UNIVERZITET U NIŠU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

Predrag M. Popović

MODELOVANJE DVODIMENZIONALNIH AUTOREGRESIVNIH VREMENSKIH NIZOVA SA NENEGATIVNIM CELOBROJNIM VREDNOSTIMA

Doktorska disertacija

Niš, 2015.

UNIVERSITY OF NIŠ
FACULTY OF SCIENCES AND MATHEMATICS

Predrag M. Popović

MODELLING BIVARIATE AUTOREGRESSIVE TIME SERIES WITH NONNEGATIVE INTEGER VALUES

PhD thesis

NIŠ, 2015.

Komisija za odbranu doktorske disertacije

Mentor:	dr Miroslav M. Ristić redovni profesor Prirodno-matematički fakultet Univerzitet u Nišu
Član komisije:	dr Zagorka S. Lozanov-Crvenković redovni profesor Prirodno-matematički fakultet Univerzitet u Novom Sadu
Član komisije:	dr Miomir S. Stanković redovni profesor Fakultet zaštite na radu Univerzitet u Nišu
Član komisije:	dr Aleksandar S. Nastić docent Prirodno-matematički fakultet Univerzitet u Nišu

Datum odbrane:______________

Прилог 4/1

ПРИРОДНО - МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
НИШ

КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА

Редни број, **РБР**:	
Идентификациони број, **ИБР**:	
Тип документације, **ТД**:	монографска
Тип записа, **ТЗ**:	текстуални / графички
Врста рада, **ВР**:	докторска дисертација
Аутор, **АУ**:	Предраг М. Поповић
Ментор, **МН**:	Мирослав М. Ристић
Наслов рада, **НР**:	Моделовање дводимензионалних ауторегресивних временских низова са ненегативним целобројним вредностима
Језик публикације, **ЈП**:	српски
Језик извода, **ЈИ**:	енглески
Земља публиковања, **ЗП**:	Србија
Уже географско подручје, **УГП**:	Србија
Година, **ГО**:	2015.
Издавач, **ИЗ**:	ауторски репринт
Место и адреса, **МА**:	Ниш, Вишеградска 33.
Физички опис рада, **ФО**: (поглавља/страна/ цитата/табела/слика/графика/прилога)	148 стр., 5 поглавља, графички прикази и табеле
Научна област, **НО**:	математика
Научна дисциплина, **НД**:	статистика случајних процеса
Предметна одредница/Кључне речи, **ПО**:	Дводимензионални INAR модели, биномни тининг, негативни биномни тининг, оцењивање параметара, анализа грешке предвиђања, маргиналне расподеле: Пуасонова, геометријска
УДК	517.246.8
Чува се, **ЧУ**:	библиотека
Важна напомена, **ВН**:	
Извод, **ИЗ**:	Дефинисани су нови дводимензионални INAR(1) модели. Модели су базирани како на биномном тако и на негативном биномном тининг оператору. Бројачки низови који фигуришу у моделима састављени су од међусобно независних случајних променљивих, независних и од елемената других бројачких низова. Коефицијенти модела су случајне променљиве. Зависност између низова дефинисана је преко процеса преживљавања или преко иновационог процеса. Одређене су најзначајније статистичке особине модела. Представљене су методе за оцењивање параметара модела, при чему је доказана и асимптотска расподела добијених оцена. Све методе су тестиране на симулираном скупу података. За сваки модел разматрана је примена на стварним подацима.
Датум прихватања теме, **ДП**:	24.11.2014.
Датум одбране, **ДО**:	
Чланови комисије, **КО**: Председник:	
Члан:	
Члан:	
Члан, ментор:	

Образац Q4.09.13 - Издање 1

ПРИРОДНО - МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
НИШ

KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number, **ANO**:	
Identification number, **INO**:	
Document type, **DT**:	monograph
Type of record, **TR**:	textual / graphic
Contents code, **CC**:	doctoral dissertation
Author, **AU**:	Predrag M. Popović
Mentor, **MN**:	Miroslav M. Ristić
Title, **TI**:	Modelling bivariate autoregressive time series with nonnegative integer values
Language of text, **LT**:	Serbian
Language of abstract, **LA**:	English
Country of publication, **CP**:	Serbia
Locality of publication, **LP**:	Serbia
Publication year, **PY**:	2015.
Publisher, **PB**:	author's reprint
Publication place, **PP**:	Niš, Višegradska 33.
Physical description, **PD**: (chapters/pages/ref./tables/pictures/graphs/appendixes)	148 p., 5 chapters, graphic representations and tables
Scientific field, **SF**:	mathematics
Scientific discipline, **SD**:	statistics for stochastic processes
Subject/Key words, **S/KW**:	Bivariate INAR(1) models, binomial thinning operator, negative binomial thinning operator, parameters estimation, residual analysis, marginal distributions: Poisson, geometrical
UC	517.246.8
Holding data, **HD**:	Library
Note, **N**:	
Abstract, **AB**:	New bivariate INAR(1) models are defined. The models are based on binomial as well as negative binomial thinning operator. The counting series that figures in these models are composed of mutually independent random variables, also independent from elements of the other counting series. The coefficients of the models are random variables. Dependences between series are achieved through the survival or innovation processes. The most significant statistical properties of the models are derived. Some methods for models' parameters estimation are presented, where also the asymptotic distribution is proved. All methods are tested on simulated data sets. For each model some applications on real data are considered.
Accepted by the Scientific Board on, **ASB**:	24.11.2014.
Defended on, **DE**:	
Defended Board, **DB**: President:	
Member:	
Member:	
Member, Mentor:	

Predgovor

Disertacija se bavi proučavanjem dvodimenzionalnih autoregresivnih modela za nenegativne celobrojne vremenske nizove. Pored same definicije dokazana je i egzistencija uvedenih modela, a razmatrane su i njihove najbitnije statističke osobine. Predstavljeno je više pristupa za ocenjivanje nepoznatih parametara i navedene su i obrazložene prednosti i mane svakog od njih. Praktični aspekt svakog modela razmatran je na stvarnim podacima. Disertacija se sastoji iz četiri glave, a na kraju je dat zaključak obrađenih tema.

Motivacija za uvođenje ovakvih modela diskutovana je u prvoj glavi. Zatim, je dat pregled dosadašnjih rezultata iz ove oblasti i na kraju su navedeni osnovni alati koji će biti korišćeni u daljoj diskusiji.

U drugoj glavi uvode se novi dvodimenzionalni model kod koga je zavisnost između nizova ostvarena kroz autoregresivnu komponentu modela. Model je definisan preko slučajnih koeficijenata i bazira se na brojačkim nizovima sa Bernulijevom raspodelom. Detaljno su diskutovane metode za ocenjivanje nepoznatih parametara modela, a određene su i raspodele dobijenih ocena. Zatim je definisan još jedan dvodimenzionalni model sa slučajnim koeficijentima kod koga figurišu brojački nizovi kako sa Bernulijevom tako i sa geometrijskom raspodelom. Za ovakav model dat je novi pristup za ocenu greške predviđanja za jedan korak unapred. Rezultati iz ove glave objavljeni su u radu

- Nastić, A.S., Ristić, M.M. i Popović, P.M. (2014), 'Estimation in a bivariate integer-valued autoregressive process', *Communications in Statistics-Theory and Methods*, prihvaćen za štampu.

U trećoj glavi uvedena su dva nova dvodimenzionalna modela. Oni na neki način predstavljaju generalizaciju modela iz druge glave. Kod prvog modela izostavljena je pretpostavka o jednakosti marginalnih raspodela nizova. Nizovi su generisani istom raspodelom ali sa različitim parametrima, što je omogućilo modelovanje zavisnih nizova sa različitim srednjim vrednostima. Kod drugog modela svi brojački nizovi generisani su Bernulijevom raspodelom ali sa različitim parametrima. Na taj način omogućen je različit uticaj jednog i drugog niza na autoregresivnu komponentu modela. Rezultati ove glave objavljeni su u radovima

- Popović, P.M., Ristić, M.M. i Nastić, A.S. (2015), 'A geometric bivariate time series with different marginal parameters', *Statistical Papers*, doi:10.1007/s00362-015-0677-z, prihvaćen za štampu.

- Popović, P. M. (2015), 'A bivariate inar (1) model with different thinning parameters', *Statistical Papers*, doi: 10.1007/s00362-015-0667-1, prihvaćen za štampu.

Nešto drugačiji model razmatran je u četvrtoj glavi. Kod ovog dvodimenzionalnog modela izbegnuta je zavisnost autoregresivnih komponenti. Pored toga što su autoregresivne komponente nezavisne, one su definisane preko slučajnih promenljivih što omogućava da modelujemo nizove kod kojih autoregresija nije uvek prisutna. Rezultati ove glave objavljeni su u radu

- Popović, P. (2015), 'Random coefficient bivariate inar (1) process', *Facta Universitatis, Series: Mathematics and Informatics* **30**(3), 263–280.

Želeo bih da se zahvalim mentoru dr Miroslavu M. Ristiću, redovnom profesoru Prirodno-matematičkog fakulteta u Nišu, na velikoj pomoći, trudu i vremenu koje je uložio u pripremi ove disertacije, kao i za uvođenje u oblast celobrojnih nizova na kojima se zasnivalo moje istraživanje.

Članu komisije profesoru dr Aleksandru S. Nastiću, docentu Prirodno-matematičkog fakulteta u Nišu, dugujem veliku zahvalnost na stručnoj i moralnoj podršci, koja je bila od nemerljivog značaja.

Zahvalio bih se profesoru dr Miomiru S. Stankoviću, redovnom profesoru Fakulteta zaštite na radu u Nišu, na dragocenim savetima i bezrezervnoj podršci od samog početka mog naučnog rada.

Zahvaljujem se profesorki dr Zagorki S. Lozanov-Crvenković, redovnom profesoru Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu, na srdačnoj podršci i pažnji iskazanoj tokom mog istraživačkog rada.

Ogromnu zahvalnost dugujem svojim roditeljima i supruzi Andrei na podršci tokom svih ovih godina i na razumevanju za sve moje promene raspoloženja.

Sadržaj

Glava 1

Uvod

Celobrojni vremenski nizovi predstavljaju niz opservacija celobrojnih podataka u jednakim vremenskim intervalima. Modelovanje i utvrđivanje njihovih osobina je nešto što je predmet interesovanja mnogih. Saznanje o njihovim karakteristikama omogućava nam bolje razumevanje posmatranog procesa kao i procenu budućih događaja. Nenegativni celobrojni vremenski nizovi, koji će biti predmet istraživanja, pojavljuju se u brojnim oblastima. Neke od oblasti u kojima se mogu sresti su finansije (obim trgovanja na berzi), medicina (broj inficiranih osoba), kriminalistika (broj počinjenih krivičnih dela), telekomunikacije (broj poslatih poruka), biologija (broj jedinki neke vrste), kao i mnoge druge. Činjenica da se radi o malim celobrojnim vrednostima diskvalifikuje standardne modele prilagođene vremenskim nizovima sa realnim vrednostima. Takođe, kod nekih neprekidnih vremenskih nizova elementi se mogu klasifikovati u manji broj kategorija. Jedan od primera je dužina trajanja erupcije gejzira. Ukoliko erupcije klasifikujemo kao duge i kratke, vremenski niz možemo posmatrati kao celobrojni sa Bernulijevom raspodelom.

U prirodi se neretko dešava da su dva (celobrojna) vremenska niza zavisna. Uzmimo na primer broj počinjenih pljački i broj ukradenih vozila u nekom gradu. Počinioci ovih dela često su jedne iste osobe, pa bi posmatranjem samo jednog niza izgubili važne informacije o kriminalnim aktivnostima. Takođe, neki zajednički faktori utiču na obe aktivnosti. Ti faktori mogu biti nivo bezbednosti u gradu ili socijalni status stanovništva. Kako ovakvih primera iz raznih oblasti života ima puno, javlja se potreba za modelima višedimenzionalnih vremenskih nizova.

1.1 Pregled rada

Disertacija se bavi razvojem i istraživanjem dvodimenzionalnih modela za celobrojne nenegativne vremenske nizove. Modeli koji se izučavaju su autoregresivni modeli koji se po karakteristikama mogu svrstati u lance Markova prvog reda. Sastavljeni su od dve komponente. Prva komponenta je autoregresivni deo modela i opisuje broj elemenata nekog niza u trenutku t koji je proistekao iz elemenata niza u trenutku $t-1$. Ova komponenta se naziva proces preživljavanja (survival process). Proces preživljavanja definisan je preko tining operatora (o kojem će biti više reči u jednom od narednih poglavlja). Druga komponenta opisuje broj novih članova niza koji se javljaju u trenutku t pa se ova komponenta naziva inovacioni proces (innovation process). Pored statističkih osobina i same strukture modela izučavaće se i razne metode za ocenjivanje nepoznatih parametara.

Struktura disertacije je sledeća. U drugoj glavi razmatraju se modeli sa jednakim marginalnim raspodelama. Predstavljeni su modeli sa negativnim binomnim tining operatorom i geometrijskom marginalnom raspodelom, binomnim tining operatorom i Puasonovom marginalnom raspodelom i kombinovani model sa binomnim i negativnim binomnim tining operatorom i geometrijskom marginalnom raspodelom. Izučavane su statističke osobine modela, kao i metode za ocenjivanje nepoznatih parametara modela. Asimptotske osobine ocena nepoznatih parametara su takođe predmet istraživanja. Motivacija za uvođenje svakog modela podržana je primenom na stvarnim podacima.

Uopštavanje modela uvodi se u trećoj glavi. Najpre je razmatran model kod koga su binomni tining operatori definisani sa različitim koeficijentima, što omogućava da brojački nizovi budu generisani raspodelama sa različitim parametrima. Model je baziran na binomnom tining operatoru i geometrijskim marginalnim raspodelama. Nakon toga biće istraživan model sa različitim geometrijskim marginalnim raspodelama. Pored ispitivanja statističkih osobina, dokazana je i egzistencija ovakvih modela. Ova generalizacija doprinosi široj primeni modela što će takođe biti podržano primerima iz realnog života.

U četvrtoj glavi izučavani su modeli sa zavisnim inovacionim procesima pri čemu je zadržana stohastička struktura procesa preživljavanja. Inovacioni procesi ovih modela biće generisani dvodimenzionalnom Puasonovom i dvodimenzionalnom negativnom binomnom raspodelom.

U nastavku ove glave biće reči o operatorima koji se koriste kako bi se uvažila osobina celobrojnosti vremenskih nizova. Izložićemo osnovne pristupe modelovanju vremenskih nizova. Na kraju ćemo dati pregled dosadašnjih rezultata na polju modelovanja višedimenzionalnih vremenskih nizova.

1.2 Tining operator

Jedan od najpopularnijih pristupa modelovanju vremenskih nizova jeste upotreba ARIMA (Autoregressive integrated moving average) modela. Model su definisali Box i Jenkins krajem šezdesetih godina prošlog veka. Upotreba ovog modela kod celobrojnih vremenskih nizova opravdana je samo u slučaju da posmatrani vremenski niz ima dovoljno veliku srednju vrednost, te se može raspodela vremenskog niza aproksimirati normalnom raspodelom, a posmatrani vremenski niz se može smatrati za niz sa realnim vrednostima kod koga je izvršeno zaokruživanje izostavljanjem decimala. Opravdanje za ovakav pristup leži u činjenici da se raspodele diskretnog tipa, kao što su binomna, Puasonova, negativna binomna, mogu aproksimirati normalnom raspodelom kada je uzoračka sredina dovoljno velika (što često nije slučaj). Kako su ovakvi uslovi veoma restriktivni pojavila se potreba za razvojem alternativnih rešenja. Takođe, efikasnost ovakvih modela je prilično ograničena zbog uvedenih pretpostavki. Kasnije, nešto bolji rezultati dobijeni su pomoću lanaca Markova u Cox i Miller (1965) i MacDonald i Zucchini (1997), ali je problem kod njih bio veliki broj parametara.

U radovima Jacobs i Lewis (1978a) i Jacobs i Lewis (1978b) dat je još jedan pristup modelovanju celobrojnih vremenskih nizova. Autori su uveli diskretan autoregresivan model sa pokretnim sredinama. Ovakav model može da generiše stacionarni celobrojni vremenski niz sa bilo kojom pretpostavljenom marginalnom raspodelom. Međutim, kao što je i konstatovao McKenzie (2003), ovakvi vremenski nizovi teže da formiraju trajektorije koje su skoro konstantne. Kako je ovo redak slučaj kod stvarnih vremenskih nizova nastavljeno je traganje za alternativnim rešenjima.

Značajan korak u modelovanju celobrojnih vremenskih nizova učinjen je uvođenjem celobrojnih autoregresivnih modela (integer valued autoregressive model - INAR). Pristup koji nude INAR modeli potpuno je intuitivan i prati specifičnost celobrojnih vremenskih nizova. Autoregresivna komponenta INAR modela i-tog člana vremenskog niza, X_i, definiše se kao zbir slučajnih promenljivih $Y_1, Y_2, ..., Y_{X_i}$ sa Bernulijevom ili geometrijskom raspodelom. Ukoliko Y_i ima Bernulijevu raspodelu to elementi brojačkog niza $\{Y_i\}_{\overline{1,X_i}}$ uzimaju vrednosti 0 ili 1, pa kažemo da zbir tog niza predstavlja proces preživljavanja jedinki te vrste opserviranih u trenutku $i-1$. Operator koji definiše ovakvo ponašanje naziva se binomni tining operator. Ovaj operator uneo je ključnu promenu u ARIMA modele kako bi oni bili prolagođeni za celobrojne vremenske nizove. Definisali su ga Steutel i Van Harn (1979) baveći se izučavanjem dekompozicije i stabilnosti procesa. Za vremenski niz $\{X_t\}$ sa raspodelom definisanom na proširenom skupu prirodnih brojeva $\mathbb{N}_0$, gde je $\Phi_X(s)$ funkcija generatrisa verovatnoće, kažemo da je samorazgradiv ako važi

$$\Phi_X(s) = \Phi_X(1-\alpha(1-s))\Phi_\varepsilon(s),$$

gde je $|s| \leq 1$ i $\alpha \in (0,1)$. Vremenski niz $\{X_t\}$ može da se zapiše kao $X_t = \alpha \circ X_{t-1} + \varepsilon_t$. Slučajne promenljive X_t i X_{t-1} imaju istu raspodelu i još važi da je $\alpha \circ X_{t-1}$ nezavisno od ε_t. Operator $\circ$ naziva se binomni tining operator i definisan je kao

$$\alpha \circ X_t = \sum_{i=1}^{X_t} W_i, \tag{1.1}$$

gde je $P(W_i = 1) = 1 - P(W_i = 0) = \alpha$. Slučajne promenljive W_i su međusobno nezavisne i nezavisne su od vremenskog niza $\{X_t\}$.

U situaciji kada članovi brojačkog niza mogu da dovedu do generisanja novih jedinki koristi se brojački niz sa geometrijskom marginalnom raspodelom. Tining operator zasnovan na geometrijskom brojačkom nizu prvi put se javlja u radu Al-Osh i Aly (1992) gde je definisan kao

$$\alpha * X_t = \sum_{i=0}^{N(X_t)} G_i, \tag{1.2}$$

gde je za $X_t = x$, $N(x)$ binomna slučajna promenljiva sa parametrima x i μ, $\{G_i\}$ nezavisne slučajne promenljive sa geometrijskom raspodelom i parametrom $\alpha/(1+\alpha)$. Ristić, Bakouch i Nastić (2009) posmatrali su tining operator $\alpha * X_t = \sum_{i=1}^{X_t} G_i$, pri čemu slučajna promenljiva X_t ima geometrijsku raspodelu sa parametrom $\mu/(1+\mu)$, a $\{G_i\}$ su nezavisne jednako raspodeljene slučajne promenljive sa geometrijskom raspodelom i parametrom $\alpha/(1+\alpha)$. Ovaj operator poznat je kao negativni binomni tining operator.

Detaljna diskusija o osobinama ova dva osnovna tining operatora može se naći u Silva (2005) o binomnom, a u Nastić (2011) o negativnom binomnom tiningu. Modifikacija tining operatora izučavana je u mnogim radovima. Tako su Al-Osh i Alzaid (1991) uveli hipergeometrijiski tining operator, $n/N \diamond X$, gde za $X = x$ slučajna promenljiva $n/N \diamond x$ ima hipergeometrijsku raspodelu $H(N, x, n)$. Ovakav operator je potreban kad iz populacije veličine N od kojih je X članova sa posmatranim obeležjem, izvlačimo bez vraćanja uzorak obima n, pri čemu nas zanima samo broj članova sa posmatranim obeležjem koji su sadržani u uzorku. Kasnije su isti autori, Alzaid i Al-Osh (1993), uveli kvazi-binomni tining operator, gde slučajna promenljiva $\alpha_{\theta,\lambda} \circ x$ ima kvazi-binomnu raspodelu $QB(x, \alpha, \frac{\theta}{\lambda})$ gde su $x \in \mathbb{N}_0$, $\alpha \in (0,1)$, $|\theta| < 1$, $\lambda > 0$ i $\frac{x\theta}{\lambda} < \min(\alpha, 1-\alpha)$. Može se i dalje smatrati da slučajna promenljiva $\alpha_{\theta,\lambda} \circ X$ predstavlja broj "preživelih" jedinki od početnih X, samo je sada mehanizam selekcije komplikovaniji. Ovaj tining operator nam dozvoljava da ako je X slučajna promenljiva sa generalisanom Puasonovom raspodelom $GP(\lambda, \theta)$ tada $\alpha_{\theta,\lambda} \circ X$ ima generalisanu Puasonovu raspodelu $GP(\alpha\lambda, \theta)$ (pretpostavka je da su slučajne promenljive generisane tining operatorom nezavisne od X). Binomni tining operator kod koga je parametar α slučajna promenljiva nazvan je binomni tining sa slučajnim koeficijentima, a uveli su ga Zheng, Basawa i Datta (2007). Jung, Ronning i Tremayne (2005) su razmatrali beta-binomni tining operator, gde parametar α ima beta raspodelu sa parametrima β_1 i β_2, pa se ovakav operator može koristiti kod vremenskih nizova sa negativnom binomnom raspodelom. U ovom slučaju tining operator $\alpha \circ X$, za dato $X = x$, ima beta binomnu raspodelu sa parametrima x, β_1 i β_2. Beta-binomni tining operator može se kombinovati sa negativnom binomnom raspodelom. Tako, ako je X slučajna promenljiva sa negativnom binomnom raspodelom i parametrima n i p i α ima beta raspodelu sa parametrima β_1 i β_2, tada $\alpha \circ X$ ima negativnu binomnu raspodelu sa parametrima β_1 i p. Ideja za konstrukciju ovakvog tining operatora potekla je od McKenzie (1986) gde je autor izučavao diskretne vremenske nizove.

U ovoj disertaciji proučavaće se modeli bazirani na binomnom i na negativnom binomnom tining operatoru. Ukazaćemo na razloge za upotrebu jednog ili drugog operatora, dok ćemo na stvarnim podacima testirati opravdanost izbora između ovih operatora.

1.3 Glavni pristupi modelovanju celobrojnih vremenskih nizova

Dva su osnovna pristupa modelovanja celobrojnih vremenskih nizova. Prvi pristup zasniva se na definisanju modela na osnovu opservacija (observation-driven model) dok je drugi zasnovan na definisanju modela na osnovu parametara (parameter-driven model). Oba pristupa imaju za cilj da isprate autokorelaciju vremenskog niza i na neki način reprodukuju ARMA model.

1.3.1 Modeli definisani na osnovu opservacija

Prvi pristup (observation-driven model) definiše modele kod kojih se uslovna raspodela slučajne promenljive X_t, koja generiše posmatrani proces $\{X_t\}$, određuje na osnovu prethodnih opservacija $X_{t-1}, ..., X_1$. Kao takvi često se mogu svrstati u klasu procesa Markova. Veliku klasu ovih model čine modeli bazirani na tining operatoru. Početna istraživanja ovakvih modela mogu se naći u radovima McKenzie (1986), Al-Osh i Alzaid (1987), Al-Osh i Alzaid (1991), Al-Osh i Aly (1992), Du i Li (1991). Ovi modeli nastali su sa idejom da se Box i Jenkins-ov ARIMA model prilagodi celobrojnim vremenskim nizovima gde se umesto množenja koristi tining operator opisan u sekciji 1.2. Osnovni model definisali su, nezavisno, McKenzie (1986) i Al-Osh i Alzaid (1987) kao

$$X_t = \alpha \circ X_{t-1} + \varepsilon_t, \tag{1.3}$$

gde je $\alpha \in [0,1]$, $\alpha \circ X = \sum_{i=1}^{X} Y_i$ gde su Y_i nezavisne jednako raspodeljene slučajne promenljive sa Bernulijevom raspodelom i parametrom α, nezavisne od X. Vremenski niz $\{\varepsilon_t\}$ čine nekorelisane, nenegativne, celobrojne slučajne promenljive sa očekivanjem μ i disperzijom σ^2. Diskretizacija uvedena tining operatorom je logičan prelaz sa modela za vremenske nizove sa realnim vrednostima na modele za vremenske nizove sa celobrojnim vrednostima. Model dat jednačinom (1.3) je intutivan i ima jasnu interpretaciju, X_t je sačinjen od preostalih elemenata iz stanja $t-1$ plus ε_t novih elemenata nastalih u periodu između stanja $t-1$ i t. U skladu s tim za model (1.3) kažemo da je sačinjen od procesa preživljavanja i od inovacionog procesa. Model (1.3) modifikovan je i generalizovan u više pravaca. Tako su za vremenski niz $\{X_t\}$ posmatrane različite marginalne raspodele gde su Al-Osh i Alzaid (1987) izučavali Puasonovu, a McKenzie (1986) geometrijsku i negativnu binomnu raspodelu. Kako bi se omogućilo da proces preživljavanja i sam generiše nove jedinke uveden je i negativni binomni tining operator. Model zasnovan na negativnom binomnom tining operatoru uveli su Ristić, Bakouch i Nastić (2009) kao

$$X_t = \alpha * X_{t-1} + \varepsilon_t, \tag{1.4}$$

gde je $\alpha \in [0,1)$, $\alpha * X = \sum_{i=1}^{X} W_i$ gde su W_i nezavisne jednako raspodeljene slučajne promenljive sa geometrijskom raspodelom i parametrom $\alpha/(1+\alpha)$. Članovi vremenskog niza $\{\varepsilon_t\}$ su nezavisne, nenegativne, celobrojne slučajne promenljive, nezavisne od $\{W_i\}$. Takođe, X_s i ε_t su nezavisne slučajne promenljive za $s < t$. Posmatrani model, $\{X_t\}$, ima geometrijsku marginalnu raspodelu sa parametrom $\mu/(1+\mu)$.

Što se tiče same strukture modela, pored autoregresivne strukture, koja je data jednačinom (1.3), izučavani su još i modeli pokretnih sredina kao i ARMA modeli. Treba naglasiti da autoregresivni modeli kao i modeli pokretnih sredina za celobrojne vremenske nizove nisu u potpunosti analogni ARMA modelima Box-a i Jenkins-a već su ovakvi nazivi dati samo da skrenu pažnju da ovi modeli imaju autokorelacionu strukturu sličnu ARMA modelima. McKenzie (1986) je uveo modele koji pored autoregresivne imaju i komponentu pokretnih sredina. Model je analogan ARMA modelu Lawrance i Lewis (1980) kada se multiplikator zameni tining operatorom. Geometrijski ARMA(1,1) model ovog tipa dat je kao

$$\begin{aligned} X_t &= \beta \circ M_t + V_t W_{t-1}, \\ W_t &= \alpha \circ W_{t-1} + U_t M_t, \end{aligned}$$

gde su $\{M_t\}$, $\{U_t\}$ i $\{V_t\}$ nezavisni vremenski nizovi nezavisnih jednako raspodeljenih slučajnih promenljivih. Slučajna promenljiva M_t ima geometrijsku raspodelu sa parametrom θ, $Geom(\theta)$, a slučajne promenljive U_t i V_t Bernulijevu sa parametrima $1-\alpha$ i $1-\beta$ respektivno. Vremenski niz $\{W_t\}$ je autoregresivni proces reda jedan sa geometrijskom marginalnom raspodelom sa parametrom θ. Uz pretpostavku da je W_0 slučajna promenljiva sa geometrijskom raspodelom sa parametrom θ, tada i vremenski niz $\{X_t\}$ ima geometrijsku marginalnu raspodelu sa parametrom θ.

Dalja generalizacija strukture ovih modela ogleda se u uvođenju modela višeg reda, kao što su to uradili Alzaid i Al-Osh (1990) i Du i Li (1991) definišući autoregresivni model reda p. Dok su ova dva modela bazirana na binomnom tining operatoru, model reda p baziran na negativnom binomnom tining operatoru izučavali su Ristić i Nastić (2012) i Nastić, Ristić i

Bakouch (2012).

1.3.2 Modeli definisani na osnovu parametara

Drugi pristup (parameter driven models) se bazira na modelovanju posmatranog procesa pomoću skrivenog procesa. Kod ovih modela, posmatrani vremenski niz $\{Y_t\}$, definiše se preko skrivenog procesa tj. procesa parametara $\{\varepsilon_t\}$. Kako je raspodela posmatranog vremenskog niza određena procesom parametara to su elementi vremenskog niza $\{Y_t\}$ međusobno nezavisne slučajne promenljive kada je proces $\{\varepsilon_t\}$ poznat. Na primer, ako proces $\{\varepsilon_t\}$ ima Bernulijevu marginalnu raspodelu sa parametrom p možemo da definišemo proces $\{Y_t\}$ kao

$$Y_t|\varepsilon_t \stackrel{d}{=} \begin{cases} Geom(\alpha_1), & \text{za } \varepsilon_t = 1 \\ Geom(\alpha_2), & \text{za } \varepsilon_t = 0 \end{cases}$$

pri čemu za elemente vremenskog niza $\{\varepsilon_t\}$ ne važi da su međusobno nezavisni. Odavde vidimo da je proces parametara jedini izvor zavisnosti i autokorelisanosti vremenskog niza $\{Y_t\}$.

Log-linearni model ovog tipa za celobrojne vremenske nizove uveo je Zeger (1988). Posmatrani vremenski niz $\{Y_t\}$ modeluje se preko nezavisnog procesa $\{X_t\}$ i skrivenog procesa $\{\varepsilon_t\}$. Ideja za uvođenjem skrivenog procesa proistekla je iz činjenice da su elementi procesa $\{X_t\}$ neretko zavisni. Zeger (1988) je uveo model tako što je vremenski niz celobrojnih slučajnih promenljivih, $\{Y_t\}$, definisao pomoću skrivenog procesa $\{\varepsilon_t\}$, gde su uslovno očekivanje i disperzija elemenata posmatranog niza definisani kao funkcije od slučajnih promenljivih $\{X_t\}$ na sledeći način

$$E(Y_t|\varepsilon_t) = Var(Y_t|\varepsilon_t) = \exp(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{X}_t^{'})\varepsilon_t$$

pri čemu je $\boldsymbol{\beta}$ p-dimenzioni vektor parametara regresije slučajne promenljive Y_t na osnovu slučajnog vektora $\boldsymbol{X}_t = (X_1, \ldots, X_p)^{'}$. Uz pretpostavku da je proces $\{\varepsilon_t\}$ stacionaran sa momentima $E(\varepsilon_t) = 1$ i $Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+\tau}) = \sigma^2\rho_\varepsilon(\tau)$, gde su σ^2 i $\rho_\varepsilon(\tau)$ disperzija i koeficijent korelacije za korak τ, dobijaju se marginalni momenti vremenskog niza $\{Y_t\}$

$$\begin{aligned} \mu_{y_t} &= E(Y_t) = \exp(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{X}_t^{'}), \\ Var(Y_t) &= \mu_{y_t} + \sigma^2\mu_{y_t}^2, \\ Corr(Y_t, Y_{t+\tau}) &= \frac{\rho_\varepsilon(\tau)}{[(1+(\sigma^2\mu_t)^{-1})(1+(\sigma^2\mu_{t+\tau})^{-1})]^{1/2}}. \end{aligned}$$

Kako je $\sigma^2\mu_{y_t}^2$ uvek veće od nule, model je prilagođen problemu kada je količnik srednje vrednosti i disperzije procesa manji od jedan, što se razlikuje od standardnog Puasonovog log-linearnog modela.

Sličan model sa negativnom binomnom raspodelom prezentovali su Davis i Wu (2009). Više detalja o modelima koji su definisani preko pomoćnog procesa može se naći u knjizi MacDonald i Zucchini (1997).

1.4 INAR modeli višeg reda

Razvoj INAR modela ogledao se u izmenama tining operatora, uvođenju različitih marginalnih raspodela i promenama autokorelacione strukture. Vremenom se javila potreba za razvojem INAR modela višeg reda koji bi modelovali i zavisnost između vremenskih nizova. Zavisnost između vremenskih nizova može biti prikazana kroz proces preživljavanja, kroz inovacioni proces ili kroz oba ova procesa.

1.4.1 Višedimenzionalni modeli sa zavisnim procesima preživljavanja

Prvi višedimenzionalni model uveli su Du i Li (1991). Ideja je bila da konstruišu autoregresivni model reda p kao logičan nastavak INAR(1) model koji su uveli Al-Osh i Alzaid (1987). Du i Li (1991) su definisali slučajni vektor $\boldsymbol{X}_t = (X_{t-1}, ..., X_{t-r})'$, gde su elementi slučajnog vektora članovi celobrojnog vremenskog niza $\{X_t\}_{t=\overline{1,n}}$, i modelovali evoluciju slučajnog vektora $\boldsymbol{X}_t$ kao

$$\boldsymbol{X}_t = \boldsymbol{\mathcal{A}} \circ \boldsymbol{X}_{t-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t.$$

Matrica $\boldsymbol{\mathcal{A}}$, dimenzije $r \times r$, definisana je kao

$$\boldsymbol{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & ... & \alpha_{r-1} & \alpha_r \\ 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.5}$$

dok je $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ r-dimenzionalni slučajni vektor određen kao $\boldsymbol{\varepsilon_t} = (\varepsilon_t, 0, ..., 0)'$. Parametri α_i uzimaju vrednosti iz intervala $[0, 1]$. Vremenski niz $\{\varepsilon_t\}$ je niz međusobno nezavisnih jednako raspodeljenih, nenegativnih, celobrojnih slučajnih promenljivih. Model uveden na ovaj način nije bio prava generalizacija jednodimenzionalnog modela reda p ali je dat uvod u definisanje višedimenzionalnog modela. Ideju da se modeluje vremenski niz slučajnih vektora sa celobrojnim vrednostima nastavio je da izučava Latour (1997).

Latour (1997) uvodi generalizaciju tako što definiše MGINAR(p) (multivariate general INAR(p)) model kao $\boldsymbol{X}_t = \sum_{k=1}^{p} \boldsymbol{A}_k \circ \boldsymbol{X}_{t-k} + \boldsymbol{\varepsilon}_t$, gde je $\boldsymbol{A}_k = [\alpha_{i,j}^k]$ matrica dimenzije

$r \times r$, a $\{\boldsymbol{\varepsilon}_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ je niz nezavisnih, jednako raspodeljenih, nenegativnih celobrojnih slučajnih vektora sa konačnim očekivanjem i disperzijom. Za koeficijente $\alpha_{i,j}^k$ važi da su iz intervala $[0,1]$. Operatori $\{\alpha_{i,j}^k\circ\}_{i,j=\overline{1,r}}$ su međusobno nezavisni. Definisani su preko brojačkog niza $\{Y_t^{(i,j,k)}\}$ koji je nezavisan i jednako raspodeljen sa očekivanjem $\alpha_{i,j,k}$.

Za matricu $\boldsymbol{A}_k$, tining operator primenjen na slučajni vektor $\boldsymbol{X}_t$ definisan je kao

$$\boldsymbol{A}_k \circ \begin{bmatrix} X_{t-1} \\ \vdots \\ X_{t-r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^r \alpha_{1j}^k \circ X_{t-j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^r \alpha_{rj}^k \circ X_{t-j} \end{bmatrix}.$$

Lema 2.1 iz Latour (1997) daje nam sledeće osobine ovako definisanog binomnog tining operatora. Ako sa $\boldsymbol{A}$ označimo $r\times r$ matricu čiji su elementi $\alpha_{i,j}$, sa $\boldsymbol{B}$ matricu $r\times r$ čiji su elementi $\beta_{i,j}$, a $\boldsymbol{X}$ i $\boldsymbol{Y}$ r-dimenzionalni slučajni vektori, tada važe sledeće jednakosti:

$$E(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{A}E(\boldsymbol{X}) \tag{1.6}$$

$$E((\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{X})(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{X})') = diag(\boldsymbol{B}E(\boldsymbol{X})) + \boldsymbol{A}E(\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}')\boldsymbol{A}' \tag{1.7}$$

$$E((\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{X})(\boldsymbol{B}\circ\boldsymbol{Y})') = \boldsymbol{A}E(\boldsymbol{X}\boldsymbol{Y}')\boldsymbol{B}' \tag{1.8}$$

gde je brojački niz operatora $\boldsymbol{A}\circ$ nezavisan od brojačkog niza operatora $\boldsymbol{B}\circ$.

Da bi definisao MGINAR(1) model, Latour (1997) je uveo slučajne matrice dimenzije $p\times r$ kao $\boldsymbol{Y}_t = (\boldsymbol{X}_t, \boldsymbol{X}_{t-1}, ..., \boldsymbol{X}_{t-p+1})'$ i $\widetilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_t = (\boldsymbol{\varepsilon}_t, \boldsymbol{0}, ..., \boldsymbol{0})'$ i matricu koeficijenata dimenzije $p\times p$ kao

$$\boldsymbol{A}\circ = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1\circ & \boldsymbol{A}_2\circ & \dots & \boldsymbol{A}_{p-1}\circ & \boldsymbol{A}_p \\ \boldsymbol{I}\circ & \boldsymbol{0}\circ & \dots & \boldsymbol{0}\circ & \boldsymbol{0}\circ \\ \boldsymbol{0}\circ & \boldsymbol{I}\circ & \dots & \boldsymbol{0}\circ & \boldsymbol{0}\circ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{0}\circ & \boldsymbol{0}\circ & \dots & \boldsymbol{I}\circ & \boldsymbol{0}\circ \end{bmatrix}$$

i predstavio MGINAR(1) model jednačinom

$$\boldsymbol{Y}_t = \boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{Y}_{t-1} + \widetilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_t. \tag{1.9}$$

Binomni tining operator za jediničnu i nula matricu definisan je kao $\boldsymbol{I}\circ\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}$ i $\boldsymbol{0}\circ\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$. Treba uočiti da je model MGINAR(p) zapravo podvektor modela datog jednačinom (1.9), te će dalji fokus Latour (1997) staviti na jednačinu (1.9) pri određivanju statističkih osobina modela.

Latour (1997) je sa $\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{Y}}$ označio očekivanu vrednost slučajne matrice $\boldsymbol{Y}_t$, a sa $\boldsymbol{\mu}_{\widetilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}$ očekivanu vrednost slučajne matrice $\widetilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$. Tada je na osnovu jednačine (1.9) dobio

$$\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{Y}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{Y}} + \boldsymbol{\mu}_{\widetilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}. \tag{1.10}$$

Pokazao je da ako su sopstvene vrednosti matrica $\boldsymbol{A}$ unutar jediničnog kruga, tada je matrica $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ regularna, pa očekivanu vrednost procesa (1.9) možemo izračunati kao $\boldsymbol{\mu_Y}=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{\mu}_{\widetilde{\varepsilon}}$. Takođe, Latour (1997) je pokazao da je dovoljan uslov da jednačina (1.10) ima rešenje, da nijedna suma elemenata jedne vrste matrice $\boldsymbol{A}$ nije veća od jedan i da je bar jedna strogo manja od jedan.

Imajući u vidu da je $\{\boldsymbol{\varepsilon}_t\}$ niz nezavisnih jednako raspodeljenih slučajnih vektora, sa očekivanjem $\boldsymbol{\mu}_\varepsilon$ i disperzijom $\boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon$ određena je kovarijaciona struktura procesa (1.9). Za $k>1$ imamo da je kovarijaciona matrica procesa $\{\boldsymbol{Y}_t\}$ jednaka $\boldsymbol{\Gamma}(k)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Gamma}(k-1)=\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{\Gamma}(0)$. Gore pomenuta osobina (1.7) poslužiće nam da izračunamo disperziju procesa. Tako, računanjem disperzije leve i desne strane jednakosti (1.9) dobijamo $Var(\boldsymbol{Y}_t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Gamma}'(1)+diag(\boldsymbol{B}\boldsymbol{\mu_Y})+\boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon$. Dakle, kovarijaciona struktura MGINAR(1) procesa data je kao

$$\boldsymbol{\Gamma}(h)=\begin{cases}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Gamma}'(1)+diag(\boldsymbol{B}\boldsymbol{\mu_Y})+\boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon, & h=0\\ \boldsymbol{A}^h\boldsymbol{\Gamma}(0), & h\geq 1.\end{cases}\tag{1.11}$$

Na osnovu Brockwell i Davis (1991), Latour (1997) je izneo diskusiju u kojoj zaključuje da MGINAR(1) proces ima identičnu kovarijacionu strukturu kao i AR(1) proces. Kako navodi, MGINAR(1) proces se može zapisati kao $\boldsymbol{Y}_t-\boldsymbol{\mu_Y}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Y}_{t-1}-\boldsymbol{\mu_Y})+\boldsymbol{e}_t$ gde je $\boldsymbol{e}_t$ beli šum sa očekivanjem $E(\boldsymbol{e}_t)=\boldsymbol{0}$ i kovarijacionom matricom $\boldsymbol{\Sigma_e}=diag(\boldsymbol{B}\boldsymbol{\mu_Y})+\boldsymbol{\Sigma_\varepsilon}$. Sređivanjem ovog izraza dobija se

$$\boldsymbol{Y}_t=\boldsymbol{\mu_\varepsilon}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}_{t-1}+\boldsymbol{e}_t.\tag{1.12}$$

što je zapravo višedimenzionalni autoregresivni vremenski niz reda jedan. Latour (1997) je takođe dokazao i egzistenciju MGINAR(1) model kao i da je model konstruisan na ovaj način stacionaran i ergodičan.

Do istih zaključaka se došlo posmatranjem i MGINAR(p) procesa $\{\boldsymbol{X}_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$, gde Latour (1997) u posledici 4.1 navodi da pod pretpostavkom da matrica

$$\boldsymbol{\Gamma}^{\otimes}(0)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Gamma}(0) & \boldsymbol{\Gamma}(1) & \dots & \boldsymbol{\Gamma}(p-1)\\ \boldsymbol{\Gamma}(1)' & \boldsymbol{\Gamma}(0) & \dots & \boldsymbol{\Gamma}(p-2)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \boldsymbol{\Gamma}(p-1)' & \boldsymbol{\Gamma}(p-2)' & \dots & \boldsymbol{\Gamma}(0)\end{bmatrix}$$

ima inverznu matricu, sve nule polinoma $\boldsymbol{P}(z)=det(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_1z-\ldots-\boldsymbol{A}_{p-1}z^{p-1})$, $z\in\mathbb{C}$, su van jediničnog kruga i vremenski niz $\{\boldsymbol{X}_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ je uzrokovan višedimenzionalni AR(p) vremenski niz. ($\boldsymbol{\Gamma}(i)$ su $p\times p$ kovarijacione matrice procesa $\{\boldsymbol{X}_t\}$.)

Latour (1997) je ovim radom dao uvod u modelovanje višedimenzionalnih celobrojnih autoregresivnih vremenskih nizova. Odredio je kovarijacionu strukturu i dokazao egzistenciju procesa. Ovako uopšten model nije od velikog praktičnog značaja, te se javila potreba za uprošćavanjem strukture, kao i za uvođenjem pretpostavki o različitim marginalnim raspodelama procesa kako bi se model prilagodio konkretnom problemu. Modeli koji će se izučavati u ovoj disertaciji imaju sličnu strukturu kao predstavljeni MGINAR(1) model s tim što su modeli dvodimenzionalni i za koeficijente imaju slučajne promenljive.

