinacija oblika

$$c_1 I_n + c_2 A + c_3 B. \tag{5.2}$$

U ovom poglavlju koristiće se oblik 1.1 idempotente matrice $A \in C^{n\times n}$.

Najpre razmatraćemo slučaj kada je matrica P oblika (5.2) invertibilna i involutivna, pri čemu su $A, B \in C^{n\times n}$ idempotenti, $A \neq B$ i $(A-B)^2 = 0$.

Teorema 5.2.1 *Neka su $c_1, c_2, c_3 \in C\setminus\{0\}$ i $A, B \in C^{n\times n}$ idempotenti, $A \neq B$ i $(A-B)^2 = 0$. Tada važi:*

(i) P oblika (5.2) je invertibilna ako i samo ako je $c_1 + c_2 + c_3 \neq 0$,

(ii) P oblika (5.2) je involutivna ako i samo ako je $(c_1, c_2 + c_3) = (1, -2)$ ili $(c_1, c_2 + c_3) = (-1, 2)$.

Dokaz: Neka je $A \in C_n^P$ oblika (1.1) i r(A) = r. Neka je dekompozicija matrice B oblika:

$$B = U \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix} U^{-1}, \tag{5.3}$$

gde je $B_1 \in C^{r\times r}$ i $B_4 \in C^{(n-r)\times(n-r)}$. Primenom $B^2 = B$, dobija se da važi:

$$\begin{gathered} B_1^2 + B_2B_3 = B_1, B_1B_2 + B_2B_4 = B_2, B_3B_1 + B_4B_3 = B_3, \\ B_3B_2 + B_4^2 = B_4. \end{gathered} \tag{5.4}$$

Koristeći

$$(A-B)^2 = U \begin{bmatrix} I_r - 2B_1 + B_1^2 + B_2B_3 & -B_2 + B_1B_2 + B_2B_4 \\ -B_3 + B_3B_1 + B_4B_3 & B_3B_2 + B_4^2 \end{bmatrix} U^{-1}$$

i (5.4) sledi da je $(A-B)^2$ oblika:

$$(A-B)^2 = U \begin{bmatrix} I_r - B_1 & 0 \\ 0 & B_4 \end{bmatrix} U^{-1}. \tag{5.5}$$

Kako je $(A-B)^2 = 0$, sledi da je $B_1 = I_r$ i $B_4 = 0$, tj.

$$B = U \begin{bmatrix} I_r & B_2 \\ B_3 & 0 \end{bmatrix} U^{-1}.$$

Primetimo da je $B_2 B_3 = 0 = B_3 B_2$ i

$$P = U \begin{bmatrix} (c_1+c_2+c_3)I_r & c_3 B_2 \\ c_3 B_3 & c_1 I_{n-r} \end{bmatrix} U^{-1}.$$

S obzirom na to da je $c_1 \in C \setminus \{0\}$, matrica P je invertibilna ako i samo ako je $c_1+c_2+c_3 \neq 0$. Dakle, (i) važi. Takođe, važi:

$$P^2 = U \begin{bmatrix} (c_1+c_2+c_3)^2 I_r & (2c_1+c_2+c_3)c_3 B_2 \\ (2c_1+c_2+c_3)c_3 B_3 & c_1^2 I_{n-r} \end{bmatrix} U^{-1}.$$

Kako je $A \neq B$, nemoguće je da važi $B_2 = 0 = B_3$. Sada je $P^2 = I_n$ ako i samo ako je $c_1 = \pm 1$, $c_1+c_2+c_3 = \pm 1$ i $2c_1+c_2+c_3 = 0$, što je ekvivalentno sa $(c_1, c_2+c_3) = (1,-2)$ ili $(c_1, c_2+c_3) = (-1,2)$. Dakle, (ii) važi. $\Box$

Primer 5.2.1

Idempotente matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ zadovoljavaju uslove $A \neq B$ i $(A-B)^2 = 0$. Matrica

$$c_1 I_4 + c_2 A + c_3 B = \begin{bmatrix} c_1+c_2+c_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_1+c_2+c_3 & 0 & c_3 \\ c_3 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_1 \end{bmatrix}$$

je invertibilna ako i samo ako je $c_1 + c_2 + c_3 \neq 0$, gde je $c_1, c_2, c_3 \in C \setminus \{0\}$. Takođe, $c_1 I_4 + c_2 A + c_3 B$ je involutivna ako i samo ako je $(c_1, c_2 + c_3) = (1, -2)$ ili $(c_1, c_2 + c_3) = (-1, 2)$.