Ovakav tip modela prvi put pominju Ristić, Nastić, Jayakumar i Bakouch (2012). Ideja je bila da se uvede model kod koga jedan vremenski niz evoluira pod uticajem svog prethodnog stanja sa verovatnoćom p i pod uticajem prethodnog stanja nekog drugog vremenskog niza sa verovatnoćom $1-p$. Model je zasnovan na negativnom binomnom tining operatoru i ima geometrijsku marginalnu raspodelu sa parametrom $\mu/(1+\mu)$, a definisan je jednačinama

$$X_t = \begin{cases} \alpha * X_{t-1} + \varepsilon_t, & \text{s.v. } p, \\ \alpha * Y_{t-1} + \varepsilon_t, & \text{s.v. } 1-p, \end{cases} \tag{1.13}$$

$$Y_t = \begin{cases} \beta * X_{t-1} + \eta_t, & \text{s.v. } q, \\ \beta * Y_{t-1} + \eta_t, & \text{s.v. } 1-q, \end{cases} \tag{1.14}$$

gde su $p, q \in [0,1]$, $\alpha, \beta \in (0,1)$ i $\mu > 0$. Negativni binomni tining operatori su definisani kao $\alpha * X = \sum_{i=1}^{X} W_i$ i $\alpha * Y = \sum_{i=1}^{Y} W_i$, gde su W_i nezavisne, jednako raspodeljene slučajne promenljive sa geometrijskom raspodelom i parametrom $\alpha/(1+\alpha)$. Na isti način su definisani i $\beta * X = \sum_{i=1}^{X} \widetilde{W}_i$ i $\beta * Y = \sum_{i=1}^{Y} \widetilde{W}_i$ pri čemu su $\widetilde{W}_i$ nezavisne slučajne promenljive sa geometrijskom raspodelom i parametrom $\beta/(1+\beta)$. Brojački nizovi slučajnih promenljivih $\alpha * X_t$, $\alpha * Y_t$, $\beta * X_t$ i $\beta * Y_t$ su međusobno nezavisni. Vremenski nizovi $\{\varepsilon_t\}$ i $\{\eta_t\}$ su nizovi sa jednako raspodeljenim, nezavisnim, slučajnim promenljivama. Takođe važi da su ova dva niza međusobno nezavisna i (X_s, Y_s) je nezavisno od (ε_t, η_t) za $s < t$. Ovaj model skraćeno ćemo nazvati BVNGINAR(1)model.

Raspodela vremenskih nizova $\{\varepsilon_t\}$ i $\{\eta_t\}$ izvodi se pod pretpostavkom da su vremenski nizovi (1.13) i (1.14) stacionarni. Ideja se bazira na tome da ako su $\Phi_{X_t}(s)$ i $\Phi_{Y_t}(s)$ funkcije generatrisa verovatnoća slučajnih promenljivih X_t i Y_t redom, tada za slučajne promenljive vremenskih nizova $\{X_t\}$ i $\{Y_t\}$ važi

$$\Phi_{X_t}(s) = \Phi_{X_t}\left(\frac{1}{1+\alpha-\alpha s}\right)\Phi_{\varepsilon_t}(s)$$

$$\Phi_{Y_t}(s) = \Phi_{Y_t}\left(\frac{1}{1+\beta-\beta s}\right)\Phi_{\eta_t}(s)$$

Iz navedenih jednačina autori Ristić, Nastić, Jayakumar i Bakouch (2012) su zaključili da je

$$\varepsilon_t \stackrel{d}{=} \begin{cases} Geom(\frac{\alpha}{1+\alpha}), & \text{s.v. } \alpha\mu/(\mu-\alpha), \\ Geom(\frac{\mu}{1+\mu}), & \text{s.v. } (\mu-\alpha-\alpha\mu)/(\mu-\alpha), \end{cases} \tag{1.15}$$

$$\eta_t \stackrel{d}{=} \begin{cases} Geom(\frac{\beta}{1+\beta}), & \text{s.v. } \beta\mu/(\mu-\beta), \\ Geom(\frac{\mu}{1+\mu}), & \text{s.v. } (\mu-\beta-\beta\mu)/(\mu-\beta), \end{cases} \tag{1.16}$$

gde su $\alpha, \beta \in (0, \mu/(1+\mu))$ i $\mu > 0$. U radu je pokazano i da za navedene raspodele (1.15) i (1.16), pod pretpostavkom da je $X_0 \stackrel{d}{=} Y_0 \stackrel{d}{=} Geom(\mu/(1+\mu))$ važi da X_t i Y_t, kad $t \to \infty$, konvergiraju u raspodeli ka slučajnoj promenljivoj sa geometrijskom raspodelom sa parametrom $\mu/(1+\mu)$.

Pretpostavka o marginalnim raspodelama vremenskih nizova $\{X_t\}$ i $\{Y_t\}$ implicira da je njihovo očekivanje i disperzija $E(X_t) = E(Y_t) = \mu$ i $Var(X_t) = Var(Y_t) = \mu(1+\mu)$, dok je kovarijacija između ova dva vremenska niza

$$Cov(X_t, Y_t) = \frac{\alpha\beta(pq + (1-p)(1-q))}{1 - \alpha\beta(p(1-q) + (1-p)q)}\mu(1+\mu).$$

Kovarijacija se može zapisati kao $Cov(X_t, Y_t) \equiv \rho\mu(1+\mu)$ gde je ρ koeficijent korelacije. Autori rada su pokazali da je $\rho \in [0, 1)$.

Za ocenjivanje nepoznatih parametara modela autori su sugerisali modifikovani metod uslovnih najmanjih kvadrata. Detaljna diskusija o ocenjivanju parametara ovog model može se naći u Nastić, Ristić i Popović (2014), a biće detaljno razmatrana i u jednom od narednih poglavlja.

1.4.2 Višedimenzionalni modeli sa zavisnim inovacionim procesima

Konstruisanjem višedimenzionalnih modela za vremenske nizove iz stvarnog života bavili su se mnogi autori. Neki od njih su Brännäs i Nordstrom (2000), Quoreshi (2006), Heinen i Rengifo (2007). Prvi od pomenuta tri rada definiše model koji opisuje broj noćenja u hotelima i odmaralištima dok se druga dva modela bave obimom trgovanja na berzi.

Model koji su konstruisali Brännäs i Nordstrom (2000) bazira se na ideji da su broj noćenja u hotelima i broj noćenja u odmaralištima zavisne slučajne promenljive. Takođe, broj novopristiglih gostiju u region utiče na broj noćenja u oba vida smeštaja. Dakle, model koji opisuje vremenski niz $\{Y_{H_t}, Y_{C_t}\}$ mogao bi se zapisati kao

$$Y_{H_t} = \alpha_H \circ Y_{H_{t-1}} + \beta_H \circ \varepsilon_t \tag{1.17}$$

$$Y_{C_t} = \alpha_C \circ Y_{C_{t-1}} + \beta_C \circ \varepsilon_t \tag{1.18}$$

gde su $\alpha_H, \alpha_C, \beta_H, \beta_C \in (0,1)$. Vremenski niz $\{Y_{H_t}\}$ opisuje broj noćenja u hotelu, $\{Y_{C_t}\}$ broj noćenja u odmaralištima, dok je $\{\varepsilon_t\}$ inovacioni proces. Broj gostiju u svakoj kategoriji smeštaja zavisi od broja onih koji su tu od prethodne noći (proces modelovan prvim sabircima u jednačinama (1.17) i (1.18), koji glase $\alpha_H \circ Y_{H_{t-1}}$ i $\alpha_C \circ Y_{C_{t-1}}$) i broja novo pristiglih gostiju (proces modelovan drugim sabircima u jednačinama (1.17) i (1.18), koji glase $\beta_H \circ \varepsilon_t$ i $\beta_C \circ \varepsilon_t$). Jedan broj pristiglih gostiju se odlučuje za hotele, a drugi za odmarališta. Ovo ponašanje je takođe modelovano tining operatorom, gde je $\beta_H \circ \varepsilon_t = \sum_{i=1}^{\varepsilon_t} v_i$. Kako je v_i Bernulijeva slučajna promenljiva sa parametrom β_H to imamo da će sa verovatnoćom β_H gost odsesti u hotelu. Odatle sledi da će sa verovatnoćom $1-\beta_H$ odsesti u odmaralištu, tj. $P(v_i = 0) = 1-\beta_H = \beta_C$. Za proces $\{\varepsilon_t\}$ pretpostavka je da je sačinjen od međusobno nezavisnih, identički raspodeljenih slučajnih promenljivih. Ako je $E(\varepsilon_t) = \lambda$, $Var(\varepsilon_t) = \delta$ tada je:

$$\begin{aligned}
&E(Y_{x_t}) = \beta_x \lambda/(1-\alpha_x)\\
&Var(Y_{x_t}) = (\alpha_x \beta_x \lambda + \delta)/(1-\alpha_x^2)\\
&Cov(Y_{x_t}, y_{z_t}) = \beta_x \beta_z \delta/(1-\alpha_x \alpha_z) \geq 0\\
&Corr(Y_{x_t}, Y_{x_{t-k}}) = \alpha_x^k \geq 0\\
&Cov(Y_{x_t}, Y_{z_{t-k}}) = \alpha_x^k Cov(Y_{x_t}, Y_{z_t}) \geq 0
\end{aligned}$$

gde su $x, z \in \{H, C\}$ i $k \geq 0$. Model se pokazao kao koristan, a testiran je na modelovanju broja norveških gostiju u Švedskoj u periodu od 1986. do 1999. godine.

Razvojem modela višedimenzionalnih celobrojnih vremenskih nizova bavili su se i Pedeli i Karlis (2011). Dvodimenzionalni model opisan u ovom radu bazira se na binomnom tining operatoru. Slično kao u Brännäs i Nordstrom (2000), zavisnost između posmatranih procesa uvedena je preko inovacionog procesa. Dok su Brännäs i Nordstrom (2000) imali jedan proces $\{\varepsilon_t\}$ koji je preko binomnog tining operatora sa različitim parametrima generisao dva inovaciona procesa, Pedeli i Karlis (2011) su posmatrali dvodimenzionalni inovacioni proces generisan dvodimenzionalnim raspodelama. Nenegativni, celobrojni, slučajni vektor $\boldsymbol{X}_t = (X_{1,t}, X_{2,t})$ definisan je jednačinom

$$\boldsymbol{X}_t = \boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{X}_{t-1} + \boldsymbol{R}_t = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} X_{1,t-1} \\ X_{2,t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_{1,t-1} \\ R_{2,t-1} \end{bmatrix}, t \in \mathbb{Z}. \tag{1.19}$$

Matrica $\boldsymbol{A}$ je matrica koeficijenata dimenzije 2×2 čiji su elementi $\alpha_1, \alpha_2 \in (0,1)$, dok je $\boldsymbol{R}_t$ nenegativni celobrojni slučajni vektori. Binomni tining operator, $\circ$, definisan je kao u jednačini (1.1). Elementi vremenskog niza $\{\boldsymbol{R}_t = (R_{1,t}, R_{2,t})\}$ opisuju broj novih članova koji su se javili u intervalu $(t-1, t]$. Pretpostavka je da su elementi ovog slučajnog vektora nezavisni u odnosu na tining operator. Ukoliko pretpostavimo da su i $R_{1,t}$ i $R_{2,t}$ nezavisni za svako $t \in \mathbb{N}$, dobićemo dva nezavisna slučajna procesa $\{X_{1,t}\}$ i $\{X_{2,t}\}$ pri čemu je vremenski niz $\{X_{i,t}\}_t$ definisan je kao $X_{i,t} = \alpha_i \circ X_{i,t-1} + R_{i,t}$, $i = 1, 2$.

Neka proces $\{R_{i,t}\}$ ima srednju vrednost λ_i i disperziju $\sigma_i^2 = \nu_i \lambda_i$, $i = 1, 2$. Tada je očekivanje, disperzija i autokorelacija posmatranih procesa

$$E(X_{i,t}) = \frac{\lambda_i}{1-\alpha_i}, \;\; i = 1, 2, \tag{1.20}$$

$$Var(X_{i,t}) = \frac{(\alpha_i + \nu_i)\lambda_i}{1-\alpha_i^2}, \;\; i = 1, 2, \tag{1.21}$$

$$Corr(X_{i,t+h}, X_{i,t}) = \alpha_i^h, \;\; i = 1, 2; \; h = 1, 2 \dots \tag{1.22}$$

Koeficijent korelacije između procesa $\{X_{1,t}\}$ i $\{X_{2,t}\}$ je

$$\begin{aligned} Corr(X_{1,t+h}, X_{2,t}) &= \frac{\alpha_1^h \sqrt{(1-\alpha_1^2)(1-\alpha_2)^2}}{(1-\alpha_1\alpha_2)\sqrt{(\alpha_1+\nu_1)(\alpha_2+\nu_2)\lambda_1\lambda_2}} \\ &\times \;\; Cov(R_{1t}, R_{2t}), \; h = 0, 1, \dots \end{aligned} \tag{1.23}$$

Kako je $Cov(R_{1t}, R_{2t}) = \phi \in [0, \min(\lambda_1, \lambda_2)]$ i $\alpha_1, \alpha_2 \in (0, 1)$ to je koeficijent korelacije između ova dva procesa iz intervala $[0, 1)$, pri čemu važi da korelacija teži nuli kad h teži beskonačnosti. Koeficijent korelacije između $X_{1,t}$ i $X_{2,t+h}$ izvodi se analogno.

Uslovno očekivanje i uslovna kovarijacija slučajnih promenljivih $X_{1,t}$ i $X_{2,t}$ u odnosu na $X_{1,t-1}$ i $X_{2,t-2}$, respektivno, računa se kao

$$E(X_{i,t}|X_{i,t-1}) = \alpha_i X_{i,t-1} + \lambda_i, \;\; i = 1, 2.$$

$$Cov(X_{i,t+h}, X_{i,t}|X_{i,t-1}) = \alpha_i(1-\alpha_i)X_{i,t-1} + \lambda_i, \;\; i = 1, 2,$$

dok je uslovna kovarijacija između procesa $\{X_{1,t}\}$ i $\{X_{2,t}\}$ data sa

$$Cov(X_{i,t+h}, X_{j,t}|X_{i,t-1}, X_{j,t-1}) = \phi, \;\; i, j = 1, 2; \; i \neq j,$$

gde je ϕ kovarijacija između slučajnih procesa $\{R_{1,t}\}$ i $\{R_{2,t}\}$.

Kako je od interesa konstrukcija dvodimenzionalnog slučajnog procesa, pretpostavka je da je dvodimenzionalni slučajni proces $\{(R_{1,t}, R_{2,t})\}_{t\in\mathbb{N}}$ generisan nekom dvodimenzionalnom raspodelom. Ukoliko pretpostavimo da je generisan dvodimenzionalnom Puasonovom raspodelom tada su raspodele verovatnoća procesa

$$P(R_{1,t} = x, R_{2,t} = y) \;\; = \;\; e^{-(\lambda_1+\lambda_2-\phi)} \frac{(\lambda_1-\phi)^x}{x!} \frac{(\lambda_2-\phi)^y}{y!}$$

$$\times \sum_{i=0}^{s} \binom{x}{i} \binom{y}{i} i! \left(\frac{\phi}{(\lambda_1 - \phi)(\lambda_2 - \phi)} \right)^i, \tag{1.24}$$

gde je $s = \min(x, y)$, $\lambda_1,\ \lambda_2 > 0$ i $\phi \in [0, \min(\lambda_1, \lambda_2)]$. Marginalna raspodela ovih slučajnih procesa je Puasonova sa parametrom λ_i, dok parametar ϕ predstavlja kovarijaciju između ova dva slučajna procesa. Kako je sva zavisnost između slučajnih procesa $\{X_{1,t}\}$ i $\{X_{2,t}\}$ opisana preko zavisnosti inovacionih procesa, model dat jednačinom (1.19) svodi se na dva nezavisna jednodimenzionalna modela kada parametar ϕ izjednačimo sa nulom. Očekivanje i autokorelacija posmatranih slučajnih procesa $\{X_{1,t}\}$ i $\{X_{2,t}\}$, dati su izrazima

$$\mu_{X_{i,t}} = \frac{\lambda_i}{1 - \alpha_i}, \ \ i = 1, 2$$

$$Corr(X_{i,t+h}, X_{i,t}) = \alpha_i^h, \ \ i = 1, 2; \ h = 0, 1, \ldots$$

Korelacija između procesa računa se kao

$$Corr(X_{i,t+h}, X_{j,t}) = \frac{\alpha_i^h \sqrt{(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)}\phi}{(1 - \alpha_1\alpha_2)\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}, \ \ i = 1, 2; \ i \neq j; \ h = 0, 1 \ldots$$

Imajući u vidu ograničenja parametara, možemo primetiti da autokorelacija, kao i korelacija između procesa, uzima vrednosti iz intervala $[0, 1)$. Takođe obe ove funkcije teže nuli sa porastom rastojanja između promenljivih.

Pedeli i Karlis (2011) su razmatrali još jedan aspekt ovog modela koji obuhvata pretpostavku da su inovacioni procesi generisani dvodimenzionalnom negativnom binomnom raspodelom. Parametri dvodimenzionalne negativne binomne raspodele su $(\lambda_1, \lambda_2, \beta)$, pa je zajednička funkcija raspodele verovatnoća

$$P(R_{1,t} = x, R_{2,t} = y) = \frac{\Gamma(\beta^{-1} + x + y)}{\Gamma(\beta^{-1})\Gamma(x+1)\Gamma(y+1)} \frac{\lambda_1^x \lambda_2^y \beta^{-\beta^{-1}}}{(\lambda_1 + \lambda_2 + \beta^{-1})^{x+y+\beta^{-1}}}. \tag{1.25}$$

Parametri λ_1, λ_2 i β su strogo pozitivni. Očekivanje ovih slučajnih procesa je λ_i, dok je disperzija $\sigma_i^2 = \lambda_i(1+\beta\lambda_i)$. Na osnovu ovoga i jednačina (1.20)-(1.22) imamo da je očekivanje i korelacija slučajnog procesa $\{X_{i,t}\}$

$$\mu_{X_{i,t}} = \frac{\lambda_i}{1 - \alpha_i}, \ \ i = 1, 2,$$

$$Corr(X_{i,t+h}, X_{i,t}) = \alpha_i^h, \ \ i = 1, 2; \ h = 0, 1, \ldots$$

Disperzija slučajnog procesa je $Var(X_{i,t}) = \frac{\alpha_i\lambda_i(1+\beta\lambda_i+\alpha_i)}{1-\alpha_i^2}, \ \ i = 1, 2$. Kako je ona veća od srednje vrednosti, to je model pogodan za vremenske nizove sa velikom disperzijom. Korelacija između procesa $\{X_{1,t}\}$ i $\{X_{2,t}\}$ računa se kao

$$Corr(X_{i,t+h}, X_{j,t}) = \frac{\alpha_i^h \beta}{1-\alpha_1\alpha_2}\sqrt{\frac{(1-\alpha_1)^2(1-\alpha_2)^2\lambda_1\lambda_2}{(1+\beta\lambda_1+\alpha_1)(1+\beta\lambda_2+\alpha_2)}}\ i=1,2;\ i\neq j;\ h=0,1,\ldots$$

Kako autokorelacija, tako i korelacija između procesa, uzima vrednosti iz intervala $[0,1)$ i obe ove funkcije teže nuli sa porastom rastojanja između promenljivih.

1.4.3 Višedimenzionalni modeli sa zavisnim procesima preživljavanja i zavisnim inovacionim procesima

Višedimenzionalni model koji ima zavisne i procese preživljavanja i procese inovacije izučavali su Pedeli i Karlis (2013). Izbačena je pretpostavka da je matrica $\boldsymbol{A}$ iz jednačine (1.19) dijagonalna. Ovo u znatnoj meri komplikuje korelacionu strukturu i zajedničku raspodelu posmatranih procesa. S tim u vezi, Pedeli i Karlis (2013) daju detaljnu diskusiju samo za ovakav dvodimenzionalni proces, kod koga su inovacioni procesi generisani dvodimenzionalnom Puasonovom raspodelom sa parametrima λ_1, λ_2 i ϕ, pri čemu je funkcija raspodele verovatnoća data jednačinom (1.24). Ovakav model definisan je kao

$$\begin{bmatrix} X_{1,t} \\ X_{2,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} X_{1,t-1} \\ X_{2,t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_{1,t} \\ R_{2,t} \end{bmatrix}.$$

Binomni tining operator definisan je jednačinom (1.1). Slučajni procesi $\{R_{1,t}\}_t$ i $\{R_{2,t}\}_t$ su nezavisni u odnosu na binomni tining operator. Srednja vrednost procesa $\{R_{i,t}\}_t$ označena je sa λ_i, $i=1,2$, a kovarijacija između slučajnih promenljivih $R_{1,t}$ i $R_{2,t}$ sa ϕ. Uvedeni model je definisan za $\alpha_{i,j}\in[0,1]$, $i,j=1,2$, zatim $\lambda_1,\lambda_2>0$ i $\phi\in[0,\min(\lambda_1,\lambda_2)]$. Na osnovu uvedenih pretpostavki očekivane vrednosti slučajnih procesa $\{X_{1,t}\}$ i $\{X_{2,t}\}$ su redom

$$\mu_1 = \frac{(1-\alpha_{22})\lambda_1+\alpha_{12}\lambda_2}{(1-\alpha_{11})(1-\alpha_{22})-\alpha_{12}\alpha_{21}},$$

$$\mu_2 = \frac{(1-\alpha_{11})\lambda_2+\alpha_{21}\lambda_1}{(1-\alpha_{11})(1-\alpha_{22})-\alpha_{12}\alpha_{21}}.$$

Od posebnog su interesa uslovno očekivanje i uslovna raspodela verovatnoća slučajnih promenljivih $X_{1,t}$ i $X_{2,t}$ kad su poznate realizovane vrednosti slučajnih promenljivih $X_{1,t-1}$ i $X_{2,t-1}$. Ako je $\boldsymbol{x}_t=(x_{1,t},x_{2,t})$ realizacija slučajnih promenljivih u trenutku t, onda su uslovano očekivanje dato sledećom jednačinom

$$E(X_{i,t}|x_{1,t-1},x_{2,t-1}) = \alpha_{i1}\circ x_{1,t-1}+\alpha_{i2}\circ x_{2,t-1}+\lambda_i,\ \ i=1,2,$$

Još jedan model kod koga su zavisni i procesi preživljavanja i inovacioni procesi nastao je iz ideje za uopštavanjem jednodimenzionalnog modela predstavljenog u McKenzie (1985). Ideju o uopštavanju na dvodimenzionalni slučaj izneli su Scotto, Weiß, Silva i Pereira (2014). Imali su za cilj da definišu model kao

$$\boldsymbol{X}_t = \boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{X}_{t-1} + \boldsymbol{B} \circ (\boldsymbol{n} - \boldsymbol{X}_{t-1}), \tag{1.26}$$

gde se pretpostavlja da matrice $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$ nisu dijagonalne, a $\boldsymbol{n} = (n_1, n_2)' \in \mathbb{N}^2$. Ovi modeli konstruisani su za vremenske nizove sa konačnim opsegom, te je pretpostavka da je $X_{i,t} \leq n_i$. Problem koji se javlja kod ovako definisanog modela je što u opštem slučaju ne važi $(\boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{X}_{t-1})_i \leq X_{i,t-1}$ i $(\boldsymbol{B} \circ (\boldsymbol{n} - \boldsymbol{X}_{t-1}))_i \leq n_i - X_{i,t-1}$. Pomenuti opšti slučaj podrazumeva da je $(\boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{X}_{t-1})_i = \alpha_{i1} \circ X_{1,t-1} + \alpha_{i2} \circ X_{2,t-1}$ pri čemu je $\alpha_{ij} \neq 0$, a za binomni tining operator važi da je $\alpha \circ X \leq X$ ali ne i da je $\alpha \circ X + \beta \circ Y \leq X$. To za posledicu ima da $\boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{X}_{t-1} + \boldsymbol{B} \circ (\boldsymbol{n} - \boldsymbol{X}_{i,t-1}) \notin \{0, 1, \ldots, n_1\} \times \{0, 1, \ldots, n_2\}$, čime je narušena granica unutar koje se kreću vrednosti vremenkih nizova $\{X_{i,t}\}_t$, $i = 1, 2$. Da bi se ovaj problem rešio, Scotto, Weiß, Silva i Pereira (2014) su definisali model zasnovan na dvodimenzionalnoj binomnoj raspodeli tipa II (BVB$_{II}$). Pre binomne raspodele tipa II, Scotto, Weiß, Silva i Pereira (2014) su definisali dvodimenzionalnu Bernulijevu raspodelu na sledeći način.

Neka slučajni vektor $\boldsymbol{Y} = (Y_1, Y_2)'$ ima dvodimenzionalnu Bernulijevu raspodelu čiji je skup vrednosti $\{(1,1), (1,0), (0,1), (0,0)\}$ sa verovatnoćama p_{11}, p_{10}, p_{01}, p_{00} respektivno. Ove verovatnoće su određene parametrima α_1, α_2 i α na sledeći način:

$$p_{11} = \alpha, \ \ p_{11} + p_{10} = \alpha_1, \ \ p_{11} + p_{01} = \alpha_2,$$

gde su $0 < \alpha_1, \alpha_2 < 1$ i $0 < \alpha < \min(\alpha_1, \alpha_2)$. Marginalna raspodela slučajne promenljive Y_i je jednodimenzionalna Bernulijeva sa parametrom α_i, $i = 1, 2$. Korelacija između slučajnih promenljivih Y_1 i Y_2 je

$$\rho(Y_1, Y_2) = \frac{\alpha - \alpha_1\alpha_2}{\sqrt{\alpha_1\alpha_2(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)}} = \phi_\alpha.$$

Dakle, slučajni vektor $\boldsymbol{Y}$ ima dvodimenzionalnu Bernulijevu raspodelu sa parametrima $(\alpha, \alpha_1, \alpha_2)$, dok će zbir takvih slučajnih vektora, $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{Y}_1 + \ldots + \boldsymbol{Y}_k$, formirati slučajnu promenljivu sa dvodimenzionalnom binomnom raspodelom tipa I (BVB$_I$), $\boldsymbol{W} \sim$ BVB$_I(k; \alpha_1, \alpha_2, \phi_\alpha)$. Marginalna raspodela elemenata slučajnog vektora $\boldsymbol{W}$ je jednodimenzionalna binomna raspodela, $W_i \sim Bin(n_i - k; \alpha_i)$, $i = 1, 2$.

Imajući u vidu prethodnu diskusiju, Scotto, Weiß, Silva i Pereira (2014) su definisali dvodimenzionalnu binomnu raspodelu tipa II na sledeći način. Neka su $n_1, n_2 > 0$ i $0 \leq k \leq \min(n_1, n_2)$, a α, α_1, α_2 i ϕ_α parametri dvodimenzionalne binomne raspodele tipa I

(BVB$_I$). Neka su elementi slučajnog vektora $\boldsymbol{W}$ nezavisni u odnosu na U i V, pri čemu su i U i V međusobno nezavisne slučajne promenljive, gde je $\boldsymbol{W} \sim BVB_I(k;\alpha_1,\alpha_2,\phi_\alpha)$, $U \sim Bin(n_1-k,\alpha_1)$, $V \sim Bin(n_2-k,\alpha_2)$. Tada vektor

$$\boldsymbol{X} = (W_1+U, W_2+V)'$$

ima dvodimenzionalnu binomnu raspodelu tipa II, tj. $\boldsymbol{X} \sim BVB_{II}(n_1,n_2,k;\alpha_1,\alpha_2,\alpha)$.

Za definiciju samog model, potrebno je još uvesti dvodimenzionalni binomni tining operator, $\otimes$. Dvodimenzionalni binomni tining operator definisan je kao

$$\boldsymbol{\alpha} \otimes \boldsymbol{X}|\boldsymbol{X} \sim BVB_{II}(X_1,X_2,\min(X_1,X_2);\alpha_1,\alpha_2,\alpha). \tag{1.27}$$

Marginalne raspodele ovako uvedene slučajne promenljive, za poznatu vrednost slučajnog vektora $\boldsymbol{X}$ su $(\boldsymbol{\alpha} \otimes \boldsymbol{X})_i|\boldsymbol{X} \sim Bin(X_i,\alpha_i),\ \ i=1,2$. Očekivanje, disperzija i kovarijacija dvodimenzionalnog tining operatora date su sledećim jednačinama, respektivno,

$$E((\boldsymbol{\alpha} \otimes \boldsymbol{X})_i) = \alpha_i E(X_i),\ \ i=1,2,$$

$$Var((\boldsymbol{\alpha} \otimes \boldsymbol{X})_i) = \alpha_i(1-\alpha_i)E(X_i) + \alpha_i^2 Var(X_i),\ \ i=1,2,$$

$$\begin{aligned} Cov((\boldsymbol{\alpha} \otimes \boldsymbol{X})_1,(\boldsymbol{\alpha} \otimes \boldsymbol{X})_2) =& \alpha_1\alpha_2 Cov(X_1,X_2) \\ &+ \phi_\alpha\sqrt{\alpha_1\alpha_2(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)}E(\min(X_1,X_2)). \end{aligned}$$

Dvodimenzionalni autoregresivni model koji su uveli Scotto, Weiß, Silva i Pereira (2014) zasnovan je na dvodimenzionalnom tining operatoru i definisan je na sledeći način. Neka su $\pi_1,\pi_2 \in (0,1)$ i $\rho_i \in \Big(\max(-\frac{\pi_i}{1-\pi_i},-\frac{1-\pi_i}{\pi_i}),1\Big)$, $i=1,2$. Komponente tining parametara $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha)$ i $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1,\beta_2,\beta)$ odredimo kao $\beta_i = \pi_i(1-\rho_i)$ i $\alpha_i = \beta_i + \rho_i$, pri čemu je $0 < \alpha_i, \beta_i < 1$, za $i=1,2$. Ako je $\boldsymbol{n} = (n_1,n_2)' \in \mathbb{N}^2$ gornja granica slučajne promenljive $\boldsymbol{X}_t = (X_{t,1},X_{t,2})'$ tada je dvodimenzionalni autoregresivni proces generisan dvodimenzionalnim binomnim tining operatorom, $\{\boldsymbol{X}_t\}$, dat sa

$$\boldsymbol{X}_t = \boldsymbol{\alpha} \otimes \boldsymbol{X}_{t-1} + \boldsymbol{\beta} \otimes (\boldsymbol{n} - \boldsymbol{X}_{t-1}),\ \ t \in \mathbb{Z},$$

gde su tining operatori $\boldsymbol{\alpha} \otimes \boldsymbol{X}_t$ i $\boldsymbol{\beta} \otimes (\boldsymbol{n} - \boldsymbol{X}_{t-1})$ definisani jednačinom (1.27).

Ovakav model pogodan je za vremenske nizove koji su međusobno korelisani, a imaju procese preživljavanja i inovacione procese koji utiču jedni na druge. Kovarijacija između slučajnih procesa data je sledećom jednačinom

$$Cov(X_{t,1}, X_{t,2}) = \frac{1}{1-(\alpha_1-\beta_1)(\alpha_2-\beta_2)}\Big(\phi_\alpha\sqrt{\alpha_1\alpha_2(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)}E\left(\min(X_{t,1}, X_{t,2})\right)$$
$$+\phi_\beta\sqrt{\beta_1\beta_2(1-\beta_1)(1-\beta_2)}E\left(\min(n_1-X_{t,1}, n_2-X_{t,2})\right)\Big)$$

Kako dvodimenzionalni binomni tining operator ima marginalnu raspodelu kao i odgovarajući binomni tining operator, tj. $(\boldsymbol{\alpha}\otimes\boldsymbol{X})_i \overset{d}{=} \alpha_i\circ X_i$, to je marginalna raspodela slučajnog procesa $\{X_{t,i}\}$ binomna sa parametrima n_i i π_i. Marginalno uslovno očekivanje i disperzija slučajnog procesa je

$$E(X_{t,i}|\boldsymbol{X}_{t-1}) = \rho_i X_{t-1,i} + n_i\beta_i,\ \ i=1,2,$$

$$Var(X_{t,i}|\boldsymbol{X}_{t-1}) = \rho_i(1-\rho_i)(1-2\pi_i)X_{t-1,i} + n_i\beta_i(1-\beta_i),\ \ i=1,2.$$

1.5 Poznati rezultati korišćeni u disertaciji

U ovom poglavlju navešćemo definicije i teoreme drugih autora na koje ćemo se pozivati u nastavku. Pored samog rezultata, naveden je i izvor odakle je preuzet, a sortirani su prema redosledu pojavljivanja u disertaciji.

Definicija 1.1. *2.2 Shiryaev (1996): Preslikavanje T koje čuva meru je ergodično ako svaki invarijantni skup A ima meru 0 ili 1.*

Teorema 1.1. *10.2 DasGupta (2008): Pretpostavimo da je $\{X_n\}$ ireducibilan i pozitivno rekurentan lanac Markova u prebrojivom prostoru X sa stacionarnom marginalnom raspodelom Q. Neka je $T_a = \inf\{n, X_n = a\}$ i $h_a(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} P(T_a \geq n, X_n = y|X_0 = x)$. Tada za svaku ograničenu funkciju f na prostoru X,*

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\sum_{i=1}^{n} f(X_i) - n\mu\right) \xrightarrow{r} \mathcal{N}(0,\sigma^2),$$

gde su $\mu = \sum_{x\in X} f(x)Q(x)$ i $\sigma^2 = \sum_{x\in X}\frac{Q(x)}{Q(a)}(f(x)-\mu)^2 + 2\sum_{x,y\in X x\neq a} Q(x)h_a(x,y)(f(x)-\mu)(f(y)-\mu)$.

Teorema 1.2. *3.1 Tjøstheim (1986): Pretpostavimo da je $\{\boldsymbol{X}_t\}$ d-dimenzionalni strogo stacionarni niz, pri čemu je $E(|\boldsymbol{X}_t|^2) < \infty$ i $\tilde{\boldsymbol{X}}_{t|t-1}(\boldsymbol{\beta}) = E_\beta\left(\boldsymbol{X}_t|\mathcal{F}_{t-1}^X(m)\right)$ je skoro izvesno tri puta neprekidno diferencijabilna funkcija na otvorenom skupu $\boldsymbol{B}$ koji sadrži $\boldsymbol{\beta}^0$. Još neka važi*

C1: $E\left[\left|\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{X}}_{t|t-1}}{\partial \beta_i}(\boldsymbol{\beta}^0)\right|^2\right] < \infty$ *i* $E\left[\left|\frac{\partial^2 \tilde{\boldsymbol{X}}_{t|t-1}}{\partial \beta_i \partial \beta_j}(\boldsymbol{\beta}^0)\right|^2\right] < \infty$ *za* $i, j = 1, \ldots, r$.

C2: Vektori $\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{X}}_{t|t-1}}{\partial \beta_i}(\boldsymbol{\beta}^0)$, $i = 1, \ldots, r$, *su linearno nezavisni u smislu da za realne brojeve* $a_1, \ldots, a_r$ *ako važi*

$$E\left[\left|\sum_{i=1}^{r} a_i \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{X}}_{t|t-1}}{\partial \beta_i}(\boldsymbol{\beta}^0)\right|^2\right] = 0$$

onda su $a_1 = \ldots = a_r = 0$.

C3: Za $\boldsymbol{\beta} \in \boldsymbol{B}$ *postoje neprekidne funkcije* $G_{t-1}^{ijk}(\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_{t-1})$ *i* $H_t^{ijk}(\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_t)$ *takve da*

$$\left|\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{X}}_{t|t-1}}{\partial \beta_i}(\boldsymbol{\beta})\frac{\partial^2 \tilde{\boldsymbol{X}}_{t|t-1}}{\partial \beta_i \partial \beta_j}(\boldsymbol{\beta})\right| \leq G_{t-1}^{ijk}, \quad E(G_{t-1}^{ijk}) < \infty,$$

$$\left|(\boldsymbol{X}_t - \tilde{\boldsymbol{X}}_{t|t-1}(\boldsymbol{\beta}))\frac{\partial^3 \tilde{\boldsymbol{X}}_{t|t-1}}{\partial \beta_i \partial \beta_j \partial \beta_k}(\boldsymbol{\beta})\right| \leq H_t^{ijk}, \quad E(H_t^{ijk}) < \infty,$$

za $i, j, k = 1, \ldots, r$.

Tada postoji niz ocena $\{\hat{\boldsymbol{\beta}}_n\}$ *koje minimiziraju* $Q_n = \sum_{t=m+1}^{n}(\boldsymbol{X}_t - \tilde{\boldsymbol{X}}_{t|t-1}(\boldsymbol{\beta}))^2$ *takve da* $\hat{\boldsymbol{\beta}}_n \xrightarrow{s.i.} \boldsymbol{\beta}^0$, *kad* $n \to \infty$.

Teorema 1.3. *3.2 Tjøstheim (1986): Neka je* $f_{t|t-1}$ *matrica uslovnog očekivanja kvadrata greške predviđanja slučajne promenljive* $\boldsymbol{X}_t$ *u odnosu na* σ*-algebru* $\mathcal{F}_{t-1}$ *i neka važe uslovi teoreme 1.2. Ako još važi da je*

$$R = E\left[\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{X}}'_{t|t-1}}{\partial \boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{\beta}^0) f_{t|t-1}(\boldsymbol{\beta}^0)\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{X}}_{t|t-1}}{\partial \boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{\beta}^0)\right] < \infty,$$

tada za niz ocena $\{\hat{\boldsymbol{\beta}}_n\}$ *iz teoreme 1.2 važi da*

$$n^{1/2}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_n - \boldsymbol{\beta}^0) \xrightarrow{r} \mathcal{N}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{R}\boldsymbol{U}^{-1}),$$

kad $n \to \infty$.

Teorema 1.4. *6.4.3 Brockwell i Davis (1991): Ako je slučajna promenljiva* $\boldsymbol{X}_n$ *asimptotski normalno raspodeljena sa parametrima* $\boldsymbol{\mu}_n$ *i* $\boldsymbol{\Sigma}_n$, *a* $\boldsymbol{B}$ *nenula* $m \times k$ *matrica takva da matrice* $\boldsymbol{B}\boldsymbol{\Sigma}_n\boldsymbol{B}'$, $n = 1, 2, \ldots$, *nemaju nule na glavnoj dijagonali, tada je*

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}_n \sim AN(\boldsymbol{B}\boldsymbol{\mu}_n, \boldsymbol{B}\boldsymbol{\Sigma}_n\boldsymbol{B}')$$

Teorema 1.5. *6.3.3 Brockwell i Davis (1991): Ako su* $\{\boldsymbol{X}_n\}$ *i* $\{\boldsymbol{Y}_n\}$ *dva niza slučajnih vektora takvih da* $\boldsymbol{X}_n - \boldsymbol{Y}_n = o_p(1)$ *i* $\boldsymbol{X}_n \xrightarrow{r} \boldsymbol{X}$ *tada i* $\boldsymbol{Y}_n \xrightarrow{r} \boldsymbol{X}$.

Teorema 1.6. *1.2.1 Rosenblatt (1971): Postoji stacionarna raspodela verovatnoća $\{v_j\}$ definisana kao $v_k = \sum_j v_j p_{j,k}$, matrice prelaza $\boldsymbol{P} = [p_{i,j}]$ ireducibilnog lanca Markova ako i samo ako je lanac pozitivno rekurentan. Raspodela je jedinstveno određena kao $v_k = 1/\mu_k$, gde je μ_k srednja vrednost vremena povratka u stanje k.*

Teorema 1.7. *1.2.2 Rosenblatt (1971): Označimo sa $f^{(n)}$ raspodelu verovatnoća sa srednjom vrednošću $\mu = \sum n f^{(n)}$ i neka je $f^{(n)} \geq 0$, $n = 1, 2, \ldots$, $\sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)} = 1$. Ako je najveći zajednički delilac brojeva n, za koje je $f^{(n)} > 0$, jedan i ako važi da je*

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)} s^n \ \ i \ \ G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} p^{(n)} s^n = (1 - F(s))^{-1}$$

za $|s| < 1$, tada

$$p^{(n)} \to \frac{1}{\mu},$$

kad $n \to \infty$.

Lema 1.8. *7.3.1 Rosenblatt (1971): Stacionaran lanac Markova sa operatorom prelaza T i invarijantnom merom verovatnoće μ je strogo mešanje ako i samo ako*

$$\sup_{f \perp 1} \frac{\|T^n f\|_1}{\|f\|_\infty} \to 0,$$

kad $n \to \infty$, gde $\|\cdot\|_p$ označava L^p normu u odnosu na μ, dok $f \perp 1$ znači da je $\int f(x)\mu(dx) = 0$.

Teorema 1.9. *7.1.2 Brockwell i Davis (1991): Ako je $\{X_n\}$ stacionarni vremenski niz takav da se može zapisati kao*

$$X_n = \mu + \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j Z_{n-j},$$

pri čemu je $\{Z_n\} \sim IID(0, \sigma^2)$, $\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\psi_j| < \infty$ i $\sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j \neq 0$ tada je

$$\overline{X}_n \sim \mathcal{AN}(\mu, n^{-1}\nu),$$

gde je $\nu = \sum_{h=-\infty}^{\infty} \gamma(h) = \sigma^2 \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j\right)^2$, a $\gamma(h)$ je autokovarijaciona funkcija niza $\{X_n\}$.

Teorema 1.10. *3.1 Hansen (1982): Neka je $\beta_0 \in \mathbb{R}^q$ vektor parametara koji želimo da ocenimo generalisanim metodom momenata, koristeći vektor ograničavajućih funkcija momenata $f(\cdot, \beta)$ i neka važe sledeći uslovi:*

A3.1 *$\{X_n\}$ je stacionaran i ergodičan niz.*

A3.2 *Neka je S otvoreni podskup od $\mathbb{R}^q$ koji sadrži vektor parametara, β_0, koji želimo da ocenimo.*

A3.3 *$f(\cdot, \beta)$ i $\frac{\partial f}{\partial \beta}(\cdot, \beta)$ su Borel merljive za svako $\beta \in S$ i $\frac{\partial f}{\partial \beta}(x, \cdot)$ je neprekidna na S za svako $x \in \mathbb{R}^p$.*

A3.4 *$\frac{\partial f}{\partial \beta}$ ima neprekidne prve izvode u β_0 i $E\left[\frac{\partial f}{\partial \beta}(x_1, \beta_0)\right]$ postoji, konačno je, i ima potpun rang.*

A3.5 *Označimo sa $W_n = f(x_n, \beta_0)$, za $-\infty < n < \infty$ i sa $V_j = E(W_0|W_{-j}, W_{-j-1}, \cdots) - E(W_0|W_{-j-1}, W_{-j-2}, \cdots)$, za $j \geq 0$. $E(W_0 W_0')$ postoji i konačno je. $E(W_0|W_{-j}, W_{-j-1}, \cdots)$ konvergira ka nuli u srednje-kvadratnom smislu i $\sum_{j=0}^{\infty} E(V_j V_j')^{1/2} < \infty$.*

A3.6 *Niz matrica $\{\frac{\partial f}{\partial \beta}(x, \beta_n) W_n^{-1}\}$ konvergira ka konstantnoj matrici potpunog ranga, gde je $\{W_n\}$ niz težinskih matrica korišćenih u generalisanoj metodi momenata.*

Tada za niz ocena $\{b_n^*\}$ dobijenih generalisanim metodom momenata važi da $\sqrt{N(b_N^* - \beta_0)}$ konvergira u raspodeli normalno raspodeljenom slučajnom vektoru sa srednjom vrednošću 0 i disperzijom $\frac{\partial f}{\partial \beta} W^{-1} \left(\frac{\partial f}{\partial \beta}\right)'$.

Glava 2

Dvodimenzionalni INAR modeli sa slučajnim koeficijentima

U ovoj glavi izučavaćemo dvodimenzionalne nenegativne celobrojne autoregresivne modele prvog reda sa slučajnim koeficijentima (BINAR(1)). Razmatraćemo slučajeve kad je marginalna raspodela vremenskih nizova Puasonova ili geometrijska. Zavisnost kod ovih modela postignuta je preko njihovih procesa preživljavanja. Inovacioni procesi su međusobno nezavisni, a njihove marginalne raspodele određene su pod pretpostavkom da su posmatrani vremenski nizovi stacionarni. Modele koje izučavamo baziraju se kako na binomnom, tako i na negativnom binomnom tining operatoru.