Prirodno je zapitati se pod kojim uslovima je matrica P invertibilna ili involutivna, kada su $A, B \in C^{n\times n}$ idempotenti, $A \neq B$, $AB = B$ i $BA = A$. Odgovor na to pitanje dat je u sledećoj posledici:

Posledica 5.2.1 *Neka su* $c_1, c_2, c_3 \in C\setminus\{0\}$, $A, B \in C^{n\times n}$ *idempotenti,* $A \neq B$, $AB = B$ *i* $BA = A$. *Tada važi:*

(*i*) P *oblika* (5.2) *je invertibilna ako i samo ako je* $c_1 + c_2 + c_3 \neq 0$,

(*ii*) P *oblika* (5.2) *je involutivna ako i samo ako je* $(c_1, c_2 + c_3) = (1, -2)$ *ili* $(c_1, c_2 + c_3) = (-1, 2)$.

Dokaz: Iz $A^2 = A$, $B^2 = B$, $AB = B$ i $BA = A$ sledi da je $(A-B)^2 = 0$. Sada tvrđenje sledi na osnovu Teoreme 5.2.1. $\Box$

Primer 5.2.2

Idempotente matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ zadovoljavaju uslove $A \neq B$, $AB = B$ i $BA = A$. Matrica

$$c_1 I_2 + c_2 A + c_3 B = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 + c_3 & c_3 \\ 0 & c_1 \end{bmatrix}$$

je invertibilna ako i samo ako je $c_1 + c_2 + c_3 \neq 0$, gde je $c_1, c_2, c_3 \in C \setminus \{0\}$. Takođe, $c_1 I_2 + c_2 A + c_3 B$ je involutivna ako i samo ako je $(c_1, c_2 + c_3) = (1, -2)$ ili $(c_1, c_2 + c_3) = (-1, 2)$.

Teorema 1.5.3 je korisna u dokazima narednih teorema.

Ako su matrice A i B u Teoremi 5.2.1 idempotenti za koje važi $A \neq B$ i $(A - B)^2 = A - B$, onda se dobija sledeći rezultat:

Teorema 5.2.2 *Neka su* $c_1, c_2, c_3 \in C \setminus \{0\}$, $A, B \in C^{n\times n}$ *idempotenti,* $A \neq B$ *i* $(A - B)^2 = A - B$. *Tada važi:*

(*i*) *P oblika* (5.2) *je invertibilna ako i samo ako je* $c_1 + c_2 \neq 0$ *i* $c_1 + c_2 + c_3 \neq 0$,

(*ii*) *P oblika* (5.2) *je involutivna ako i samo ako je* $(c_1, c_2, c_3) = (1, -2, 2)$ *ili* $(c_1, c_2, c_3) = (-1, 2, -2)$.

Dokaz: Neka su $A, B \in C_n^P$ oblika (1.1) i (5.3), redom. Iz $(A - B)^2 = A - B$ i (5.5) sledi da je $B_2 = B_3 = B_4 = 0$ i

$$B = U \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^{-1},$$

gde je $B_1 \in C^{r\times r}$ projektor. Kako je P oblika

$$P = U \begin{bmatrix} (c_1 + c_2)I_r + c_3 B_1 & 0 \\ 0 & c_1 I_{n-r} \end{bmatrix} U^{-1},$$

sledi da je P invertibilna ako i samo ako je $c_1+c_2 \neq 0$ i $c_1+c_2+c_3 \neq 0$, tj. (*i*) važi. Takođe je $P^2 = U \begin{bmatrix} ((c_1 + c_2)I_r + c_3 B_1)^2 & 0 \\ 0 & c_1^2 I_{n-r} \end{bmatrix} U^{-1}$. Na osnovu Teoreme 1.5.3 zaključujemo da je $(c_1 + c_2)I_r + c_3 B_1$ involutivna ako i samo ako je $(c_1 + c_2, c_3) = (1, -2)$ ili $(c_1 + c_2, c_3) = (-1, 2)$. Kako je $c_1 = \pm 1$ i $c_2 \neq 0$, (*ii*) važi. $\square$

Primer 5.2.3

Idempotente matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ zadovoljavaju uslove $A \neq B$ i $(A - B)^2 = A - B$. Matrica

$$c_1 I_3 + c_2 A + c_3 B = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 + c_2 + c_3 & 0 \\ 0 & 0 & c_1 \end{bmatrix}$$

je invertibilna ako i samo ako je $c_1 + c_2 \neq 0$ i $c_1 + c_2 + c_3 \neq 0$, gde je $c_1, c_2, c_3 \in C \setminus \{0\}$. Takođe, $c_1 I_3 + c_2 A + c_3 B$ je involutivna ako i samo ako je $(c_1, c_2, c_3) = (1, -2, 2)$ ili $(c_1, c_2, c_3) = (-1, 2, -2)$.

U narednom tvrđenju razmatra se kada je matrica P oblika (5.2) invertibilna ili involutivna, pri čemu su $A, B \in C^{n\times n}$ projektori i $(A + B)^2 = A + B$.