Najpre ćemo u poglavlju 2.1 opisati strukturu modela koji će biti izučavani. Zatim ćemo u poglavlju 2.2 definisati model sa Puasonovim marginalnim raspodelama kod koga su procesi preživljavanja generisani binomnim tining operatorom. Detaljno ćemo diskutovati ocenjivanje nepoznatih parametara ovog modela, gde ćemo se osvrnuti i na asimptotske osobine dobijenih ocena. Kako je ovaj model po strukturi sličan modelu koji su uveli Ristić, Nastić, Jayakumar i Bakouch (2012) prodiskutovaćemo i ocenu nepoznatih parametara ovog modela. U poglavlju 2.3 definisaćemo model sa geometrijskom marginalnom raspodelom kod koga je jedan proces preživljavanja generisan binomnim tining operatorom, dok je drugi proces preživljavanja generisan negativnim binomnim tining operatorom. Za ovakav mešoviti model, diskutovaćemo procenu greške predviđanja gde zasebno merimo grešku nastalu iz procesa preživljavanja, a zasebno iz inovacionog procesa.

2.1 Struktura BINAR(1) modela

Neka je $\{\boldsymbol{Z}_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ dvodimenzionalni nenegativni celobrojni vremenski niz. Da bismo definisali BINAR(1) model uvešćemo slučajnu matricu

$$\boldsymbol{A}_n = \begin{bmatrix} U_{1n} & U_{2n} \\ V_{1n} & V_{2n} \end{bmatrix}, \ \ n \in \mathbb{N} \tag{2.1}$$

gde su U_{1n}, U_{2n}, V_{1n} i V_{2n} slučajne promenljive sa zajedničkim zakonom raspodele

$$P(U_{1n} = \alpha, U_{2n} = 0) = 1 - P(U_{1n} = 0, U_{2n} = \alpha) = p \tag{2.2}$$

$$P(V_{1n} = \beta, V_{2n} = 0) = 1 - P(V_{1n} = 0, V_{2n} = \beta) = q, \tag{2.3}$$

pri čemu su $\alpha, \beta \in (0, 1)$ i $p, q \in [0, 1]$. Za tining operator iskoristićemo oznaku $\star$ i za sada nećemo precizirati da li je reč o binomnom ili negativnom binomnom tining operatoru. Tining operator definisan je brojačkim nizovima koji su nezavisni jedni od drugih, pri čemu su i elementi unutar niza međusobno nezavisni. Binomni tining operator definisan je kao $\alpha \circ X = \sum_{i=1}^{X} B_i$, gde su B_i slučajne promenljive sa Bernulijevom raspodelom i parametrom α, a negativni binomni tining operator kao $\alpha * X = \sum_{i=1}^{X} G_i$, pri čemu su G_i slučajne promenljive sa geometrijskom raspodelom i parametrom $\alpha/(1+\alpha)$. Slučajne promenljive U_{in} nezavisne su od V_{jm} za $i, j \in \{1, 2\}$ i bilo koje $m, n \in \mathbb{N}_0$. Neka je $\boldsymbol{Z}_n = (X_n, Y_n)'$ i $\boldsymbol{e}_n = (\varepsilon_n, \eta_n)'$. Sada, strukturu BINAR(1) modela možemo predstaviti jednačinom

$$\boldsymbol{Z}_n = \boldsymbol{A}_n \star \boldsymbol{Z}_{n-1} + \boldsymbol{e}_n, \ \ n \in \mathbb{N}, \tag{2.4}$$

pri čemu je $\{\boldsymbol{e}_n\}$ dvodimenzionalni inovacioni proces. Elementi slučajnog vektora $\boldsymbol{e}_n$ su međusobno nezavisne slučajne promenljive. Takođe, $\boldsymbol{Z}_m$ i $\boldsymbol{e}_n$ su nezavisni slučajni vektori za $m < n$. Važi još da su $\boldsymbol{A}_n$ i $\boldsymbol{e}_m$ nezavisne za svako $m, n \in \mathbb{N}_0$, kao i da je $\boldsymbol{A}_n$ nezavisno od $\boldsymbol{Z}_m$ za $m < n$. Tining operator između dve matrice, definisan je kao i operator množenja, s tim što se primenjuje operacija tininga umesto operacije množenja, odnosno

$$\boldsymbol{A}_n \star \boldsymbol{Z}_{n-1} \equiv \begin{bmatrix} U_{1n} \star X_{n-1} + U_{2n} \star Y_{n-1} \\ V_{1n} \star X_{n-1} + V_{2n} \star Y_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Ono što možemo zaključiti iz jednačine (2.4) jeste da je ovo proces Markova prvog reda. Za slučajne vektore $\boldsymbol{Z}_n$ pretpostavićemo da važi

$$\boldsymbol{Z}_{n+1} \stackrel{d}{=} \boldsymbol{Z}_n, \ \ \forall n \in \mathbb{N}_0. \tag{2.5}$$

Koeficijenti U_{1n}, U_{2n}, V_{1n} i V_{2n}, koji figurišu u jednačini (2.4), su slučajne promenljive što ovakve modele čini bitno drugačijim od već poznatih višedimenzionalnih celobrojnih autoregresivnih modela, kao što su modeli koje su uveli Latour (1997), Pedeli i Karlis (2013) ili Scotto, Weiß, Silva i Pereira (2014).

Primetimo da je očekivana vrednost slučajne matrice jednaka (2.1)

$$E(\boldsymbol{A}_n) \equiv \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \alpha p & \alpha(1-p) \\ \beta q & \beta(1-q) \end{bmatrix}. \tag{2.6}$$

Na osnovu osobina binomnog i negativnog binomnog tining operatora i nezavisnosti slučajnih promenljivih $\boldsymbol{A}_n$ i $\boldsymbol{Z}_{n-1}$, jasno je da je $E(\boldsymbol{A}_n \star \boldsymbol{Z}_{n-1}) = \boldsymbol{A}E\boldsymbol{Z}_{n-1}$ što za stacionarni vremenski niz $\{\boldsymbol{Z}_n\}$ dalje implicira

$$E\boldsymbol{Z}_n = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}E\boldsymbol{e}_n, \tag{2.7}$$

pod pretpostavkom da je matrica $\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}$ regularna. Latour (1997) je dokazao da je matrica regularna ako su sopstvene vrednosti matrice $\boldsymbol{A}$ unutar jediničnog kruga. Da su sopstvene vrednosti matrice (2.6) unutar jediničnog kruga dokazali su Ristić, Nastić, Jayakumar i Bakouch (2012) na sledeći način. Neka su λ_1 i λ_2 sopstvene vrednosti matrice $\boldsymbol{A}$, takve da je $\lambda_1 \leq \lambda_2$. Ako je $\boldsymbol{I}$ jedinična matrica dimenzije 2×2, sopstvene vrednosti nalazimo kao rešenja jednačine $det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = 0$, iz koje dobijamo

$$\lambda^2 - \lambda(\alpha p + \beta(1-q)) + \alpha\beta(p-q) = 0.$$

Na osnovu Vijetovih formula imamo da je $\lambda_1 + \lambda_2 = \alpha p + \beta(1-q)$ i $\lambda_1\lambda_2 = \alpha\beta(p-q)$. Kako su $\alpha, \beta \in (0,1)$ i $p, q \in [0,1]$ to za prvu jednačinu važi da je $\lambda_1 + \lambda_2 > 0$. Kako je po pretpostavci $\lambda_1 < \lambda_2$ to sledi da je $\lambda_2 > 0$. Dalje imamo da je, $(1+\lambda_1)(1+\lambda_2) = 1 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_1\lambda_2 = 1 - \alpha\beta(1-p) + \alpha p + \beta(1+\alpha)(1-q) > 0$, pa kako je $\lambda_2 > 0$ to mora da je $\lambda_1 > -1$. Dalje, ako na osnovu nejednačine $(1-\lambda_1)(1-\lambda_2) = 1 - \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_1\lambda_2 = (1-\alpha)(1-\beta(1-q)) + \alpha(1-p)(1-\beta) > 0$, pretpostavimo da je $1 - \lambda_1 < 0$ i $1 - \lambda_2 < 0$, doći ćemo do kontradikcije zbog nejednačine $\lambda_1 + \lambda_2 < \alpha + \beta < 2$. Dakle, važi da je $\lambda_1 < 1$ i $\lambda_2 < 1$. Na osnovu svega navedenog, sledi da je $|\lambda_1| < 1$ i $0 < \lambda_2 < 1$.

Možemo zaključiti da je matrica $\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}$ regularna pa se srednja vrednost procesa (2.4) može izračunati jednačinom (2.7).

Za poznatu vrednost slučajnog vektora $\boldsymbol{Z}_n$, uslovno očekivanje slučajnog vektora $\boldsymbol{Z}_{n+k}$, $k \in \mathbb{N}_0$, računa se kao

$$E(\boldsymbol{Z}_{n+k}|\boldsymbol{Z}_n) = E(\boldsymbol{A}_{n+k} \star \boldsymbol{Z}_{n+k-1} + \boldsymbol{e}_{n+k}|\boldsymbol{Z}_n)$$

$$
\begin{aligned}
&= \boldsymbol{A}E(\boldsymbol{Z}_{n+k-1}|\boldsymbol{Z}_n) + \boldsymbol{\mu}_e = \dots \\
&= \boldsymbol{A}^k\boldsymbol{Z}_n + (\boldsymbol{A}^{k-1} + \boldsymbol{A}^{k-2} + \dots + \boldsymbol{I})\boldsymbol{\mu}_e \\
&= \boldsymbol{A}^k\boldsymbol{Z}_n + (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}^k)\boldsymbol{\mu}_e \\
&= \boldsymbol{A}^k\boldsymbol{Z}_n + (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}^k)(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{\mu} \qquad (2.8)
\end{aligned}
$$

gde je $\boldsymbol{\mu}_e = E\boldsymbol{e}_n$ i $\boldsymbol{\mu} = E\boldsymbol{Z}_n$. Kako smo malopre konstatovali, sopstvene vrednosti matrice $\boldsymbol{A}$ su unutar jediničnog kruga, što za posledicu ima da $\boldsymbol{A}^k \to \boldsymbol{0}$ kad $k \to \infty$. To dalje implicira da je uslovno očekivanje jednako bezuslovnom kada $k \to \infty$. Napomenimo da marginalni vremenski nizovi nisu klasični autoregresivni nizovi, ali i dalje imaju ovu osobinu.

Pre nego što prodiskutujemo kovarijacionu strukturu BINAR(1) modela navešćemo jednu lemu vezanu za osobinu tining operatora.

Lema 2.1. *Za slučajnu matricu $\boldsymbol{A}_{n+1}$ datu jednačinom (2.1) i slučajne vektore $\boldsymbol{Z}_n = (X_n, Y_n)'$ i $\boldsymbol{Z}_m = (X_m, Y_m)'$, $m < n$, važi*

(a) $E(\boldsymbol{A}_{n+1} \star \boldsymbol{Z}_n) = \boldsymbol{A}E(\boldsymbol{Z}_n)$, *gde je* $\boldsymbol{A} = E(\boldsymbol{A}_{n+1}) = \begin{bmatrix} \alpha p & \alpha(1-p) \\ \beta q & \beta(1-q) \end{bmatrix}$.

(b) $E\left((\boldsymbol{A}_{n+1} \star \boldsymbol{Z}_n)\boldsymbol{W}'\right) = \boldsymbol{A}E(\boldsymbol{Z}_n\boldsymbol{W}')$ *gde je slučajni vektor* $\boldsymbol{W}$ *nezavisan od* $\boldsymbol{A}_{n+1}$.

(c) $E((\boldsymbol{A}_{n+1} \star \boldsymbol{Z}_n) \cdot \boldsymbol{Z}_m') = \boldsymbol{A}E(\boldsymbol{Z}_n \cdot \boldsymbol{Z}_m')$

(d) $E\left(\boldsymbol{W}(\boldsymbol{A}_{n+1} \star \boldsymbol{Z}_n)'\right) = E(\boldsymbol{W}\boldsymbol{Z}_n')\boldsymbol{A}'$ *gde je slučajni vektor* $\boldsymbol{W}$ *nezavisan od* $\boldsymbol{A}_{n+1}$.

(e) $E(\boldsymbol{A}_{n+1} \star (\boldsymbol{Z}_m \cdot \boldsymbol{Z}_n')) = \boldsymbol{A}E(\boldsymbol{Z}_m \cdot \boldsymbol{Z}_n')$

(f) $E\Big((\boldsymbol{A}_{n+1} \star \boldsymbol{Z}_n)(\boldsymbol{A}_{n+1} \star \boldsymbol{Z}_n)'\Big) = \boldsymbol{A}E(\boldsymbol{Z}_n\boldsymbol{Z}_n')\boldsymbol{A}' + \boldsymbol{C}$, *gde je* $\boldsymbol{C}$ *matrica dimenzije* 2×2 *čiji su elementi* $c_{12} = 0$, $c_{21} = 0$ *i*

$$
\begin{aligned}
c_{11} &= \alpha^2 p(1-p)E(X_n - Y_n)^2 + \alpha(1 \mp \alpha)(pEX_n + (1-p)EY_n) \\
c_{22} &= \beta^2 q(1-q)E(X_n - Y_n)^2 + \beta(1 \mp \beta)(qEX_n + (1-q)EY_n),
\end{aligned}
$$

pri čemu se za izračunavanje elemenata c_{11} i c_{22} uzima znak minus za binomni, a znak plus za negativni binomni tining operator.

Dokaz: Dokaz prvih pet osobina sledi direktno iz osobina tining operatora, koja su detaljno navedena u Nastić (2011). Osobinu (f) izvešćemo posmatrajući po elementima matrice na levoj i desnoj strani nejednakosti. Kako je izračunavanje slično ali ne i identično u zavisnosti da li koristimo binomni ili negativni binomni tining operator, uveli smo oznaku " $\underset{*}{\circ}$ ". Tako u izvođenju za binomni tining operator pratimo znak $-$ u oznaci $\mp$, odnosno znak $+$ za negativni binomni tining operator. Imamo da je

$$
\begin{aligned}
&E(U_{1n+1} \underset{*}{\circ} X_n + U_{2n+1} \underset{*}{\circ} Y_n) \\
&\qquad = \alpha^2 pEX_n^2 + \alpha p(1 \mp \alpha)EX_n + \alpha^2(1-p)EY_n^2 + \alpha(1-p)(1 \mp \alpha)EY_n \\
&\qquad + \alpha^2 p^2 EX_n^2 + 2\alpha^2 p(1-p)EX_nY_n + \alpha^2(1-p)^2EY_n^2 \\
&\qquad - \alpha^2 p^2 EX_n^2 - 2\alpha^2 p(1-p)EX_nY_n - \alpha^2(1-p)^2EY_n^2 \\
&\qquad = \alpha^2 p^2 EX_n^2 + 2\alpha^2 p(1-p)EX_nY_n + \alpha^2(1-p)^2EY_n^2 \\
&\qquad + \alpha^2 p(1-p)E(X_n - Y_n)^2 + \alpha(1 \mp \alpha)(pEX_n + (1-p)EY_n).
\end{aligned}
$$

Zbir prva tri sabirka jednak je elementu na poziciji $(1,1)$ matrice $\boldsymbol{A}E(\boldsymbol{Z}_n\boldsymbol{Z}_n')\boldsymbol{A}'$, dok je zbir četvrtog i petog sabirka jednak elementu c_{11}. Dokaz je analogan za drugi element na glavnoj dijagonali. Što se tiče elemenata van glavne dijagonale, tu imamo da je

$$
\begin{aligned}
&E\left((U_{1n+1} \star X_n + U_{2n+1} \star Y_n)(V_{1n+1} \star X_n + V_{2n+1} \star Y_n)\right) \\
&= \alpha\beta pqEX_n^2 + \alpha\beta(1-p)(1-q)EY_n^2 + \alpha\beta E(X_nY_n)(p+q-2pq),
\end{aligned}
$$

što su i elementi van glavne dijagonale matrice $\boldsymbol{A}E(\boldsymbol{Z}_n\boldsymbol{Z}_n')\boldsymbol{A}'$. $\square$

Na osnovu pomenute leme sledi da se kovarijacija, na rastojanju k, između dva elementa stacionarnog slučajnog niza $\{\boldsymbol{Z}_n\}$ može izraziti kao

$$
\begin{aligned}
Cov(\boldsymbol{Z}_{n+k}, \boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{n}}) &= Cov(\boldsymbol{A}_{n+k} \star \boldsymbol{Z}_{n+k-1}, \boldsymbol{Z}_n) \\
&= \boldsymbol{A}Cov(\boldsymbol{Z}_{n+k-1}, \boldsymbol{Z}_n) = \ldots = \boldsymbol{A}^k Var(\boldsymbol{Z}_n).
\end{aligned} \tag{2.9}
$$

Možemo zaključiti da kovarijacija (pa i korelacija) između članova vremenskog niza $\{\boldsymbol{Z}_n\}$ teži nuli sa porastom rastojanja između njih.

Još jedan bitan zaključak može se izvesti iz jednačine (2.9). Naime, kako je matrica $\boldsymbol{A}$ kvadratna (u ovom slučaju dimenzije 2×2) to, prema teoremi Cayley-Hamilton, zaključujemo da postoje konstante ξ_1 i ξ_2 takve da je $\boldsymbol{A}^2 - \xi_1\boldsymbol{A} - \xi_2\boldsymbol{I} = 0$. Ako jednačinu pomnožimo sleva matricom $Var(\boldsymbol{Z}_n)$ dobićemo

$$
Cov(\boldsymbol{Z}_{n+2}, \boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{n}}) - \xi_1 Cov(\boldsymbol{Z}_{n+1}, \boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{n}}) - \xi_2 Var(\boldsymbol{Z}_n) = \boldsymbol{0}
$$

što dalje implicira da vremenski nizovi $\{X_n\}$ i $\{Y_n\}$ imaju kovarijacionu strukturu koja odgovara ARMA(2,1) procesima.

2.2 Model sa binomnim tining operatorom i Puasonovim marginalnim raspodelama

U ovom poglavlju definisaćemo dvodimenzionalni autoregresivni model za nenegativne celobrojne vremenske nizove sa Puasonovim marginalnim raspodelama (BVPOINAR(1)). Model je baziran na binomnom tining operatoru. Diskutovaćemo statističke osobine modela, a biće dokazana stacionarnost i ergodičnost. Poseban akcenat je stavljen na ocenjivanje nepoznatih parametara. U tu svrhu, razmatraćemo izmenjeni metod najmanjih kvadrata, Yule-Walker-ov metod, kao i metod uslovne maksimalne verodostojnosti. Dokazaćemo asimptotsku ekvivalentnost između ocena nepoznatih parametara dobijenih modifikovanom metodom najmanjih kvadrata i Yule-Walker-ovom metodom. Takođe izvešćemo asimptotsku raspodelu ocena dobijenih modifikovanom metodom najmanjih kvadrata. Posebnu pažnju posvetićemo primeni modela na stvarnim podacima. Dobijene rezultate prodiskutovaćemo uz upoređivanje sa nekim već poznatim modelima.

2.2.1 Definicija BVPOINAR(1) modela

Neka je $\{(X_n, Y_n), n \geq 0\}$ dvodimenzionalni nenegativni celobrojni vremenski niz sa jednakim marginalnim Puasonovim raspodelama $\mathcal{P}(\lambda)$. BVPOINAR(1) model definisan je sledećim jednačinama

$$X_n = \begin{cases} \alpha \circ X_{n-1} + \varepsilon_n, & \text{s.v. } p, \\ \alpha \circ Y_{n-1} + \varepsilon_n, & \text{s.v. } 1-p, \end{cases} \tag{2.10}$$

$$Y_n = \begin{cases} \beta \circ X_{n-1} + \eta_n, & \text{s.v. } q, \\ \beta \circ Y_{n-1} + \eta_n, & \text{s.v. } 1-q, \end{cases} \tag{2.11}$$

(s.v. skraćeno od "sa verovatnoćom") pri čemu su $p,\ q \in [0,1]$, $\alpha,\ \beta \in (0,1)$, dok su $\{\varepsilon_n,\ n \geq 1\}$ i $\{\eta_n,\ n \geq 1\}$ međusobno nezavisni vremenski nizovi čiji su elementi nezavisne jednako raspodeljene slučajne promenljive. Još važi da je slučajni vektor (ε_n, η_n) nezavisan od (X_m, Y_m), za $m < n$. Binomni tining operator definisan je kao $\alpha \circ X = \sum_{i=1}^{X} G_i$ i $\beta \circ X = \sum_{i=1}^{X} W_i$, gde su $\{G_i\}$ i $\{W_i\}$ brojački nizovi nezavisnih jednako raspodeljenih slučajnih promenljivih sa Bernulijevom raspodelom sa parametrima α i β, redom. Važi još da su slučajne promenljive G_i i W_j međusobno nezavisne i nezavisne su od X_n i Y_n sa svako $i, j, n \geq 0$. Analogna definicija važi za $\alpha \circ Y$ i $\beta \circ Y$. Svi brojački nizovi u $\alpha \circ X_{n-1}$, $\alpha \circ Y_{n-1}$, $\beta \circ X_{n-1}$ i $\beta \circ Y_{n-1}$ su međusobno nezavisni.

Sledeća teorema daje nam potrebne i dovoljne uslove da vremenski niz $\{(X_n, Y_n), n \geq 0\}$ bude stacionaran sa Puasonovim marginalnim raspodelama.

Teorema 2.2 (Nastić, Ristić i Popović (2014), Teorema 1). *Neka je* $\lambda > 0$, α, $\beta \in (0,1)$ *i* $X_0 \stackrel{d}{=} Y_0 \stackrel{d}{=} \mathcal{P}(\lambda)$. *Dvodimenzionalni vremenski niz* $\{(X_n, Y_n), n \geq 0\}$, *dat jednačinama* (2.10) *i* (2.11), *je stacionaran sa* $\mathcal{P}(\lambda)$ *marginalnim raspodelama ako i samo ako uzajamno nezavisni nizovi nezavisnih jednako raspodeljenih slučajnih promenljivih* $\{\varepsilon_n,\ n \geq 1\}$ *i* $\{\eta_n,\ n \geq 1\}$ *imaju raspodelu* $\mathcal{P}(\lambda(1-\alpha))$ *i* $\mathcal{P}(\lambda(1-\beta))$, *redom.*

Dokaz: Pretpostavimo da su ε_n i η_n sa Puasonovom raspodelom sa parametrima $\lambda(1-\alpha)$ i $\lambda(1-\beta)$, redom, što ćemo nadalje označavati kao $\varepsilon_n \sim \mathcal{P}(\lambda(1-\alpha))$ i $\eta_n \sim \mathcal{P}(\lambda(1-\beta))$. Tada je $\phi_\varepsilon(s) = e^{\lambda(1-\alpha)(s-1)}$. Kako je po pretpostavci $X_0 \sim \mathcal{P}(\lambda)$, to je $\Phi_{X_0}(s) = e^{\lambda(s-1)}$. Na osnovu jednačine (2.10), pretpostavke da je $X_0 \stackrel{d}{=} Y_0$ i pretpostavke o nezavisnosti slučajnih promenljivih X_0 i ε_1 imamo da je

$$\Phi_{X_1}(s) = \Phi_{\alpha \circ X_0}(s)\Phi_\varepsilon(s) = \Phi_{X_0}(1-\alpha+\alpha s)\Phi_\varepsilon(s) = e^{\lambda(1-\alpha+\alpha s-1)}e^{\lambda(1-\alpha)(s-1)} = e^{\lambda(s-1)}.$$

Zaključujemo da je i $X_1 \sim \mathcal{P}(\lambda)$. Indukcijom pokazujemo da je $X_n \sim \mathcal{P}(\lambda)$ za svako $n \in \mathbb{N}_0$. Dokaz je analogan za $\{Y_n\}$.

Pretpostavimo sada da je vremenski niz $\{(X_n, Y_n), n \geq 0\}$ stacionaran sa marginalnim raspodelama $\mathcal{P}(\lambda)$. Na osnovu nezavisnosti slučajnih promenljivih X_{n-1} i ε_n, dobijamo da je $\Phi_X(s) = \Phi_X(1-\alpha+\alpha s)\Phi_{\varepsilon_n}(s)$. To dalje implicira da je

$$\Phi_{\varepsilon_n}(s) = \frac{\Phi_X(s)}{\Phi_X(1-\alpha+\alpha s)} = e^{\lambda(1-\alpha)(s-1)}.$$

Dakle $\varepsilon_n \sim \mathcal{P}(\lambda(1-\alpha))$. Analogno se izvodi dokaz za η_n. $\square$

Neka slučajne promenljive X_n i Y_n imaju jednake raspodele za $n \geq 0$ i neka su slučajne promenljive ε_n i η_n raspodeljene kao u teoremi 2.2. Tada slučajne promenljive X_n i Y_n, kad $n \to \infty$, konvergiraju u raspodeli ka slučajnim promenljivama sa Puasonovom raspodelom $\mathcal{P}(\lambda)$. Ako je $\Phi_{X_n}(s)$ funkcija generatrisa verovatnoća slučajne promenljive X_n, tada važi $\Phi_{X_n}(s) = \Phi_{Y_n}(s)$. To dalje implicira

$$\begin{aligned}
\Phi_{X_n}(s) &= (p\Phi_{X_{n-1}}(1-\alpha+\alpha s) + (1-p)\Phi_{Y_{n-1}}(1-\alpha+\alpha s))\Phi_\varepsilon(s) \\
&= \Phi_{X_{n-1}}(1-\alpha+\alpha s)\Phi_\varepsilon(s) \\
&= \Phi_{X_{n-2}}(1-\alpha^2+\alpha^2 s)\Phi_\varepsilon(1-\alpha+\alpha s)\Phi_\varepsilon(s) \\
&= \Phi_{X_0}(1-\alpha^n+\alpha^n s)\prod_{k=0}^{n-1}\Phi_\varepsilon(1-\alpha^k+\alpha^k s) \\
&= \Phi_{X_0}(1-\alpha^n+\alpha^n s)\prod_{k=0}^{n-1}e^{\lambda(1-\alpha)(s-1)\alpha^k} \\
&= \Phi_{X_0}(1-\alpha^n+\alpha^n s)e^{\lambda(s-1)(1-\alpha^n)} \longrightarrow e^{\lambda(s-1)},\ n \to \infty.
\end{aligned}$$

Zaključak sledi na osnovu raspodele slučajne promenljive ε_n date teoremom 2.2 i činjenice da je $0 < \alpha < 1$. Prema tome, ako slučajne promenljive X_n i Y_n mogu da se predstave jednačinama (2.10) i (2.11) i imaju proizvoljne, ali jednake raspodele za $n \geq 0$, tada za $\varepsilon_n \sim \mathcal{P}((1-\alpha)\lambda)$ važi da će X_n imati Puasonovu raspodelu sa parametrom λ za dovoljno veliko n. Isti zaključak važi i za Y_n.

Napomena 1. *Metodologiju koju smo upotrebili da konstruišemo BVPOINAR(1) model možemo primeniti pri konstrukciji mnogih drugih modela, koji nisu bazirani samo na binomnom tining operatoru i koji mogu imati marginalne raspodele koje nisu Puasonova ili geometrijska. Recimo neka su $\alpha\odot$ i $\beta\odot$ tining operatori čiji su brojački nizovi $\{G_i\}$ i $\{W_i\}$ nezavisni i imaju istu raspodelu sa parametrima α i β, redom. Ako pretpostavimo da X_0 i Y_0 imaju istu raspodelu, tada je dvodimenzionalni stacionarni vremenski niz $\{(X_n, Y_n),\ n \geq 0\}$, dat jednačinama (2.10) i (2.11), sa istim marginalnim raspodelama ako i samo ako su $\{\varepsilon_n,\ n \geq 1\}$ i $\{\eta_n,\ n \geq 1\}$ uzajamno nezavisni vremenski nizovi, nezavisnih jednako raspodeljenih slučajnih promenljivih čije su funkcije generatrisa verovatnoća date jednačinama*

$$\Phi_\varepsilon(s) = \frac{\Phi_X(s)}{\Phi_X(\Phi_G(s))} \ \ i \ \ \Phi_\eta(s) = \frac{\Phi_X(s)}{\Phi_X(\Phi_W(s))},$$

pri čemu još važi da je (ε_n, η_n) nezavisno od (X_m, Y_m) za svako $m < n$. Za konkretan izbor tining operatora i marginalnih raspodela mora se pokazati da su raspodele slučajnih promenljivih ε_n i η_n dobro definisane navedenim funkcijama generatrisa verovatnoća.

Kovarijaciona struktura procesa data je jednačinom (2.9) pa ćemo se ovde osvrnuti samo na elemente kovarijacione matrice $Var(\boldsymbol{Z}_n)$.

Lema 2.3. *Kovarijaciona matrica slučajne promenljive $\boldsymbol{Z}_n = (X_n, Y_n)'$ data je kao*

$$Var(\boldsymbol{Z}_n) = \lambda \begin{bmatrix} 1 & v \\ v & 1 \end{bmatrix},$$

gde je $v = \frac{\alpha\beta(pq+(1-p)(1-q))}{1-\alpha\beta(p(1-q)+(1-p)q)}$.

Dokaz: Kako su X_n i Y_n slučajne promenljive sa Puasonovom raspodelom i parametrom λ, jasno je da su dijagonalni elementi kovarijacione matrice jednaki λ. Na osnovu osobina binomnog tining operatora i pretpostavke o stacionarnosti vremenskog niza $\{(X_n, Y_n)\}$, za elemente van glavne dijagonale važi

$$\begin{aligned} Cov(X_n, Y_n) = \alpha\beta \{ & pqVar(X_{n-1}) + [p(1-q) + (1-p)q]Cov(X_{n-1}, Y_{n-1}) \\ & + (1-p)(1-q)Var(Y_{n-1})\}. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Kako je $Var(X_n) = Var(Y_n) = \lambda$ i važi da je $Cov(X_n, Y_n) = Cov(X_{n-1}, Y_{n-1})$, to iz jednačine (2.12) dobijamo

$$Cov(X_n, Y_n) = \frac{\lambda\alpha\beta(pq + (1-p)(1-q))}{1 - \alpha\beta(p(1-q) + (1-p)q)} = \lambda v, \tag{2.13}$$

čime je lema dokazana. $\square$

Lema 2.4. *Koeficijent korelacije izmedju nizova* $\{X_n\}$ *i* $\{Y_n\}$ *uzima vrednosti iz intervala* $[0, 1)$.

Dokaz: Jednačina (2.13) se može zapisati kao $Cov(X_n, Y_n) = \lambda\rho$ gde ρ predstavlja koeficijent korelacije između slučajnih nizova $\{X_n\}$ i $\{Y_n\}$. Za imenilac u jednačini (2.13) važi, s obzirom na ograničenja parametara, da je

$$1 - \alpha\beta(p(1-q) + (1-p)q) > 1 - (p(1-q) + (1-p)q) \geq 1 - (p + 1 - p) = 0,$$

pa je koeficijent korelacije, ρ, uvek nenegativan. Takođe, kako je $1 - \frac{\alpha\beta(pq+(1-p)(1-q))}{1-\alpha\beta(p(1-q)+(1-p)q)} = \frac{1-\alpha\beta}{1-\alpha\beta(p(1-q)+(1-p)q)} > 0$, možemo zaključiti da je $0 \leq \rho < 1$. $\square$

Ako iskoristimo slučajne promenljive definisane jednačinama (2.2) i (2.3), možemo model dat jednačinama (2.10) i (2.11) da zapišemo kao

$$\begin{aligned} X_n &= U_{1n} \circ X_{n-1} + U_{2n} \circ Y_{n-1} + \varepsilon_n, \quad n \geq 1, \\ Y_n &= V_{1n} \circ X_{n-1} + V_{2n} \circ Y_{n-1} + \eta_n, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

BVPOINAR(1) model predstavljen na ovaj način podseća na model koji su uveli Pedeli i Karlis (2013) (BVKPINAR(1))gde je evolucija vremenskih nizova data jednačinama

$$\begin{aligned} X_n &= \alpha \circ X_{n-1} + \beta \circ Y_{n-1} + \varepsilon_n, \quad n \geq 1, \\ Y_n &= \gamma \circ Y_{n-1} + \delta \circ X_{n-1} + \eta_n, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Međutim, ovi modeli su definisani na potpuno drugačiji način. Dok je kod BVPOINAR(1) modela uvedena pretpostavka o marginalnim raspodelama nizova pa je za tu marginalnu raspodelu izvedena raspodela inovacionih procesa, kod BVKPINAR(1) modela polazi se od zajedničke raspodele inovacionih procesa. To za posledicu ima da su kod BVKPINAR(1) modela zavisni inovacioni procesi, što nije slučaj kod BVPOINAR(1) modela. Još jedna bitna razlika je ta što je BVPOINAR(1) model definisan preko slučajnih koeficijenata, dok su kod drugog modela koeficijenti konstante.

U sledećem koraku izvešćemo zajedničku uslovnu raspodelu verovatnoća za slučajne promenljive X_n i Y_n kada su poznate realizacije slučajnih promenljivih X_{n-1} i Y_{n-1}.

Dokažimo najpre sledeću lemu.

Lema 2.5. *Slučajne promenljive X_n i Y_n, definisane jednačinama (2.10) i (2.11) redom, su nezavisne za poznate realizacije slučajnih promenljivih X_{n-1} i Y_{n-1}, $n \in \mathbb{N}$.*

Dokaz: Neka je $X_{n-1} = u$ i $Y_{n-1} = v$. Tada važi

$$\begin{aligned}
P(X_n = x, Y_n = y | X_{n-1} = u, Y_{n-1} = v)& \\
&= pqP(\alpha \circ X_{n-1} + \varepsilon_n = x, \beta \circ X_{n-1} + \eta_n = y | X_{n-1} = u, Y_{n-1} = v) \\
&+ p(1-q)P(\alpha \circ X_{n-1} + \varepsilon_n = x, \beta \circ Y_{n-1} + \eta_n = y | X_{n-1} = u, Y_{n-1} = v) \\
&+ (1-p)qP(\alpha \circ Y_{n-1} + \varepsilon_n = x, \beta \circ X_{n-1} + \eta_n = y | X_{n-1} = u, Y_{n-1} = v) \\
&+ (1-p)(1-q)P(\alpha \circ Y_{n-1} + \varepsilon_n = x, \beta \circ Y_{n-1} + \eta_n = y | X_{n-1} = u, Y_{n-1} = v).
\end{aligned}$$

Kako su brojački nizovi u $\alpha \circ X_{n-1}$, $\alpha \circ Y_{n-1}$, $\beta \circ X_{n-1}$ i $\beta \circ Y_{n-1}$ nezavisni za poznate vrednosti X_{n-1} i Y_{n-1} i kako su slučajne promenljive ε_n i η_n međusobno nezavisne i nezavisne od X_{n-1} i Y_{n-1} to imamo

$$\begin{aligned}
&P(\alpha \circ X_{n-1} + \varepsilon_n = x, \beta \circ X_{n-1} + \eta_n = y | X_{n-1} = u, Y_{n-1} = v) \\
&= \sum_{i=0}^{\min(u,x)} \sum_{j=0}^{\min(u,y)} P(\alpha \circ X_{n-1} = i, \varepsilon_n = x - i, \beta \circ X_{n-1} = j, \eta_n = y - j | X_{n-1} = u, Y_{n-1} = v) \\
&= \sum_{i=0}^{\min(u,x)} P(\alpha \circ X_{n-1} = i, \varepsilon_n = x - i | X_{n-1} = u, Y_{n-1} = v) \\
&\times \sum_{j=0}^{\min(u,y)} P(\beta \circ X_{n-1} = j, \eta_n = y - j | X_{n-1} = u, Y_{n-1} = v).
\end{aligned}$$

Na sličan način i preostala tri sabirka polazne jednačine možemo zapisati kao proizvod. Tako dobijamo da je $P(X_n = x, Y_n = y | X_{n-1} = u, Y_{n-1} = v) = P(X_n = x | X_{n-1} = u, Y_{n-1} = v)P(Y_n = y | X_{n-1} = u, Y_{n-1} = v)$ čime smo dokazali tvrđenje. □

Na osnovu definicije nizova slučajnih promenljivih $\{X_n\}$ i $\{Y_n\}$, imamo da važi

$$P(X_n = x | X_{n-1} = u, Y_{n-1} = v) = pP_{X_{n-1}}(x|u, v) + (1-p)P_{Y_{n-1}}(x|u, v),$$

gde su

$$P_{X_{n-1}}(x|u, v) = P(\alpha \circ X_{n-1} + \varepsilon_t = x | X_{n-1} = u, Y_{n-1} = v)$$

i

$$P_{Y_{n-1}}(x|u, v) = P(\alpha \circ Y_{n-1} + \varepsilon_n = x | X_{n-1} = u, Y_{n-1} = v).$$

Ove raspodele verovatnoća dobijamo iz činjenica da $\alpha \circ X_{n-1}$, pod pretpostavkom $X_{n-1} = u$, ima binomnu raspodelu sa parametrima u i α, $\mathcal{B}(u, \alpha)$, a takođe i $\alpha \circ Y_{n-1}$ pod pretpostavkom

$Y_{n-1} = v$ ima raspodelu $\mathcal{B}(v, \alpha)$. Dalje, ε_n je nezavisno od X_{n-1}, Y_{n-1} i η_n, a raspodela verovatnoća ove slučajne promenljive data je teoremom 2.2. Kako W_i imaju Bernulijeve raspodele sa parametrom α, to slučajna promenljiva X_n, za dato $X_{n-1} = u$ i $Y_{n-1} = v$, ima raspodelu koja je konvolucija Puasonove i binomne i data je jednačinom

$$\begin{aligned} P_{X_{n-1}}(x|u,v) &= \sum_{k=0}^{u} P(k+\varepsilon_n = x) P\left(\sum_{i=1}^{u} W_i = k\right) \\ &= e^{-\lambda(1-\alpha)} \sum_{k=0}^{\min(u,x)} \frac{(\lambda(1-\alpha))^{x-k}}{(x-k)!} \binom{u}{k} \alpha^k (1-\alpha)^{u-k} \\ &= (\lambda(1-\alpha))^x e^{-\lambda(1-\alpha)} \sum_{k=0}^{\min(u,x)} \binom{u}{k} \frac{\alpha^k (1-\alpha)^{u-2k}}{\lambda^k (x-k)!}. \end{aligned}$$

Na isti načim dobijamo uslovnu raspodelu slučajne promenljive Y_n za poznato X_{n-1} i Y_{n-1}, pa je

$$P_{Y_{n-1}}(x|u,v) = (\lambda(1-\alpha))^x e^{-\lambda(1-\alpha)} \sum_{k=0}^{\min(v,x)} \binom{v}{k} \frac{\alpha^k (1-\alpha)^{v-2k}}{\lambda^k (x-k)!}.$$

Prema tome, uslovna raspodela verovatnoća dvodimenzionalne slučajne promenljive (X_n, Y_n) za dato (X_{n-1}, Y_{n-1}) dobija se kao

$$\begin{aligned} & P(X_n = x, Y_n = y | X_{n-1} = u, Y_{n-1} = v) = \lambda^{x+y} (1-\alpha)^x (1-\beta)^y e^{-\lambda(2-\alpha-\beta)} \\ & \times \left(p \sum_{k_1=0}^{\min(u,x)} \binom{u}{k_1} \frac{\alpha^{k_1} (1-\alpha)^{u-2k_1}}{\lambda^{k_1} (x-k_1)!} + (1-p) \sum_{k_2=0}^{\min(v,x)} \binom{v}{k_2} \frac{\alpha^{k_2} (1-\alpha)^{v-2k_2}}{\lambda^{k_2} (x-k_2)!} \right) \\ & \times \left(q \sum_{l_1=0}^{\min(u,y)} \binom{u}{l_1} \frac{\beta^{l_1} (1-\beta)^{u-2l_1}}{\lambda^{l_1} (y-l)!} + (1-q) \sum_{l_2=0}^{\min(v,y)} \binom{v}{l_2} \frac{\beta^{l_2} (1-\beta)^{v-2l_2}}{\lambda^{l_2} (y-l_2)!} \right). \end{aligned} \tag{2.14}$$

Uslovno očekivanje dvodimenzionalne slučajne promenljive (X_{n+k}, Y_{n+k}) za k-koraka dato je jednačinom (2.8). Kako je od posebnog značaja uslovno očekivanje za jedan korak unapred navešćemo ga za posmatrani model i ono glasi

$$E(X_{n+1}|X_n, Y_n) = \alpha p X_n + \alpha(1-p) Y_n + \lambda(1-\alpha) \tag{2.15}$$

$$E(Y_{n+1}|X_n, Y_n) = \beta q X_n + \beta(1-q) Y_n + \lambda(1-\beta). \tag{2.16}$$

Fokusirajmo se sada na uslovnu disperziju slučajnih promenljivih X_{n+1} i Y_{n+1} u odnosu na X_n, Y_n. Uslovni moment drugog reda dobićemo iz jednačina (2.15) i (2.16) i osobine (v) za binomni tining operator koju su pokazali Al-Osh i Alzaid (1987). Tako dobijamo

$$E(X_{n+1}^2|X_n, Y_n) \quad = \quad pE((\alpha \circ X_n + \varepsilon_{n+1})^2 | X_n, Y_n) + (1-p) E((\alpha \circ Y_n + \varepsilon_{n+1})^2 | X_n, Y_n)$$

$$
\begin{aligned}
= \quad & \alpha^2 p X_n^2 + \alpha^2(1-p)Y_n^2 + \alpha(1-\alpha)p(1+2\lambda)X_n \\
& +\alpha(1-\alpha)(1-p)(1+2\lambda)Y_n + \lambda(1-\alpha) + \lambda^2(1-\alpha)^2.
\end{aligned}
$$

Na osnovu ovog rezultata jednostavno se izračunava da je

$$
Var(X_{n+1}|X_n, Y_n) = p(1-p)\alpha^2(X_n - Y_n)^2 + \alpha(1-\alpha)(pX_n + (1-p)Y_n) + \lambda(1-\alpha), \quad (2.17)
$$

a na sličan način dobijamo

$$
Var(Y_{n+1}|X_n, Y_n) = q(1-q)\beta^2(X_n - Y_n)^2 + \beta(1-\beta)(qX_n + (1-q)Y_n) + \lambda(1-\beta). \quad (2.18)
$$

Primetimo da uslovna disperzija za X_{n+1} i Y_{n+1} nije linearna funkcija od X_n i Y_n.

2.2.2 Ocenjivanje nepoznatih parametara

U ovom poglavlju bavićemo se ocenjivanjem nepoznatih parametara modela. Dokazaćemo asimptotsku raspodelu dobijenih ocena. Metodi za ocenjivanje razmatrani u ovom poglavlju biće testirani na simuliranim skupovima podataka. Pored BVPOINAR(1) modela, posmatraćemo i njemu sličan model BVNGINAR(1) koji su definisali Ristić, Nastić, Jayakumar i Bakouch (2012), a predstavili smo ga u sekciji 1.4.1.

Kako su ovo autoregresivni modeli prvog reda, možemo očekivati da metodom Yule-Walker-a (YW) dobijemo dobre rezultate, s obzirom da ćemo zamenom autokovarijacije sa korakom 0 i 1 u jednačini Yule-Walker-a odgovarajućim uzoračkim autokovarijacijama dobiti linearni sistem jednačina po nepoznatim parametrima. Pored YW razmatraćemo još i modifikovani metod uslovnih najmanjih kvadrata (MCLS). Za oba pristupa uvešćemo novu parametarizaciju $\theta_1 = \alpha p$, $\theta_2 = \alpha(1-p)$, $\theta_3 = \beta q$ i $\theta_4 = \beta(1-q)$. Zbog iste kovarijacione strukture pomenuta dva modela imaju iste jednačine za ocenu parametara YW i MCLS metodama. Ocene metodom YW dobićemo pomoću jednačine (2.19), dok ćemo za MCLS koristiti jednačinu (2.21).

Yule-Walker-ov metod (Nastić, Ristić i Popović (2014))

Pretpostavimo da je dat dvodimenzionalni slučajni uzorak $(X_1, Y_1), \cdots, (X_n, Y_n)$. Označimo kovarijacione funkcije kao $\gamma_{XX}(k) = Cov(X_n, X_{n-k})$, $\gamma_{XY}(k) = Cov(X_n, Y_{n-k})$, $\gamma_{YX}(k) = Cov(Y_n, X_{n-k})$ i $\gamma_{YY}(k) = Cov(Y_n, Y_{n-k})$. Ove vrednosti date su jednačinom (2.9). Za $k = 1$ dobijamo sistem od dve linearne jednačine sa dve nepoznate

$$
\begin{aligned}
\gamma_{XX}(1) &= \theta_1\gamma_{XX}(0) + \theta_2\gamma_{YX}(0), \\
\gamma_{XY}(1) &= \theta_1\gamma_{XY}(0) + \theta_2\gamma_{YY}(0).
\end{aligned}
$$

Rešavanjem sistema dobijamo vrednosti θ_1 i θ_2 i ona su

$$\hat{\theta}_1 = \frac{\gamma_{XX}(1)\gamma_{YY}(0) - \gamma_{YX}(0)\gamma_{XY}(1)}{\gamma_{XX}(0)\gamma_{YY}(0) - \gamma_{YX}(0)\gamma_{XY}(0)} \text{ i } \hat{\theta}_2 = \frac{\gamma_{XX}(0)\gamma_{XY}(1) - \gamma_{XX}(1)\gamma_{XY}(0)}{\gamma_{XX}(0)\gamma_{YY}(0) - \gamma_{YX}(0)\gamma_{XY}(0)}.$$

Na sličan način izračunavamo vrednosti za druga dva parametra, θ_3 i θ_4. Sada sistem linearnih jednačina glasi

$$\begin{aligned}\gamma_{YX}(1) &= \theta_3\gamma_{XX}(0) + \theta_4\gamma_{YX}(0)\\ \gamma_{YY}(1) &= \theta_3\gamma_{XY}(0) + \theta_4\gamma_{YY}(0),\end{aligned}$$

pa su ocenjene vrednosti

$$\hat{\theta}_3 = \frac{\gamma_{YX}(1)\gamma_{YY}(0) - \gamma_{YX}(0)\gamma_{YY}(1)}{\gamma_{XX}(0)\gamma_{YY}(0) - \gamma_{YX}(0)\gamma_{XY}(0)} \text{ i } \hat{\theta}_4 = \frac{\gamma_{XX}(0)\gamma_{YY}(1) - \gamma_{YX}(1)\gamma_{XY}(0)}{\gamma_{XX}(0)\gamma_{YY}(0) - \gamma_{YX}(0)\gamma_{XY}(0)}.$$

U matričnom obliku rešenje ovih sistema može da se zapiše kao

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\Gamma}(1)\boldsymbol{\Gamma}^{-1}(0), \tag{2.19}$$

gde je

$$\boldsymbol{\Gamma}(k) = \begin{bmatrix} \gamma_{XX}(k) & \gamma_{XY}(k) \\ \gamma_{YX}(k) & \gamma_{YY}(k) \end{bmatrix}, \quad k \geq 0.$$

Tako ocene nepoznatih parametara θ_1, θ_2, θ_3 i θ_4 dobijamo iz

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \hat{\theta}_1 & \hat{\theta}_2 \\ \hat{\theta}_3 & \hat{\theta}_4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n-1}(X_{i+1} - \bar{X}_n)(X_i - \bar{X}_n) & \sum\limits_{i=1}^{n-1}(X_{i+1} - \bar{X}_n)(Y_i - \bar{Y}_n) \\ \sum\limits_{i=1}^{n-1}(Y_{i+1} - \bar{Y}_n)(X_i - \bar{X}_n) & \sum\limits_{i=1}^{n-1}(Y_{i+1} - \bar{Y}_n)(Y_i - \bar{Y}_n) \end{bmatrix} \times \\ &\times \begin{bmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2 & \sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)(Y_i - \bar{Y}_n) \\ \sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)(Y_i - \bar{Y}_n) & \sum\limits_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y}_n)^2 \end{bmatrix}^{-1}\end{aligned}$$

pri čemu su $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ i $\bar{Y}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$. Sada su parametri modela ocenjeni kao

$$\hat{\alpha} = \hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2, \quad \hat{\beta} = \hat{\theta}_3 + \hat{\theta}_4, \quad \hat{p} = \frac{\hat{\theta}_1}{\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2}, \quad \hat{q} = \frac{\hat{\theta}_3}{\hat{\theta}_3 + \hat{\theta}_4}. \tag{2.20}$$

Ostalo je još da se oceni parametar λ. Kako je $E(X_n) = E(Y_n) = \lambda$, najprirodniji način za ocenu ovog parametra bio bi $\hat{\lambda} = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}(X_i + Y_i)$, s obzirom na pretpostavku da $\{X_n\}$ i $\{Y_n\}$ imaju iste marginalne raspodele.

Modifikovani metod uslovnih najmanjih kvadrata

Pretpostavimo ponovo da imamo slučajni uzorak $(X_1, Y_1), \cdots, (X_n, Y_n)$. Kako slučajne promenljive X_n i Y_n imaju istu raspodelu, za ocenu uzoračke sredine iskoristićemo ocenu $\hat{\lambda}$ određenu u prethodnoj diskusiji vezanoj za YW metod. Dakle ovo će biti ocena parametra λ. Uslovno očekivanje dato je jednačinama (2.15) i (2.16). Ocene parametara metodom MCLS dobijaju se minimizacijom funkcije $R(\mathbf{\Theta})$ definisane kao

$$R(\mathbf{\Theta}) = \sum_{i=1}^{n-1} (\boldsymbol{Z}_{i+1} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{Z}_i - \boldsymbol{\mu}_e)'(\boldsymbol{Z}_{i+1} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{Z}_i - \boldsymbol{\mu}_e), \tag{2.21}$$

gde je $\mathbf{\Theta} = (\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)'$. Minimizacija se vrši u odnosu na vektor parametara $\mathbf{\Theta}$ pa je $\tilde{\mathbf{\Theta}} = \arg\min(R(\mathbf{\Theta}))$. Izjednačavajući sa nulom parcijalne izvode po θ_i funkcije $R(\mathbf{\Theta})$ dobijamo da je

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n-1} (X_{i+1} - \hat{\lambda} - \theta_1(X_i - \hat{\lambda}) - \theta_2(Y_i - \hat{\lambda}))(X_i - \hat{\lambda}) = 0\\
&\sum_{i=1}^{n-1} (X_{i+1} - \hat{\lambda} - \theta_1(X_i - \hat{\lambda}) - \theta_2(Y_i - \hat{\lambda}))(Y_i - \hat{\lambda}) = 0\\
&\sum_{i=1}^{n-1} (Y_{i+1} - \hat{\lambda} - \theta_3(X_i - \hat{\lambda}) - \theta_4(Y_i - \hat{\lambda}))(X_i - \hat{\lambda}) = 0\\
&\sum_{i=1}^{n-1} (Y_{i+1} - \hat{\lambda} - \theta_3(X_i - \hat{\lambda}) - \theta_4(Y_i - \hat{\lambda}))(Y_i - \hat{\lambda}) = 0
\end{aligned}$$

Koristeći matričnu algebru dolazimo do dva sistema od po dve linearne jednačine sa po dve nepoznate. Iz prvog sistema ocenimo parametre θ_1 i θ_2 na sledeći način

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n-1}(X_i - \hat{\lambda})^2 & \sum_{i=1}^{n-1}(X_i - \hat{\lambda})(Y_i - \hat{\lambda}) \\ \sum_{i=1}^{n-1}(X_i - \hat{\lambda})(Y_i - \hat{\lambda}) & \sum_{i=1}^{n-1}(Y_i - \hat{\lambda})^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\theta}_1 \\ \tilde{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1} - \hat{\lambda})(X_i - \hat{\lambda}) \\ \sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1} - \hat{\lambda})(Y_i - \hat{\lambda}) \end{bmatrix},$$

a iz drugog parametre θ_3 i θ_4 kao

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n-1}(X_i - \hat{\lambda})^2 & \sum_{i=1}^{n-1}(X_i - \hat{\lambda})(Y_i - \hat{\lambda}) \\ \sum_{i=1}^{n-1}(X_i - \hat{\lambda})(Y_i - \hat{\lambda}) & \sum_{i=1}^{n-1}(Y_i - \hat{\lambda})^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\theta}_3 \\ \tilde{\theta}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n-1}(Y_{i+1} - \hat{\lambda})(X_i - \hat{\lambda}) \\ \sum_{i=1}^{n-1}(Y_{i+1} - \hat{\lambda})(Y_i - \hat{\lambda}) \end{bmatrix}.$$

Ocene polaznih parametara $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$, $\tilde{p}$ i $\tilde{q}$ dobićemo kao u (2.20). Kako su procesi stacionarni, ocenjene vrednosti očekivanja i kovarijacije izračunate na osnovu $n-1$ opservacije blizu su vrednostima izračunatim na osnovu celog uzorka. Stoga, možemo očekivati da YW i MCLS metod daju približno iste ocene.

Rezultati na osnovu simulacija

Da bismo testirali efikasnost metoda za ocenu parametara za BVPOINAR(1) i BVNGINAR(1) modele simuliraćemo 100 uzoraka svaki obima 10000. Ispitaćemo kakve se ocene i standardne devijacije ocena dobijaju za poduzorke obima 100, 500, 1000, 5000 i 10000. Simulacije su izvedene za različite vrednosti parametara: a) $\alpha = 0.1$, $\beta = 0.2$, $p = 0.55$, $q = 0.4$, $\lambda = \mu = 3$; b) $\alpha = 0.6$, $\beta = 0.55$, $p = 0.55$, $q = 0.4$, $\lambda = \mu = 3$; c) $\alpha = 0.1$, $\beta = 0.2$, $p = 0.55$, $q = 0.4$, $\lambda = \mu = 30$; d) $\alpha = 0.6$, $\beta = 0.55$, $p = 0.55$, $q = 0.4$, $\lambda = \mu = 30$. Parametre smo izabrali tako da proverimo ponašanje metoda kada su nizovi sa relativno malim i relativno velikim vrednostima, pa smo za srednje vrednosti nizova uzimali 3 i 30, redom. Takođe, posmatrali smo nizove sa manje i više izraženom autokorelacijom, pa smo za parametre α i β uzeli vrednosti 0.1 i 0.2, redom, u prvom slučaju i 0.6 i 0.55, redom, u drugom. Pored YW i MCLS metoda parametre ćemo oceniti i metodom uslovne maksimalne verodostojnosti. Neka je uslovna raspodela verovatnoća, data jednačinom (2.14), označena kao

$$P(x_i, y_i, x_{i-1}, y_{i-1}; \lambda, \alpha, \beta, p, q) = P(X_i = x_i, Y_i = y_i | X_{i-1} = x_{i-1}, Y_{i-1} = y_{i-1}).$$

Odgovarajuća funkcija verodostojnosti, odnosno njen logaritam, glasi

$$\log L(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n; \lambda, \alpha, \beta) = \sum_{i=2}^{n} \log P(x_i, y_i, x_{i-1}, y_{i-1}; \lambda, \alpha, \beta).$$

Maksimiziranje navedene funkcije, zbog njene složenosti, obavlja se numeričkim putem. U tu svrhu korišćen je programski jezik `R` i funkcija `nlm`. Dobijeni rezultati predstavljeni su u tabeli 2.1 za BVPOINAR(1) model i u tabeli 2.2 za BVNGINAR(1) model.

Analizirajući tabelu 2.1 možemo zaključiti da ocenjene vrednosti parametara konvergiraju ka stvarnim vrednostima sa porastom dužine simuliranog niza. U celini gledano, CML metod daje najtačnije ocene nepoznatih parametara, uz najmanju standardnu devijaciju ocena. Takođe i druge dve metode su se pokazale sasvim dobro. Za poduzorke obima 100, odstupanje od stvarnih vrednosti je nešto veće kod YW i MCLS pristupa, osim za slučaj kada parametri α, β i λ imaju male vrednosti. Tada CML daje malo bolje ocene za parametar q, dok su druge dve metode nešto bolje za parametar α. Kada su poduzorci obima 500 i dalje postoje neka odstupanja od pravih vrednosti parametara ali već za poduzorke obima 1000 sva tri pristupa su se pokazala kao veoma precizna. Za relativno velike vrednosti parametara, CML daje sasvim dobre ocene čak i za najmanji obim uzorka. Sve u svemu, za uzorke malog obima CML je najbolji izbor. Za veće uzorke, sva tri pristupa su jednako dobra, ali je CML mnogo zahtevniji što se tiče vremena izračunavanja.

Tabela 2.2 sadrži rezultate za ocenjene parametre za BVNGINAR(1) model. Kako je

Tabela 2.1: Ocenjene vrednosti nepoznatih parametara za BVPOINAR(1) model - Za svaki obim uzorka prva vrsta sadrži ocenjene vrednosti, druga vrsta standardnu devijaciju.

	MCLS					YW				CML				
	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{p}$	$\hat{q}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{p}$	$\hat{q}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{p}$	$\hat{q}$	$\hat{\mu}$
a) $\alpha = 0.1$, $\beta = 0.2$, $p = 0.55$, $q = 0.4$, $a = 6$, $\mu = \lambda = 3$														
100	0.1099	0.206	0.5405	0.4202	3.006	0.1105	0.2062	0.5353	0.4455	0.1238	0.2047	0.5589	0.4037	2.992
	0.1107	0.1447	0.3731	0.3424	0.140	0.1114	0.1456	0.3706	0.3397	0.1094	0.114	0.2247	0.2319	0.152
500	0.0953	0.1998	0.5021	0.395	3.006	0.0954	0.1999	0.4981	0.4002	0.1097	0.1895	0.5199	0.3785	2.987
	0.0616	0.0671	0.3223	0.1815	0.060	0.0616	0.0671	0.3206	0.1825	0.0511	0.0577	0.2292	0.1877	0.065
1000	0.0981	0.1968	0.5512	0.3901	3.004	0.0981	0.1968	0.5447	0.3929	0.0982	0.1934	0.5403	0.3715	2.994
	0.0473	0.042	0.2563	0.1073	0.040	0.0473	0.042	0.2551	0.1079	0.0369	0.0378	0.1645	0.1473	0.046
5000	0.1021	0.1991	0.5521	0.4062	3.003	0.1021	0.1991	0.5511	0.4065	0.0987	0.1977	0.5509	0.3889	2.996
	0.0208	0.0208	0.1137	0.0463	0.020	0.0208	0.0208	0.1137	0.0463	0.0122	0.0178	0.1312	0.0807	0.029
10000	0.1006	0.1997	0.5433	0.4009	3.002	0.1006	0.1997	0.5497	0.4015	0.0997	0.1986	0.5503	0.3987	2.998
	0.013	0.0154	0.0731	0.0348	0.015	0.013	0.0154	0.0731	0.0348	0.0107	0.0121	0.1091	0.0662	0.021
b) $\alpha = 0.6$, $\beta = 0.55$, $p = 0.55$, $q = 0.4$, $\mu = \lambda = 3$														
100	0.5724	0.5002	0.5379	0.3984	2.953	0.5731	0.5021	0.5238	0.4108	0.5834	0.5496	0.5563	0.3889	2.956
	0.1234	0.1271	0.1514	0.1731	0.237	0.125	0.1279	0.1535	0.1737	0.0755	0.08898	0.1489	0.1642	0.241
500	0.5921	0.5444	0.5464	0.4004	3.013	0.5917	0.5441	0.5445	0.4019	0.5934	0.5465	0.5495	0.4112	2.981
	0.0581	0.0564	0.0726	0.0749	0.094	0.0582	0.0564	0.0726	0.0747	0.0377	0.0356	0.0596	0.0743	0.111
1000	0.5938	0.5477	0.5481	0.4006	3.007	0.5938	0.5477	0.5474	0.4015	0.5989	0.5468	0.5484	0.4055	2.992
	0.0372	0.0401	0.0459	0.0482	0.067	0.0371	0.0402	0.0458	0.0483	0.024	0.0271	0.0388	0.0506	0.086
5000	0.5969	0.5519	0.5489	0.4002	3.005	0.5969	0.5519	0.5487	0.4004	0.5988	0.5488	0.5491	0.4022	2.997
	0.0155	0.0175	0.0185	0.0211	0.037	0.0155	0.0175	0.0185	0.0212	0.0174	0.0199	0.0155	0.0277	0.051
10000	0.5988	0.5518	0.551	0.4003	3.003	0.5988	0.5518	0.5509	0.4004	0.6001	0.5499	0.5497	0.4015	2.999
	0.0115	0.0123	0.0131	0.015	0.024	0.0115	0.0123	0.0131	0.015	0.0111	0.0142	0.0098	0.0195	0.043
c) $\alpha = 0.1$, $\beta = 0.2$, $p = 0.55$, $q = 0.4$, $a = 6$, $\mu = \lambda = 30$														
100	0.1136	0.201	0.4863	0.4489	30.119	0.1135	0.2009	0.4797	0.4719	0.1276	0.189	0.5308	0.4035	29.949
	0.1022	0.1283	0.3783	0.3314	0.368	0.102	0.128	0.3813	0.337	0.1069	0.1069	0.2396	0.2265	0.343
500	0.0982	0.1903	0.5644	0.3878	30.007	0.0981	0.1903	0.5572	0.3922	0.114	0.1978	0.5543	0.4113	29.989
	0.0546	0.0662	0.3358	0.194	0.187	0.0546	0.0661	0.3356	0.1951	0.0542	0.0633	0.1672	0.1865	0.206
1000	0.0972	0.1914	0.5735	0.379	30.000	0.0982	0.1913	0.5685	0.3916	0.1078	0.1987	0.5434	0.394	30.006
	0.0446	0.0463	0.2847	0.1287	0.141	0.0446	0.0463	0.2851	0.1292	0.04467	0.0445	0.1413	0.138	0.146
5000	0.1004	0.198	0.5428	0.4033	30.003	0.101	0.198	0.5415	0.404	0.1055	0.1989	0.5531	0.4021	30.002
	0.02	0.0208	0.1084	0.0515	0.057	0.0199	0.0208	0.1084	0.0515	0.0238	0.0211	0.0884	0.0871	0.089
10000	0.1013	0.1991	0.5473	0.4067	29.999	0.1003	0.1991	0.5467	0.4039	0.1012	0.1994	0.551	0.4017	30.001
	0.0148	0.0134	0.0749	0.0386	0.045	0.0148	0.0134	0.075	0.0386	0.0124	0.0157	0.0398	0.0375	0.070
d) $\alpha = 0.6$, $\beta = 0.55$, $p = 0.55$, $q = 0.4$, $\mu = \lambda = 30$														
100	0.5455	0.5165	0.5465	0.409	29.970	0.5471	0.5183	0.5379	0.4204	0.6054	0.5469	0.5428	0.4126	30.063
	0.1261	0.1219	0.179	0.1714	0.700	0.1264	0.1232	0.1791	0.1751	0.0756	0.0863	0.1332	0.1807	0.506
500	0.5902	0.5416	0.5542	0.4026	29.968	0.5901	0.5415	0.5525	0.4046	0.6056	0.5588	0.5544	0.417	29.983
	0.0538	0.0566	0.0588	0.0673	0.354	0.0539	0.0569	0.059	0.067	0.033	0.0334	0.0616	0.0699	0.244
1000	0.5965	0.5462	0.5516	0.4005	29.997	0.5965	0.5462	0.5508	0.4025	0.6025	0.5542	0.5531	0.4079	30.012
	0.0371	0.0345	0.0422	0.0412	0.221	0.037	0.0345	0.0419	0.0411	0.029	0.0266	0.0401	0.0487	0.130
5000	0.6003	0.5498	0.5524	0.3976	29.997	0.6003	0.5478	0.5522	0.3978	0.6004	0.5512	0.5519	0.3987	30.001
	0.0144	0.0188	0.0209	0.0213	0.118	0.0143	0.0188	0.0209	0.0213	0.0175	0.0125	0.0259	0.0298	0.078
10000	0.5996	0.5478	0.5513	0.3978	29.996	0.5997	0.5498	0.5512	0.3979	0.6003	0.5504	0.551	0.3996	30.001
	0.0111	0.012	0.0131	0.0163	0.082	0.0111	0.012	0.0131	0.0163	0.0101	0.0097	0.0107	0.0119	0.068

uslovno očekivanje i kovarijaciona sktruktura ovog modela ista kao i kod modela BVPOINAR(1), dobijeni rezultati za YW i CML metode su vrlo slični kao kod modela BVPOINAR(1). Stoga, obratićemo pažnju samo na ocenjivanje nepoznatih parametara CML metodom. Parametri ocenjeni CML metodom su vrlo blizu originalnim vrednostima čak i za mali obim uzorka. Veća je preciznost dobijenih ocena kod testova gde parametri uzimaju male vrednosti nego kod testova gde su originalne vrednosti relativno velike. Međutim, već kod poduzorka obima 500 nema značajnih odstupanja ni u jednom testu. Uzevši u obzir preciznost i vreme potrebno za ocenjivanje nepoznatih parametara CML metod je najbolji izbor za uzorke malog obima, dok se za uzorke većeg obima može koristiti bilo YW ili MCLS metod.

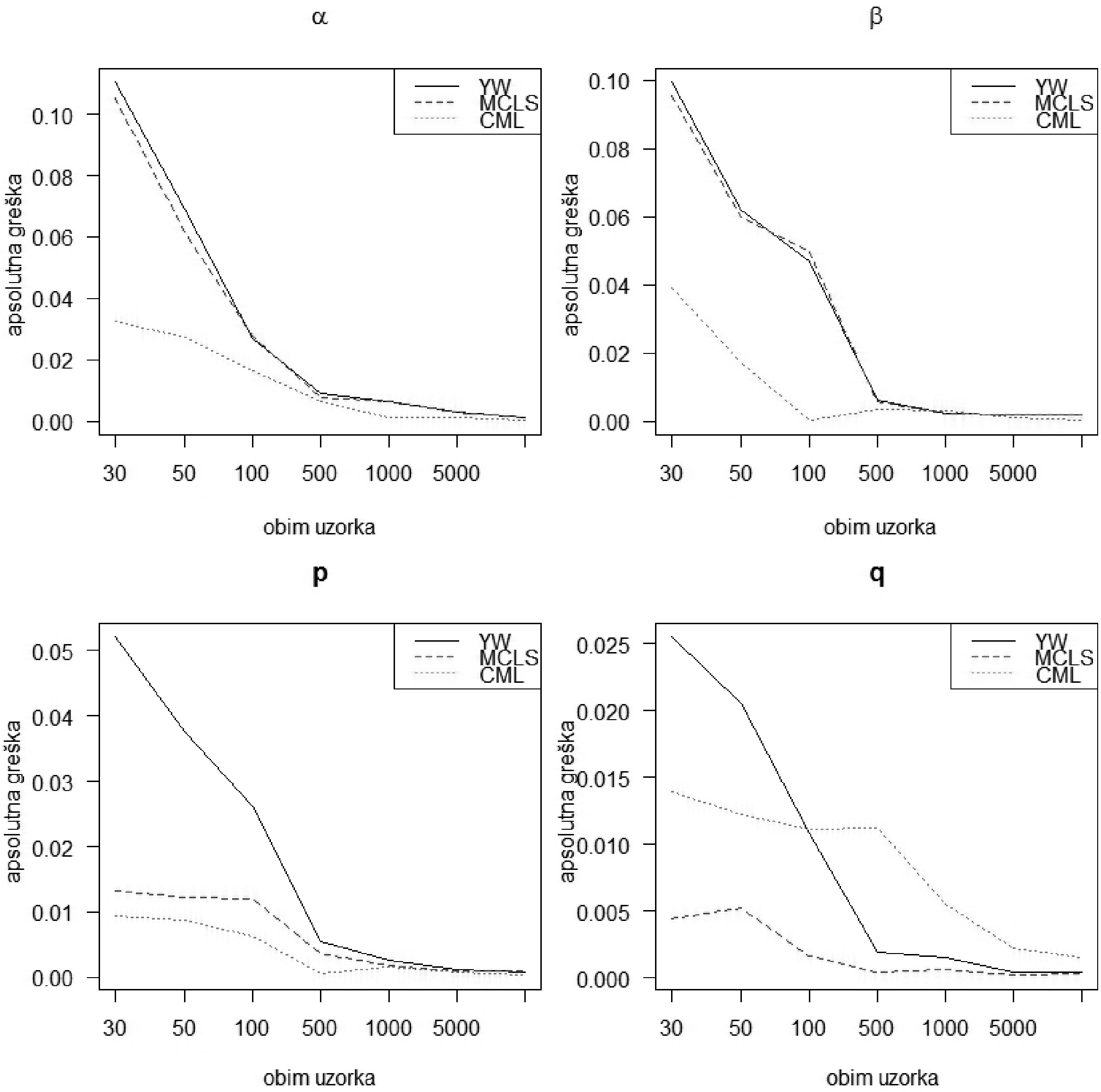
Tabela 2.2: Ocenjene vrednosti nepoznatih parametara za BVNGINAR(1) model - Za svaki obim uzorka prva vrsta sadrži ocenjene vrednosti, druga vrsta standardnu devijaciju.

	MCLS					YW				CML				
	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{p}$	$\hat{q}$	$\hat{\mu}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{p}$	$\hat{q}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{p}$	$\hat{q}$	$\hat{\mu}$
a) $\alpha = 0.1, \beta = 0.2, p = 0.55, q = 0.4, \mu = \lambda = 3$														
100	0.1084	0.1843	0.4742	0.4753	2.991	0.1076	0.1843	0.4514	0.4905	0.1097	0.1944	0.5463	0.4106	3.011
	0.1049	0.1288	0.3977	0.331	0.283	0.1044	0.1295	0.398	0.3274	0.08137	0.0915	0.3092	0.2872	0.312
500	0.1014	0.187	0.5723	0.3808	3.009	0.1023	0.1871	0.5627	0.3866	0.10168	0.1884	0.5515	0.3893	2.997
	0.0612	0.0631	0.2955	0.1925	0.142	0.0611	0.0631	0.2971	0.1922	0.0409	0.0476	0.2481	0.1353	0.159
1000	0.1013	0.1975	0.5649	0.3854	3.009	0.1014	0.1975	0.5587	0.389	0.1036	0.1946	0.5512	0.3887	2.994
	0.0414	0.0436	0.2422	0.1285	0.090	0.0414	0.0437	0.2428	0.1287	0.0307	0.0318	0.1612	0.0847	0.080
5000	0.0988	0.1979	0.5498	0.3962	2.994	0.0995	0.1978	0.5488	0.3967	0.1012	0.1951	0.5509	0.3912	3.009
	0.021	0.0221	0.0906	0.0569	0.041	0.021	0.0221	0.0907	0.0568	0.0199	0.0201	0.1219	0.0628	0.043
10000	0.0995	0.1983	0.5499	0.3987	2.996	0.0998	0.1989	0.5494	0.3989	0.1011	0.1992	0.5507	0.3975	3.010
	0.0144	0.0158	0.0684	0.0386	0.026	0.0144	0.0158	0.0683	0.0386	0.0126	0.0141	0.0512	0.0429	0.029
b) $\alpha = 0.6, \beta = 0.55, p = 0.55, q = 0.4, \mu = \lambda = 3$														
100	0.5717	0.5179	0.5364	0.3805	3.016	0.5718	0.5199	0.524	0.391	0.5847	0.5446	0.5417	0.3841	3.011
	0.1454	0.131	0.2047	0.1838	0.521	0.1483	0.1335	0.2049	0.1879	0.104	0.1136	0.1313	0.1293	0.413
500	0.5787	0.5473	0.5426	0.4107	2.981	0.5784	0.5474	0.5404	0.4123	0.5988	0.5464	0.5533	0.404	3.008
	0.0708	0.0673	0.0821	0.0888	0.218	0.0713	0.067	0.0822	0.0887	0.0411	0.0409	0.0512	0.0572	0.257
1000	0.5866	0.5485	0.5514	0.4035	2.992	0.5866	0.5484	0.5509	0.4046	0.6011	0.5514	0.5494	0.4029	3.016
	0.0491	0.0475	0.0606	0.0651	0.175	0.0492	0.0476	0.0607	0.0652	0.0282	0.028	0.0359	0.0393	0.163
5000	0.5979	0.5495	0.5495	0.4023	2.997	0.5979	0.5495	0.5493	0.4025	0.6012	0.5508	0.551	0.4019	3.010
	0.0224	0.023	0.026	0.0253	0.078	0.0224	0.0229	0.026	0.0254	0.0192	0.0178	0.0219	0.0278	0.103
10000	0.598	0.552	0.5498	0.3993	3.002	0.598	0.552	0.5495	0.3994	0.6007	0.5505	0.5506	0.3997	3.003
	0.0155	0.0152	0.0173	0.0175	0.047	0.0155	0.0152	0.0173	0.0175	0.0115	0.0121	0.0128	0.0142	0.021
c) $\alpha = 0.1, \beta = 0.2, p = 0.55, q = 0.4, \mu = \lambda = 30$														
100	0.1175	0.1796	0.3859	0.4633	30.077	0.1177	0.1805	0.3783	0.4827	0.0974	0.2014	0.4977	0.4235	29.970
	0.1247	0.1291	0.3657	0.3486	2.581	0.127	0.1295	0.3653	0.3454	0.044	0.0439	0.3175	0.1986	3.436
500	0.0895	0.1812	0.4979	0.3815	29.930	0.0896	0.1814	0.4898	0.39	0.0988	0.2004	0.5518	0.3988	29.973
	0.0581	0.0585	0.345	0.1927	0.961	0.0582	0.0585	0.3467	0.1923	0.0178	0.0158	0.1177	0.0799	1.296
1000	0.0976	0.1873	0.5368	0.4096	29.933	0.0976	0.1873	0.5319	0.4091	0.1004	0.199	0.5497	0.4003	30.000
	0.0402	0.0424	0.2743	0.126	0.724	0.0402	0.0423	0.274	0.1253	0.0131	0.0116	0.0708	0.0594	1.033
5000	0.0986	0.2021	0.5516	0.4077	29.936	0.1007	0.2021	0.5508	0.4082	0.1011	0.1989	0.5512	0.3991	30.001
	0.0204	0.0178	0.1033	0.0485	0.362	0.0204	0.0178	0.1033	0.0486	0.0122	0.0098	0.0345	0.0309	0.621
10000	0.1007	0.2013	0.5514	0.4033	29.955	0.0996	0.2013	0.5503	0.4035	0.1003	0.2002	0.5503	0.3998	30.001
	0.0147	0.0131	0.0773	0.0402	0.265	0.0147	0.0131	0.0774	0.0402	0.0098	0.0075	0.0158	0.0127	0.380
b) $\alpha = 0.6, \beta = 0.55, p = 0.55, q = 0.4, \mu = \lambda = 30$														
100	0.5808	0.4946	0.5637	0.4193	30.942	0.5815	0.4939	0.5324	0.4294	0.5982	0.5463	0.5588	0.3897	30.109
	0.1319	0.1462	0.1988	0.2147	4.784	0.1338	0.1465	0.2032	0.2175	0.0332	0.0397	0.0862	0.0964	4.313
500	0.5877	0.5355	0.5386	0.3899	30.393	0.5875	0.5353	0.5366	0.4035	0.60182	0.5502	0.5624	0.4017	30.001
	0.0687	0.0571	0.0817	0.0787	1.986	0.0687	0.0573	0.0819	0.0785	0.015	0.015	0.0392	0.0393	1.982
1000	0.5881	0.5437	0.547	0.4026	30.138	0.5881	0.5438	0.5461	0.4027	0.6005	0.5496	0.555	0.4034	30.000
	0.0434	0.0411	0.063	0.0636	1.472	0.0434	0.0413	0.0628	0.0635	0.0097	0.0116	0.025	0.0294	1.452
5000	0.5961	0.5463	0.5468	0.4024	30.027	0.5961	0.5463	0.5466	0.4017	0.59978	0.5497	0.5521	0.4024	29.999
	0.019	0.0178	0.0269	0.0259	0.670	0.0189	0.0178	0.027	0.0259	0.0064	0.0073	0.0131	0.0191	0.572
10000	0.5989	0.5483	0.5482	0.4	30.017	0.5989	0.5483	0.5481	0.4	0.5999	0.5502	0.5502	0.4015	30.000
	0.0148	0.0131	0.0177	0.0177	0.457	0.0148	0.0131	0.0177	0.0177	0.0059	0.0052	0.0097	0.0143	0.373

Ako bi posmatrali samo YW i MCLS metode, mogli bi da zaključimo da ocenjene vrednosti nepoznatih parametara konvergiraju ka originalnim sa porastom obima uzorka, pri čemu standardna devijacija opada. Oba pristupa daju slične rezultate kao što smo već komentarisali. Za uzorke obima 100 i 500, dobijene vrednosti MCLS metodom su nešto bolje, dok za uzorke većeg obima obe metode su vrlo precizne.

Dobijeni rezultati potvrđuju da su sva tri pristupa pogodna za ocenjivanje nepoznatih parametara BVPOINAR(1) i BVNGINAR(1) modela. Konvergencija ka stvarnim vrednostima je nešto sporija kod BVNGINAR(1) pa su shodno tome i standardne devijacije ocena nešto veće. Na slici 2.1 prikazali smo asimptotsko ponašanje ocenjenih vrednosti za

BVPOINAR(1), gde smo još posmatrali i uzorke obima 30 i 50. Na slici su prikazane vrednosti apsolutnih grešaka. Možemo primetiti da kod sve tri metode apsolutna greška teži nuli sa porastom obima uzorka.



Slika 2.1: Apsolutne greške nastale ocenjivanjem nepoznatih parametara pomoću YW, MCLS i CML metoda.

Asimptotska raspodela ocena dobijenih YW i MCLS metodama

U ovom poglavlju izvešćemo asimptotsku raspodelu za ocene nepoznatih parametara dobijene Yule-Walker metodom i modifikovanim metodom uslovnih najmanjih kvadrata. Za početak, razmatraćemo MCLS metod a zatim ćemo dokazati asimptotsku ekvivalenciju između ocena dobijenih YW i MCLS metodama. Pre svega, dokazaćemo neke bitne osobine BVPOINAR(1) modela, kao što su ergodičnost i stroga stacionarnost.

Lema 2.6 (**Nastić, Ristić i Popović (2014), lema 2**). *BVPOINAR(1) model,* $\{\mathbf{Z}_n = (X_n, Y_n)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$*, dat jednačinama* (2.10) *i* (2.11) *je ergodičan.*

Dokaz: Da bismo dokazali ergodičnost BVPOINAR(1) modela iskoristićemo definiciju iz Shiryaev (1996) koja kaže da je stacionaran niz $\{\boldsymbol{Z}_n\}$ ergodičan ako je mera svakog invarijantnog skupa 0 ili 1. Neka je $A \in \mathcal{F}$ invarijantan u odnosu na niz $\{\mathbf{Z}_n\}$. Tada postoji skup $B \in \mathcal{B}(R^\infty)$, gde je $\mathcal{B}(R^\infty)$ Borelova σ-algebra, takav da za svako $n \in \mathbb{Z}$, $A = \{\omega : (\mathbf{Z}_n, \mathbf{Z}_{n-1}, ...) \in B\}$. Neka je $\mathcal{F}(\mathbf{Z}_n, \mathbf{Z}_{n-1}, ...)$ σ-algebra generisana događajima $(\mathbf{Z}_n, \mathbf{Z}_{n-1}, ...)$. Tada $A \in \mathcal{F}(\mathbf{Z}_n, \mathbf{Z}_{n-1}, ...)$ sa svako $n \in \mathbb{Z}$. Kako je $\boldsymbol{Z}_n = \boldsymbol{A}_n \circ \boldsymbol{Z}_{n-1} + \boldsymbol{e}_n$, to imamo da je $\mathcal{F}(\mathbf{Z}_n, \mathbf{Z}_{n-1}, ...) \subseteq \mathcal{F}(\mathbf{e}_n, \mathbf{G}_n, \mathbf{W}_n, \mathbf{e}_{n-1}, \mathbf{G}_{n-1}, \mathbf{W}_{n-1}, ...)$ gde su $\mathbf{G}_n$ i $\mathbf{W}_n$ generisani brojačkim nizovima $\{G_i\}$ i $\{W_i\}$, redom. S tim u vezi, imamo da je $A \subseteq \mathcal{F}(\mathbf{e}_n, \mathbf{G}_n, \mathbf{W}_n, \mathbf{e}_{n-1}, \mathbf{G}_{n-1}, \mathbf{W}_{n-1}, ...)$ za svako $n \in \mathbb{Z}$, što implicira $A \in \bigcap_{n=0}^{-\infty} \mathcal{F}(\mathbf{e}_n, \mathbf{G}_n, \mathbf{W}_n, \mathbf{e}_{n-1}, \mathbf{G}_{n-1}, \mathbf{W}_{n-1}, ...)$. Kako je $\bigcap_{n=0}^{-\infty} \mathcal{F}(\mathbf{e}_n, \mathbf{G}_n, \mathbf{W}_n, \mathbf{e}_{n-1}, \mathbf{G}_{n-1}, \mathbf{W}_{n-1}, ...)$ repna σ-algebra, to imamo je A repni događaj pa je njegova mera 0 ili 1 čime je dokazana lema. □

Lema 2.7 (**Nastić, Ristić i Popović (2014), lema 3**). *BVPOINAR(1) model* $\{\mathbf{Z}_n = (X_n, Y_n)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ *dat jednačinama* (2.10) *i* (2.11) *je strogo stacionaran.*

Dokaz: BVPOINAR(1) model možemo definisati jednačinom (2.4), te dobijamo proces Markova reda jedan i imamo da je

$$P(\boldsymbol{Z}_{n_1+l} = \boldsymbol{z}_1, \dots, \boldsymbol{Z}_{n_m+l} = \boldsymbol{z}_m) = \prod_{i=2}^{m} P(\boldsymbol{Z}_{n_i+l} = \boldsymbol{z}_i | \boldsymbol{Z}_{n_{i-1}+l} = \boldsymbol{z}_{i-1}) P(\boldsymbol{Z}_{n_1+l} = \boldsymbol{z}_1).$$

Na osnovu teoreme 2.2 važi da je $P(\varepsilon_{n_i+l}) = P(\varepsilon_{n_i})$ i $P(\eta_{n_i+l}) = P(\eta_{n_i})$, što zajedno sa jednačinom (2.14) implicira da je $P(\boldsymbol{Z}_{n_i+l} = \boldsymbol{z}_i | \boldsymbol{Z}_{n_{i-1}+l} = \boldsymbol{z}_{i-1}) = P(\boldsymbol{Z}_{n_i} = \boldsymbol{z}_i | \boldsymbol{Z}_{n_{i-1}} = \boldsymbol{z}_{i-1})$. Jednačina (2.5) povlači da je $\boldsymbol{Z}_{n_1+l} \stackrel{d}{=} \boldsymbol{Z}_{n_1}$ što na kraju znači da je $P(\boldsymbol{Z}_{n_1+l} = \boldsymbol{z}_1, \dots, \boldsymbol{Z}_{n_m+l} = \boldsymbol{z}_m) = P(\boldsymbol{Z}_{n_1} = \boldsymbol{z}_1, \dots, \boldsymbol{Z}_{n_m} = \boldsymbol{z}_m)$ za svako $l \in \mathbb{Z}$.□

Vratimo se sada asimptotskoj raspodeli ocena nepoznatih parametara. Najpre ćemo razmotriti ocenu za parametar λ. Asimptotska raspodela ove ocene data je sledećom teoremom.

Teorema 2.8 (**Nastić, Ristić i Popović (2014), teorema 4**). *Niz ocena parametra* λ *dobijenih MCLS metodom,* $\{\hat{\lambda}_n^{mcls}\}$*, ima asimptotski normalnu raspodelu sa očekivanjem* λ *i disperzijom* $\frac{\lambda}{2n}$.

Dokaz: Definišimo niz slučajnih promenljivih $\{T_i\}_{i\in N}$ na sledeći način

$$T_i = \begin{cases} X_{\frac{i+1}{2}}, & i = 2k-1 \\ Y_{\frac{i}{2}}, & i = 2k \end{cases},$$

gde je $k \in N$. Tada je $E(T_i) = \lambda$ i $Var(T_i) = \lambda$. Imajući u vidu jednačine (2.10) i (2.11) i lemu 2.7 zaključujemo da je $\{T_i\}$ stacionaran lanac Markova. Dalje, kako je $P(T_{2i+1} = u_1 | T_{2i-1} = v_1) = P(X_{i+1} = u_1 | X_i = v_2) > 0$ i $P(T_{2i+2} = u_2 | T_{2i} = v_2) = P(Y_{i+1} = u_2 | Y_i = v_2) > 0$, to možemo da zaključimo da je verovatnoća prelaska u dva koraka slučajne promenljive T_i iz stanja u_j u stanje v_j, $j = 1, 2$, strogo pozitivna. Dakle niz $\{T_i\}$ je ireducibilan. Prema teoremi 1 na strani 9 autora Rosenblatt (1971), imamo da je onda ovaj niz i pozitivno rekurentan.

Kako je niz slučajnih promenljivih $\{T_i\}$ ireducibilan i pozitivno rekurentan lanac Markova u prebrojivom prostoru i $\frac{1}{2}(\bar{X}_n + \bar{Y}_n) = \frac{1}{2}(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i + Y_i)) = \frac{1}{2}(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{2n} T_i) = \bar{T}_{2n}$. Dakle, definisali smo preslikavanje $f(T_n) = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n} T_i$ za koje možemo primeniti teoremu 10.2 autora DasGupta (2008), pa zaključujemo da $\bar{T}_{2n} \sim \mathcal{N}(\lambda, \frac{\lambda}{2n})$. Dokaz sledi iz činjenice da je $\hat{\lambda}_n^{mcls} = \bar{T}_{2n}$. □

Da bismo izveli asimptotsku raspodelu ocena parametara α, β, p i q kada je λ poznato, iskoristićemo oznake $\theta_1 = \alpha p$, $\theta_2 = \alpha(1-p)$, $\theta_3 = \beta q$ i $\theta_4 = \beta(1-q)$. Pokažimo najpre egzistenciju niza MCLS ocena.

Teorema 2.9 (**Nastić, Ristić i Popović (2014), teorema 5**). *Ako je parametar λ poznat, tada postoji niz MCLS ocena $\hat{\boldsymbol{\theta}}_n^{mcls} = (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \hat{\theta}_3, \hat{\theta}_4)$ takav da $\hat{\boldsymbol{\theta}}_n^{mcls} \xrightarrow{s.i.} \boldsymbol{\theta}$ kad $n \to \infty$, gde je $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)$.*

Dokaz: Kako smo dokazali da je niz $\{\boldsymbol{Z}_n\}$ ergodičan i strogo stacionaran, možemo iskoristiti teoremu 3.1 iz Tjøstheim (1986) da dokažemo egzistenciju niza MCLS ocena $\hat{\boldsymbol{\theta}}_n^{mcls}$ takvih da $\hat{\boldsymbol{\theta}}_n^{cls} \xrightarrow{s.i.} \boldsymbol{\theta}$ kad $n \to \infty$.

Neka je $\boldsymbol{g}_n = E(\boldsymbol{Z}_n | \mathcal{F}_{n-1})$. Tada je

$$\boldsymbol{g}_n = \begin{bmatrix} \theta_1 X_{n-1} + \theta_2 Y_{n-1} + \lambda(1-\theta_1-\theta_2) \\ \theta_3 X_{n-1} + \theta_4 Y_{n-1} + \lambda(1-\theta_3-\theta_4) \end{bmatrix}.$$

Kako je trivijalno dokazati da važe uslovi C1 i C3, daćemo samo dokaz za uslov C2 iz pomenute teoreme autora Tjøstheim (1986).