Teorema 5.2.3 *Neka su* $c_1, c_2, c_3 \in C \setminus \{0\}$, $A, B \in C^{n\times n}$ *idempotenti i* $(A+B)^2 = A + B$. *Tada važi:*

(*i*) P *oblika* (5.2) *je invertibilna ako i samo ako je* $c_1 + c_2 \neq 0$ *i* $c_1 + c_3 \neq 0$,

(*ii*) P *oblika* (5.2) *je involutivna ako i samo ako je* $(c_1, c_2, c_3) = (1, -2, -2)$ *ili* $(c_1, c_2, c_3) = (-1, 2, 2)$.

Dokaz: Neka su $A, B \in C_n^P$ oblika (1.1) i (5.3), redom. Uslov $(A+B)^2 = A + B$ ekvivalentan je sa $B_1 = B_2 = B_3 = 0$. Na osnovu $B^2 = B$ sledi da je $B_4^2 = B_4$. Dakle, matrica P je oblika:

$$P = U \begin{bmatrix} (c_1+c_2)I_r & 0 \\ 0 & c_1 I_{n-r} + c_3 B_4 \end{bmatrix} U^{-1}.$$

Očigledno je P invertibilna ako i samo ako je $c_1 + c_2 \neq 0$ i $c_1 + c_3 \neq 0$. Ovim je dokazano tvrđenje (*i*). Dokažimo (*ii*). Kako je $P^2 = U \begin{bmatrix} (c_1+c_2)^2 I_r & 0 \\ 0 & (c_1 I_{n-r} + c_3 B_4)^2 \end{bmatrix} U^{-1}$, sledi da je $(c_1 + c_2)^2 I_r = I_r$ ako i samo ako je $c_1 + c_2 = \pm 1$. Takođe, na osnovu Teoreme 1.5.3 sledi da je matrica $c_1 I_{n-r} + c_3 B_4$ involutivna ako i smo ako je $(c_1, c_3) = (1, -2)$ ili $(c_1, c_3) = (-1, 2)$. Dakle, P je involutivna ako i samo ako je $(c_1, c_2, c_3) = (1, -2, -2)$ ili $(c_1, c_2, c_3) = (-1, 2, 2)$. $\square$

Primer 5.2.4

Idempotente matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ zadovoljavaju uslov $(A+B)^2 = A + B$. Matrica

$$c_1 I_3 + c_2 A + c_3 B = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & c_1 + c_3 \end{bmatrix}$$

je invertibilna ako i samo ako je $c_1 + c_2 \neq 0$ i $c_1 + c_3 \neq 0$, gde je $c_1, c_2, c_3 \in C \setminus \{0\}$. Takođe, $c_1 I_3 + c_2 A + c_3 B$ je involutivna ako i samo ako je $(c_1, c_2, c_3) = (1, -2, -2)$ ili $(c_1, c_2, c_3) = (-1, 2, 2)$.

Tvrđenje 5.2.1 *Ni za jedan izbor konstanti* c_i, $c_i \in C \setminus \{0\}$, $i = \overline{1,3}$, *matrica* P *oblika* (5.2) *nije involutivna ako su* $A, B \in C^{n\times n}$ *idempotenti,* $A \neq B$ *i* $ABA = BAB$.

Dokaz: Neka su $A, B \in C_n^P$ oblika (1.1) i (5.3), redom. Uslov $ABA = BAB$ ekvivalentan je sa $B_1B_2 = B_3B_1 = B_3B_2 = 0$ i $B_1^2 = B_1$. Primenom uslova $B^2 = B$ sledi da je $B_2B_3 = 0$, $B_2B_4 = B_2$, $B_4B_3 = B_3$ i $B_4^2 = B_4$. Dakle, P^2 je oblika

$$P^2 = U \begin{bmatrix} ((c_1+c_2)I_r + c_3B_1)^2 & (2c_1+c_2+c_3)c_3B_2 \\ (2c_1+c_2+c_3)c_3B_3 & (c_1I_{n-r}+c_3B_4)^2 \end{bmatrix} U^{-1}.$$

Kako je $A \neq B$, nemoguće je da je $B_2 = 0 = B_3$, što povlači da je $2c_1+c_2+c_3 = 0$. Koristeći $2c_1+c_2+c_3 = 0$ i na osnovu Teoreme 1.5.3, dobija se da je matrica P involutivna ako i samo ako je $(c_1, c_2, c_3) = (1, 0, -2)$ ili $(c_1, c_2, c_3) = (-1, 0, 2)$. Kako je $c_2 \neq 0$, ne postoji situacija u kojoj je matrica P involutivna. $\square$

Primer 5.2.5

Idempotente matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ zadovoljavaju uslove $A \neq B$ i $ABA = BAB$. Ne postoji izbor konstanti c_i, $c_i \in C \setminus \{0\}$, $i = \overline{1,3}$ za koji je matrica

$$c_1I_4 + c_2A + c_3B = \begin{bmatrix} c_1+c_2+c_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_1+c_2 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & c_1+c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_1+c_3 \end{bmatrix}$$

involutivna.