Parcijalni izvod vektora $\boldsymbol{g}_n$ u odnosu na $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)$ dat je sa

$$\frac{\partial \boldsymbol{g}_n}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \begin{bmatrix} X_{n-1} - \lambda & Y_{n-1} - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X_{n-1} - \lambda & Y_{n-1} - \lambda \end{bmatrix}.$$

Vektori $\frac{\partial \boldsymbol{g}_n}{\partial \theta_i}(\theta_i^0)$, $i = \overline{1,4}$, su linearno nezavisni u smislu da ako je $E\left|\sum_{i=1}^{4} a_i \frac{\partial \boldsymbol{g}_n}{\partial \theta_i}\right|^2 = 0$, gde su

a_i, $i=\overline{1,4}$ proizvoljni realni brojevi, tada važi da su $a_i=0$, $i=\overline{1,4}$. $E\left|\sum_{i=1}^{4} a_i \frac{\partial \boldsymbol{g}_n}{\partial \theta_i}\right|^2$ za prvu vrstu gornje matrice definisano je kao $E\left|a_1(X_{n-1}-\lambda)+a_2(Y_{n-1}-\lambda)+a_3\cdot 0+a_4\cdot 0\right|^2$, a analogno i za drugu vrstu. Tada uslov

$$0=E\left|\sum_{i=1}^{4} a_i \frac{\partial \boldsymbol{g}_n}{\partial \theta_i}\right|^2=E\left|a_1(X_{n-1}-\lambda)+a_2(Y_{n-1}-\lambda)\right|^2+E\left|a_3(X_{n-1}-\lambda)+a_4(Y_{n-1}-\lambda)\right|^2$$

implicira jednakosti

$$E\left|a_1(X_{n-1}-\lambda)+a_2(Y_{n-1}-\lambda)\right|^2=0$$

$$E\left|a_3(X_{n-1}-\lambda)+a_4(Y_{n-1}-\lambda)\right|^2=0.$$

Razmotrimo prvu jednakost. Kako je proces $\{(X_n,Y_n)\}$ stacionaran, $Var(X_n)=Var(Y_n)=\lambda$ i $Cov(X_n,Y_n)=\lambda\rho$, to imamo da je $a_1^2+2a_1a_2\rho+a_2^2=0$. Očigledno je da slučaj $a_1a_2>0$ nije moguć. Pretpostavimo da je $a_1a_2<0$. Kako je $0<\rho<1$, imamo da je $0=a_1^2+2a_1a_2\rho+a_2^2>(a_1+a_2)^2$, što takođe nije moguće. Prema tome, jedini mogući slučaj je $a_1a_2=0$. Odatle sledi da je $a_1=0$ ili $a_2=0$. Ako je $a_1=0$, to implicira da je $a_2=0$. Isto važi ako pretpostavimo da je $a_2=0$. Dakle, zaključujemo da je $a_1=a_2=0$. Slično možemo dokazati i da je $a_3=a_4=0$. Dakle, $a_i=0$ za $i=\overline{1,4}$, što implicira da je uslov C2 zadovoljen. Dakle, prema teoremi 3.1 iz Tjøstheim (1986) dokazali smo egzistenciju strogo postojanih ocena dobijenih MCLS metodom. □

Uvedimo matricu uslovnog očekivanja kvadrata greške predviđanja slučajne promenljive $\boldsymbol{Z}_n$ u odnosu na σ-algebru $\mathcal{F}_{n-1}$, to jest neka je

$$\boldsymbol{f}_{n|n-1}=E\left((\boldsymbol{Z}_n-\boldsymbol{g}_n)(\boldsymbol{Z}_n-\boldsymbol{g}_n)'|\mathcal{F}_{n-1}\right).$$

Njeno izračunavanje dato je u sledećoj lemi.

Lema 2.10 (Nastić, Ristić i Popović (2014), lema 6). *Matrica uslovnog očekivanja kvadrata greške predviđanja slučajne promenljive $\boldsymbol{Z}_n$ u odnosu na σ-algebru $\mathcal{F}_{n-1}$*

$$\boldsymbol{f}_{n|n-1}=\begin{bmatrix} S_1 & 0\\ 0 & S_2\end{bmatrix},$$

gde su

$$S_1=\theta_1\theta_2(X_{n-1}-Y_{n-1})^2+(1-\theta_1-\theta_2)(\theta_1X_{n-1}+\theta_2Y_{n-1}+\lambda)$$

i

$$S_2=\theta_3\theta_4(X_{n-1}-Y_{n-1})^2+(1-\theta_3-\theta_4)(\theta_3X_{n-1}+\theta_4Y_{n-1}+\lambda).$$

Dokaz: Kako je $\boldsymbol{g}_n=E(\boldsymbol{Z}_n|\mathcal{F}_{n-1})$, to imamo da je $\boldsymbol{f}_{n|n-1}=Var(\boldsymbol{Z}_n|\mathcal{F}_{n-1})$. Izračunajmo sada elemente ove matrice. Element na poziciji $(1,1)$, $(\boldsymbol{f}_{n|n-1})_{1,1}$, je uslovna disperzija

$Var(X_n|\mathcal{F}_{n-1})$ i data je jednačinom (2.17) gde je $\theta_1 = \alpha p$ i $\theta_2 = \alpha(1-p)$. Element na poziciji $(2,2)$, $(\boldsymbol{f}_{n|n-1})_{2,2}$, je takođe uslovna disperzija $Var(Y_n|\mathcal{F}_{n-1})$ i ona je data jednačinom (2.18) kad zamenimo $\theta_3 = \beta q$ i $\theta_4 = \beta(1-q)$. Elementi $(\boldsymbol{f}_{n|n-1})_{1,2}$ i $(\boldsymbol{f}_{n|n-1})_{2,1}$ su jednaki i dati su sledećim izrazom

$$\begin{aligned}&E((X_n - E(X_n|\mathcal{F}_{n-1}))(Y_n - E(Y_n|\mathcal{F}_{n-1}))|\mathcal{F}_{n-1})\\ &\qquad = E(X_nY_n|\mathcal{F}_{n-1}) - E(X_n|\mathcal{F}_{n-1})E(Y_n|\mathcal{F}_{n-1}) = 0,\end{aligned}$$

jer su X_n i Y_n uslovno nezavisni za dato $\mathcal{F}_{n-1}$.$\square$

Zajednički momenti slučajnih promenljivih $X_{n-1}^iY_{n-1}^j$, $i+j=3$, $i,j \geq 1$ dati su sledećom lemom.

Lema 2.11 (Nastić, Ristić i Popović (2014), lema 7). *Zajednički momenti $E(X_n^2Y_n)$ i $E(X_nY_n^2)$ su rešenja sistema jednačina*

$$\Big[1-\alpha^2\beta p(1-q)\Big]\,E(X_n^2Y_n) - \alpha^2\beta(1-p)qE(X_nY_n^2) = c_1E(X_nY_n) + \pi_1 \tag{2.22}$$

$$-\alpha\beta^2(1-p)qE(X_n^2Y_n) + \Big[1-\alpha\beta^2 p(1-q)\Big]\,E(X_nY_n^2) = c_2E(X_nY_n) + \pi_2 \tag{2.23}$$

u skupu realnih brojeva, gde su

$$\begin{aligned}c_1 &= (1-\alpha)(1+2\lambda)\tau\\ c_2 &= (1-\beta)(1+2\lambda)\tau\\ \pi_1 &= (1-(2-\alpha)\tau)\lambda^3 + (1+2\alpha\beta-3\tau)\lambda^2 + (\alpha\beta-\tau)\lambda\\ \pi_2 &= (1-(2-\beta)\tau)\lambda^3 + (1+2\alpha\beta-3\tau)\lambda^2 + (\alpha\beta-\tau)\lambda\\ \tau &= \alpha\beta(p+q-2pq).\end{aligned}$$

Dokaz: Pođimo od momenta $E(X_n^2Y_n)$. Koristeći uslovnu nezavisnost slučajnih promenljivih X_n^2 i Y_n za dato X_{n-1} i Y_{n-1}, imamo da je

$$E(X_n^2Y_n) = E(E(X_n^2|X_{n-1},Y_{n-1})E(Y_n|X_{n-1},Y_{n-1})). \tag{2.24}$$

Iz osobina binomnog tining operatora i definicije procesa, sledi da je

$$\begin{aligned}E(X_n^2|X_{n-1},Y_{n-1}) &= \alpha^2(pX_{n-1}^2 + (1-p)Y_{n-1}^2)\\ &\quad + \alpha(1-\alpha)(1+2\lambda)(pX_{n-1} + (1-p)Y_{n-1}) + \mu_\varepsilon^2 + \sigma_\varepsilon^2,\end{aligned} \tag{2.25}$$

gde su μ_ε i σ_ε^2 očekivanje i disperzija slučajne promenljive ε_n. Takođe imamo da je

$$E(Y_n|X_{n-1},Y_{n-1}) = \beta qX_{n-1} + \beta(1-q)Y_{n-1} + \lambda(1-\beta). \tag{2.26}$$

Sada zamenom rezultata (2.25) i (2.26) u jednačinu (2.24), izračunavanjem očekivanja dobijenog proizvoda i oslanjanjem na činjenice da je proces stacionaran sa Puasonovom marginalnom raspodelom $\mathcal{P}(\lambda)$, dobijamo jednačinu (2.22). Na sličan način dobićemo i jednačinu (2.23).

Pokažimo na kraju da sistem koji čine jednačine (2.22) i (2.23) ima konačna rešenja. Kako su $\alpha, \beta \in (0,1)$, to za determinantu sistema važi

$$\begin{vmatrix} 1-\alpha^2\beta p(1-q) & -\alpha^2\beta(1-p)q \\ -\alpha\beta^2(1-p)q & 1-\alpha\beta^2 p(1-q) \end{vmatrix} = (1-\alpha^2\beta p(1-q))(1-\alpha\beta^2 p(1-q)) \\ - \alpha^3\beta^3(1-p)^2q^2 > (1-p)^2-(1-p)^2 = 0.$$

Na osnovu Kramerovih formula zaključujemo da sistem jednačina (2.22) i (2.23) ima jedinstveno konačno rešenje. □

Naredne dve leme daće nam zajedničke momente slučajnih promenljivih $X_{n-1}^i Y_{n-1}^j$, $i+j = 4$, $i,j \geq 1$.

Lema 2.12 (Nastić, Ristić i Popović (2014), lema 8). *Zajednički momenti $E(X_n^2Y_n^2)$ je rešenje jednačine*

$$\begin{aligned}(1-\alpha\beta\tau)E(X_n^2Y_n^2) &= c_3E(X_n^2Y_n) + c_4E(X_nY_n^2) + (1-\alpha)(1-\beta)(1+2\lambda)^2\tau E(X_nY_n) \\ &\quad +(1-(2-\alpha)(2-\beta)\tau)\lambda^4 + (2+4\alpha\beta-(8-\alpha-\beta)\tau)\lambda^3 \\ &\quad +(1+2\alpha\beta(2+\alpha\beta)-(5+\alpha\beta)\tau)\lambda^2 + (\alpha\beta-\tau)\lambda,\end{aligned}$$

iz skupa realnih brojeva, gde su

$$\begin{aligned}c_3 &= \alpha\beta(\alpha p(1-q)+\beta q(1-p)-\tau)(1+2\lambda) \\ c_4 &= \alpha\beta(\alpha q(1-p)+\beta p(1-q)-\tau)(1+2\lambda) \\ \tau &= \alpha\beta(p+q-2pq).\end{aligned}$$

Dokaz: Dokaz se izvodi slično kao u lemi 2.11. Takođe važi da je $E(X_n^2Y_n^2) < \infty$ jer su $E(X_n^2Y_n)$, $E(X_nY_n^2)$ i $E(X_nY_n)$ konačni i $1-\alpha\beta\tau > 0$. □

Lema 2.13 (Nastić, Ristić i Popović (2014), lema 9). *Zajednički moment $E(X_n^3Y_n)$ i $E(X_nY_n^3)$ su rešenja sistema*

$$\begin{aligned}(1-p(1-q)\alpha^3\beta)E(X_n^3Y_n) - q(1-p)\alpha^3\beta E(X_nY_n^3) &= \xi_1 \\ -(1-p)q\alpha\beta^3E(X_n^3Y_n) + (1-p(1-q)\alpha\beta^3)E(X_nY_n^3) &= \xi_2\end{aligned}$$

iz skupa realnih brojeva, pri čemu su

$$
\begin{aligned}
&\xi_1 = a_1 E(X_n^2 Y_n) + a_2 E(X_n Y_n^2) + a_3 E(X_n Y_n) + \pi_3 \\
&\xi_2 = b_1 E(X_n^2 Y_n) + b_2 E(X_n Y_n^2) + b_3 E(X_n Y_n) + \pi_4 \\
&a_1 = 3p(1-q)(1-\alpha)(1+\lambda)\alpha^2\beta \\
&a_2 = 3q(1-p)(1-\alpha)(1+\lambda)\alpha^2\beta \\
&a_3 = (1-\alpha)(1-2\alpha+3(2-\alpha)\lambda+3(1-\alpha)\lambda^2)\tau \\
&\pi_3 = ((1-\alpha)^3 p + (3-3\alpha+\alpha^2)(\alpha-\tau))\lambda^4 + (2(1-\alpha)^2 p + 1 + 4\alpha - 2\alpha^2 + 3\alpha\beta \\
&\ + 3(\alpha-3)\tau)\lambda^3 + (3-2p-2\alpha+2p\alpha+6\alpha\beta-7\tau)\lambda^2 + (1-p+\alpha\beta-\tau)\lambda \\
&b_1 = 3q(1-p)(1-\beta)(1+\lambda)\beta^2\alpha \\
&b_2 = 3p(1-q)(1-\beta)(1+\lambda)\beta^2\alpha \\
&b_3 = (1-\beta)(1-2\beta+3(2-\beta)\lambda+3(1-\beta)\lambda^2)\tau \\
&\pi_4 = ((1-\beta)^3 q + (3-3\beta+\beta^2)(\beta-\tau))\lambda^4 + (2(1-\beta)^2 q + 1 + 4\beta - 2\beta^2 + 3\alpha\beta \\
&\ + 3(\beta-3)\tau)\lambda^3 + (3-2q-2\beta+2q\beta+6\alpha\beta-7\tau)\lambda^2 + (1-q+\alpha\beta-\tau)\lambda \\
&\tau = \alpha\beta(p+q-2pq).
\end{aligned}
$$

Dokaz: Dokaz je analogan dokazu leme 2.11.□

Sada možemo izvesti asimptotsku raspodelu ocene $\hat{\boldsymbol{\theta}}_n^{cls} = (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \hat{\theta}_3, \hat{\theta}_4)$ i ona je data sledećom teoremom.

Teorema 2.14 (Nastić, Ristić i Popović (2014), teorema 10). *Niz ocena $\{\hat{\boldsymbol{\theta}}_n^{cls}\}$ dobijenih MCLS metodom ima asimptotski normalnu raspodelu sa srednjom vrednošću $\boldsymbol{\theta}$ i disperzijom $n^{-1}\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{R}\boldsymbol{U}$, gde je $\boldsymbol{U} = E\left(\frac{\partial \boldsymbol{g}_n^T}{\partial \boldsymbol{\theta}} \frac{\partial \boldsymbol{g}_n}{\partial \boldsymbol{\theta}}\right)$ i $\boldsymbol{R} = E\left(\frac{\partial \boldsymbol{g}_n^T}{\partial \boldsymbol{\theta}} \boldsymbol{f}_{n|n-1} \frac{\partial \boldsymbol{g}_n}{\partial \boldsymbol{\theta}}\right)$.*

Dokaz: Koristeći lemu 2.10 možemo izvesti matricu $\boldsymbol{R}$ kao

$$
\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix}
E(S_1 \widetilde{X}_{n-1}^2) & E(S_1 \widetilde{X}_{n-1} \widetilde{Y}_{n-1}) & 0 & 0 \\
E(S_1 \widetilde{X}_{n-1} \widetilde{Y}_{n-1}) & E(S_1 \widetilde{Y}_{n-1}^2) & 0 & 0 \\
0 & 0 & E(S_2 \widetilde{X}_{n-1}^2) & E(S_2 \widetilde{X}_{n-1} \widetilde{Y}_{n-1}) \\
0 & 0 & E(S_2 \widetilde{X}_{n-1} \widetilde{Y}_{n-1}) & E(S_2 \widetilde{Y}_{n-1}^2)
\end{bmatrix},
$$

dok je matrica $\boldsymbol{U}$ oblika

$$
\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix}
E(\widetilde{X}_{n-1}^2) & E(\widetilde{X}_{n-1} \widetilde{Y}_{n-1}) & 0 & 0 \\
E(\widetilde{X}_{n-1} \widetilde{Y}_{n-1}) & E(\widetilde{Y}_{n-1}^2) & 0 & 0 \\
0 & 0 & E(\widetilde{X}_{n-1}^2) & E(\widetilde{X}_{n-1} \widetilde{Y}_{n-1}) \\
0 & 0 & E(\widetilde{X}_{n-1} \widetilde{Y}_{n-1}) & E(\widetilde{Y}_{n-1}^2)
\end{bmatrix},
$$

pri čemu je $\widetilde{X}_{n-1} = X_{n-1} - \lambda$ i $\widetilde{Y}_{n-1} = Y_{n-1} - \lambda$. Vidimo da su elementi matrice $\boldsymbol{R}$ linearna kombinacija momenata $E(X_n^i Y_n^j)$, $i + j = 4$, $i, j \geq 1$. Prema lemama 2.11, 2.12 i 2.13, ovi momenti imaju konačne vrednosti, što implicira da su elementi matrice $\boldsymbol{R}$ konačni. Stoga, možemo primeniti teoremu 3.2 Tjøstheim (1986) koja kaže da ocene razmatrane u teoremi 2.9 konvergiraju kao $\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n^{cls} - \boldsymbol{\theta}) \to \mathcal{N}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{R}\boldsymbol{U}^{-1})$ kad $n \to \infty$. $\square$

Sada kada smo odredili asimptotsku raspodelu vektora parametara $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{cls} = (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \hat{\theta}_3, \hat{\theta}_4)$, izvešćemo asimptotsku raspodelu za polazne parametre $(\hat{\alpha}^{cls}, \hat{\beta}^{cls}, \hat{p}^{cls}, \hat{q}^{cls})$. Uvedimo najpre funkciju

$$\boldsymbol{g}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(x_1 + x_2, x_3 + x_4, \frac{x_1}{x_1 + x_2}, \frac{x_3}{x_3 + x_4}\right)'. \tag{2.27}$$

Kako je svaki element ovog vektora diferencijabilna funkcija u okolini tačke $\boldsymbol{\theta}$ možemo primeniti teoremu 6.4.3 iz Brockwell i Davis (1991). Možemo da primetimo da je $\boldsymbol{g}(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \hat{\theta}_3, \hat{\theta}_4) = (\hat{\alpha}^{cls}, \hat{\beta}^{cls}, \hat{p}^{cls}, \hat{q}^{cls})'$, pa onda na osnovu pomenute teoreme 6.4.3 dobijamo da je vektor $(\hat{\alpha}^{cls}, \hat{\beta}^{cls}, \hat{p}^{cls}, \hat{q}^{cls})'$ asimptotski normalno raspodeljen sa srednjom vrednošću $(\alpha, \beta, p, q)'$ i disperzijom $n^{-1}\boldsymbol{D}\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{R}\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{D}'$, gde je $\boldsymbol{D} = [(\partial g_i/\partial\theta_j)(\boldsymbol{\theta})]_{i,j}$ i njeni elementi su

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ \frac{\theta_2}{(\theta_1+\theta_2)^2} & \frac{-\theta_1}{(\theta_1+\theta_2)^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\theta_4}{(\theta_3+\theta_4)^2} & \frac{-\theta_3}{(\theta_3+\theta_4)^2} \end{bmatrix}. \tag{2.28}$$

Asimptotsku raspodelu ocena dobijenih YW metodom izvešćemo tako što ćemo zapravo dokazati da su ocene dobijene metodom YW i metodom MCLS ekvivalentne.

Lema 2.15 (Nastić, Ristić i Popović (2014), lema 11). *Ocene nepoznatih parametara, θ_i, $i = \overline{1,4}$, dobijene metodom MCLS i metodom YW su asimptotski ekvivalentne.*

Dokaz: YW i MCLS metode nam daju ocene nepoznatih parametara kao rešenja sistema jednačina navedenih na početku potpoglavlja 2.2.2. Kako su matrice sistema linearne transformacije koje zadržavaju konvergenciju, biće dovoljno da se fokusiramo na odgovarajuće elemente matrica. Posmatrajući konvergenciju u verovatnoći imamo da je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2}{\sum_{i=1}^{n-1}(X_i - \hat{\lambda})^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n-1}(X_i - \bar{X}_n)^2}{\sum_{i=1}^{n-1}(X_i - \hat{\lambda})^2} + \frac{\frac{1}{n}(X_n - \bar{X}_n)^2}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}(X_i - \hat{\lambda})^2} = 1,$$

pa onda važi da je $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2 = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\sum_{i=1}^{n-1}(X_i - \hat{\lambda})^2$. Ovo važi za sve elemente matrica sistema, što implicira da je $\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{cls} - \hat{\boldsymbol{\theta}}^{yw}) = o(1)$. $\square$

Teorema 2.16 (**Nastić, Ristić i Popović (2014), teorema 12**). *Niz ocena nepoznatih parametara $\hat{\boldsymbol{\theta}}_n^{yw}$ dobijenih YW metodom ima asimptotski normalnu raspodelu sa srednjom vrednošću i disperzijom datim u teoremi 2.14.*

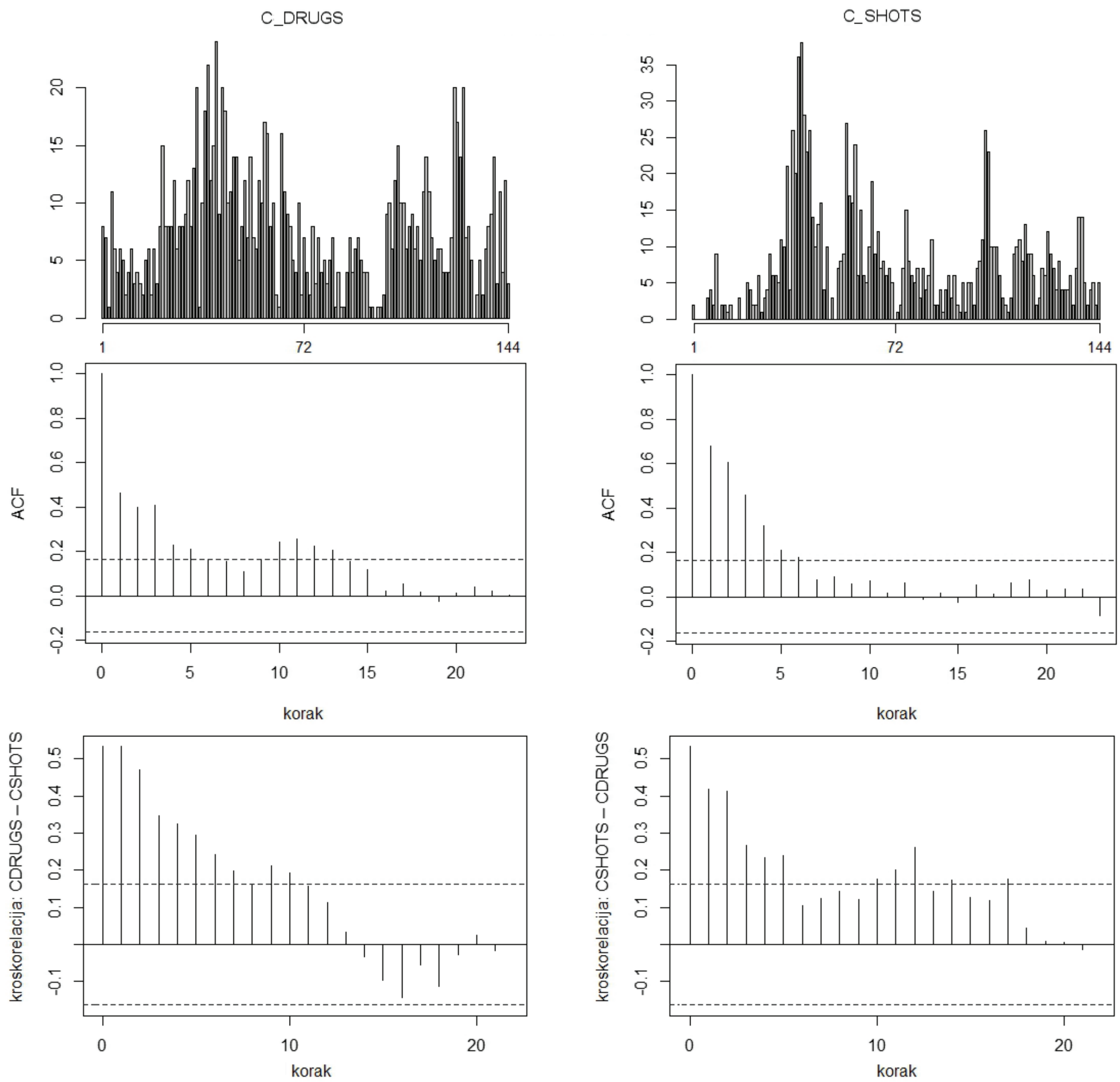
Dokaz: Kako su ocene nepoznatih parametara dobijene MCLS metodom i YW metodom asimptotski ekvivalentne, možemo primeniti teoremu 6.3.3 iz Brockwell i Davis (1991) i da dobijemo asimptotsku raspodelu ocena dobijenih YW metodom. □

2.2.3 Primena na stvarnim podacima

U ovom poglavlju razmatraćemo različite dvodimenzionalne modele primenjene na stvarne vremenske nizove. Ovim ne želimo da diskreditujemo neke modele, već samo da demonstriramo da različiti nizovi zahtevaju i različite pristupe. Pored BVPOINAR(1) i BVNGINAR(1) modela, razmatraćemo još i modele BVPOIBINAR(1) BVNBIBINAR(1) predstavljene u Pedeli i Karlis (2011), kao i FULLBVPOIBINAR(1) model koji su uveli Pedeli i Karlis (2013). Iste vremenske nizove modelujemo sa svih pet modela. Ti nizovi predstavljaju broj kriminalnih aktivnosti zabeleženih u Pitsburgu na mesečnom nivou u periodu od januara 1990. do decembra 2001. godine. Podaci se mogu naći na adresi `http://www.forecastingprinciples.com/index.php?option=com_content&view=article&id=47&Itemid=250`. Zbog same definicije dvodimenzionalnog INAR(1) modela, fokusiraćemo se na vremenske nizove koji su pozitivno korelisani i imaju bliske srednje vrednosti. Ove vremenske nizove koristimo samo radi demonstracije karakteristika različitih modela, pa stoga nećemo dokazivati njihovu stacionarnost. Stacionarnost ćemo konstatovati samo na osnovu grafika posmatranog niza.

Kako hoćemo da uvažimo činjenicu da su modeli koje razmatramo sa različitim marginalnim raspodelama, za ocenjivanje nepoznatih parametara koristićemo metod uslovne maksimalne verodostojnosti. Za kriterijume po kojima ćemo da poredimo modele, uzećemo Akaike informacioni kriterijum (AIC), Bajesov informacioni kriterijum (BIC) i srednjekvadratnu grešku (RMS). Vrednost za AIC dobija se kao $AIC = 2k - 2\ln(L)$, gde je k broj ocenjenih parametara, a L vrednost funkcije verodostojnosti izračunata za ocenjene parametre. Koristeći iste oznake, vrednost za BIC računamo kao $BIC = k\ln(n) - 2\ln(L)$, pri čemu je n dužina niza. Na kraju, jednačina za RMS za niz $\{X_n\}$ glasi $RMS = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=2}^{n}(X_i - E(X_i|X_{i-1}, Y_{i-1}))^2}$ i analogno za niz $\{Y_n\}$. Dok prva dva kriterijuma testiraju adekvatnost marginalnih raspodela, treći kriterijum sumira greške predviđanja za jedan korak unapred.

U prvom primeru uočimo vremenski niz koji opisuje broj prijava u vezi dilovanja droge ("C_DRUGS") i broj prijava u vezi pucnjave iz vatrenog oružja ("C_SHOTS"). Uzoračke sredine su 7.68 i 7.5, dok su uzoračke disperzije 25.3 i 51.86, redom. Koeficijent korelacije je 0.53. Vidimo da je kod oba niza količnik uzoračke disperzije i sredine znatno veći od jedan. Takođe, prisutna je značajna pozitivna korelacija između ova dva niza. Korelogrami za "C_DRUGS" i "C_SHOTS" su predstavljeni na slici 2.2.



Slika 2.2: Trakasti dijagram, grafik autokorelacije i kroskorelacije za vremenske nizove C_DRUGS i C_SHOTS.

Sa slike 2.2 možemo uočiti da su vremenski nizovi autokorelisani. Takođe, postoji i značajna korelisanost sa korakom jedan između dva niza. Vrednosti vremenskih nizova ukazuju na slično prisustvo ovih kriminalnih aktivnosti kroz vreme. Ocene nepoznatih parametara, njihove standardne devijacije, kao i vrednosti za AIC, BIC i RMS date su u tabeli 2.3.

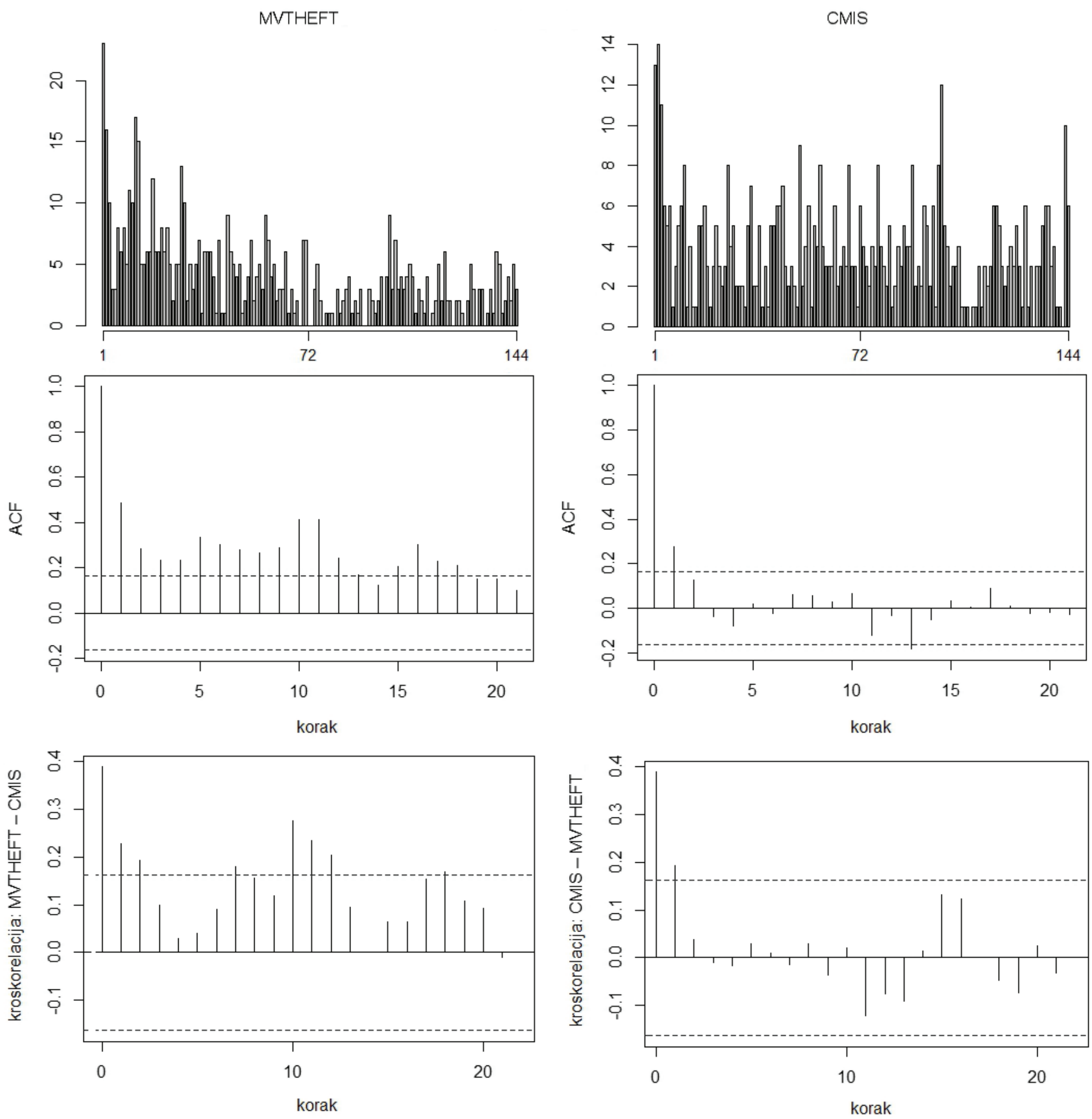
Tabela 2.3: Ocenjeni parametri sa standardnom devijacijom u zagradi, AIC, BIC, RMS za vremenske nizove C_DRUGS i C_SHOTS.

Model	CML ocene	AIC	BIC	RMS C_DRUGS	RMS C_SHOTS
BVPOINAR(1)	$\hat{\alpha} = 0.496(0.0293)$, $\hat{\beta} = 0.406(0.0371)$ $\hat{p} = 0.784(0.0685)$, $\hat{q} = 0.548(0.101)$ $\hat{\lambda} = 7.61(0.2841)$	1950.85	1950.79	5.549	4.171
BVNGINAR(1)	$\hat{\alpha} = 0.735(0.0527)$, $\hat{\beta} = 0.794(0.0577)$ $\hat{p} = 0.741(0.0932)$, $\hat{q} = 0.266(0.0931)$ $\hat{\mu} = 7.57(0.3011)$	1647.044	1661.819	5.292	4.107
FULLBVPOIBINAR(1)	$\hat{\alpha}_{11} = 0.403(0.0297)$, $\hat{\alpha}_{12} = 0.118(0.031)$ $\hat{\alpha}_{21} = 0.215(0.034)$, $\hat{\alpha}_{22} = 0.216(0.042)$ $\hat{\lambda}_1 = 3.5(0.369)$, $\hat{\lambda}_2 = 2.696(0.325)$ $\hat{\phi} = 0.898(0.236)$	1937.45	1958.242	5.547	5.509
BVPOIBINAR(1)	$\hat{\alpha}_1 = 0.408(0.0291)$, $\hat{\lambda}_1 = 4.472(0.258)$ $\hat{\alpha}_2 = 0.28(0.0386)$, $\hat{\lambda}_2 = 5.519(0.3418)$ $\hat{\phi} = 1.348(0.2497)$	1991.77	2006.62	5.619	4.551
BVNBIBINAR(1)	$\hat{\alpha}_1 = 0.269(0.0445)$, $\hat{\lambda}_1 = 5.515(0.5007)$ $\hat{\alpha}_2 = 0.292(0.0444)$, $\hat{\lambda}_2 = 5.429(0.5013)$ $\hat{\beta} = 0.518(0.0821)$	1706.76	1721.61	5.515	5.429

Možemo primetiti da BVNGINAR(1) model postiže bolje rezultate po sva tri kriterijuma. Geometrijska marginalna raspodela u dobroj meri povećava vrednost funkcije verodostojnosti, a vidimo da je i model baziran na negativnoj binomnoj raspodeli, BVNBIBINAR(1), dao znatno bolje rezultate nego modeli sa Puasonovom marginalnom raspodelom. Dalje, primećujemo da model kod koga procesi preživljavanja mogu da generišu nove događaje, što je slučaj kod BVNGINAR(1) modela, najviše odgovara posmatranim vremenskim nizovima. Naime, droga koja se proda, često završi ponovo u prodaji, dok učesnici u oružanim sukobima često bivaju motivisani da nastave sa istim. Jedan interesantan način na koji možemo da posmatramo parametre p i q jeste da nam oni ukazuju na interakciju između onih koji diluju drogu i onih koji učestvuju u oružanim sukobima. Tako vrednost parametra p je veća od 0.7 i kod BVPOINAR(1) i kod BVNGINAR(1) modela, što ukazuje da je dilovanje droge uglavnom inicirano tom aktivnošću iz prethodnog perioda (na šta takođe ukazuje i parametar α_{12} iz FULLBVPOIBINAR(1) modela). Vrednost parametra q kod BVNGINAR(1) modela sugeriše da je u četvrtini slučajeva dilovanje droge dovelo do oružanog obračuna.

U drugom primeru izdvojićemo druga dva vremenska niza. Posmatrajmo broj ukradenih vozila ("MVTHEFT") i prestupničkog ponašanja ("CMIS") za period od januara 1990. do decembra 2001. godine u Pitsburgu. Uzoračke sredine su 4.1 i 3.85, dok su uzoračke disperzije 13.07 i 6.51, redom. Koeficijent korelacije je 0.38. Vidimo da je uzoračka disperzija nešto veća od srednje vrednosti ali ne tako puno kao u prethodnom primeru. Takođe možemo konstatovati značajnu pozitivnu korelaciju između nizova. Autokorelaciona struktura data je na slici 2.3 gde se vidi prisustvo autokorelacije kod oba niza, kao i korelisanost između nizova sa korakom jedan.

Prema rezultatima prezentovanim u tabeli 2.4, možemo zaključiti da je model BVPOINAR(1) najpogodniji za posmatrane vremenske nizove. Razlog za ovakve rezultate



Slika 2.3: Trakasti dijagram, grafik autokorelacije i kroskorelacije za vremenske nizove MVTHEFT i CMIS.

ponovo možemo naći u prirodi samih nizova. Kriminalni prestupi kao što su ovi nisu usmereni prema ljudima koji bi počinili ta ista dela. Stoga, proces preživljavanja kod ovih nizova ne generiše nove događaje pa je logičan izbor binomni tining operator za opisivanje ovakvog stanja. Ako obratimo pažnju na vrednosti ocenjenih parametara kod BVPOINAR(1) i BVNGINAR(1) modela, primetićemo da na sličan način opisuju zavisnost između nizova gde su im vrednosti za parametar p oko 0.7, a za parametar q oko 0.2 i 0.12, redom. Korelacija sa korakom jedan između CMIS i MVTHEFTS nizova nije tako izražena što i potvrđuje vrednost parametra q. Međutim ova dva modela na drugačiji način modeluju autokorelisanost, gde su

Tabela 2.4: Ocenjeni parametri sa standardnom devijacijom u zagradi, AIC, BIC, RMS za vremenske nizove MVTHEFTS i CMIS.

Model	CML ocene	AIC	BIC	RMS MVTHEFT	RMS CMIS
BVPOINAR(1)	$\hat{\alpha} = 0.393(0.0506)$, $\hat{\beta} = 0.215(0.0599)$ $\hat{p} = 0.769(0.1048)$, $\hat{q} = 0.205(0.1834)$ $\hat{\lambda} = 3.829(0.1599)$	1340.46	1355.31	2.728	2.329
BVNGINAR(1)	$\hat{\alpha} = 0.799(0.0693)$, $\hat{\beta} = 0.649(0.0723)$ $\hat{p} = 0.689(0.0975)$, $\hat{q} = 0.123(0.124)$ $\hat{\mu} = 3.979(0.1705)$	1343.86	1358.71	2.802	2.471
FULLBVPOIBINAR(1)	$\hat{\alpha}_{11} = 0.329(0.0451)$, $\hat{\alpha}_{12} = 0.001(0.0282)$ $\hat{\alpha}_{21} = 0.008(0.0191)$, $\hat{\alpha}_{22} = 0.238(0.0459)$ $\hat{\lambda}_1 = 3.466(0.289)$, $\hat{\lambda}_2 = 2.715(0.243)$ $\hat{\phi} = 0.886(0.0791)$	1385.1	1405.89	2.916	2.396
BVPOIBINAR(1)	$\hat{\alpha}_1 = 0.319(0.0411)$, $\hat{\lambda}_1 = 2.659(0.2024)$ $\hat{\alpha}_2 = 0.179(0.057)$, $\hat{\lambda}_2 = 3.101(0.2568)$ $\hat{\phi} = 0.57(0.8867)$	1347.1	1361.85	2.798	2.342
BVNBIBINAR(1)	$\hat{\alpha}_1 = 0.295(0.0487)$, $\hat{\lambda}_1 = 2.756(0.2622)$ $\hat{\alpha}_2 = 0.265(0.0621)$, $\hat{\lambda}_2 = 2.772(0.2568)$ $\hat{\beta} = 0.287(0.1946)$	1341.94	1356.79	2.817	2.338

znatno manje vrednosti parametara α i β kod BVPOINAR(1) modela. To je na neki način konzistentno sa slikom 2.3 gde vidimo da je autokoreliranost sa korakom jedan prisutna, ali uzoračke autokorelacione funkcije imaju male vrednosti. Bolje modelovanje ove komponente dovelo je do smanjenja vrednosti RMS-a kod oba niza.

Na kraju, možemo da zaključimo da ne postoji jedan najbolji model. Priroda problema zahteva definisanje različitih modela kako bi se uvažila osobenost posmatranih vremenskih nizova.

2.3 Mešoviti dvodimenzionalni model

Dvodimenzionalni model koji su definisali Ristić, Nastić, Jayakumar i Bakouch (2012) zasnovan je na negativnom binomnom tining operatoru, dok su Nastić, Ristić i Popović (2014) predstavili model zasnovan na binomnom tining operatoru. U ovom poglavlju, konstruisaćemo dvodimenzionalni autoregresivni model, BVMIXGINAR(1), kod koga je proces preživljavanja jednog vremenskog niza generisan binomnim, a drugog niza negativnim binomnim tining operatorom. Time ćemo upotpuniti klasu nenegativnih celobrojnih autoregresivnih modela prvog reda sa slučajnim koeficijentima. Poseban akcenat biće na analizi greške predviđanja ove klase modela. Kako se modeli sastoje od procesa preživljavanja i inovacionog procesa, to imamo dva izvora neizvesnosti. Pokazaćemo kako da prepoznamo grešku predviđanja za jedan korak unapred nastalu iz jedne ili druge komponente procesa. Kako se kod ovog modela javljaju i binomni i negativni binomni tining operatori, moći ćemo da damo sveobuhvatniju analizu greške predviđanja, koja se može primeniti i na ostale modele iz ove grupacije.

2.3.1 Definicija BVMIXGINAR(1) modela

U ovom poglavlju predstavićemo dvodimenzionalni model $\{(X_n, Y_n)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ gde su dva vremenska niza zavisna, ali je njihov razvoj opisan različitim tining operatorima. Neka su $\{X_n\}$ i $\{Y_n\}$ nenegativni celobrojni vremenski nizovi pri čemu su slučajne promenljive X_n i Y_n geometrijski raspodeljene sa parametrom $\frac{\mu}{1+\mu}$, $Geom(\frac{\mu}{1+\mu})$, sa raspodelom verovatnoća $P(X_n = k) = \frac{\mu^k}{(1+\mu)^{k+1}}$, pri čemu je $\mu > 0$ i $k \in \mathbb{N}_0$. Mešoviti geometrijski dvodimenzionalni autoregresivni proces prvog reda (BVMIXGINAR(1)) dat je jednačinama

$$X_n = \begin{cases} \alpha \circ X_{n-1} + \varepsilon_n, & \text{s.v. } p, \\ \alpha \circ Y_{n-1} + \varepsilon_n, & \text{s.v. } 1-p, \end{cases} \tag{2.29}$$

$$Y_n = \begin{cases} \beta * X_{n-1} + \eta_n, & \text{s.v. } q, \\ \beta * Y_{n-1} + \eta_n, & \text{s.v. } 1-q, \end{cases} \tag{2.30}$$

gde su $p, q \in [0, 1]$, a $\alpha, \beta \in (0, 1)$. Još imamo da su $\{\varepsilon_n\}$ i $\{\eta_n\}$ nizovi nezavisnih jednako raspodeljenih slučajnih promenljivih, pri čemu je i ε_n nezavisno od η_m za svako m i n. Takođe (ε_n, η_n) je nezavisno od (X_m, Y_m) za $m < n$. Brojački nizovi u $\alpha \circ X_n$, $\alpha \circ Y_n$, $\beta * X_n$ i $\beta * Y_n$, su međusobno nezavisni za svako $n \in \mathbb{N}_0$, a takođe su nezavisni od ε_m i η_m za svako $m \in \mathbb{N}_0$. Za poznato X_n i Y_n, slučajne promenljive $\alpha \circ X_n$ i $\alpha \circ Y_n$ nezavisne su od Y_k, a $\beta * X_n$ i $\beta * Y_n$ nezavisne su od X_k za svako $k \in \mathbb{N}_0$. Tining operatori su definisani kao $\alpha \circ X_n = \sum_{i=1}^{X_n} B_i$ i $\beta * X_n = \sum_{i=1}^{X_n} G_i$, gde su B_i nezavisne slučajne promenljive sa Bernulijevom raspodelom sa parametrom α, a G_i nezavisne slučajne promenljive sa geometrijskom raspodelom sa parametrom $\frac{\beta}{1+\beta}$. Takođe, B_i i G_j su nezavisne sa svako

$i, j \in \mathbb{N}_0$. Inovacioni procesi $\{\varepsilon_n\}$ i $\{\eta_n\}$ su definisani tako da očuvaju stacionarnost vremenskih nizova $\{X_n\}$ i $\{Y_n\}$, a njihova raspodela verovatnoća data je sledećom teoremom.

Teorema 2.17. *Neka je $\mu > 0$, a X_0 i Y_0 slučajne promenljive sa geometrijskom raspodelom sa parametrom $\frac{\mu}{1+\mu}$. Vremenski niz $\{(X_n, Y_n)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ definisan jednačinama (2.29) i (2.30) je stacionaran sa geometrijskim marginalnim raspodelama $Geom(\frac{\mu}{1+\mu})$ ako i samo ako su vremenski nizovi $\{\varepsilon_n\}$ i $\{\eta_n\}$ raspodeljeni kao*

$$\varepsilon_n \overset{d}{=} \begin{cases} Geom(\frac{\mu}{1+\mu}), & \text{s.v. } 1-\alpha, \\ 0, & \text{s.v. } \alpha, \end{cases} \tag{2.31}$$

$$\eta_n \overset{d}{=} \begin{cases} Geom(\frac{\mu}{1+\mu}), & \text{s.v. } \frac{\mu(1-\beta)-\beta}{\mu-\beta}, \\ Geom(\frac{\beta}{1+\beta}), & \text{s.v. } \frac{\beta\mu}{\mu-\beta}, \end{cases} \tag{2.32}$$

pri čemu su $\alpha \in (0, 1)$, $\beta \in (0, \frac{\mu}{1+\mu}]$ i $p, q \in [0, 1]$.

Dokaz: Pretpostavimo da je $\{(X_n, Y_n)\}$ stacionaran proces sa marginalnim raspodelama $Geom(\frac{\mu}{1+\mu})$. Kako su slučajne promenljive X_n i Y_n jednake u raspodeli, to imamo da je $\Phi_{X_n}(s) = \Phi_{\varepsilon_n}(s)\Phi_{X_{n-1}}(\Phi_{B_i}(s))$. Uzimajući u obzir njihovu marginalnu raspodelu dobićemo

$$\Phi_{\varepsilon_n}(s) = \frac{1 + \mu\alpha(1-s)}{1 + \mu(1-s)} = \alpha + (1-\alpha)\frac{1}{1+\mu-\mu s},$$

odakle sledi jednačina (2.31). Na sličan način izvodimo funkciju generatrisa verovanoća za slučajnu promenljivu η_n i dobijamo da je

$$\Phi_{\eta_n}(s) = \frac{(1+\mu)(1+\beta-\beta s) - \mu}{(1+\mu-\mu s)(1+\beta-\beta s)} = \frac{\mu(1-\beta)-\beta}{\mu-\beta}\frac{1}{1+\mu-\mu s} + \frac{\beta\mu}{\mu-\beta}\frac{1}{1+\beta-\beta s}.$$

Jednačina (2.32) sledi uzevši u obzir sledeća ograničenja. Označimo sa $A_1 = \frac{\mu(1-\beta)-\beta}{\mu-\beta}$ i $A_2 = \frac{\beta\mu}{\mu-\beta}$. Uviđamo da je $A_1 + A_2 = 1$, ali je $A_2 > 0$ ako i samo ako je $\mu > \beta$, što dalje implicira $A_1 \geq 0$ ako i samo ako $\mu \geq \frac{\beta}{1-\beta}$. Kako je β manje od jedan to su izrazi A_1 i A_2 nenegativni za $\beta \leq \frac{\mu}{1+\mu}$. Takođe, $A_1 \leq 1$ ako i samo ako $\frac{\beta\mu}{\mu-\beta} \geq 0$. Dalje, pod pretpostavkom da je $\mu \geq \frac{\beta}{1-\beta}$ dobijamo $\beta\mu - \mu + \beta \leq 0$ što je ekvivalentno sa $A_2 \leq 1$.

Za dokaz u suprotnom smeru krenimo od pretpostavki da je ε_n raspodeljena prema jednačini (2.31) i da su $X_0 \overset{d}{=} Y_0 \overset{d}{=} Geom(\frac{\mu}{1+\mu})$. Tada imamo da je $\Phi_{X_1}(s) = \Phi_{X_0}(1-\alpha+\alpha s)\Phi_\varepsilon(s)$. Zamenom u ovoj jednačini odgovarajuće funkcije generatrisa verovatnoće dobićemo da je

$$\Phi_{X_1} = \frac{1}{1+\mu(1-1+\alpha-\alpha s)}\frac{1+\mu\alpha(1-s)}{1+\mu(1-s)} = \frac{1}{1+\mu(1-s)},$$

pa zaključujemo da je $X_1 \sim Geom(\frac{\mu}{1+\mu})$. Indukcijom dokazujemo da važi za svako X_n. Dokaz za Y_n je analogan. □

Na osnovu jednačine (2.29) imamo da je

$$E(X_n) = p(E(\alpha \circ X_n) + E(\varepsilon_n)) + (1-p)(E(\alpha \circ Y_n) + E(\varepsilon_n)).$$

Po prethodnoj teoremi $E(X_n) = E(X_{n-1}) = E(Y_{n-1}) = \mu$ pa imamo da je $E(\varepsilon_n) = \mu(1-\alpha)$. Na sličan način iz jednačine (2.30) možemo zaključiti da je $E(\eta_n) = \mu(1-\beta)$.

Neka su X_n i Y_n jednako raspodeljene slučajne promenljive koje sačinjavaju vremenske nizove $\{X_n\}$ i $\{Y_n\}$ definisane jednačinama (2.29) i (2.30). Koristeći funkcije generatrisa verovatnoća, za vremenski niz $\{X_n\}$ važi

$$\begin{aligned}
\Phi_{X_n}(s) &= \Phi_{X_{n-1}}(1-\alpha+\alpha s)\Phi_{\varepsilon_n}(s) = \dots \\
&= \Phi_{X_0}(1-\alpha^n+\alpha^n s)\prod_{k=0}^{n-1}\frac{1+\mu\alpha^{k+1}(1-s)}{1+\mu\alpha^k(1-s)} \\
&= \Phi_{X_0}(1-\alpha^n+\alpha^n s)\frac{1+\mu\alpha^n(1-s)}{1+\mu(1-s)} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{1+\mu-\mu s}.
\end{aligned}$$

Takođe, za vremenski niz $\{Y_n\}$ imamo

$$\begin{aligned}
\Phi_{Y_n}(s) &= \Phi_{Y_{n-1}}\left(\frac{1}{1+\alpha-\alpha s}\right)\Phi_{\eta_n}(s) = \dots \\
&= \Phi_{Y_0}\left(\frac{1-\alpha+\alpha(1-s)(1-\alpha^{n-1})}{1-\alpha+\alpha(1-s)(1-\alpha^n)}\right)\prod_{k=0}^{n-1}\Phi_{\eta_k}\left(\frac{1-\alpha+\alpha(1-s)(1-\alpha^{k-1})}{1-\alpha+\alpha(1-s)(1-\alpha^k)}\right) \\
&= \Phi_{Y_0}\left(\frac{1-\alpha+\alpha(1-s)(1-\alpha^{n-1})}{1-\alpha+\alpha(1-s)(1-\alpha^n)}\right)\cdot \\
&\cdot \frac{(1-\alpha^2(1-s)-\alpha s)(1+\alpha^n\mu(1-s)-\alpha^{n+1}(1+\mu)(1-s)-\alpha s)}{(1-\alpha^{n+1}(1-s)-\alpha s)(1+\alpha\mu(1-s)-\alpha^2(1+\mu)(1-s)-\alpha s)} \\
&\xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{1+\mu-\mu s}.
\end{aligned}$$

Dakle, možemo zaključiti da kada su inovacioni procesi raspodeljeni prema teoremi 2.17 i $X_n \stackrel{d}{=} Y_n$, tada X_n i Y_n konvergiraju ka slučajnim promenljivama sa geometrijskom raspodelom sa parametrom $\mu/(1+\mu)$ kad $n \to \infty$, bez obzira na raspodelu početnih elemenata vremenskih nizova $\{X_n\}$ i $\{Y_n\}$.

Kako za binomni i negativni binomni tining operator vazi da je $E((\alpha \circ X)(\beta \circ Y)) = E((\alpha * X)(\beta * Y)) = E((\alpha \circ X)(\beta * Y)) = \alpha\beta E(XY)$ to dalje implicira kovarijacionu strukturu modela kao u jednačini (2.9), pri čemu je kovarijacija između slučajnih promenljivih X_n i Y_n

$$Cov(X_n, Y_n) = \frac{\alpha\beta((1-p)(1-q)+pq)}{1-\alpha\beta(p(1-q)+q(1-p))}\mu(1+\mu) \equiv \rho\mu(1+\mu).$$

Korelacija između vremenskih nizova označena je sa ρ i diskutovana je u jednačini (2.13) gde smo zaključili da je $\rho \in [0, 1)$.

Za binomni i negativni binomni tining operator još važi da je $E(\alpha \circ X_n | X_n) = E(\alpha * X_n | X_n) = \alpha X_n$ iz čega sledi da je uslovno očekivanje slučajnog vektora (X_{n+1}, Y_{n+1}) za poznate vrednosti (X_n, Y_n) dato jednačinom (2.8).

Slučajne promenljive X_n i Y_n su uslovno nezavisne, te je zajednička uslovna raspodela verovatnoća slučajnih promenljivih X_n i Y_n, za poznato $X_{n-1} = u$ i $Y_{n-1} = v$, data jednačinom

$$\begin{aligned} P(X_n = x, Y_n = y | X_{n-1} = u, Y_{n-1} = v) = P(X_n = x | X_{n-1} = u, Y_{n-1} = v) \\ \times P(Y_n = y | X_{n-1} = u, Y_{n-1} = v). \end{aligned}$$

Uslovna raspodela verovatnoća slučajne promenljive X_n data je sa

$$\begin{aligned} P(X_n = x | X_{n-1} = u, Y_{n-1} = v) = p \sum_{k=0}^{\min(x,u)} P(\varepsilon_n = x - k) P(\alpha \circ X_{n-1} = k | X_{n-1} = u) \\ + (1 - p) \sum_{k=0}^{\min(x,v)} P(\varepsilon_n = x - k) P(\alpha \circ Y_{n-1} = k | Y_{n-1} = v). \end{aligned} \tag{2.33}$$

Na sličan način za Y_n imamo

$$\begin{aligned} P(Y_n = y | X_{n-1} = u, Y_{n-1} = v) = q \sum_{k=0}^{y} P(\eta_n = y - k) P(\beta * X_{n-1} = k | X_{n-1} = u) \\ + (1 - q) \sum_{k=0}^{y} P(\eta_n = y - k) P(\beta * Y_{n-1} = k | Y_{n-1} = v). \end{aligned} \tag{2.34}$$

Pod pretpostavkom da je $X = u$, $u \in \mathbb{N}_0$, slučajna promenljiva $\alpha \circ X$ ima binomnu raspodelu sa parametarima u i α, a slučajna promenljiva $\beta * X$ negativnu binomnu sa parametrima u i β čija je raspodela verovatnoća $P(\beta * X = k | X = u) = \binom{u+k-1}{k} \frac{\beta^k}{(1+\beta)^{k+u}}$, gde je $k \in \mathbb{N}_0$. Raspodela verovatnoća inovacionih procesa čitamo iz jednačina (2.31) i (2.32) i glase

$$P(\varepsilon_n = x - k) = 1_{\{x=k\}} \alpha + (1 - \alpha) \frac{\mu^{x-k}}{(1 + \mu)^{x-k+1}},$$

$$P(\eta_n = y - k) = \frac{\mu(1 - \beta) - \beta}{\mu - \beta} \frac{\mu^{y-k}}{(1 + \mu)^{y-k+1}} + \frac{\beta\mu}{\mu - \beta} \frac{\beta^{y-k}}{(1 + \beta)^{y-k+1}}.$$

Indikatorsku funkciju za slučajni događaj A označili smo sa 1_A. Sada jednačina (2.33) glasi

$$P(X_n = x | X_{n-1} = u, Y_{n-1} = v)$$

$$
\begin{aligned}
&= p \sum_{k=0}^{\min(x,u)} \left(1_{\{x=k\}}\alpha + (1-\alpha)\frac{\mu^{x-k}}{(1+\mu)^{x-k+1}} \right) \cdot \binom{u}{k} \alpha^k (1-\alpha)^{u-k} \\
&+ (1-p) \sum_{k=0}^{\min(x,v)} \left(1_{\{x=k\}}\alpha + (1-\alpha)\frac{\mu^{x-k}}{(1+\mu)^{x-k+1}} \right) \cdot \binom{v}{k} \alpha^k (1-\alpha)^{v-k}.
\end{aligned}
$$

Na sličan način dobijamo jednačinu (2.34) kao

$$
\begin{aligned}
&P(Y_n = y | X_{n-1} = u, Y_{n-1} = v) \\
&= q \sum_{k=0}^{y} \left(\frac{\mu(1-\beta)-\beta}{\mu-\beta} \frac{\mu^{y-k}}{(1+\mu)^{y-k+1}} + \frac{\beta\mu}{\mu-\beta} \frac{\beta^{y-k}}{(1+\beta)^{y-k+1}} \right) \cdot \binom{u+k-1}{k} \frac{\beta^k}{(1+\beta)^{k+u}} \\
&+ (1-q) \sum_{k=0}^{y} \left(\frac{\mu(1-\beta)-\beta}{\mu-\beta} \frac{\mu^{y-k}}{(1+\mu)^{y-k+1}} + \frac{\beta\mu}{\mu-\beta} \frac{\beta^{y-k}}{(1+\beta)^{y-k+1}} \right) \cdot \binom{v+k-1}{k} \frac{\beta^k}{(1+\beta)^{k+v}}.
\end{aligned}
$$

2.3.2 Greške predviđanja

Srednjekvadratna greška je standardna mera kojom proveravamo koliko je neki model odgovarajući za posmatrani vremenski niz. Grešku u svakom trenutku računamo kao razliku između stvarne vrednosti u trenutku n i očekivane vrednosti za taj trenutak pod pretpostavkom da nam je poznata vrednost za trenutak $n-1$. Za vremenske nizove $\{X_n\}$ i $\{Y_n\}$, definisane BVMIXGINAR(1) modelom, te greške se računaju kao

$$
\begin{aligned}
r_{x,n} &= X_n - \alpha p X_{n-1} - \alpha(1-p)Y_{n-1} - \mu_\varepsilon \\
r_{y,n} &= Y_n - \beta q X_{n-1} - \beta(1-q)Y_{n-1} - \mu_\eta.
\end{aligned}
$$

Kako je BVMIXGINAR(1) model sastavljen od dva izvora neizvesnosti (proces preživljavanja i inovacioni proces), bilo bi korisno da pratimo grešku predviđanja svakog procesa zasebno. Ovu ideju za jednodimenzionalne INAR modele predstavili su Freeland i McCabe (2004), a mi ćemo je primeniti na dvodimenzionalni slučaj. Na taj način dobićemo dve mere za grešku, greška procesa preživljavanja

$$
\begin{aligned}
r_{x,n}^{sur} &= p(\alpha \circ X_{n-1}) + (1-p)(\alpha \circ Y_{n-1}) - \alpha p X_{n-1} - \alpha(1-p)Y_{n-1} \\
r_{y,n}^{sur} &= q(\beta \circ X_{n-1}) + (1-q)(\beta \circ Y_{n-1}) - \beta q X_{n-1} - \beta(1-q)Y_{n-1},
\end{aligned}
$$

za niz $\{X_n\}$ i $\{Y_n\}$ redom, kao i greške inovacionih procesa $r_{x,n}^{in} = \varepsilon_n - \mu_\varepsilon$ i $r_{y,n}^{in} = \eta_n - \mu_\eta$. Skraćenice "sur" (eng. survival) i "in" (eng. innovation) smo iskoristili da označimo greške predviđanja odgovarajućih procesa. Problem koji se ovde javlja jeste da ne znamo vrednosti procesa preživljavanja i inovacionog procesa, već samo njihov zbir. Zato ćemo razmatrati njihova uslovna očekivanja u odnosu na σ-algebru generisanu slučajnim vektorima (X_n, Y_n), (X_{n-1}, Y_{n-1}), ..., (X_0, Y_0), koju označavamo sa $\mathcal{F}_n$. Kako je (X_n, Y_n) proces Markova prvog reda, ispitivaćemo uslovno očekivanje u odnosu na σ-algebru generisanu slučajnim vektorima od trenutka $n-1$ do trenutka n.

Izvedimo najpre uslovne verovatnoće procesa preživljavanja. Kako bismo lakše izdvojili ovu komponentu modela, iskoristićemo jednačinu (2.4) gde su X_n i Y_n definisani kao

$$X_n = U_{1n} \circ X_{n-1} + U_{2n} \circ Y_{n-1} + \varepsilon_n, \tag{2.35}$$

$$Y_n = V_{1n} * X_{n-1} + V_{2n} * Y_{n-1} + \eta_n. \tag{2.36}$$

Prva dva sabirka u jednačinama (2.35) i (2.36) definišu proces preživljavanja, a treći proces inovacije pa su ovakvo definisani procesi lakši za praćenje.

Uvedimo oznaku $P_{u,v}(X_n = x) = P(X_n = x | X_{n-1} = u, Y_{n-1} = v)$. Uslovna verovatnoća prvog sabirka jednačine (2.35) u odnosu na σ-algebru $\mathcal{F}_n$ za $m, r, k, s, x, y, u, v \in \mathbb{N}_0$ je

$$\begin{aligned}
&P(U_{1n} \circ X_{n-1} = m | X_n = x, Y_n = y, X_{n-1} = u, Y_{n-1} = v)\\
&= \frac{P_{u,v}(U_{1n} \circ X_{n-1} = m, X_n = x)}{P_{u,v}(X_n = x)}\\
&= \frac{P_{u,v}(U_{1n} \circ X_{n-1} = m, U_{1n} \circ X_{n-1} + U_{2n} \circ Y_{n-1} + \varepsilon_n = x)}{P_{u,v}(X_n = x)}\\
&= \frac{1}{P_{u,v}(X_n = x)}[pP_{u,v}(\alpha \circ X_{n-1} = m, \alpha \circ X_{n-1} + 0 \circ Y_{n-1} + \varepsilon_n = x)\\
&+ (1-p)P_{u,v}(0 \circ X_{n-1} = m, 0 \circ X_{n-1} + \alpha \circ Y_{n-1} + \varepsilon_n = x)]\\
&= \frac{1}{P_{u,v}(X_n = x)}\\
&\cdot [pP_u(\alpha \circ X_{n-1} = m, \varepsilon_n = x - m) + (1-p)I_{\{m=0\}}P_{u,v}(\alpha \circ Y_{n-1} + \varepsilon_n = x)]\\
&= \frac{1}{P_{u,v}(X_n = x)}\\
&\cdot [pP(Bin(u,\alpha) = m)P(\varepsilon_n = x - m) + (1-p)I_{\{m=0\}}P(Bin(v,\alpha) + \varepsilon_n = x)].
\end{aligned}$$

Sa $Bin(u,\alpha)$ označili smo slučajnu promenljivu sa binomnom raspodelom sa parametrima u i α. Indikatorska promenljiva koja se javlja u poslednjem sabirku definisana je kao

$$I_{\{m=0\}} = \begin{cases} 1, & m = 0,\\ 0, & m \neq 0. \end{cases}$$

Na sličan način dolazimo i do uslovne verovatnoće drugog sabirka jednačine (2.35). Kako je postupak izvođenja isti daćemo samo krajnji oblik, a on glasi

$$P(U_{2n} \circ Y_{n-1} = r | X_n = x, Y_n = y, X_{n-1} = u, Y_{n-1} = v) =$$

$$\frac{1}{P_{u,v}(X_n = x)}[pI_{\{r=0\}}P(Bin(u,\alpha) + \varepsilon_n = x) + (1-p)P(Bin(v,\alpha) = r)P(\varepsilon_n = x - r)]$$

Označimo sa $NB(u, \alpha)$ slučajnu promenljivu koja ima negativnu binomnu raspodelu sa parametrima u i α. Uslovne verovatnoće procesa preživljavanja jednačine (2.36) određujemo na analogan način i one glase

$$\begin{aligned}
&P(V_{1n} * X_{n-1} = k | X_n = x, Y_n = y, X_{n-1} = u, Y_{n-1} = v) = \\
&\frac{1}{P_{u,v}(Y_n = y)} P_{u,v}(V_{1n} * X_{n-1} = k, V_{1n} * X_{n-1} + V_{2n} * Y_{n-1} + \eta_n = y) = \\
&\frac{1}{P_{u,v}(Y_n = y)}[qP_{u,v}(\beta * X_{n-1} = k, \beta * X_{n-1} + 0 * Y_{n-1} + \eta_n = y) + \\
&(1-q)P_{u,v}(0 * X_{n-1} = k, 0 * X_{n-1} + \beta * Y_{n-1} + \eta_n = y)] = \\
&\frac{1}{P_{u,v}(Y_n = y)}[qP(NBin(u,\beta) = k)P(\eta_n = y - k) + (1-q)I_{\{k=0\}}P(NBin(v,\beta) + \eta_n = y)]
\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}
&P(V_{2n} * Y_{n-1} = s | X_n = x, Y_n = y, X_{n-1} = u, Y_{n-1} = v) = \\
&\frac{1}{P_{u,v}(Y_n = y)}[qI_{\{s=0\}}P(NBin(u,\beta) + \eta_n = y) + (1-q)P(NBin(v,\beta) = s)P(\eta_n = y - s)].
\end{aligned}$$

Na osnovu dobijenih uslovnih verovatnoća možemo da izračunamo sledeća uslovna očekivanja

$$\begin{aligned}
E(U_{1n} \circ X_{n-1} | \mathcal{F}_n) &= \sum_{i=0}^{\infty} iP(U_{1n} \circ X_{n-1} = i | X_n = x, Y_n = y, X_{n-1} = u, Y_{n-1} = v) \\
&= \sum_{i=1}^{u} iP(U_{1n} \circ X_{n-1} = i | X_n = x, Y_n = y, X_{n-1} = u, Y_{n-1} = v) \\
&= \frac{p}{P_{u,v}(X_n = x)} \sum_{i=1}^{\min(u,x)} i \binom{u}{i} \alpha^i (1-\alpha)^{u-i} P(\varepsilon_n = x - i) \\
&= \frac{\alpha p u}{P_{u,v}(X_n = x)} \sum_{i=1}^{\min(u,x)} \binom{u-1}{i-1} \alpha^{i-1} (1-\alpha)^{u-1-i+1} P(\varepsilon_n = x - 1 - i + 1) \\
&= \frac{\alpha p u}{P_{u,v}(X_n = x)} \sum_{i=0}^{\min(u-1,x-1)} \binom{u-1}{i} \alpha^{i} (1-\alpha)^{u-1-i} P(\varepsilon_n = x - 1 - i) \\
&= \frac{\alpha p u}{P_{u,v}(X_n = x)} P(\alpha \circ X_{n-1} + \varepsilon_n = x - 1 | X_{n-1} = u - 1).
\end{aligned}$$

Na isti način dobićemo i uslovno očekivanje drugog sabirka procesa preživljavanja slučajne promenljive date jednačinom (2.35). Uslovno očekivanje u odnosu na σ-algebru $\mathcal{F}_n$ glasi

$$E(U_{2n} \circ Y_{n-1} | \mathcal{F}_n) = \frac{\alpha(1-p)v}{P_{u,v}(X_n = x)} P(\alpha \circ Y_{n-1} + \varepsilon_n = x - 1 | Y_{n-1} = v - 1).$$

Dakle, uslovno očekivanje procesa preživljavanja slučajne promenljive (2.35) u odnosu na σ-algebru $\mathcal{F}_n$ računa se kao

$$\begin{aligned}E(U_{1n}\circ X_{n-1}+U_{2n}\circ Y_{n-1}|\mathcal{F}_n) = \frac{\alpha}{P_{u,v}(X_n = x)}&\left[puP(\alpha \circ X_{n-1} + \varepsilon_n = x-1|X_{n-1} = u-1)\right.\\ &\left.+ (1-p)vP(\alpha \circ Y_{n-1} + \varepsilon_n = x-1|Y_{n-1} = v-1)\right].\end{aligned}$$

Obratimo pažnju sad na uslovno očekivanje procesa preživljavanja (2.36) u odnosu na σ-algebru $\mathcal{F}_n$. Uslovno očekivanje prvog sabirka glasi

$$\begin{aligned}E(V_{1n} * X_{n-1}|\mathcal{F}_n) &= \sum_{i=0}^{\infty} iP(V_{1n} * X_{n-1} = i|X_n = x, Y_n = y, X_{n-1} = u, Y_{n-1} = v)\\
&= \sum_{i=1}^{y} iP(V_{1n} * X_{n-1} = i|X_n = x, Y_n = y, X_{n-1} = u, Y_{n-1} = v)\\
&= \frac{q}{P_{u,v}(Y_n = y)} \sum_{i=1}^{y} i\binom{u+i-1}{i}\frac{\beta^i}{(1+\beta)^{u+i}}P(\eta_n = y-i)\\
&= \frac{\beta q u}{P_{u,v}(Y_n = y)} \sum_{i=1}^{y} \binom{u+i-1}{i-1}\frac{\beta^{i-1}}{(1+\beta)^{u+1+i-1}}P(\eta_n = y-1-i+1)\\
&= \frac{\beta q u}{P_{u,v}(Y_n = y)} \sum_{i=0}^{y-1} \binom{u+1+i-1}{i}\frac{\beta^{i}}{(1+\beta)^{u+1+i}}P(\eta_n = y-1-i)\\
&= \frac{\beta q u}{P_{u,v}(Y_n = y)} \sum_{i=0}^{y-1} P(\beta * X_{n-1} = i|X_{n-1} = u+1)P(\eta_n = y-1-i)\\
&= \frac{\beta q u}{P_{u,v}(Y_n = y)} P(\beta * X_{n-1} + \eta_n = y-1|X_{n-1} = u+1).\end{aligned}$$

Analognim postupkom dobijamo da je

$$\begin{aligned}E(V_{2n} * Y_{n-1}|\mathcal{F}_n) &= \sum_{i=0}^{\infty} iP(V_{2n} * Y_{n-1} = i|X_n = x, Y_n = y, X_{n-1} = u, Y_{n-1} = v)\\
&= \sum_{i=1}^{y} iP(V_{2n} * Y_{n-1} = i|X_n = x, Y_n = y, X_{n-1} = u, Y_{n-1} = v)\\
&= \frac{\beta(1-q)v}{P_{u,v}(Y_n = y)} P(\beta * Y_{n-1} + \eta_n = y-1|Y_{n-1} = v+1).\end{aligned}$$

Prema tome, uslovno očekivanje procesa preživljavanja slučajne promenljive (2.36) u odnosu na σ-algebru $\mathcal{F}_n$ glasi

$$\begin{aligned}E(V_{1n}*X_{n-1} + V_{2n}*Y_{n-1}|\mathcal{F}_n) = \frac{\beta}{P_{u,v}(Y_n = x)}&\left[quP(\beta * X_{n-1} + \eta_n = y-1|X_{n-1} = u+1)\right.\\ &\left.+ (1-q)vP(\beta * Y_{n-1} + \eta_n = y-1|Y_{n-1} = v+1)\right].\end{aligned}$$

Inovacione procese definisali smo tako da su slučajne promenljive ε_n i η_n nezavisne od X_m, Y_m za $m < n$. Obratimo pažnju na to da ovde izvodimo uslovno očekivanje u trenutku n u odnosu na σ-algebru $\mathcal{F}_n$. Neka je $e \in \mathbb{N}_0$, tada uslovne raspodele verovatnoća računamo kao

$$\begin{aligned}
&P(\varepsilon_n = e|\mathcal{F}_n) = \frac{1}{P_{u,v}(X_n = x)} P_{u,v}(\varepsilon_n = e, X_n = x)\\
&= \frac{1}{P_{u,v}(X_n = x)} P_{u,v}(\varepsilon_n = e, U_{1n} \circ X_{n-1} + U_{2n} \circ Y_{n-1} + \varepsilon_n = x)\\
&= \frac{1}{P_{u,v}(X_n=x)}[pP(\varepsilon_n=e)P_u(\alpha\circ X_{n-1}=x-e) + (1-p)P_v(\varepsilon_n=e)P(\alpha\circ Y_{n-1}=x-e)]
\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}
&P(\eta_n = e|\mathcal{F}_n) = \frac{1}{P_{u,v}(Y_n = y)} P_{u,v}(\eta_n = e, Y_n = y)\\
&= \frac{1}{P_{u,v}(Y_n = y)} P_{u,v}(\eta_n = e, V_{1n} * X_{n-1} + V_{2n} * Y_{n-1} + \eta_n = y)\\
&= \frac{1}{P_{u,v}(Y_n=y)}[qP(\eta_n=e)P_u(\beta * X_{n-1}=x-e) + (1-q)P(\eta_n=e)P_v(\beta * Y_{n-1}=x-e)].
\end{aligned}$$

Shodno tome, odgovarajuća uslovna očekivanja data su jednačinama

$$\begin{aligned}
&E(\varepsilon_n|\mathcal{F}_n) = \frac{1}{P_{u,v}(X_n = x)}\left[p\sum_{i=\max(0,x-u)}^{x} iP(\varepsilon_n = i)P(\alpha\circ X_{n-1} = x-i|X_{n-1} = u)\right.\\
&\left.+(1-p)\sum_{i=\max(0,x-v)}^{x} iP(\varepsilon_n = i)P(\alpha\circ Y_{n-1} = x-i|Y_{n-1} = v)\right]\\
&= \frac{1}{P_{u,v}(X_n = x)}\left[p\sum_{i=0}^{\min(x,u)}(x-i)P(\varepsilon_n = x-i)P(\alpha\circ X_{n-1} = i|X_{n-1} = u)\right.\\
&\left.+(1-p)\sum_{i=0}^{\min(x,v)}(x-i)P(\varepsilon_n = x-i)P(\alpha\circ Y_{n-1} = i|Y_{n-1} = v)\right]\\
&= \frac{1}{P_{u,v}(X_n = x)}\\
&\cdot\left[p\left(xP(\alpha\circ X_{n-1} + \varepsilon_n = x|X_{n-1} = u) - \sum_{i=0}^{\min(x,u)} i\binom{u}{i}\alpha^i(1-\alpha)^{u-i}P(\varepsilon_n = x-i)\right)\right.\\
&\left.+(1-p)\left(xP(\alpha\circ Y_{n-1} + \varepsilon_n = x|Y_{n-1} = v) - \sum_{i=0}^{\min(x,v)} i\binom{v}{i}\alpha^i(1-\alpha)^{v-i}P(\varepsilon_n = x-i)\right)\right]\\
&= \frac{1}{P_{u,v}(X_n = x)}\\
&\cdot [p\,(xP(\alpha\circ X_{n-1} + \varepsilon_n = x|X_{n-1} = u) - \alpha uP(\alpha\circ X_{n-1} + \varepsilon_n = x-1|X_{n-1} = u-1))\\
&+(1-p)\,(xP(\alpha\circ Y_{n-1} + \varepsilon_n = x|Y_{n-1} = v) - \alpha vP(\alpha\circ Y_{n-1} + \varepsilon_n = x-1|Y_{n-1} = v-1))]
\end{aligned}$$

i

$$E(\eta_n|\mathcal{F}_n) = \frac{1}{P_{u,v}(Y_n = y)} \left[q \sum_{i=0}^{y} iP(\eta_n = i)P(\beta * X_{n-1} = y - i|X_{n-1} = u) \right.$$
$$\left. +(1-q) \sum_{i=0}^{y} iP(\eta_n = i)P(\beta * Y_{n-1} = y - i|Y_{n-1} = v) \right]$$
$$= \frac{1}{P_{u,v}(Y_n = y)} \left[q \sum_{i=0}^{y} (y-i)P(\eta_n = y-i)P(\beta * X_{n-1} = i|X_{n-1} = u) \right.$$
$$\left. +(1-q) \sum_{i=0}^{y} (y-i)P(\eta_n = y-i)P(\beta * Y_{n-1} = i|Y_{n-1} = v) \right]$$
$$= \frac{1}{P_{u,v}(Y_n = y)}$$
$$\cdot \left[q \left(yP(\beta * X_{n-1} + \eta_n = y|X_{n-1} = u) - \sum_{i=0}^{y} i \binom{u+i-1}{i} \frac{\beta^i}{(1+\beta)^{u+i}} P(\eta_n = y-i) \right) \right.$$
$$\left. +(1-q) \left(yP(\beta * Y_{n-1} + \eta_n = y|Y_{n-1} = v) - \sum_{i=0}^{y} i \binom{v+i-1}{i} \frac{\beta^i}{(1+\beta)^{v+i}} P(\eta_n = y-i) \right) \right]$$
$$= \frac{1}{P_{u,v}(Y_n = y)}$$
$$\cdot \left[q \left(yP(\beta * X_{n-1} + \eta_n = y|X_{n-1} = u) - \beta u P(\beta * X_{n-1} + \eta_n = y-1|X_{n-1} = u+1) \right) \right.$$
$$\left. +(1-q) \left(yP(\beta * Y_{n-1} + \eta_n = y|Y_{n-1} = v) - \beta v P(\beta * Y_{n-1} + \eta_n = y-1|Y_{n-1} = v+1) \right) \right].$$

Direktnom zamenom dobijenih rezultata dobićemo da je

$$E(U_{1n} \circ X_{n-1} + U_{2n} \circ Y_{n-1} + \varepsilon_n|\mathcal{F}_n) = X_n$$
$$E(V_{1n} * X_{n-1} + V_{2n} * Y_{n-1} + \eta_n|\mathcal{F}_n) = Y_n,$$

čime potvrđujemo valjanost dobijenih izraza. Sva ova uslovna očekivanja nam omogućavaju da razlikujemo greške predviđanja nastale iz procesa preživljavanja (r^{surr}) i iz inovacionog procesa (r^{in}). Ako bismo sabrali ova dva izraza dobili bismo sledeći rezultat.

$$\begin{aligned} r_{x,n}^{surr} + r_{x,n}^{in} &= E(U_{1n} \circ X_{n-1} + U_{2n} \circ Y_{n-1}|\mathcal{F}_n) - \alpha p X_{n-1} - \alpha(1-p)Y_{n-1} + E(\varepsilon_n|\mathcal{F}_n) - \mu_\varepsilon \\ &= E(U_{1n} \circ X_{n-1} + U_{2n} \circ Y_{n-1} + \varepsilon_n|\mathcal{F}_n) - \alpha p X_{n-1} - \alpha(1-p)Y_{n-1} - \mu_\varepsilon \\ &= X_n - \alpha p X_{n-1} - \alpha(1-p)Y_{n-1} - \mu_\varepsilon = r_{x,n}. \end{aligned} \tag{2.37}$$

Zaključujemo da je suma ovih grešaka jednaka grešci koja se dobija kad se za predviđanje jednog koraka unapred koristi uslovno očekivanje slučajne promenljive X_n u odnosu na σ-algebru $\mathcal{F}_{n-1}$. Zaključak je analogan za slučajnu promenljivu Y_n. U tom slučaju dobićemo

$$r_{y,n}^{surr} + r_{y,n}^{in} = E(V_{1n} * X_{n-1} + V_{2n} * Y_{n-1}|\mathcal{F}_n) - \beta q X_{n-1} - \beta(1-q)Y_{n-1} + E(\eta_n|\mathcal{F}_n) - \mu_\eta$$

$$= Y_n - \beta q X_{n-1} - \beta(1-q)Y_{n-1} - \mu_\eta = r_{y,n}. \tag{2.38}$$

2.3.3 Ocenjivanje nepoznatih parametara

U ovom poglavlju navešćemo dva pristupa za ocenjivanje nepoznatih parametara BVMIXGINAR(1) modela, metod uslovne maksimalne verodostojnosti (CML) i metod uslovnih najmanjih kvadrata (MCLS). Nad simuliranim podacima proverićemo efikasnost ovih metoda za dati model.

Metod uslovne maksimalne verodostojnosti

Neka je dat uzorak $\{(X_k, Y_k)\}_{k=\overline{1,n}}$. Ocenjene vrednosti parametara BVMIXGINAR(1) modela dobićemo maksimiziranjem funkcije

$$L(\mathbf{\Theta}) = \sum_{i=2}^{n} \ln P(X_n = x_n, Y_n = y_n | X_{n-1} = x_{n-1}, Y_{n-1} = y_{n-1}, \mathbf{\Theta}) + \ln P(X_1 = x_1, Y_1 = y_1 | \mathbf{\Theta})$$

po vektoru parametara $\mathbf{\Theta} = (\alpha, \beta, p, q, \mu)'$. Uslovna raspodela verovatnoća definisana je kao proizvod funkcija (2.33) i (2.34) datih u potpoglavlju 2.3.1. Za početne vrednosti vremenskog niza pretpostavimo da su nezavisne pa njihovu zajedničku raspodelu verovatnoća računamo kao $P(X_1 = x_1, Y_1 = y_1) = \frac{\mu^{x_1+y_1}}{(1+\mu)^{x_1+y_1+2}}$. Zbog kompleksnosti funkcije verodostojnosti maksimizaciju ćemo vršiti numeričkim putem. U tu svrhu, koristićemo programski jezik `R` i funkciju `nlm`.

Modifikovani metod uslovnih najmanjih kvadrata

Još jedna standardna procedura za ocenu nepoznatih parametara je modifikovani metod uslovnih najmanjih kvadrata. Za razliku od metoda uslovne maksimalne verodostojnosti, metod uslovnih najmanjih kvadrata ne uzima u obzir raspodelu posmatranih slučajnih nizova. Zbog toga je dobro uporediti ovakva dva pristupa, te ćemo i ovde navesti jednačine za ocenu nepoznatih parametara MCLS metodom i ako je ovaj metod detaljno razmatran u poglavlju 2.2.2, a zatim ćemo izvršiti upoređivanje dobijenih ocena.

Za dati uzorak $\{(X_k, Y_k)\}_{k=\overline{1,n}}$ ocenu parametra μ dobićemo kao $\hat{\mu} = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}(X_i + Y_i)$, na osnovu pretpostavke da X_i i Y_i imaju istu raspodelu i $E(X_n) = E(Y_n) = \mu$. Asimptotska raspodela za ovako dobijenu ocenu parametra μ data je u teoremi 4.28.

Da bismo ocenili ostale parametre uvešćemo pomoćne parametre kao $\theta_1 = \alpha p$, $\theta_2 = \alpha(1-p)$, $\theta_3 = \beta q$ i $\theta_4 = \beta(1-q)$. Parametre θ_i, $i = \overline{1,4}$, dobićemo minimizacijom funkcije

$$R(\mathbf{\Theta}) = \sum_{i=1}^{n-1} (\boldsymbol{Z}_{i+1} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{Z}_i - \boldsymbol{\mu}_e)' (\boldsymbol{Z}_{i+1} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{Z}_i - \boldsymbol{\mu}_e).$$

Matrica $\boldsymbol{A}$ i slučajni vektor $\boldsymbol{Z}_n$ definisani su u poglavlju 2.1, dok je vektor $\boldsymbol{\mu}_e$, vektor očekivanja inovacionih procesa i on je oblika $\boldsymbol{\mu}_e = (\mu(1-\alpha), \mu(1-\beta))'$. Uviđamo da je funkcija $R(\boldsymbol{\Theta})$ identična funkciji koja je data jednačinom (2.21). Prema tome, na isti način dolazimo do ocena parametara θ_i, $i = \overline{1,4}$, koji minimiziraju funkciju $R(\boldsymbol{\Theta})$. Ocene parametara θ_i, $i = \overline{1,4}$, dobićemo kao rešenja sistema jednačina

$$\begin{bmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n-1}(X_i-\hat{\lambda})^2 & \sum\limits_{i=1}^{n-1}(X_i-\hat{\lambda})(Y_i-\hat{\lambda}) \\ \sum\limits_{i=1}^{n-1}(X_i-\hat{\lambda})(Y_i-\hat{\lambda}) & \sum\limits_{i=1}^{n-1}(Y_i-\hat{\lambda})^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\theta}_1 \\ \hat{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-\hat{\lambda})(X_i-\hat{\lambda}) \\ \sum\limits_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-\hat{\lambda})(Y_i-\hat{\lambda}) \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n-1}(X_i-\hat{\lambda})^2 & \sum\limits_{i=1}^{n-1}(X_i-\hat{\lambda})(Y_i-\hat{\lambda}) \\ \sum\limits_{i=1}^{n-1}(X_i-\hat{\lambda})(Y_i-\hat{\lambda}) & \sum\limits_{i=1}^{n-1}(Y_i-\hat{\lambda})^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\theta}_3 \\ \hat{\theta}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n-1}(Y_{i+1}-\hat{\lambda})(X_i-\hat{\lambda}) \\ \sum\limits_{i=1}^{n-1}(Y_{i+1}-\hat{\lambda})(Y_i-\hat{\lambda}) \end{bmatrix}.$$

Na kraju, ocene početnih parametara odredićemo kao

$$\hat{\alpha} = \hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2, \quad \hat{\beta} = \hat{\theta}_3 + \hat{\theta}_4, \quad \hat{p} = \tfrac{\hat{\theta}_1}{\hat{\theta}_1+\hat{\theta}_2}, \quad \hat{q} = \tfrac{\hat{\theta}_3}{\hat{\theta}_3+\hat{\theta}_4}.$$

Asimptotska raspodela ovako dobijenih ocena detaljno je diskutovana u podpoglavlju 2.2.2 i data je teoremom 2.14.

Rezultati na osnovu simulacija

Kako bismo utvrdili efikasnost metoda za ocenu nepoznatih parametara BVMIXGINAR(1) modela, koje smo diskutovali u ovom potpoglavlju, generisaćemo po 100 uzoraka obima 50, 100, 500 i 1000 na osnovu jednačina (2.29) i (2.30) i oceniti parametre CML i MCLS metodama. Generisaćemo uzorke na osnovu sledećih parametara: a) $\alpha = 0.1$, $\beta = 0.2$, $p = 0.5$, $q = 0.45$, $\mu = 5$; b) $\alpha = 0.6$, $\beta = 0.55$, $p = 0.5$, $q = 0.45$, $\mu = 5$; c) $\alpha = 0.1$, $\beta = 0.2$, $p = 0.5$, $q = 0.45$, $\mu = 20$; d) $\alpha = 0.6$, $\beta = 0.55$, $p = 0.5$, $q = 0.45$, $\mu = 20$. Parametre smo izabrali tako da proverimo ponašanje metoda kada je srednja vrednost uzorka mala, kao što je slučaj a) i b) i kad je srednja vrednost uzorka velika, slučaj c) i d). Takođe nas interesuje ponašanje metoda kad je autokorelisanost mala, slučaj a) i c) i kad to nije, slučaj b) i d). Posmatraćemo i uzorak čiji je obim samo 50, gde ćemo pokušati da donesemo zaključke o ocenama parametara za tako mali uzorak. Vrednosti za ocenjene parametre, zajedno sa standardnom devijacijom ocena, date su u tabeli 2.5.

Na osnovu tabele 2.5 zaključujemo da je parametar μ bolje ocenjen MCLS metodom, ali i ocene dobijene CML metodom su sasvim blizu stvarnim vrednostima. Za male vrednosti α i β parametara, CML daje preciznije ocene nego MCLS za uzorke obima 50 i 100, dok za

Tabela 2.5: Ocenjene vrednosti nepoznatih parametara za BVMIXGINAR(1) model - Za svaki obim uzorka prva vrsta sadrži ocenjene vrednosti, druga vrsta standardnu devijaciju.