Posledica 5.2.2 *Ni za jedan izbor konstanti* c_i, $c_i \in C \setminus \{0\}$, $i = \overline{1,3}$, *matrica* P *oblika* (5.2) *nije involutivna ako su* $A, B \in C^{n\times n}$ *idempotenti,* $A \neq B$ *i* $AB = BA$.

Dokaz: Ako je $AB = BA$, onda je $ABA = BAB$. Sada zaključak sledi na osnovu Teoreme 5.2.1. $\square$

Primer 5.2.6

Idempotente matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ zadovoljavaju uslove $A \neq B$ i $AB = BA$. Ne postoji izbor konstanti c_i, $c_i \in C \setminus \{0\}$, $i = \overline{1,3}$ za koji je matrica

$$c_1 I_3 + c_2 A + c_3 B = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 + c_3 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 + c_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_1 + c_3 \end{bmatrix}$$

involutivna.

Literatura

[1] J. K. Baksalary, Algebraic characterizations and statistical implications of the commutativity of orthogonal projectors, in: T. Pukkila, S. Puntanen (Eds), Proceedings of the Second International Tampare Conference in Statistics, University of Tampare, Tampare, Finland, 1987, pp. 113-142.

[2] O.M. Baksalary, Revisitation of generalized and hypergeneralized projectors, in: B. Schipp, W. Krämer(eds), Statistical Inference, Econometric Analysis and Matrix Algebra–Festschrift in Honour of Götz Trenkler, Springer, Heidelberg, 317-324, 2008.

[3] O.M. Baksalary, P. Kik, On commutativity of projectors Linear Algebra and its Applications 417 (2006) 3141.

[4] J. K. Baksalary, O. M. Baksalary, Commutativity of projectors, Linear Algebra and its Applications 341 (2002) 129142.

[5] J. K. Baksalary, O. M. Baksalary, Idempotency of linear combinations of two idempotent matrices, Linear Algebra Appl. 321 (2000) 3-7.

[6] J. K. Baksalary, O. M. Baksalary, Idempotency of linear combinations of an idempotent matrix and a tripotent matrix, Linear Algebra Appl. 354 (2002) 21-34.

[7] J. K. Baksalary and O. M. Baksalary, Nonsingularity of linear combinations of idempotent matrices, Linear Algebra Appl., 388 (2004) 25-29.

[8] J. K. Baksalary, O. M. Baksalary, On linear combinations of generalized projectors, Linear Algebra Appl., 388 (2004) 17-24.

[9] O. M. Baksalary, J. Benítez, Idempotency of linear combinations of three idempotent matrices, two of which are commuting, Linear Algebra Appl. 424 (2007) 320-337.

[10] J. K. Baksalary, X. Liu, An alternative characterization of generalized projectors, Linear Algebra Appl., 388 (2004) 61-65.

[11] J.K. Baksalary, O.M. Baksalary, X. Liu, Further properties of generalized and hypergeneralized projectors, Linear Algebra Appl. 389 (2004) 295–303.

[12] J.K. Baksalary, O.M. Baksalary, X. Liu, G. Trenkler, Further results on generalized and hypergeneralized projectors, Linear Algebra Appl. 429 (2008) 1038–1050.

[13] J. K. Baksalary and S.K.Mitra, Left-star and right-star partial orderings, Linear Algebra Appl., 149 (1991) 73-89.

[14] J.K. Baksalary, F. Pukelsheim, G.P.H. Styan, Some properties of matrix partial orderings, Linear Algebra Appl. 119 (1989) 57-85.

[15] J. K. Baksalary, O. M. Baksalary, T. Szulc, A property of orthogonal projectors, Lineal Algebra Appl. 354 (2002) 35-39.

[16] O.M. Baksalary, G. Trenkler, Characterizations of EP, normal and Hermitian matrices, Linear Multilinear Algebra 56 (2008) 299304.

[17] B. Baldessari, The distribution of a quadratic form of normal random variables, Ann. Math. Statist. 38 (1967) 17001704.

[18] C.S. Ballantine, Products of EP matrices, Linear Algebra Appl. 12 (1975) 257267.

[19] T.S. Baskett, I.J. Katz, Theorems on products of EPr matrices, Linear Algebra Appl. 2 (1969) 87103.

[20] A. Ben-Israel and T.N.E. Greville, Generalized Inverses, Theory and Applications, Wiley, New York, 1974.

[21] Ben-Israel, T.N.E. Greville, Generalized inverses: Theory and Applications, second ed., Springer-Verlag, New York, 2003.

[22] J. Benítez, Moore-Penrose inverses and commuting elements of C*-algebras, J. Math. Anal. Appl., 345 (2008) 766-770.

[23] J. Benitez, X. Liu, and J. Zhong, Some results on matrix partial orderings and reverse order law, Electron. J. Linear Algebra, 20 (2010) 254-273.

[24] J. Benítez, N. Thome, Characterizations and linear combinations of k-generalized projectors, Linear Algebra Appl., 410 (2005) 150-159.

[25] J. Benítez, N. Thome, {k}-Group Periodic Matrices, SIAM. J. Matrix Anal. Appl., 28 (2006) 9-25.

[26] A. Berman, Nonnegative Matrices which are Equal to Their Generalized Inverse, Linear Algebra Appl., 9 (1974) 261-265.

[27] D. S. Bernstein, Matrix Mathematics: Theory Facts, and Formulas, 2nd ed., Princeton University Press, Princeton, 2009.

[28] S. L. Campbell and C. D. Meyer Jr. Generalized Inverses of Linear Transformations, Pitman, London, (1979).

[29] S. L. Campbell, C. D. Meyer, Generalized Inverses of Linear Transformations, SIAM, 2009.

[30] S. Cheng, Y. Tian, Two sets of new characterizations for normal and EP matrices, Linear Algebra Appl., 375 (2003) 181-195.

[31] C. Coll, N. Thome, Oblique projectors and group involutory matrices, Applied Mathematics and Computation 140 (2003) 517522.

[32] D.S. Cvetkovic-Ilic, C. Deng, Some results on the Drazin invertibility and idempotents, Journal of Math. Anal. Appl. 359(2) (2009) 731-738.

[33] C.Deng, D.S. Cvetkovic-Ilic, Y. Wei, Properties of the combinations of commutative idempotents, Linar Algebra Appl., 436 (2012) 202221.

[34] C.Deng, D.S. Cvetkovic-Ilic, Y. Wei, On invertibility of combinations of k -potent operators, Linar Algebra Appl., 437(1) (2012) 376-387.

[35] C. Y. Deng, Q. H. Li and H. K. Du, Generalized n-idempotents and Hyper-generalized n-idempotents, Northeast. Math. J. 22(4) (2006) 387-394.

[36] D. S. Djordjević and V. Rakočević, Lectures on generalized inverses, Faculty of Sciences and Mathematics, University of Niš, Niš, 2008.

[37] D. S. Djordjević, Characterizations of normal, hyponormal and EP operators, J. Math. Anal. Appl. 329 (2007) 11811190.

[38] D. S. Djordjević, J.J. Koliha, Characterizing Hermitian, normal and EP operators, Filomat 21 (2007) 3954.

[39] D. S. Djordjević, J.J. Koliha, I. Straškraba, Factorization of EP elements in C^* -algebras, Linear Multilinear Algebra 57 (2009) 587 594.

[40] M. Djurić, Generalisani inverzi i primene, Magistarska teza, Niš, 1987.

[41] M. P. Drazin, Pseudo-inverses in associative rings and semigroups, The American Mathematical Monthly 65 (1958), 506-514.

[42] M.P. Drazin, Natural structures on semigroups with involution, Bull. Amer. Math. Soc. 84 (1978) 139-141.

[43] H.K. Du, Y. Li, The spectral characterization of generalized projections, Lineal Algebra Appl. 400 (2005) 313-318.

[44] H. K. Du, W. F. Wang, Y. T. Duan, Path connectivity of k-generalized projectors, Linear Algebra Appl., 422 (2007) 712-720.

[45] L. Elsner, Kh.D. Ikramov, Normal matrices: an update, Linear Algebra Appl. 285 (1998) 291303.

[46] I. Fredholm, Sur une classe dequationes fonctionelles, Acta Math. 27 (1903), 365-390.

[47] G.H. Golub, C.F. Van Loan, Matrix Computations, second ed., John Hopkins University Press, Baltimore, MD, 1989.

[48] F.A. Graybill, Introduction to Matrices with Applications in Statistics, Wadsworth Publishing Company Inc., California, 1969.

[49] T.N.E. Greville, Note on the generalized inverse of a matrix product, SIAM Rev. 8 (1966), 518-521.

[50] R. Grone, C. R. Johnson, E. M. Sa, H. Wolkowicz, Normal matrices, Linear Algebra Appl., 87 (1987) 213-225.

[51] J. Groß, Nonsingularity ofthe difference of two oblique projectors, SIAM Journal on Matrix Application 21 (2) (1999) 390395.

[52] J. Groß, J. Hauke, A. Markiewicz, Partial ordering, preorderings, and the polar decomposition of matrices, Linear Algebra Appl. 289 (1999) 161-168.

[53] J. Groß, G. Trenkler, Generalized and Hypergeneralized Projectors, Linear Algebra Appl. 264 (1997) 463-474 .