	CML					MCLS				
	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{p}$	$\hat{q}$	$\hat{\mu}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{p}$	$\hat{q}$	$\hat{\mu}$
a) $\alpha = 0.1$, $\beta = 0.2$, $p = 0.55$, $q = 0.4$, $\mu = 5$										
50	0.1184	0.2095	0.546	0.4419	4.9201	0.1282	0.1852	0.4618	0.4653	4.9986
	0.0969	0.105	0.3373	0.3075	0.4542	0.1382	0.1565	0.3919	0.3691	0.6328
100	0.1124	0.1931	0.55	0.4522	4.9501	0.1247	0.1986	0.4853	0.4928	5.00035
	0.0719	0.0881	0.315	0.2434	0.3904	0.1225	0.1364	0.383	0.3426	0.4028
500	0.1009	0.2014	0.5334	0.4403	4.9883	0.097	0.1866	0.4951	0.4212	5.00807
	0.0316	0.0329	0.1959	0.1082	0.2052	0.0609	0.068	0.3004	0.2145	0.1941
1000	0.0984	0.2034	0.5191	0.438	4.9988	0.095	0.1967	0.4556	0.4256	5.00881
	0.0224	0.028	0.1388	0.0693	0.1261	0.0475	0.0407	0.2507	0.1382	0.1285
b) $\alpha = 0.6$, $\beta = 0.55$, $p = 0.55$, $q = 0.4$, $\mu = 5$										
50	0.6074	0.5442	0.4842	0.4436	4.9324	0.5323	0.4669	0.4575	0.4378	4.7579
	0.0572	0.1454	0.1257	0.2056	0.9994	0.1869	0.1878	0.2502	0.2588	1.1948
100	0.6018	0.5625	0.4936	0.4379	4.9212	0.5847	0.5181	0.4741	0.4443	4.8385
	0.0375	0.0963	0.0875	0.1398	0.7425	0.1264	0.1363	0.1693	0.2064	0.9271
500	0.5992	0.5527	0.5	0.4519	4.9544	0.6029	0.5415	0.4906	0.447	4.98908
	0.0171	0.0346	0.0415	0.0528	0.2998	0.0611	0.067	0.0808	0.0912	0.3742
1000	0.5993	0.5503	0.5013	0.4473	4.9875	0.601	0.5512	0.4969	0.4485	5.004495
	0.0131	0.0255	0.0271	0.0363	0.2164	0.0462	0.0462	0.0602	0.0596	0.2744
c) $\alpha = 0.1$, $\beta = 0.2$, $p = 0.55$, $q = 0.4$, $\mu = 20$										
50	0.1145	0.1979	0.5539	0.4298	19.9941	0.1057	0.1753	0.4747	0.4649	19.9802
	0.0657	0.0732	0.3383	0.2902	1.5336	0.1406	0.1471	0.3774	0.3814	2.4825
100	0.107	0.208	0.5367	0.4446	20.2208	0.0981	0.179	0.4655	0.4857	19.7439
	0.0515	0.0525	0.3034	0.195	1.4028	0.1053	0.129	0.3908	0.3579	1.5172
500	0.0946	0.2019	0.5122	0.4414	20.1326	0.0944	0.2006	0.4837	0.4568	19.92832
	0.0197	0.0223	0.1219	0.0722	0.7312	0.0666	0.0697	0.3158	0.205	0.7053
1000	0.099	0.2007	0.5107	0.4502	20.052	0.0957	0.1974	0.4744	0.4444	19.96948
	0.013	0.0153	0.0783	0.0531	0.5503	0.045	0.0506	0.2516	0.1488	0.4641
d) $\alpha = 0.6$, $\beta = 0.55$, $p = 0.55$, $q = 0.4$, $\mu = 20$										
50	0.596	0.5495	0.4847	0.4422	19.8596	0.518	0.5216	0.5254	0.4635	20.0106
	0.0361	0.0719	0.1155	0.1532	3.5001	0.1941	0.2022	0.2567	0.2483	4.1333
100	0.5985	0.5537	0.4827	0.4299	20.2228	0.5607	0.5068	0.5295	0.4634	20.13645
	0.0205	0.0466	0.074	0.1024	2.6706	0.1491	0.1464	0.1589	0.1906	2.954
500	0.5986	0.5503	0.4983	0.4481	20.0659	0.5866	0.5465	0.5067	0.452	20.0412
	0.0078	0.0201	0.0367	0.0426	1.1874	0.0582	0.063	0.0711	0.0782	1.29
1000	0.5989	0.55	0.4998	0.4511	20.0315	0.596	0.5466	0.5032	0.4528	20.01782
	0.0052	0.0184	0.024	0.0255	0.953	0.0416	0.0425	0.0494	0.054	0.821

uzorke obima 500 i 1000 obe metode su podjednako dobre. Kada su vrednosti parametara α i β male, a vrednost parametra μ velika ne možemo okarakterisati neki metod kao bolji. Parametri α i p su bolje ocenjeni MCLS metodom, dok je za β i q obrnuta situacija. Sa porastom obima uzorka, oba pristupa daju jednako dobre ocene. U zadnjem testu, kada su vrednosti svih parametara velike, CML daje bolje rezultate izuzev za parametar q kada je uzorak obima 100. Generalni zaključak je da CML daje nešto preciznije ocene sa manjom standardnom devijacijom. Sa porastom obima uzorka kod obe metode, ocenjene vrednosti konvergiraju ka stvarnim vrednostima. Kod uzoraka obima 50, postoje odstupanja ali ni ona nisu velika.

2.3.4 Primena na stvarnim podacima

U ovom poglavlju daćemo primer primene BVMIXGINAR(1) modela nad stvarnim podacima. Takođe, opisaćemo karakteristike nizova za koje bi ovaj model bio adekvatan. Uporedićemo rezultate sa rezultatima jos nekih dvodimenzionalnih modela. Na kraju ćemo analizirati greške predviđanja BVMIXGINAR(1) modela posmatrajući zasebno greške procesa preživljavanja i greške inovacionog procesa.

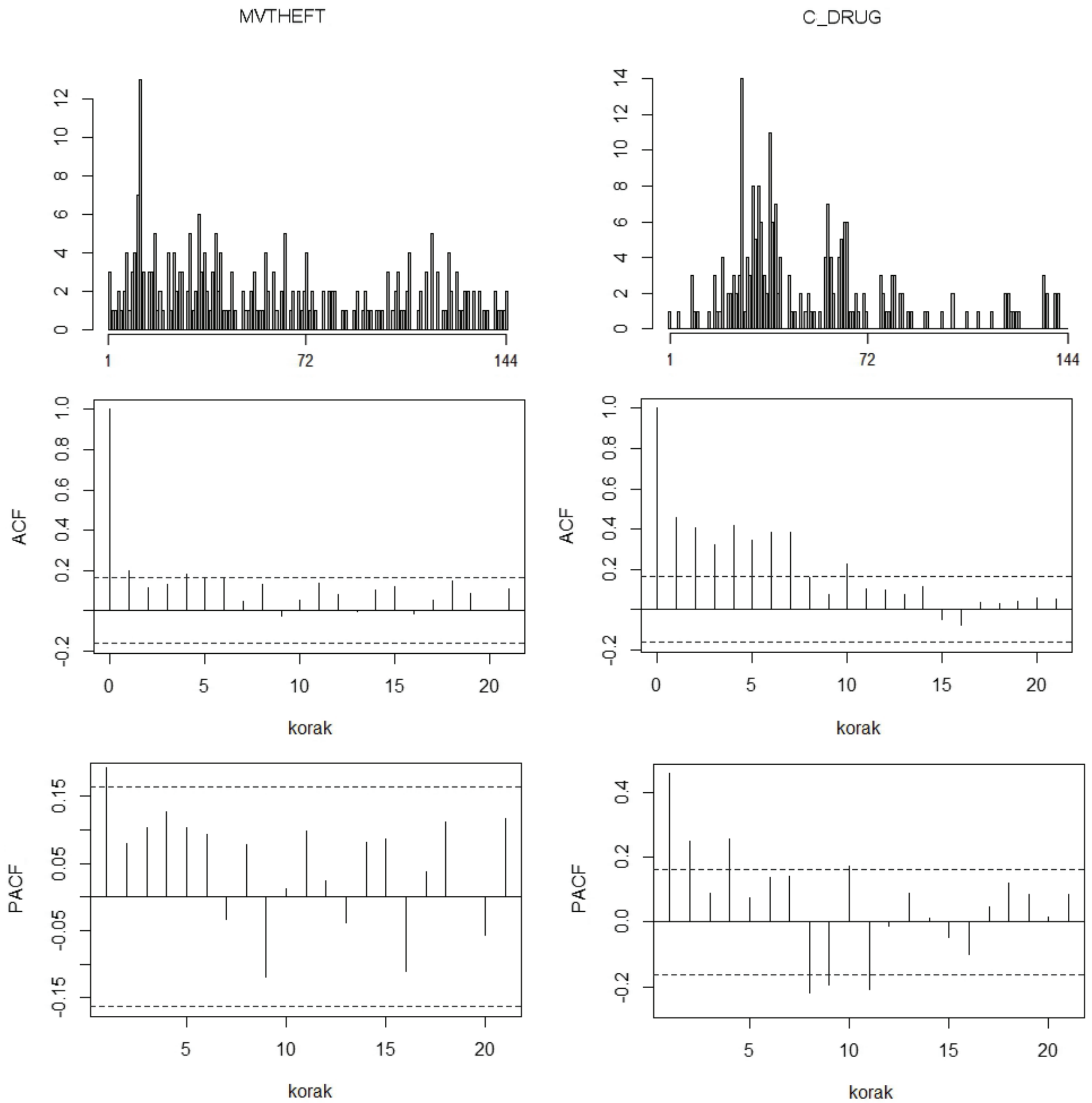
Iskoristićemo podatke iz policijske stanice u Pitsburgu, gde ćemo se fokusirati na broj ukradenih vozila (MVTHEFT) i broj prijava u vezi rasturanja droge (C_DRUG) svakog meseca u periodu između januara 1990. i decembra 2001. godine. Uzoračke sredine ovih nizova su 1.74 i 1.5, dok su uzoračke disperzije 2.98 i 5.01, redom. Koeficijent korelacije između serija je 0.22. Primećujemo da su uzoračke sredine ovih nizova slične, kao i da su nizovi pozitivno korelisani. Takođe, količnik uzoračke disperzije i uzoračke srednje vrednosti je veći od jedinice. Trakasti dijagram, grafik autokorelacije i parcijalne autokorelacije dati su na slici 2.4. Korelogram pokazuje prisustvo autokorelacije sa korakom jedan. Kod vremenskog niza C_DRUG uočljivo je prisustvo autokorelacije i sa korakom dva i četiri ali je ipak dominantna autokorelacija sa korakom jedan. Pozitivna korelacija između nizova, autokorelacija sa korakom jedan i količnik uzoračke disperzije i uzoračke srednje vrednosti veći od jedan ukazuju da bi BVMIXGINAR(1) model mogao biti odgovarajući.

Poređenja radi, testiraćemo nad ovim podacima i model BVNGINAR(1) koji su predstavili Ristić, Nastić, Jayakumar i Bakouch (2012), kao i model BVPOINAR(1) koji su uveli Nastić, Ristić i Popović (2014). Kao kriterijum za poređenje koristićemo srednjekvadratnu grešku (RMS), koju za niz $\{X_n\}$ (koji je u ovom slučaju MVTHEFT) dobijamo kao $RMS_X = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=2}^{n}(X_i - \alpha X_{i-1} - \alpha Y_{i-1} - \mu(1-\alpha))^2}$, i analogno za niz $\{Y_n\}$ (odnosno niz C_DRUG). Uporedićemo i dobijene vrednosti logaritamske funkcije verodostojnosti. Parametre ćemo oceniti CML metodom.

Tabela 2.6: Ocenjeni parametri za testirane modele i postignuti rezultati nas posmatranim nizovima MVTHEFT i C_DRUG.

Model	CML ocene	log-funkcija verodostojnosti	RMS MVTHEFT	RMS C_DRUG
BVMIXGINAR(1)	$\hat{\alpha_1} = 0.148(0.1)$, $\hat{\alpha_2} = 0.472(0.095)$, $\hat{p} = 0.469(0.325)$, $\hat{q} = 0.02(0.08)$, $\hat{\mu} = 1.598(0.164)$	-477.51	1.695	1.990
BVNGINAR(1)	$\hat{\alpha_1} = 0.242(0.166)$, $\hat{\alpha_2} = 0.473(0.095)$, $\hat{p} = 0.39(0.244)$, $\hat{q} = 0.02(0.078)$, $\hat{\mu} = 1.604(0.171)$	-478.5	1.703	1.990
BVPOINAR(1)	$\hat{\alpha_1} = 0.217(0.066)$, $\hat{\alpha_2} = 0.41(0.055)$, $\hat{p} = 0.328(0.172)$, $\hat{q} = 0.068(0.066)$, $\hat{\lambda} = 1.687(0.11)$	-516.62	1.701	1.998

Prema rezultatima predstavljenim u tabeli 2.6, BVMIXGINAR(1) model se pokazao kao najadekvatniji. Primetimo da modeli sa geometrijskom marginalnom raspodelom ostvaruju veću vrednost logaritamske funkcije verodostojnosti. BVMIXGINAR(1) ima približno istu vrednost ove funkcije kao i BVNGINAR(1) ali zato ostvaruje niže vrednosti srednjekvadratne greške kod MVTHEFT niza. Modelovanje C_DRUG niza geometrijskom raspodelom, gde je proces preživljavanja opisan negativnom binomnom raspodelom pokazao se kao dobar izbor na osnovu rezultata BVMIXGINAR(1) i BVNGINAR(1) modela. Pristup gde je jedan proces

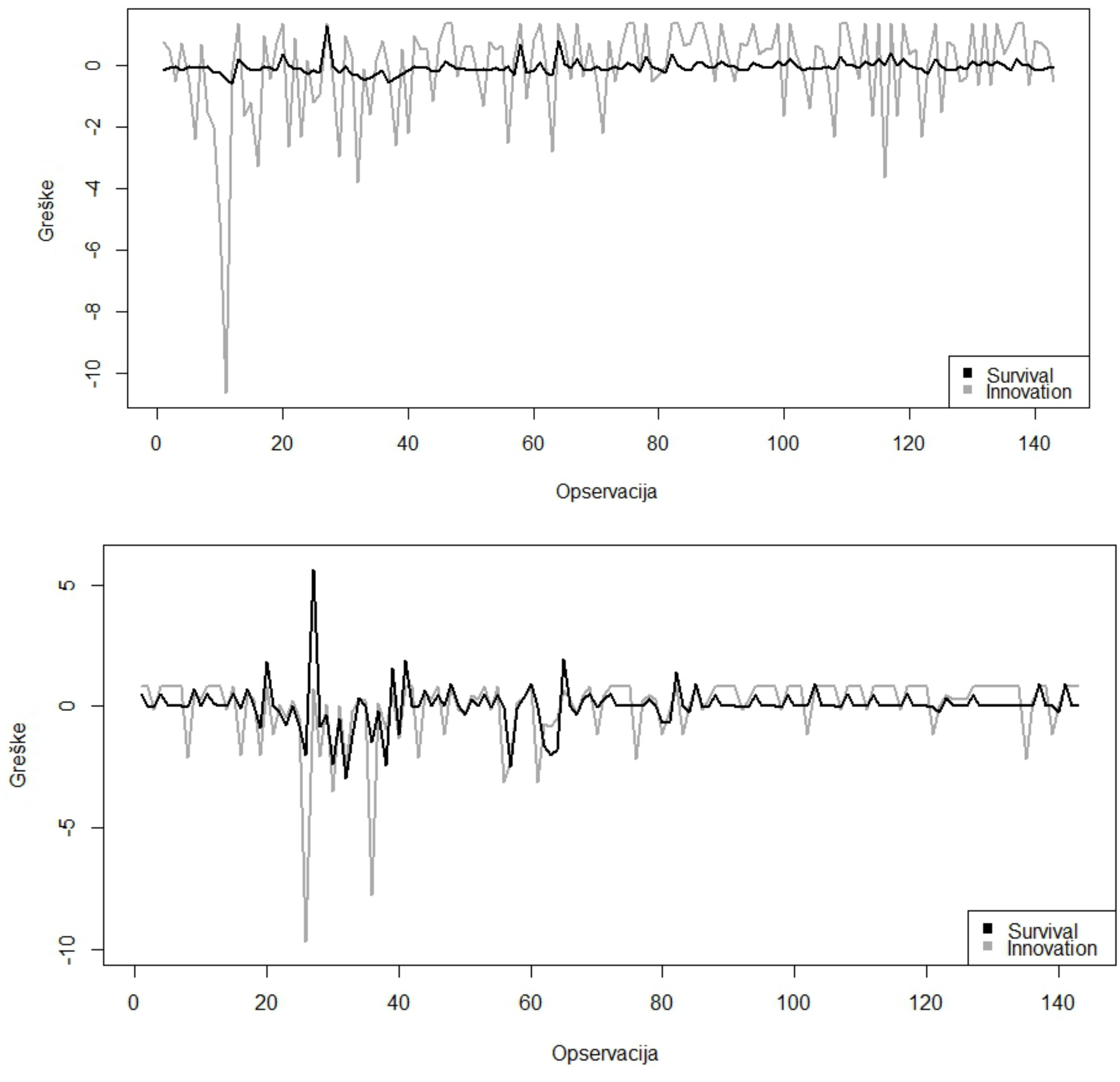


Slika 2.4: Trakasti dijagram, grafici autokorelacione i parcijalne autokorelacione funkcije za vremenske nizove MVTHEFT i C_DRUG.

preživljavanja generisan binomnim, a drugi negativnim binomnim tining operatorom dao nam je najbolji rezultat. Ovakvo kombinovanje tining operatora potrebno je kad su nizovi koje modelujemo različite prirode, kao što je ovde slučaj. Kod posmatranih nizova imamo slučaj da osobe koje kupuju drogu često je preprodaju, ali osobe od kojih je ukradeno vozilo gotovo nikad ne idu u krađu drugih vozila, pa imamo da je jedan proces samoindukovan dok drugi nije.

Ocenjeni parametri za BVMIXGINAR(1) model ukazuju da aktivnosti u vezi sa drogom utiču na broj ukradenih vozila u nekoj regiji, dok obratno ne važi jer je parametar q skoro jednak nuli.

Nastavljamo sa analizom primene BVMIXGINAR(1) modela posmatrajući greške koje su nastale prilikom predviđanja za jedan korak unapred. Računamo zasebno greške procesa preživljavanja i inovacionog procesa kako bismo utvrdili adekvatnost svake komponente modela. Kako smo već pomenuli u jednačini (2.37), suma ove dve greške daće nam grešku predviđanja definisanu na standardan način. Rezultat je predstavljen na slici 2.5. Možemo primetiti da su greške nastale inovacionim procesom znatno veće od onih nastalih procesom preživljavanja, sem u par slučajeva kod C_DRUG niza. Koeficijent korelacije između ova dva tipa greške je 0.425 kod MVTHEFT niza i 0.506 kod C_DRUG niza. Korelacija je pozitivna ali ne tako visoka kao što se moglo očekivati. To nam ukazuje da se loše predviđanje jedne komponente modela može apsorbovati predviđanjem druge komponente. Još jedna interesantna činjenica je da je koeficijent korelacije između procesa inovacije samo 0.11, što prati pretpostavku o nezavisnosti inovacionih procesa. Veća greška nastala iz inovacionog procesa sugeriše da više pažnje treba usmeriti na poboljšanje ove komponente modela.



Slika 2.5: Gornji grafik prikazuje grešku predviđanja za jedan korak unapred za niz MVTHEFT, a donji za niz C_DRUG.

Glava 3

Uopštavanje dvodimenzionalnih modela sa slučajnim koeficijentima

U prethodnoj glavi razmatrali smo dvodimenzionalne modele kod kojih su vremenski nizovi sa jednakim marginalnim raspodelama. Kako je ovaj uslov dosta restriktivan, uvešćemo model kod koga su marginalne raspodele iste ali sa različitim parametrima. Na taj način, dobićemo opštiji model sa znatno većom mogućnošću primene. Ovakav dvodimenzionalni model moći će da modeluje vremenske nizove sa različitim srednjim vrednostima, a samim tim i različitim disperzijama.

Još jedan aspekt uopštavanja BINAR(1) modela bazira se na uvođenju različitih parametara tining operatora. Modeli koje smo do sad izučavali sastoje se od dva vremenska niza, čiji su procesi preživljavanja definisani preko oba ova niza. Tining operatori unutar jednog niza generisani su preko istog parametra, što za posledicu ima da su stope "preživljavanja" i jednog i drugog niza iste. Kako bismo oslabili ovakvu pretpostavku, uvešćemo još jedan model, čiji su svi koeficijenti različiti pa je i raspodela svake komponente procesa preživljavanja sa različitim parametrom.

3.1 Model sa različitim parametrima marginalnih raspodela

U ovom poglavlju definisaćemo BINAR(1) model, čija je struktura data jednačinom (2.4), ali sa geometrijskim marginalnim raspodelama sa različitim parametrima. U skladu sa uvedenim pretpostavkama, izvešćemo raspodele inovacionih procesa. I ako strukturom podseća na proces koji su uveli Ristić, Nastić, Jayakumar i Bakouch (2012), različita marginalna raspodela u mnogome utiče na osobine modela, a naročito na definiciju inovacionih procesa kako bi se postigla stacionarnost posmatranih vremenskih nizova. Takođe, za razliku od modela autora Ristić, Nastić, Jayakumar i Bakouch (2012) koji je definisan preko negativnog binomnog tining operatora, model koji ćemo mi razmatrati bazira se na binomnom tining operatoru što takođe implicira drugačije osobine. Model koji ćemo istraživati pogodan je za modelovanje dva zavisna nenegativna celobrojna vremenska niza, kod kojih broj događaja generisanih u trenutku t opada u vremenu i jedini uzročnik novih događaja je inovacioni proces.

U nastavku poglavlja definisaćemo model bez uvođenja pretpostavki o marginalnoj raspodeli, a onda ćemo dokazati egzistenciju ovakvog modela. Zatim ćemo posmatrati model sa geometrijskom marginalnom raspodelom i za takav model ispitati statističke osobine. Navešćemo metode za ocenjivanje nepoznatih parametara, gde ćemo takođe utvrditi asimptotsku raspodelu dobijenih ocena. Na kraju ćemo dati primer primene uvedenog modela na stvarnim podacima.

3.1.1 Definicija i egzistencija modela

U ovom poglavlju razmatraćemo dvodimenzionalne vremenske nizove $\{(X_t, Y_t)\}_{t\in\mathbb{Z}}$, koje su proučavali Popović, Ristić i Nastić (2015), a definisani su sledećim jednačinama

$$X_t = \begin{cases} \alpha \circ X_{t-1} + \varepsilon_t, & \text{s.v. } p, \\ \alpha \circ Y_{t-1} + \varepsilon_t, & \text{s.v. } 1-p, \end{cases} \tag{3.1}$$

$$Y_t = \begin{cases} \beta \circ X_{t-1} + \eta_t, & \text{s.v. } q, \\ \beta \circ Y_{t-1} + \eta_t, & \text{s.v. } 1-q, \end{cases} \tag{3.2}$$

(s.v. skraćeno od "sa verovatnoćom") gde su $p,\ q \in [0,1]$ i $\alpha,\ \beta \in (0,1)$. Binomni tining operatori $\alpha\circ$ i $\beta\circ$ za slučajnu promenljivu X, definisani su kao $\alpha \circ X = \sum_{i=1}^{X} B_i$ i $\beta \circ X = \sum_{i=1}^{X} \widetilde{B}_i$, pri čemu su članovi brojačkih nizova $\{B_i\}$ i $\{\widetilde{B}_i\}$ nezavisne jednako raspodeljene Bernulijeve slučajne promenljive sa parametrima α i β, redom. Takođe, brojački nizovi koji definišu $\alpha\circ X_t$, $\alpha\circ Y_t$, $\beta\circ X_t$ i $\beta\circ Y_t$ su međusobno nezavisni za svako $t \in \mathbb{N}_0$. Vremenski nizovi $\{\varepsilon_t\}$ i $\{\eta_t\}$ su nizovi međusobno nezavisnih celobrojnih nenegativnih slučajnih promenljivih sa konačnim momentima prvog i drugog reda, gde je još (ε_t, η_t) nezavisan od (X_s, Y_s) za $s < t$. Još važi i da su nizovi $\{\varepsilon_t\}$ i $\{\eta_t\}$ nezavisni od svih brojačkih nizova.

Podsetimo se da se ovakav model može predstaviti jednačinom (2.4). U ovom slučaju model glasi

$$\boldsymbol{Z}_t = \boldsymbol{A}_t \circ \boldsymbol{Z}_{t-1} + \boldsymbol{e}_t = \begin{bmatrix} U_{1t} \circ X_{t-1} + U_{2t} \circ Y_{t-1} + \varepsilon_t \\ V_{1t} \circ X_{t-1} + V_{2t} \circ Y_{t-1} + \eta_t \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{N}_0, \tag{3.3}$$

gde je $\boldsymbol{Z}_t = (X_t, Y_t)'$, $\boldsymbol{e}_t = (\varepsilon_t, \eta_t)'$, a slučajne promenljive U_{it} i V_{jt}, $i, j = 1, 2$, su definisane jednačinama (2.2) i (2.3). Sada ćemo navesti teoremu koja nam dokazuje egzistenciju modela ovakvih. Latour (1997) je dao dokaz egzistencije višedimenzionalnih modela, ali model koji mi posmatramo sadrži koeficijente koji su zavisne slučajne promenljive, što u mnogome menja osobine modela. Teorema koju ćemo navesti pokriva širok spektar modela i ne zavisi od pretpostavke o marginalnoj raspodeli.

Teorema 3.1 (Popović, Ristić i Nastić (2015), teorema 1). *Postoji jedinstven strogo stacionarni vremenski niz $\{\boldsymbol{Z}_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ koji je rešenje jednačine (3.3).*

Dokaz: Definišimo slučajni niz $\{\boldsymbol{Z}_t^{(m)} = (X_t^{(m)}, Y_t^{(m)})'\}$ kao

$$\boldsymbol{Z}_t^{(m)} = \begin{cases} \boldsymbol{0}, & m < 0, \\ \boldsymbol{e}_t, & m = 0, \\ \boldsymbol{A}_{(t)} \circ \boldsymbol{Z}_{t-1}^{(m-1)} + \boldsymbol{e}_t, & m > 0, \end{cases}$$

gde je $\boldsymbol{e}_t = (\varepsilon_t, \eta_t)'$, dok $\boldsymbol{A}_{(t)}$ označava da su brojački nizovi $\{B_i\}$ i $\{\widetilde{B}_i\}$, koji definišu tining operatore $\alpha\circ$ i $\beta\circ$ fiksirani za trenutak t. Sada, za slučajni vektor $\boldsymbol{Z} = (Z_1, Z_2)'$ definišimo Hilbertov prostor $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P) = \{\boldsymbol{Z} : E(\boldsymbol{Z}\boldsymbol{Z}') < \infty\}$, gde je mera između dva slučajna vektora $\boldsymbol{Z}$ i $\boldsymbol{W}$ definisana kao $d(\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{W}) = E(\boldsymbol{Z}\boldsymbol{W}')$. Ideja je da dokažemo da $\boldsymbol{Z}_t^{(m)} \to \boldsymbol{Z}_t$, kad $m \to \infty$. Da bismo ovo dokazali, pokazaćemo da je $\{\boldsymbol{Z}_t^{(m)}\}_m$ Košijev niz u malopre pomenutom Hilbertovom prostoru $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Najpre, pokažimo da je $\boldsymbol{Z}_t^{(m)} \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Ako uvedemo oznaku $\boldsymbol{\mu_e} = E(\boldsymbol{e}_t)$, tada na osnovu leme 2.1 dobijamo da je

$$E\left(\boldsymbol{Z}_t^{(m)}\right) = \boldsymbol{A}E\left(\boldsymbol{Z}_{t-1}^{(m-1)}\right) + \boldsymbol{\mu_e} = \boldsymbol{\mu_e}\sum_{j=0}^{m} \boldsymbol{A}^j.$$

Kako je $\det(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = 1 - \alpha p(1-\beta) - \beta(1-(1-\alpha)q) > 0$, gde je $\boldsymbol{I}$ jedinična matrica dimenzije 2×2, to imamo da je $E\left(\boldsymbol{Z}_t^{(m)}\right) = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}^{m+1})\boldsymbol{\mu_e}$. Zaključujemo da $E\left(\boldsymbol{Z}_t^{(m)}\right)$ ne zavisi od t i $E\left(\boldsymbol{Z}_t^{(m)}\right) < \infty$. Matrica $\boldsymbol{A}$ ima sopstvene vrednosti koje su unutar jediničnog kruga, što implicira da $\boldsymbol{A}^m \to \boldsymbol{0}$ kad $m \to \infty$. Dakle, $E\left(\boldsymbol{Z}_t^{(m)}\right) \to (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{\mu_e}$, kad $m \to \infty$.

Razmotrimo sada moment drugog reda $E\left(\boldsymbol{Z}_t^{(m)}\boldsymbol{Z}_t^{(m)'}\right)$, pri čemu ćemo koristiti oznaku $\boldsymbol{\mu}_m = E\left(\boldsymbol{Z}_t^{(m)}\right)$. Na osnovu rezultata leme 2.1 dobijamo da je

$$\begin{aligned} E\left(\boldsymbol{Z}_t^{(m)}\boldsymbol{Z}_t^{(m)'}\right) &= E((\boldsymbol{A}_t \circ \boldsymbol{Z}_{t-1})(\boldsymbol{A}_t \circ \boldsymbol{Z}_{t-1})') + E((\boldsymbol{A}_t \circ \boldsymbol{Z}_{t-1}) \cdot \boldsymbol{e}_t') \\ &\quad + E(\boldsymbol{e}_t \cdot (\boldsymbol{A}_t \circ \boldsymbol{Z}_{t-1})') + E(\boldsymbol{e}_t\boldsymbol{e}_t') \\ &= \boldsymbol{A}E\left(\boldsymbol{Z}_t^{(m-1)}\boldsymbol{Z}_t^{(m-1)'}\right)\boldsymbol{A}' + \boldsymbol{C} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{\mu}_{m-1}\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{e}}' + \boldsymbol{\mu_e}\boldsymbol{\mu}_{m-1}'\boldsymbol{A}' + E\left(\boldsymbol{e}_t\boldsymbol{e}_t'\right). \end{aligned}$$

Svi elementi ove matrice su konačni, pa primenjujući gornju jednakost m puta, dobićemo da je matrica nezavisna od t, odakle zaključujemo da je $E\left(\boldsymbol{Z}_t^{(m)}\boldsymbol{Z}_t^{(m)'}\right) < \infty$, što dalje implicira $\boldsymbol{Z}_t^{(m)} \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Sledeći korak je da dokažemo konvergenciju $\boldsymbol{Z}_t^{(m)}$ u prostoru $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Najpre ćemo dokazati da su slučajni nizovi $\{X_t^{(m)}\}_m$ i $\{Y_t^{(m)}\}_m$ neopadajući. Kako su U_{it}, V_{it}, $i = 1, 2$, ε_t i η_t nenegativne slučajne promenljive, dobijamo da je $X_t^{(1)} - X_t^{(0)} = U_{1t} \circ \varepsilon_t + U_{2t} \circ \eta_t \geq 0$ i $Y_t^{(1)} - Y_t^{(0)} = V_{1t} \circ \varepsilon_t + V_{2t} \circ \eta_t \geq 0$. Pretpostavimo sad da je $X_t^{(k)} - X_t^{(k-1)} \geq 0$ i $Y_t^{(k)} - Y_t^{(k-1)} \geq 0$ za svako $t \in \mathbb{Z}$ i $k = 1, 2, \ldots, m$. Pokazaćemo da je $X_t^{(m+1)} - X_t^{(m)} \geq 0$ i $Y_t^{(m+1)} - Y_t^{(m)} \geq 0$. Imamo da je

$$\begin{aligned}
X_t^{(m+1)} - X_t^{(m)} &= U_{1t} \circ X_{t-1}^{(m)} + U_{2t} \circ Y_{t-1}^{(m)} + \varepsilon_t - U_{1t} \circ X_{t-1}^{(m-1)} - U_{2t} \circ Y_{t-1}^{(m-1)} - \varepsilon_t \\
&\stackrel{d}{=} U_{1t} \circ \left(X_{t-1}^{(m)} - X_{t-1}^{(m-1)}\right) + U_{2t} \circ \left(Y_{t-1}^{(m)} - Y_{t-1}^{(m-1)}\right) \geq 0 \\
Y_t^{(m+1)} - Y_t^{(m)} &= V_{1t} \circ X_{t-1}^{(m)} + V_{2t} \circ Y_{t-1}^{(m)} + \eta_t - V_{1t} \circ X_{t-1}^{(m-1)} - V_{2t} \circ Y_{t-1}^{(m-1)} - \eta_t \\
&\stackrel{d}{=} V_{1t} \circ \left(X_{t-1}^{(m)} - X_{t-1}^{(m-1)}\right) + V_{2t} \circ \left(Y_{t-1}^{(m)} - Y_{t-1}^{(m-1)}\right) \geq 0,
\end{aligned}$$

što implicira da su nizovi $\{X_t^{(m)}\}_m$ i $\{Y_t^{(m)}\}_m$ neopadajući nizovi slučajnih promenljivih. Stoga, uzećemo u razmatranje slučajni vektor $\boldsymbol{D}_{m,t,k} = \boldsymbol{Z}_t^{(m)} - \boldsymbol{Z}_t^{(m-k)}$. Na osnovu definicije binomnog tining operatora sledi da je

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{D}_{m,t,k} = \boldsymbol{Z}_t^{(m)} - \boldsymbol{Z}_t^{(m-k)} &= \boldsymbol{A}_{(t)} \circ \boldsymbol{Z}_{t-1}^{(m-1)} + \boldsymbol{e}_t - \boldsymbol{A}_{(t)} \circ \boldsymbol{Z}_{t-1}^{(m-1-k)} - \boldsymbol{e}_t \\
&\stackrel{d}{=} \boldsymbol{A}_{(t)} \circ (\boldsymbol{Z}_{t-1}^{(m-1)} - \boldsymbol{Z}_{t-1}^{(m-1-k)}) = \boldsymbol{A}_{(t)} \circ \boldsymbol{D}_{m-1,t-1,k},
\end{aligned}$$

pa dobijamo da je

$$E(\boldsymbol{D}_{m,t,k}) = \boldsymbol{A}E(\boldsymbol{D}_{m-1,t-1,k}) = \boldsymbol{A}^m E(\boldsymbol{e}_t) \to \boldsymbol{0}, \ m \to \infty. \tag{3.4}$$

Dokažimo sad da $E(\boldsymbol{D}_{m,t,k}\boldsymbol{D}'_{m,t,k}) \to \boldsymbol{0}$, kad $m \to \infty$. Koristeći rezultate leme 2.1, imamo da je

$$\begin{aligned}
E(\boldsymbol{D}_{m,t,k}\boldsymbol{D}'_{m,t,k}) &= E\left[\left(\boldsymbol{A}_{(t)} \circ \boldsymbol{Z}_{t-1}^{(m-1)} - \boldsymbol{A}_{(t)} \circ \boldsymbol{Z}_{t-1}^{(m-1-k)}\right)\left(\boldsymbol{A}_{(t)} \circ \boldsymbol{Z}_{t-1}^{(m-1)} - \boldsymbol{A}_{(t)} \circ \boldsymbol{Z}_{t-1}^{(m-1-k)}\right)'\right] \\
&= E\left[\left(\boldsymbol{A}_{(t)} \circ (\boldsymbol{Z}_{t-1}^{(m-1)} - \boldsymbol{Z}_{t-1}^{(m-1-k)})\right)\left(\boldsymbol{A}_{(t)} \circ (\boldsymbol{Z}_{t-1}^{(m-1)} - \boldsymbol{Z}_{t-1}^{(m-1-k)})\right)'\right] \\
&= \boldsymbol{A}E\left((\boldsymbol{Z}_{t-1}^{(m-1)} - \boldsymbol{Z}_{t-1}^{(m-1-k)})(\boldsymbol{Z}_{t-1}^{(m-1)} - \boldsymbol{Z}_{t-1}^{(m-1-k)})'\right)\boldsymbol{A}' + \boldsymbol{M} \\
&= \boldsymbol{A}E(\boldsymbol{D}_{m-1,t-1,k}\boldsymbol{D}'_{m-1,t-1,k})\boldsymbol{A}' + \boldsymbol{M},
\end{aligned} \tag{3.5}$$

gde je $\boldsymbol{M} = diag(m_1, m_2)$ pri čemu je

$$\begin{aligned}
m_1 &= \alpha^2 p(1-p)E\left((X_{t-1}^{(m-1)} - X_{t-1-k}^{(m-1-k)}) - (Y_{t-1}^{(m-1)} - Y_{t-1-k}^{(m-1-k)})\right)^2 \\
&\quad + \alpha(1-\alpha)\left(pE(X_{t-1}^{(m-1)} - X_{t-1-k}^{(m-1-k)}) + (1-p)E(Y_{t-1}^{(m-1)} - Y_{t-1-k}^{(m-1-k)})\right) \\
m_2 &= \beta^2 q(1-q)E\left((X_{t-1}^{(m-1)} - X_{t-1-k}^{(m-1-k)}) - (Y_{t-1}^{(m-1)} - Y_{t-1-k}^{(m-1-k)})\right)^2
\end{aligned}$$

$$+\beta(1-\beta)\left(qE(X_{t-1}^{(m-1)}-X_{t-1-k}^{(m-1-k)})+(1-q)E(Y_{t-1}^{(m-1)}-Y_{t-1-k}^{(m-1-k)})\right).$$

Zapisaćemo vektor $(m_1, m_2)'$ u sledećem obliku

$$\begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha^2 p(1-p) & \alpha^2 p(1-p) \\ \beta^2 q(1-q) & \beta^2 q(1-q) \end{bmatrix} E\left(\boldsymbol{H}_{m-1,t-1,k}\right)$$
$$+\begin{bmatrix} \alpha(1-\alpha)p & \alpha(1-\alpha)(1-p) \\ \beta(1-\beta)q & \beta(1-\beta)(1-q) \end{bmatrix} E\left(\boldsymbol{D}_{m-1,t-1,k}\right)$$
$$-\begin{bmatrix} 2\alpha^2 p(1-p)E\left(\left(X_{t-1}^{(m-1)}-X_{t-1}^{(m-k-1)}\right)\left(Y_{t-1}^{(m-1)}-Y_{t-1}^{(m-k-1)}\right)\right) \\ 2\beta^2 q(1-q)E\left(\left(X_{t-1}^{(m-1)}-X_{t-1}^{(m-k-1)}\right)\left(Y_{t-1}^{(m-1)}-Y_{t-1}^{(m-k-1)}\right)\right) \end{bmatrix}$$

pri čemu je slučajni vektor $\boldsymbol{H}_{m,t,k} = \left(\left(X_t^{(m)}-X_t^{(m-k)}\right)^2, \left(Y_t^{(m)}-Y_t^{(m-k)}\right)^2\right)'$. Slučajne promenljive $X_{t-1}^{(m-1)}-X_{t-1}^{(m-k-1)}$ i $Y_{t-1}^{(m-1)}-Y_{t-1}^{(m-k-1)}$ su nenegativne, pa je njihov zajednički moment $E\left(\left(X_{t-1}^{(m-1)}-X_{t-1}^{(m-k-1)}\right)\left(Y_{t-1}^{(m-1)}-Y_{t-1}^{(m-k-1)}\right)\right) \geq 0$. Dalje, važi da je

$$\alpha^2 p(1-p)\left(E(X_{t-1}^{(m-1)}-X_{t-1}^{(m-1-k)})+E(Y_{t-1}^{(m-1)}-Y_{t-1}^{(m-1-k)})\right)$$
$$<\alpha pE(X_{t-1}^{(m-1)}-X_{t-1}^{(m-1-k)})+\alpha(1-p)E(Y_{t-1}^{(m-1)}-Y_{t-1}^{(m-1-k)}),$$

a isto tako važi i da je

$$\beta^2 q(1-q)\left(E(X_{t-1}^{(m-1)}-X_{t-1}^{(m-1-k)})+E(Y_{t-1}^{(m-1)}-Y_{t-1}^{(m-1-k)})\right)$$
$$<\beta qE(X_{t-1}^{(m-1)}-X_{t-1}^{(m-1-k)})+\beta(1-q)E(Y_{t-1}^{(m-1)}-Y_{t-1}^{(m-1-k)}).$$

Sličnu diskusiju možemo izneti i za drugi sabirak gornje jednačine. Na osnovu svega ovoga, sledi da je

$$\begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} \leq \boldsymbol{A}E\left(\boldsymbol{H}_{m-1,t-1,k}\right)+\boldsymbol{A}E\left(\boldsymbol{D}_{m-1,t-1,k}\right)$$

Obratimo sad pažnju na prvi sabirak ove nejednakosti. Označimo elemente vektora sa $E(\boldsymbol{H}_{m-1,t-1,k}) = (h_1, h_2)'$. Imajući u vidu definiciju nizova $\{X_t^m\}$ i $\{Y_t^m\}$ dobijamo da je prvi element vektora jednak

$$h_1 = E\left[\left(U_{1t}\circ(X_{t-2}^{(m-2)}-X_{t-2}^{(m-2-k)})\right)^2+\left(U_{2t}\circ(Y_{t-2}^{(m-2)}-Y_{t-2}^{(m-2-k)})\right)^2\right.$$
$$\left.+2\left(U_{1t}\circ\left(X_{t-2}^{(m-2)}-X_{t-2}^{(m-2-k)}\right)\right)\cdot\left(U_{2t}\circ\left(Y_{t-2}^{(m-2)}-Y_{t-2}^{(m-2-k)}\right)\right)\right].$$

Kako je $E((U_{1t} \circ X) \cdot (U_{2t} \circ Y)) = 0$ za svako X, Y i t, to imamo da je

$$\begin{aligned} h_1 &= \alpha p \left[\alpha E\left(X_{t-2}^{(m-2)} - X_{t-2}^{(m-2-k)}\right)^2 + (1-\alpha)E\left(X_{t-2}^{(m-2)} - X_{t-2}^{(m-2-k)}\right)\right] \\ &+ \alpha(1-p)\left[\alpha E\left(Y_{t-2}^{(m-2)} - Y_{t-2}^{(m-2-k)}\right)^2 + (1-\alpha)E\left(Y_{t-2}^{(m-2)} - Y_{t-2}^{(m-2-k)}\right)\right] \\ &< \alpha p E\left(X_{t-2}^{(m-2)} - X_{t-2}^{(m-2-k)}\right)^2 + \alpha(1-p)E\left(Y_{t-2}^{(m-2)} - Y_{t-2}^{(m-2-k)}\right)^2 \\ &+ \alpha p E\left(X_{t-2}^{(m-2)} - X_{t-2}^{(m-2-k)}\right) + \alpha(1-p)E\left(Y_{t-2}^{(m-2)} - Y_{t-2}^{(m-2-k)}\right). \end{aligned}$$

Slično dobijamo da je

$$\begin{aligned} h_2 &< \beta q E\left(X_{t-2}^{(m-2)} - X_{t-2}^{(m-2-k)}\right)^2 + \beta(1-q)E\left(Y_{t-2}^{(m-2)} - Y_{t-2}^{(m-2-k)}\right)^2 \\ &+ \beta q E\left(X_{t-2}^{(m-2)} - X_{t-2}^{(m-2-k)}\right) + \beta(1-q)E\left(Y_{t-2}^{(m-2)} - Y_{t-2}^{(m-2-k)}\right). \end{aligned}$$

Prema tome

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}E\left(\boldsymbol{H}_{m-1,t-1,k}\right) &< \boldsymbol{A}^2 E\left(\boldsymbol{H}_{m-2,t-2,k}\right) + \boldsymbol{A}E(\boldsymbol{D}_{m-2,t-2,k}) \\ &< \ldots < \boldsymbol{A}^m E\left(\begin{bmatrix} \varepsilon_t^2 \\ \eta_t^2 \end{bmatrix}\right) + \sum_{j=1}^{m} \boldsymbol{A}^j E(\boldsymbol{D}_{m-j,t-j,k}). \end{aligned}$$

Na kraju zaključujemo da je

$$\begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} \leq \boldsymbol{A}^m E\left(\begin{bmatrix} \varepsilon_t^2 \\ \eta_t^2 \end{bmatrix}\right) + \sum_{j=1}^{m} \boldsymbol{A}^j E\left(\boldsymbol{D}_{m-j,t-j,k}\right) = \boldsymbol{A}^m E\left(\begin{bmatrix} \varepsilon_t^2 \\ \eta_t^2 \end{bmatrix}\right) + m\boldsymbol{A}^m E\left(\boldsymbol{e}_t\right), \tag{3.6}$$

pri čemu zadnja jednakost sledi iz jednačine (3.4).

Ako obeležimo sa λ_1 i λ_2 sopstvene vrednosti matrice $\boldsymbol{A}$, tada matricu $\boldsymbol{A}$ možemo zapisati kao $\boldsymbol{A} = \lambda_1 \boldsymbol{P}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{P}_2$, gde matrice $\boldsymbol{P}_1$ i $\boldsymbol{P}_2$ zadovoljavaju uslove $\boldsymbol{P}_i^2 = \boldsymbol{P}_i$, $i = 1, 2$, $\boldsymbol{P}_1 \boldsymbol{P}_2 = \boldsymbol{0}$ i $\boldsymbol{P}_1 + \boldsymbol{P}_2 = \boldsymbol{I}$. Tada je $\boldsymbol{A}^m = \lambda_1^m \boldsymbol{P}_1 + \lambda_2^m \boldsymbol{P}_2$. U poglavlju 2.1 pokazali smo da su sopstvene vrednosti matrice $\boldsymbol{A}$ unutar jediničnog kruga. Ispitajmo sada konvergenciju niza $m\lambda_i^m$, $i = 1, 2$, kad $m \to \infty$.