[54] R. E. Hartwig, A note on the partial ordering of positive semidefinite matrices, Linear Multilinear Algebra, 6 (1978) 223-226.

[55] R. E. Hartwig, How to partially order regular elements, Math. Japon., 25 (1980) 1-13.

[56] R.E. Hartwig, EP perturbations, Sankhy a, Ser. A 56 (1994) 347357.

[57] R. E. Hartwig, K. Spindelböck, Matrices for which A^* and $A^\dagger$ commute, Linear and Multilinear Algebra 14 (1984) 241-256.

[58] R.E. Hartwig, K. Spindelböck, Partial isometries, contractions and EP matrices, Linear and Multilinear Algebra 13 (1983) 295310.

[59] R. E. Hartwig, G. P. H. Styan, On some characterizations of the "star" partial ordering for matrices and rank subtractivity, Linear Algebra Appl. 82 (1986) 145-161.

[60] R.E. Hartwig, I.J. Katz, On products of EP matrices, Linear Algebra Appl. 252 (1997) 338345.

[61] R.E. Hartwig, G.H.P. Styan, Partially ordered idempotent matrices, in: T. Pukkila, S. Puntanen (Eds.), Proceedings of the Second International Tampe Conference in Statistics, University of Tampare, Tampare, Finland, 1987, pp. 361-383.

[62] A. Hernandez, M. Lattanzi, N. Thome, F. Urquiza, The star partial order and the eigenprojection at 0 on EP matrices, Appl. Math. Comput., 218 (2012) 10669-10678.

[63] M.R. Hestenes, Relative Hermitian matrices, Pacific J. Math., 11 (1961) 225-245.

[64] R.A. Horn, C.R. Johnson, Matrix analysis, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.

[65] W. A. Hurwitz, On the pseudo-resolvent to the kernel of an integral equation, Trans. Amer. Math. Soc. 13 (1912) 405-418.

[66] R. A. Horn, C. R. Johnson, Topics in Matrix Analysis, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1991.

[67] C.H. Hung, T. L. Markham, The Moore-Penrose inverse of a sum of matrices, J. Austral. Math. Soc. Ser. A 24 (1977) 385-392.

[68] I.J. Katz,Wiegmann type theorems for EPr matrices, Duke Math. J. 32 (1965) 423427.

[69] I.J. Katz, M.H. Pearl, On EPr matrices and normal EPr matrices, J. Res. Nat. Bur. Standards Sec. B 70 (1966) 4777.

[70] J.J. Koliha, D.S. Cvetkovic-Ilic, C. Deng, Generalized Drazin invertibility of combinations of idempotents, Linar Algebra Appl., 437(9) (2012) 2317-2324.

[71] J.J. Koliha, V. Rakočević, I. Straškraba, The difference and sum of projectors, Linear Algebra Appl. 388 (2004) 279-288.

[72] J.J. Koliha, V. Rakočević, The nullity and rank of linear combinations of idempotent matrices, Linear Algebra and its Applications 418 (2006) 1114.

[73] J.J. Koliha and V. Rakočević, Invertibility of the sum of idempotents, Linear Multilinear Algebra, 50 (2002) 285-292.

[74] J.J. Koliha and V. Rakočević, Invertibility of the diference of idempotents, Linear Multilinear Algebra, 51 (2003) 97-110.

[75] J.J. Koliha and V. Rakočević, On the norms of idempotents in C^*algebras, Rocky Mountain J. Math, 34 (2004) 685-697.

[76] J.J. Koliha and V. Rakočević, The nullity and rank of linear combinations of idempotent matrices , Linear Algebra and its Applications, 418 (2006) 11-14.

[77] J.J. Koliha and V. Rakočević, Stability theorems for linear combinations of idempotents, Integral Equations Operator Theory, 58 (2007) 597-601.

[78] J.J. Koliha and V. Rakočević, Range projections and the Moore-Penrose inverse in rings with involution , Linear and Multilinear Algebra, 55 (2007) 103-112.

[79] C. G. Khatri, Powers of matrices and idempotency, Linear Algebra Appl., 33 (1980) 57-65.

[80] C. E. Langenhop, On generalized inverses of matrices, SIAM J. Appl. Math. 15 (1967) 12391246.

[81] L. Lebtahi, N. Thome, A note on k-generalized projections, Linear Algebra Appl., 420 (2007) 572-575.

[82] X. Liu, L. Wu, and J. Benítez, On the group inverse of linear combinations of two group invertible matrices, Electronic J. Linear Algebra, 22 (2011) 490-503.

[83] C.D. Meyer, Matrix Analysis and Applied Linear Algebra, SIAM, Philadelphia, PA, (2000).

[84] C.D. Meyer, Some remarks on EPr matrices and generalized inverses, Linear Algebra Appl. 3 (1970) 275278.

[85] R. D. Milne, An oblique matrix pseudoinverse, SIAM J. Appl. Math. 16 (1968) 931944.

[86] S.K. Mitra, On group inverses and the sharp order, Linear Algebra Appl., 92 (1987) 17-37.

[87] E. H. Moore, On the reciprocal of the general algebraic matrix (Abstract), Bull. Amer. Math. Soc. 26 (1920), 394-395.

[88] D. Mosić, D. S. Djordjević, Partial isometries and EP elements in rings with involution, Electron. J. Linear Algebra 18 (2009) 761772.

[89] D. Mosić, D. S. Djordjević, J.J. Koliha, EP elements in rings, Linear Algebra Appl. 431 (2009) 527535.

[90] K.S.S.Nambooripad, The natural partial order on a regular semigroup, Proc. Edinburgh Math., Soc. (2) 23 (1980) 249-260.

[91] H. Özdemir, A. Y. Özban, On idempotency of linear combinations of idempotent matrices, Appl. Math.Comput. 159 (2004) 439-448.

[92] H. Özdemir, M. Sarduvan, A. Y. Özban, and N. Güler, On idempotency and tripotency of linear combinations of two commuting tripotent matrices, Appl. Math.Comput. 207 (2009) 197-201.

[93] M. Sarduvan, H. Özdemir, On linear combinations of two tripotent, idempotent, and involutive matrices, Appl. Math.Comput. 200 (2008) 401-406.

[94] M.Pearl, On normal and EP matrices, Michigan Math.J., 6 (1959) 1-5.

[95] M. Pearl, On normal EPr matrices, Michigan Math. J. 8 (1961) 3337.

[96] R. Penrose, A generalized inverse for matrices, Proc. Cambridge Philos. Soc. 51 (1955), 406413.

[97] R. Penrose, On best approximate solutions of linear matrix equations, Proc. Cambridge Philos. Soc. 52 (1956), 1719.

[98] V. Rakočević, Funkcionalna analiza, Naučna Knjiga, Beograd, 1994.

[99] V. Rakočević, Moore-Penrose inverse in Banach algebras. Proc. Roy. Irish Acad. Sect. A 88 (1988) no. 1, 5760.

[100] V. Rakočević, On continuity of the MoorePenrose and Drazin inverses, Mat. Vesnik, 49 (1997) 163-172.

[101] V. Rakočević, On the continuity of the Moore-Penrose inverse in Banach algebras. Facta Univ. Ser. Math. Inform. (1991) no. 6 133138.

[102] V. Rakočević, On the continuity of the Moore-Penrose inverse in C^*-algebras. Math. Montisnigri 2 (1993) 8992.

[103] V. Rakočević, On continuity of the MoorePenrose and Drazin inverses, Mat. Vesnik, 49 (1997) 163-172.

[104] V. Rakočević, Continuity of the Drazin inverse, J. Operator Theory, 41 (1999) 55-68.

[105] V. Rakočević, On the norm of idempotent operators in a Hilbert space, Amer. Math. Monthly, 107 (2000) 748-750.

[106] V. Rakočević and Yimin Wei, The Wweighted Drazin inverse, Linear Algebra Appl., 350 (2002) 25-39.

[107] C.R. Rao, S.K. Mitra, Generalized Inverse of Matrices and Its Applications, John Wiley, New York, 1971.

[108] D. W. Robinson, On the genralized inverse of an arbitrary linear transformation, Amer. Math. Monthly 69 (1962) 412416.

[109] G.A.F. Seber, Linear Regression Analysis, John Wiley, New York, 1977.

[110] G.W. Stewart, A note on generalized and hypergeneralized projectors, Linear Algebra Appl. 412 (2006) 408-411.

[111] Y. Tian, Problem 26-4 Commutativity of EP matrices, IMAGE The Bull. Internat. Linear Algebra Soc. 26 (2001) 25.

[112] Y. Tian, G.P.H. Styan, Rank equalities for idempotent and involutory matrices, Linear Algebra Appl. 335 (2001) 101117.

[113] Y. Tian, H. Wang, Characterizations of EP matrices and weighted-EP matrices, Linear Algebra Appl. 434 (2011) 1295-1318.

[114] Y. Tian, G. P. H. Styanb, Rank equalities for idempotent matrices with applications, Journal of Computational and Applied Mathematics 191 (2006) 7797.

[115] M.Tošić and D. S. Cvetković-Ilić, The invertibility of the difference and the sum of commuting generalized and hypergeneralized projectors, Linear Multilinear Algebra, 61 (2013) 482-493.

[116] M.Tošić, D. S. Cvetković-Ilić, and C. Deng, The Moore-Penrose inverse of a linear combination of commuting generalized and hypergeneralized projectors, Electronic J. Linear Algebra, 22 (2011) 1129-1137.

[117] M.Tošić, D. S. Cvetković-Ilić, The invertibility of two matrices and partial orderings, Appl. Math. Comput., 218 (2012) 4651-4657.

[118] M.Tošić, Characterizations and the Moore-Penrose inverse of hypergeneralized k-projectors, Bulletin of the Korean Mathematical Society, accepted.

[119] M.Tošić, On linear combinations of commuting involutive and idempotent matrices, Appl. Math. Comput., submited.

[120] L. Xiaoji, Z. Jin, J. B. López, Some results on partial ordering and reverse order law of elements of C^*-algebras. J. Math. Anal. Appl., (2010) 370: 295-301.

[121] G. Wang, Y. Wei, and S. Qiao, Generalized inverses: theory and applications, Science Press, Beijing/New York, 2004.

[122] E.T.Wong, Does the generalized inverse of A commute with A^*?, Math. Mag. 59 (1986) 230232.

[123] F. Zhang, Matrix Theory: Basic Results and Techniques, Springer, New York, 1999.

ПРИРОДНО - МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
НИШ

КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА

Редни број, **РБР**:	
Идентификациони број, **ИБР**:	
Тип документације, **ТД**:	монографска
Тип записа, **ТЗ**:	текстуални
Врста рада, **ВР**:	докторска дисертација
Аутор, **АУ**:	Марина Тошић
Ментор, **МН**:	Драгана С. Цветковић-Илић
Наслов рада, **НР**:	ГЕНЕРАЛИСАНИ И ХИПЕРГЕНЕРАЛИСНИ ПРОЈЕКТОРИ
Језик публикације, **ЈП**:	српски
Језик извода, **ЈИ**:	српски
Земља публиковања, **ЗП**:	Србија
Уже географско подручје, **УГП**:	Србија
Година, **ГО**:	2013.
Издавач, **ИЗ**:	ауторски репринт
Место и адреса, **МА**:	Ниш, Вишеградска 33.
Физички опис рада, **ФО**: (поглавља/страна/ цитата/табела/слика/графика/прилога)	Iv+103 стр.
Научна област, **НО**:	математика
Научна дисциплина, **НД**:	математичка анализа
Предметна одредница/Кључне речи, **ПО**:	функционална анализа
УДК	517.98 (043.3)
Чува се, **ЧУ**:	библиотека
Важна напомена, **ВН**:	
Извод, **ИЗ**:	У овој дисертацији изложени су оргинални резултати у вези са генералисаним и хипергенералисаним пројекторима. Испитивана је инвертибилност линеарне комбинације генералисаних и хипергенералисаних пројектора и дат је облик Moore-Penrose-овог инверза линеарне комбинације генералисаних и хипергенералисаних пројектора. Такође, испитивана је инвертибилност линеарне комбинације две матрице повезане парцијалним уређењем. Дати су услови под којима је линеарна комбинација инволутивних матрица к-потент и линеарна комбинација идемпотената несингуларана или инволутивна матрица.
Датум прихватања теме, **ДП**:	14.05.2012.
Датум одбране, **ДО**:	
Чланови комисије, **КО**: Председник:	
Члан:	
Члан, ментор:	

Прилог 4/2

ПРИРОДНО - МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
НИШ

KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number, **ANO**:	
Identification number, **INO**:	
Document type, **DT**:	monograph
Type of record, **TR**:	textual
Contents code, **CC**:	doctoral dissertation
Author, **AU**:	Marina Tošić
Mentor, **MN**:	Dragana S. Cvetković-Ilić
Title, **TI**:	GENERALIZED AND HYPERGENERALIZED PROJECTORS
Language of text, **LT**:	Serbian
Language of abstract, **LA**:	Serbian
Country of publication, **CP**:	Serbia
Locality of publication, **LP**:	Serbia
Publication year, **PY**:	2013
Publisher, **PB**:	author's reprint
Publication place, **PP**:	Niš, Višegradska 33.
Physical description, **PD**: (chapters/pages/ref./tables/pictures/graphs/appendixes)	Iv+103 p.
Scientific field, **SF**:	mathematics
Scientific discipline, **SD**:	mathematical analysis
Subject/Key words, **S/KW**:	functional analysis
UC	517.98 (043.3)
Holding data, **HD**:	library
Note, **N**:	
Abstract, **AB**:	In this dissertation, some original results related to generalized and hypergeneralized projectors are presented. Invertibility of the linear combination of generalized and hypergeneralized projectors are investigated and the form of the Moore-Penrose inverse of the linear combination of the generalized and hypergeneralized projectors are given. Also, invertibility of the linear combinations of two matrices related to the partial orderings are investigated. The conditions under which the linear combination of involutive matrices is k-potent and the linear combination of idempotent matrices is a nonsingular or an involutive matrix are presented.
Accepted by the Scientific Board on, **ASB**:	14.05.2012.
Defended on, **DE**:	
Defended Board, **DB**: President:	
Member:	
Member, Mentor:	