Dokažimo najpre da $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Kako je $n \geq 1$ to je $\sqrt[n]{n} \geq 1$. Odnosno $\sqrt[n]{n} = 1 + p_n$, gde je $p_n > 0$. Dakle, imamo da je $n = (1+p_n)^n = \binom{n}{0} 1^n p_n^0 + \binom{n}{1} p_n^1 + \ldots \binom{n}{n} p_n^n \geq \binom{n}{2} p_n^2 \geq \left(\frac{n}{2}\right)^2 p_n^2$, za $n \geq 2$. Dobili smo nejednakost $n \geq \frac{n^2}{4} p_n^2$, pa je $p_n \leq \sqrt{\frac{4}{n}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Na kraju imamo da je $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} (1 + p_n) = 1$.

Vratimo sa sad na $m\lambda_i^m$. Pretpostavimo da je $\lambda_1 \in (0, 1)$. Kako je $\lim_{m\to\infty} \sqrt[m]{m\lambda_i^m} = \lambda_i \lim_{m\to\infty} \sqrt[m]{m} = \lambda_i < 1$, to prema Košijevom kriterijumu važi da je red $\sum_{m=1}^{\infty} m\lambda_i^m$ konvergentan. Kako je red konvergentan to važi da mu opšti član teži nuli. Dakle,

$m\lambda_i^m \to 0$, $i = 1, 2$, kad $m \to \infty$. Ako je $\lambda_i \in (-1, 0)$ onda je $\sum_{i=1}^{\infty} m\lambda_i^m$ naizmenični red. Kako je ovaj naizmenični red apsolutno konvergentan to ponovo imamo da mu opšti član teži nuli.

Dakle, prvi sabirak nejednačine (3.6) konvergira ka $\mathbf{0}$ jer su sopstvene vrednosti matrice $\boldsymbol{A}$ unutar jediničnog kruga. Drugi sabirak iste nejednačine može da se predstavi kao $(m\lambda_1^m \boldsymbol{P}_1 + m\lambda_2^m \boldsymbol{P}_2)E(\boldsymbol{e}_t)$ pri čemu smo pokazali da prvi činilac teži ka $\mathbf{0}$. Zbir na desnoj strani nejednačine (3.6) konvergira ka $\mathbf{0}$, kad $m \to \infty$, a posledica toga je da $\boldsymbol{M} \to \mathbf{0}$, kad $m \to \infty$.

Primenom jednačine (3.5) m puta dobićemo da je

$$E(\boldsymbol{D}_{m,t,k}\boldsymbol{D}'_{m,t,k}) \leq \boldsymbol{A}^m E(\boldsymbol{e}_t\boldsymbol{e}'_t)(\boldsymbol{A}^m)' + \sum_{i=0}^{m-1} \boldsymbol{A}^i \boldsymbol{M}(\boldsymbol{A}^i)'. \tag{3.7}$$

Ako sa $\otimes$ označimo Kronekerov proizvod, onda imamo da je $\boldsymbol{A}^m \otimes \boldsymbol{A}^m = (\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{A})^m$ jer je matrica $\boldsymbol{A}$ kvadratna (dokaz ove jednakosti izvodi se indukcijom). Kako je

$$vec(\boldsymbol{A}^m E(\boldsymbol{e}_t\boldsymbol{e}'_t)(\boldsymbol{A}^m)') = (\boldsymbol{A}^m \otimes \boldsymbol{A}^m)vec(E(\boldsymbol{e}_t\boldsymbol{e}'_t)) = (\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{A})^m vec(E(\boldsymbol{e}_t\boldsymbol{e}'_t))$$

i sopstvene vrednosti λ_1^2, $\lambda_1\lambda_2$, λ_2^2 matrice $\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{A}$ su unutar jediničnog kruga, dobijamo da $vec(\boldsymbol{A}^m E(\boldsymbol{e}_t\boldsymbol{e}'_t)(\boldsymbol{A}^m)')$ konvergira ka $\mathbf{0}$, kad $m \to \infty$, što dalje implicira da prvi sabirak na desnoj strani nejednakosti (3.7) konvergira kad $\mathbf{0}$, kad $m \to \infty$. Slično kad $m \to \infty$, važi da

$$\sum_{i=0}^{m-1} vec\left(\boldsymbol{A}^i \boldsymbol{M}(\boldsymbol{A}^i)'\right) = \sum_{i=0}^{m-1} (\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{A})^i vec(\boldsymbol{M}) \to vec(\boldsymbol{M})(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{A}) \to \mathbf{0}.$$

Drugi sabirak na desnoj strani nejednakosti (3.7) konvergira ka $\mathbf{0}$, kad $m \to \infty$. Dakle, dokazali smo da $E(\boldsymbol{D}_{m,t,k}\boldsymbol{D}'_{m,t,k}) \to \mathbf{0}$, kad $m \to \infty$, pa je konvergencija niza $\{Z_t^{(m)}\}$ u prostoru $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ dokazana, to jest $\lim_{m\to\infty} \boldsymbol{Z}_t^{(m)} = \boldsymbol{Z}_t$ u srednje-kvadratnom smislu.

Koristeći sličan pristup kao Latour (1997) u lemi 3.3, možemo pokazati da je niz slučajnih vektora $\{\boldsymbol{Z}_t^{(m)}\}$ strogo stacionaran proces. Prema definiciji ovog niza imamo da je

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{Z}_1^{(0)} \\ \vdots \\ \boldsymbol{Z}_k^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}_k \end{bmatrix}, \text{ kao i da je } \begin{bmatrix} \boldsymbol{Z}_{h+1}^{(0)} \\ \vdots \\ \boldsymbol{Z}_{h+k}^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_{h+1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}_{h+k} \end{bmatrix}.$$

Slučajni vektori $(\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_k)'$ i $(\boldsymbol{e}_{h+1}, \dots, \boldsymbol{e}_{h+k})'$ su identično raspodeljeni pa je niz $\{\boldsymbol{Z}_t^{(0)}\}$ strogo stacionaran. Pretpostavimo da je niz $\{\boldsymbol{Z}_t^{(n)}\}$ strogo stacionaran i dokažimo da to važi i za niz $\{\boldsymbol{Z}_t^{(n+1)}\}$. Kako je $\boldsymbol{Z}_k^{(n+1)} = \boldsymbol{A}_k \circ \boldsymbol{Z}_{k-1}^{(n)} + \boldsymbol{e}_k$, za $n > 0$, to imamo da je

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{Z}_1^{(n+1)} \\ \vdots \\ \boldsymbol{Z}_k^{(n+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{(1)} & \cdots & \boldsymbol{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{A}_{(k)} \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} \boldsymbol{Z}_0^{(n)} \\ \vdots \\ \boldsymbol{Z}_{k-1}^{(n)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}_k \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{Z}_{h+1}^{(n+1)} \\ \vdots \\ \boldsymbol{Z}_{h+k}^{(n+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{(h+1)} & \cdots & \boldsymbol{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{A}_{(h+k)} \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} \boldsymbol{Z}_h^{(n)} \\ \vdots \\ \boldsymbol{Z}_{h+k-1}^{(n)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_{h+1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}_{h+k} \end{bmatrix}.$$

Na osnovu indukcijske pretpostavke desne strane ovih jednakosti su jednako raspodeljene pa onda to važi i za desne strane jednakosti, što dalje povlači strogu stacionarnost niza $\{\boldsymbol{Z}_t^{(n)}\}$ za svako $n \in \mathbb{N}_0$, pa je i onda i niz slučajnih vektora $\{\boldsymbol{Z}_t\}$ strogo stacionaran proces.

Jedinstvenost rešenja koje zadovoljava jednačinu (2.4) pokazujemo kao i Latour (1997). Pretpostavimo da postoji još jedan stacionaran niz $\{\boldsymbol{W}_t = (W_{1t}, W_{2t})'\}$ koji zadovoljava jednačinu (3.3). Tada je $E(\boldsymbol{Z}_t^{(m)}) = E(\boldsymbol{W}_t)$ i važi

$$\begin{aligned}
|\boldsymbol{Z}_t^{(m)} - \boldsymbol{W}_t| &= \begin{bmatrix} |U_{1t} \circ X_{t-1}^{(m-1)} + U_{2t} \circ Y_{t-1}^{(m-1)} - U_{1t} \circ W_{1t} - U_{2t} \circ W_{2t}| \\ |V_{1t} \circ X_{t-1}^{(m-1)} + V_{2t} \circ Y_{t-1}^{(m-1)} - V_{1t} \circ W_{1t} - V_{2t} \circ W_{2t}| \end{bmatrix} \\
&\leq \begin{bmatrix} |U_{1t} \circ X_{t-1}^{(m-1)} - U_{1t} \circ W_{1t}| + |U_{2t} \circ Y_{t-1}^{(m-1)} - U_{2t} \circ W_{2t}| \\ |V_{1t} \circ X_{t-1}^{(m-1)} - V_{1t} \circ W_{1t}| + |V_{2t} \circ Y_{t-1}^{(m-1)} - V_{2t} \circ W_{2t}| \end{bmatrix} \\
&\overset{d}{=} \begin{bmatrix} |U_{1t} \circ (X_{t-1}^{(m-1)} - W_{1t})| + |U_{2t} \circ (Y_{t-1}^{(m-1)} - W_{2t})| \\ |V_{1t} \circ (X_{t-1}^{(m-1)} - W_{1t})| + |V_{2t} \circ (Y_{t-1}^{(m-1)} - W_{2t})| \end{bmatrix} \\
&= \boldsymbol{A}_{(t)} \circ |\boldsymbol{Z}_{t-1}^{(m-1)} - \boldsymbol{W}_{t-1}|,
\end{aligned}$$

gde $\boldsymbol{X} \overset{d}{\leq} \boldsymbol{Y}$ znači da je slučajni vektor $\boldsymbol{X}$ manji ili jednak slučajnom vektoru koji ima raspodelu kao slučajni vektor $\boldsymbol{Y}$. Na osnovu ove nejednakosti dobićemo da je

$$\begin{aligned}
E|\boldsymbol{Z}_t^{(m)} - \boldsymbol{W}_t| &\leq \boldsymbol{A}|\boldsymbol{Z}_{t-1}^{(m-1)} - \boldsymbol{W}_{t-1}| \\
&\leq \ldots \leq \boldsymbol{A}^m E \begin{bmatrix} |U_{1t-m} \circ W_{1t-m-1} + U_{2t-m} \circ W_{2t-m-1}| \\ |V_{1t-m} \circ W_{1t-m-1} + V_{2t-m} \circ W_{2t-m-1}| \end{bmatrix} \\
&\leq \boldsymbol{A}^m E \boldsymbol{W}_{t-m} = \boldsymbol{A}^m E \boldsymbol{Z}_{t-m}^{(0)} = \boldsymbol{A}^m E \boldsymbol{e}_t.
\end{aligned}$$

Označimo sad sa $\mathcal{B}_X^{(m)} = \left\{\omega : |X_t^{(m)}(\omega) - W_{1t}(\omega)| > 0\right\}$. Tada je

$$E|X_t^{(m)} - W_{1t}| = \sum_{k=1}^{\infty} kP(|X_t^{(m)}(\omega) - W_{1t}(\omega)| = k)$$

$$\geq \sum_{k=1}^{\infty} P(|X_t^{(m)}(\omega) - W_{1t}(\omega)| = k) = P(\mathcal{B}_X^{(m)}).$$

Dobili smo da je

$$P(\mathcal{B}_X^{(m)}) \leq E|\boldsymbol{Z}_t^{(m)} - \boldsymbol{W}_t| \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \leq \ldots \leq \boldsymbol{A}^m E\boldsymbol{e}_t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Onda zaključujemo da je

$$\sum_{m=0}^{\infty} P(\mathcal{B}_X^{(m)}) \leq \sum_{m=0}^{\infty} \boldsymbol{A}^m E\boldsymbol{e}_t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} E\boldsymbol{e}_t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} < \infty.$$

Na osnovu leme Borel-Cantelli zaključujemo da je $P(\limsup_{m\to\infty} \mathcal{B}_X^{(m)}) = 0$. Slično dokazujemo i da se $\{Y_t^{(m)}\}$ i $\{W_{2t}\}$ razlikuju na skupu mere nula. Prema tome zaključujemo da se $\{\boldsymbol{Z}_t^{(n)}\}$ i $\{\boldsymbol{W}_t\}$ razlikuju na skupu mere nula odakle sledi da je $\{\boldsymbol{Z}_t^{(n)}\}$ skoro izvesno jedinstveno rešenje jednačine (3.3). $\square$

Lema 3.2. *Dvodimenzionalni vremenski niz $\{\boldsymbol{Z}_t\}$ definisan jednačinom (2.4) je ergodičan.*

Dokaz: Dokaz je isti kao u lemi 2.6.

3.1.2 Dvodimenzionalni model sa različitim geometrijskim raspodelama

U ovom poglavlju definisaćemo stacionarni dvodimenzionalni nenegativni celobrojni autoregresivni model reda jedan (BVGGINAR(1)) dat jednačinama (3.1) i (3.2), gde slučajni nizovi $\{X_t\}$ i $\{Y_t\}$ imaju geometrijske marginalne raspodele sa raspodelom verovatnoća $P(X_t = k) = a^k(1+a)^{-k-1}$, $a > 0$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ i $P(Y_t = k) = b^k(1+b)^{-k-1}$, $b > 0$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, redom.

Da bismo kompletirali konstrukciju modela, moramo da odredimo marginalne raspodele inovacionih procesa $\{\varepsilon_t\}$ i $\{\eta_t\}$. Marginalne raspodele ovih procesa date su sledećom teoremom.

Teorema 3.3 (Popović, Ristić i Nastić (2015), teorema 2). *Neka su α, $\beta \in (0,1)$, p, $q \in [0,1]$ i a, $b > 0$. Ako je $\beta \leq b/a \leq 1/\alpha$, tada je raspodela inovacionih procesa $\{\varepsilon_t\}$ i $\{\eta_t\}$ data kao*

$$\varepsilon_t \stackrel{d}{=} \begin{cases} Geom(\frac{a}{1+a}), & s.v. \ \frac{(1-\alpha)(a-\alpha b)}{a-\alpha a+\alpha ap-\alpha bp} \\ Geom\left(\frac{\alpha(a-ap+bp)}{1+\alpha(a-ap+bp)}\right), & s.v. \ \frac{\alpha p(1-p)(a-b)^2}{(a-ap+bp)(a-\alpha a+\alpha ap-\alpha bp)} \\ 0, & s.v. \ \frac{\alpha b}{a-ap+bp} \end{cases} \tag{3.8}$$

i

$$\eta_t \stackrel{d}{=} \begin{cases} Geom(\frac{b}{1+b}), & s.v. \ \frac{(1-\beta)(b-\beta a)}{b-\beta a+\beta aq-\beta bq} \\ Geom\left(\frac{\beta(a-aq+bq)}{1+\beta(a-aq+bq)}\right), & s.v. \ \frac{\beta q(1-q)(a-b)^2}{(a-aq+bq)(b-\beta a+\beta aq-\beta bq)} \\ 0, & s.v. \ \frac{\beta a}{a-aq+bq} \end{cases} . \tag{3.9}$$

Dokaz: Izvedimo najpre raspodelu slučajne promenljive ε_t. U tu svrhu koristićemo funkciju generatrise verovatnoće. Kako nam je namera da vremenski nizovi (3.1) i (3.2) budu stacionarni, iskoristićemo osobinu binomnog tining operatora gde imamo da je $\Phi_{\alpha\circ X_t}(s) = \Phi_{X_t}(1-\alpha+\alpha s)$. Prema tome,

$$\begin{aligned} \Phi_{\varepsilon_t}(s) &= \frac{\Phi_X(s)}{p\Phi_X(1-\alpha+\alpha s)+(1-p)\Phi_Y(1-\alpha+\alpha s)} \\ &= \frac{(1+\alpha a-\alpha as)(1+\alpha b-\alpha bs)}{(1+a-as)(1+\alpha(a-ap+bp)-\alpha(a-ap+bp)s)} \\ &= \frac{\alpha b}{a-ap+bp}+\frac{(1-\alpha)(a-\alpha b)}{a-\alpha a+\alpha ap-\alpha bp}\cdot\frac{1}{1+a-as} \\ &\quad +\frac{\alpha p(1-p)(a-b)^2}{(a-ap+bp)(a-\alpha a+\alpha ap-\alpha bp)} \\ &\quad \times\frac{1}{1+\alpha(a-ap+bp)-\alpha(a-ap+bp)s}. \end{aligned}$$

Označimo verovatnoće iz jednačine (3.8) sa $A_1 = \frac{\alpha b}{a-ap+bp}$, $A_2 = \frac{(1-\alpha)(a-\alpha b)}{a-\alpha a+\alpha ap-\alpha bp}$ i $A_3 = \frac{\alpha p(1-p)(a-b)^2}{(a-ap+bp)(a-\alpha a+\alpha ap-\alpha bp)}$. Lako se pokazuje da je $A_1+A_2+A_3 = 1$. Dakle, verovatnoće A_1, A_2 i A_3 će biti dobro definisane ako pokažemo da su nenegativne. Za verovatnoću A_1 imamo da je $a-ap+bp = a(1-p)+bp > 0$. Uslov $A_2A_3 \geq 0$ je zadovoljen ako važi $a-\alpha b \geq 0$. Pretpostavimo da je $a-\alpha b \geq 0$. Tada, $a-\alpha a+\alpha ap-\alpha bp \geq a(1-\alpha)(1-p) \geq 0$, što implicira da je $A_3 \geq 0$. Kako je $A_2A_3 \geq 0$ i $A_3 \geq 0$, to sledi da je i $A_2 \geq 0$. Dakle, verovatnoće A_1, A_2 i A_3 su dobro definisane ako je $a-\alpha b \geq 0$, pa zaključujemo da je raspodela slučajne promenljive ε_t dobro definisana jednačinom (3.8). Na sličan način pokazujemo da ako je $b-a\beta \geq 0$, tada je raspodela inovacionog procesa $\{\eta_t\}$ dobro definisana jednačinom (3.9). □

Dakle, možemo zaključiti da je slučajna promenljiva ε_t (kao i η_t) kombinacija dve geometrijski raspodeljene slučajne promenljive i nula slučajne promenljive. Za neke vrednosti parametara p i q dobićemo sledeće specijalne slučajeve posmatranog modela:

- Ako je $p = 1$ i $q = 0$, tada je $X_t = \alpha\circ X_{t-1}+\varepsilon_t$ i $Y_t = \beta\circ Y_{t-1}+\eta_t$, što znači da su $\{X_t\}$ i $\{Y_t\}$ dva nezavisna INAR(1) vremenska niza sa geometrijskim marginalnim raspodelama.

- Ako je $p = 0$ i $q = 1$, tada je $X_t = \alpha\circ Y_{t-1}+\varepsilon_t$ i $Y_t = \beta\circ X_{t-1}+\eta_t$. U ovom slučaju, slično kao kod Dewald, Lewis i McKenzie (1989), dobijamo model gde se vremenski niz

$\{Y_t\}$ naziva dualnim u odnosu na $\{X_t\}$.

- Ako je $p = 0$ i $q = 0$, tada je $X_t = \alpha \circ Y_{t-1} + \varepsilon_t$ i $Y_t = \beta \circ Y_{t-1} + \eta_t$. Sada je slučajna promenljiva X_t generisana samo sa Y_{t-1} i ε_t. Ovako smo dobili jedan regresivni model gde je zavisna promenljiva X_t, a nezavisna Y_t i jedan autoregresivni model takođe reda jedan.

- Ako je $p = 1$ i $q = 1$, tada je $X_t = \alpha \circ X_{t-1} + \varepsilon_t$ i $Y_t = \beta \circ X_{t-1} + \eta_t$. Primećujemo da je sada Y_t generisana sa X_{t-1} i η_t, što implicira da je prvi model autoregresivan, a drugi regresivan gde je sad zavisna promenljiva Y_t, a nezavisna X_t.

3.1.3 Osobine modela

U ovom potpoglavlju diskutovaćemo osobine BVGGINAR(1) modela, kao što su korelaciona struktura, uslovni momenti i uslovna raspodela verovatnoća.

Koeficijent korelacije između procesa $\{X_t\}$ i $\{Y_t\}$ dat je sledećom lemom.

Lema 3.4 (Popović, Ristić i Nastić (2015), lema 3). *Neka su α, $\beta \in (0,1)$, p, $q \in [0,1]$, a, $b > 0$ i $\beta \leq b/a \leq 1/\alpha$. Tada, koeficijent korelacije između nizova $\{X_t\}$ i $\{Y_t\}$ uzima vrednosti iz intervala $[0,1)$ i dat je jednačinom*

$$\rho = \frac{\alpha\beta[a(1+a)pq + b(1+b)(1-p)(1-q)]}{(1-\alpha\beta(p(1-q)+q(1-p)))\sqrt{a(1+a)}\sqrt{b(1+b)}} \ . \tag{3.10}$$

Dokaz: Na osnovu definicije nizova $\{X_t\}$ i $\{Y_t\}$ i osobina binomnog tining operatora imamo da je

$$\begin{aligned} Cov(X_t, Y_t) &= \alpha\beta\left[pqVar(X_{t-1}) + (1-p)(1-q)Var(Y_{t-1})\right] \\ &\quad + \alpha\beta\left[p(1-q) + (1-p)q\right] Cov(X_{t-1}, Y_{t-1}). \end{aligned}$$

Imajući u vidu uslove za ograničenje parametara zaključujemo da je $1 - \alpha\beta(p(1-q) + (1-p)q) > 0$. Na osnovu toga i činjenice da je vremenski niz $\{(X_t, Y_t)\}$ stacionaran, dobijamo da je kovarijacija između X_t i Y_t data jednačinom

$$Cov(X_t, Y_t) = \frac{\alpha\beta[a(1+a)pq + b(1+b)(1-p)(1-q)]}{1-\alpha\beta(p(1-q)+q(1-p))} \ .$$

Dakle, zaključujemo da je koeficijent korelacije između X_t i Y_t dat jednačinom (3.10).

Pokažimo sada da koeficijent korelacije uzima vrednosti iz intervala $[0,1)$. Očigledno je da je $\rho \geq 0$. Lako se izračunava da je

$$\rho - 1 = \frac{\alpha\beta\,(q + (1-q)c)\,(p/c + 1 - p) - 1}{1 - \alpha\beta(p(1-q) + q(1-p))} \quad ,$$

gde je $c = \sqrt{b(1+b)/(a(1+a))}$.

Slučaj kada je $a = b$ razmatrali su Ristić, Nastić, Jayakumar i Bakouch (2012). Zato ćemo razmatrati samo slučaj kada je $a \neq b$. Pretpostavimo da je $a > b$. Tada je $0 < c < 1$ i $q + (1-q)c \leq 1$. S druge strane imamo da je

$$\frac{p}{c} + 1 - p \leq \frac{1}{c} < \frac{a}{b} \leq \frac{1}{\beta}.$$

Zadnja dva rezultata impliciraju da je $\alpha\beta\,(q + (1-q)c)\,(p/c + 1 - p) < 1$ i $\rho < 1$. Dokaz je analogan kada pretpostavimo da je $a < b$.

Primetimo da je proces nekorelisan kada su $p = 1$ i $q = 0$ ili kada su $p = 0$ i $q = 1$. Maksimalna korelacija se postiže za $p = q = 0$ ili $p = q = 1$. U prvom slučaju korelacija je $\rho = \alpha\beta\sqrt{\frac{b(1+b)}{a(1+a)}}$. Bez gubljenja opštosti pretpostavimo da je $a < b$. Prateći ograničenja za parametre, maksimalna korelacija u odnosu na α dobija se kad je $\alpha = \frac{a}{b}$. Tada je, $\rho = \beta\sqrt{\frac{a+ab}{b+ab}}$. Korelacija teži jedinici kad $\beta \to 1$ i $a \to b$. Sa porastom razlike između parametara a i b, raste i razlika između ρ i 1. Drugim rečima, kad je a značajno manje od b, parametar α je blizak nuli. Tada najveći uticaj na evoluciju vremenskog niza $\{X_t\}$ ima inovacioni proces, što opravdava malu korelaciju između nizova $\{X_t\}$ i $\{Y_t\}$. Slična diskusija je kad važi $p = q = 1$. $\square$

Uslovno očekivanje za BVGGINAR(1) model, gde se posmatra uslovno očekivanje slučajnih promenljivih X_{t+k} i Y_{t+k} u odnosu na X_t i Y_t dato je jednačinom (2.8). Ovde ćemo navesti samo uslovno očekivanje za jedan korak unapred, koje ćemo koristiti u nastavku ovog poglavlja, a ono je dato jednačinama

$$E(X_{t+1}|X_t, Y_t) = \alpha p X_t + \alpha(1-p)Y_t + \mu_\varepsilon \tag{3.11}$$

$$E(Y_{t+1}|X_t, Y_t) = \beta q X_t + \beta(1-q)Y_t + \mu_\eta \tag{3.12}$$

gde su očekivanja inovacionih procesa $\mu_\varepsilon = a - \alpha p a - \alpha(1-p)b$ i $\mu_\eta = b - \beta(1-q)b - \beta q a$.

Kako za BVGGINAR(1) važi da su slučajne promenljive X_t i Y_t uslovno nezavisne kada su poznate vrednosti za X_{t-1} i Y_{t-1}, to imamo da je uslovna raspodela verovatnoća slučajnog vektora (X_t, Y_t) oblika

$$\begin{aligned} P(X_t = x, Y_t = y | X_{t-1} = u, Y_{t-1} = v) = {} & P(X_t = x | X_{t-1} = u, Y_{t-1} = v) \\ & \times P(Y_t = y | X_{t-1} = u, Y_{t-1} = v). \end{aligned} \tag{3.13}$$

Dakle, raspodela verovatnoća dobija se kao proizvod funkcija

$$P(X_t = x | X_{t-1} = u, Y_{t-1} = v) = p \sum_{k=0}^{\min(u,x)} \binom{u}{k} \alpha^k (1-\alpha)^{u-k} P(\varepsilon_t = x-k) + (1-p) \sum_{k=0}^{\min(v,x)} \binom{v}{k} \alpha^k (1-\alpha)^{v-k} P(\varepsilon_t = x-k) \tag{3.14}$$

i

$$P(Y_t = y | X_{t-1} = u, Y_{t-1} = v) = q \sum_{k=0}^{\min(u,y)} \binom{u}{k} \beta^k (1-\beta)^{u-k} P(\eta_t = y-k) + (1-q) \sum_{k=0}^{\min(v,y)} \binom{v}{k} \beta^k (1-\beta)^{v-k} P(\eta_t = y-k), \tag{3.15}$$

gde je raspodela verovatnoća slučajne promenljive ε_t data sa

$$\begin{aligned} P(\varepsilon_t = x) &= 1_{\{x=0\}} \frac{\alpha b}{a(1-p)+bp} + \frac{(1-\alpha)(a-\alpha b)}{a-\alpha a+\alpha ap-\alpha bp} \cdot \frac{a^x}{(1+a)^{x+1}} + \\ &+ \frac{\alpha p(1-p)(a-b)^2}{(a(1-p)+bp)(a-\alpha a+\alpha ap-\alpha bp)} \cdot \frac{(\alpha(a-ap+bp))^x}{(1+\alpha(a-ap+bp))^{x+1}}, \end{aligned}$$

dok je za slučajnu promenljivu η_t data sa

$$\begin{aligned} P(\eta_t = y) &= 1_{\{y=0\}} \frac{\beta a}{a(1-q)+bq} + \frac{(1-\beta)(b-\beta a)}{b-\beta a+\beta aq-\beta bq} \cdot \frac{b^y}{(1+b)^{y+1}} + \\ &+ \frac{\beta q(1-q)(a-b)^2}{(a(1-q)+bq)(b-\beta a+\beta aq-\beta bq)} \cdot \frac{(\beta(a-aq+bq))^y}{(1+\beta(a-aq+bq))^{y+1}}. \end{aligned}$$

Indikatorsku funkciju za slučajni događaj A označili smo sa 1_A.

3.1.4 Ocenjivanje nepoznatih parametara

U ovom potpoglavlju bavićemo se ocenjivanjem nepoznatih parametara BVGGINAR(1) modela. Model ima šest parametara: dva koja opisuju različite geometrijske raspodele, dva koja određuju autokorelacije i dva koja definišu zavisnost između nizova $\{X_t\}$ i $\{Y_t\}$. Ovaj broj parametara omogućava nam da definišemo model koji ima različite srednje vrednosti modelovanih slučajnih nizova, kao i različite autokorelacione koeficijente. Poslednja dva parametra omogućavaju nam da definišemo da zavisnost između X_t i Y_{t-1} bude drugačije opisana nego ona između Y_t i X_{t-1}.

Za ocenjivanje nepoznatih parametara razmatraćemo metod uslovnih najmanjih kvadrata (MCLS) i metod uslovne maksimalne verodostojnosti (CML). Ocene dobijene jednom i drugom metodom uporedićemo na simuliranom skupu podataka.

Metod uslovnih najmanjih kvadrata

Pretpostavimo da imamo dvodimenzionalni slučajni uzorak $\{(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)\}$. Da bismo dobili MCLS ocene iskoristićemo matrični zapis (2.4) i uvešćemo parametarizaciju $\boldsymbol{\Theta} = (\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, a, b)'$, gde su $\theta_1 = \alpha p$, $\theta_2 = \alpha(1-p)$, $\theta_3 = \beta q$ i $\theta_4 = \beta(1-q)$. Uslovna očekivanja slučajnih promenljivih X_t i Y_t za jedan korak unapred data su jednačinama (3.11) i (3.12), redom. Kriterijumska funkcija čijom minimizacijom dobijamo ocenjene parametre glasi

$$
\begin{aligned}
S(\boldsymbol{\Theta}) &= \sum_{i=1}^{n-1} (\boldsymbol{Z}_{i+1} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{Z}_i - (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{\mu}_e)' (\boldsymbol{Z}_{i+1} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{Z}_i - (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{\mu}_e) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} (X_{i+1} - a - \theta_1(X_i - a) - \theta_2(Y_i - b))^2 \\
&+ \sum_{i=1}^{n-1} (Y_{i+1} - b - \theta_3(X_i - a) - \theta_4(Y_i - b))^2,
\end{aligned}
$$

gde je $\boldsymbol{\mu_e} = (\mu_\varepsilon, \mu_\eta)'$. Parcijalni izvodi funkcije $S(\boldsymbol{\Theta})$ u odnosu na promenljive θ_i, $i = 1, 2, 3, 4$, a i b su

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial S(\boldsymbol{\Theta})}{\partial \theta_1} &= -2 \sum_{i=1}^{n-1} (X_i - a)(X_{i+1} - a - \theta_1(X_i - a) - \theta_2(Y_i - b)) \\
\frac{\partial S(\boldsymbol{\Theta})}{\partial \theta_2} &= -2 \sum_{i=1}^{n-1} (Y_i - b)(X_{i+1} - a - \theta_1(X_i - a) - \theta_2(Y_i - b)) \\
\frac{\partial S(\boldsymbol{\Theta})}{\partial \theta_3} &= -2 \sum_{i=1}^{n-1} (X_i - a)(Y_{i+1} - b - \theta_3(X_i - a) - \theta_4(Y_i - b)) \\
\frac{\partial S(\boldsymbol{\Theta})}{\partial \theta_4} &= -2 \sum_{i=1}^{n-1} (Y_i - b)(Y_{i+1} - b - \theta_3(X_i - a) - \theta_4(Y_i - b)) \\
\frac{\partial S(\boldsymbol{\Theta})}{\partial a} &= -2(1 - \theta_1) \sum_{i=1}^{n-1} (X_{i+1} - a - \theta_1(X_i - a) - \theta_2(Y_i - b)) \\
&+ 2\theta_3 \sum_{i=1}^{n-1} (Y_{i+1} - b - \theta_3(X_i - a) - \theta_4(Y_i - b)) \\
\frac{\partial S(\boldsymbol{\Theta})}{\partial b} &= 2\theta_2 \sum_{i=1}^{n-1} (X_{i+1} - a - \theta_1(X_i - a) - \theta_2(Y_i - b)) \\
&- 2(1 - \theta_4) \sum_{i=1}^{n-1} (Y_{i+1} - b - \theta_3(X_i - a) - \theta_4(Y_i - b)).
\end{aligned}
$$

Dakle, ocene parametara θ_i, $i = 1, 2, 3, 4$, a i b dobijaju se metodom MCLS kao rešenje sistema jednačina $\frac{\partial S(\mathbf{\Theta})}{\partial \theta_i} = 0$, $i = \overline{1,6}$. Na kraju, ocene polaznih parametara α, β, p i q dobijamo kao $\hat{\alpha} = \hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2$, $\hat{\beta} = \hat{\theta}_3 + \hat{\theta}_4$, $\hat{p} = \frac{\hat{\theta}_1}{\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2}$ i $\hat{q} = \frac{\hat{\theta}_3}{\hat{\theta}_3 + \hat{\theta}_4}$.

Postojanje MCLS ocena, kao njihovu asimptotsku raspodelu proučavao je Tjøstheim (1986), odakle ćemo se fokusirati na teoreme 3.1 i 3.2. Dokažimo najpre postojanje MCLS ocena.

Teorema 3.5 (**Popović, Ristić i Nastić (2015), teorema 3**). *Postoji niz parametara* $\hat{\mathbf{\Theta}}_n = (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \hat{\theta}_3, \hat{\theta}_4, \hat{a}, \hat{b})$ *takav da* $\hat{\mathbf{\Theta}}_n \xrightarrow{s.i.} \mathbf{\Theta}^0$, $n \to \infty$, *gde je* $\mathbf{\Theta}^0 = (\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, a, b)$ *vektor stvarnih vrednosti parametara.*

Dokaz: Označimo uslovno očekivanje slučajne promenljive $\boldsymbol{Z}_n$ sa $\boldsymbol{g}_n = E(\boldsymbol{Z}_n|\mathcal{F}_{n-1})$. Tada je

$$\boldsymbol{g}_n = \begin{bmatrix} \theta_1 X_{n-1} + \theta_2 Y_{n-1} + (1-\theta_1)a - \theta_2 b \\ \theta_3 X_{n-1} + \theta_4 Y_{n-1} - \theta_3 a + (1-\theta_4) b \end{bmatrix}$$

i

$$\frac{\partial \boldsymbol{g}_n}{\partial \mathbf{\Theta}} = \begin{bmatrix} G_{1,n-1} & G_{2,n-1} & 0 & 0 & 1-\theta_1 & -\theta_2 \\ 0 & 0 & G_{1,n-1} & G_{2,n-1} & -\theta_3 & 1-\theta_4 \end{bmatrix}$$

gde su $G_{1,n-1} = X_{n-1} - a$ i $G_{2,n-1} = Y_{n-1} - b$. Kako je $\{\boldsymbol{Z}_n\}$ strogo stacionaran i ergodičan proces, možemo primeniti teoremu 3.1 iz Tjøstheim (1986) koja zahteva ispunjenje tri uslova. Uslovi C1 i C3 su trivijalno zadovoljeni jer su elementi matrice $\boldsymbol{g}$ linearne funkcije. Za uslov C2 odredimo konstante r_i iz jednačine

$$\begin{aligned} 0 = E\left|\sum_{i=1}^{6} r_i \frac{\partial \boldsymbol{g}_n}{\partial \theta_i}\right|^2 &= E\Big(r_1(X_{n-1}-a) + r_2(Y_{n-1}-b) + r_5(1-\theta_1) - r_6\theta_2\Big)^2 \\ &+ E\Big(r_3(X_{n-1}-a) + r_4(Y_{n-1}-b) - r_5\theta_3 + r_6(1-\theta_4)\Big)^2. \end{aligned}$$

Iz ove jednačine sledi da je

$$E(r_1(X_{n-1}-a) + r_2(Y_{n-1}-b))^2 = 0 \tag{3.16}$$

$$E(r_3(X_{n-1}-a) + r_4(Y_{n-1}-b))^2 = 0 \tag{3.17}$$

$$(r_5(1-\theta_1) - r_6\theta_2)^2 = 0 \tag{3.18}$$

$$(-r_5\theta_3 + r_6(1-\theta_4))^2 = 0. \tag{3.19}$$

Dokažimo najpre da iz jednačine (3.16) sledi da je $r_1 = r_2 = 0$. Jednačina (3.16) može da se zapiše kao $r_1^2 Var(X_{n-1}) + 2r_1 r_2 Cov(X_{n-1}, Y_{n-1}) + r_2^2 Var(Y_{n-1}) = 0$. Koristeći jednačinu (3.10), imamo da je $r_1^2 Var(X_{n-1}) + 2r_1 r_2 \rho\sqrt{Var(X_{n-1})}\sqrt{Var(Y_{n-1})} + r_2^2 Var(Y_{n-1}) = 0$.

Pokažimo prvo da slučaj $r_1r_2 > 0$ nije moguć. Kada bi to važilo imali bismo

$$0 = r_1^2 Var(X_{n-1}) + 2r_1r_2\rho\sqrt{Var(X_{n-1})}\sqrt{Var(Y_{n-1})} + r_2^2 Var(Y_{n-1}) \geq r_1^2 Var(X_{n-1}),$$

odakle sledi da je $r_1 = 0$, što je kontradiktorno pretpostavci da je $r_1r_2 > 0$. Pretpostavimo sada da je $r_1r_2 < 0$. U tom slučaju, zbog činjenice da je $0 \leq \rho < 1$, dobijamo

$$\begin{aligned} 0 &> r_1^2 Var(X_{n-1}) + 2r_1r_2\sqrt{Var(X_{n-1})}\sqrt{Var(Y_{n-1})} + r_2^2 Var(Y_{n-1}) \\ &= \left(r_1\sqrt{Var(X_{n-1})} + r_2\sqrt{Var(Y_{n-1})}\right)^2, \end{aligned}$$

što nije moguće. Dakle, jedini moguć slučaj je da su $r_1r_2 = 0$. Ako pretpostavimo da je $r_1 = 0$, lako uočavamo da je onda i $r_2 = 0$. Prema tome, jednačina (3.16) implicira da je $r_1 = r_2 = 0$. Na sličan način dokazujemo da iz jednačine (3.17) sledi da je $r_3 = r_4 = 0$.

Pokažimo još da jednačine (3.18) i (3.19) povlače da je $r_5 = r_6 = 0$. Kako je $1 - \theta_1 = 1 - \alpha p > 0$, imamo da je $r_5 = r_6\theta_2/(1-\theta_1)$. Zamenom ovog rezultata u jednačinu $-r_5\theta_3 + r_6(1-\theta_4) = 0$, dobijamo

$$\frac{-\theta_2\theta_3 + (1-\theta_1)(1-\theta_4)}{1-\theta_1} r_6 = 0.$$

Kako je $-\theta_2\theta_3 + (1-\theta_1)(1-\theta_4) = (1-\beta)(1-\alpha p) + \beta q(1-\alpha) > 0$, to sledi da je $r_6 = 0$, što dalje implicira da je i $r_5 = 0$. Dakle, dokazali samo da je $r_i = 0$, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, što znači da je i uslov C2 zadovoljen pa možemo primeniti teoremu 3.1 iz Tjøstheim (1986). $\square$

Da bismo izveli asimptotsku raspodelu ocena dobijenih MCLS metodom iskoristićemo teoremu 3.2 koju je dokazao Tjøstheim (1986). Teorema važi pod uslovom da je $E\left((\frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial \boldsymbol{\delta}})' \boldsymbol{f}_{n|n-1} \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial \boldsymbol{\delta}}\right) < \infty$, gde su

$$\boldsymbol{f}_{n|n-1} = E((\boldsymbol{Z}_n - \boldsymbol{g}_n)(\boldsymbol{Z}_n - \boldsymbol{g}_n)'|\mathcal{F}_{n-1}) = \begin{bmatrix} S_{1,n-1} & 0 \\ 0 & S_{2,n-1} \end{bmatrix},$$

$$S_{1,n-1} = \alpha^2 p(1-p)(X_{n-1} - Y_{n-1})^2 + \alpha(1-\alpha)(pX_{n-1} + (1-p)Y_{n-1}) + Var(\varepsilon_n),$$

$$S_{2,n-1} = \beta^2 q(1-q)(X_{n-1} - Y_{n-1})^2 + \beta(1-\beta)(qX_{n-1} + (1-q)Y_{n-1}) + Var(\eta_n).$$

Dakle, za primenu teoreme treba još da dokažemo da su zajednički momenti $E(X_n^2Y_n)$, $E(X_nY_n^2)$, $E(X_n^2Y_n^2)$, $E(X_n^3Y_n)$ i $E(X_nY_n^3)$ konačni. Upravo to će dokazati sledeće tri leme.

Lema 3.6. *Zajednički momenti $E(X_n^2Y_n)$ i $E(X_nY_n^2)$ su rešenja sistema*

$$\left[1 - \alpha^2\beta p(1-q)\right] E(X_n^2Y_n) - \alpha^2\beta(1-p)qE(X_nY_n^2) = c_1E(X_nY_n) + \pi_1 \tag{3.20}$$

$$-\alpha\beta^2(1-p)qE(X_n^2Y_n) + \Big[1-\alpha\beta^2p(1-q)\Big]E(X_nY_n^2) = c_2E(X_nY_n) + \pi_2 \tag{3.21}$$

iz skupa realnih brojeva, gde su koeficijenti sistema dati sledećim jednačinama:

$$\begin{aligned}
c_1 &= \alpha\beta(1-\alpha-2\alpha b+2\alpha bp+2a(1-\alpha p))(q+p(1-2q))\\
c_2 &= \alpha\beta(1-\beta+2b(1-\beta(1-q))-2a\beta q)(q+p(1-2q))\\
\pi_1 &= 2a^3\alpha\beta(1-\alpha(-2+p))pq+\alpha\beta b(1-p)(1-q)(b(1+2\alpha(1+p))+1)\\
&\quad + a^2(\alpha\beta(3-2\alpha(-2+p))pq-2b(-1+\alpha^2\beta(-1+p)p(-1+q)+\alpha\beta(p+q-2pq)))\\
&\quad + a(\alpha\beta pq+2\alpha b^2\beta(-1+p)(-1+q+\alpha pq)\\
&\quad + b(1+2\alpha^2\beta(-1+p)p+\alpha\beta(2-3q+p(-3+4q))))+2\alpha^2b^3\beta(1-p^2)(1-q)\\
\pi_2 &= 2a^3\alpha\beta^2p(2-q)q+\alpha\beta b(1-p)(1-q)(b(3+2\beta(1+q))+1)\\
&\quad + a^2(\alpha\beta q(p+4\beta p-2b(-p+\beta(1-p)(1-q))-2\beta pq))\\
&\quad + a(\alpha\beta pq+b(1+\alpha\beta((-1-2\beta(1-q))q-p(1-4q)))\\
&\quad + 2b^2(1+\alpha\beta(-q+p(-1+2q-\beta q+\beta q^2))))\\
&\quad + 2\alpha b^3\beta(1-p)(1-q)(1+\beta+\beta q).
\end{aligned}$$

Dokaz: Na osnovu definicije procesa važi da je

$$\begin{aligned}
&E(X_n^2Y_n) = pqE(\varphi_\alpha(X_{n-1},\varepsilon_n)^2\varphi_\beta(X_{n-1},\eta_n)) + p(1-q)E(\varphi_\alpha(X_{n-1},\varepsilon_n)^2\varphi_\beta(Y_{n-1},\eta_n))\\
&+(1-p)qE(\varphi_\alpha(Y_{n-1},\varepsilon_n)^2\varphi_\beta(X_{n-1},\eta_n)) + (1-p)(1-q)E(\varphi_\alpha(Y_{n-1},\varepsilon_n)^2\varphi_\beta(Y_{n-1},\eta_n)).
\end{aligned}$$

gde je $\varphi_\gamma(X,\epsilon)=\gamma\circ X+\epsilon$. Primenom osobina binomnog tining operatora dobijamo jednačinu (3.20). Jednačina (3.21) se izvodi na sličan način. Da bismo dokazali da su momenti konačni, fokusiraćemo se na determinantu sistema, za koju važi

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1-\alpha^2\beta p(1-q) & -\alpha^2\beta(1-p)q \\ -\alpha\beta^2(1-p)q & 1-\alpha\beta^2p(1-q)\end{vmatrix} &= (1-\alpha^2\beta p(1-q))(1-\alpha\beta^2p(1-q))\\
&- \alpha^3\beta^3(1-p)^2q^2 > (1-p)^2-(1-p)^2 = 0.
\end{aligned}$$

jer su $\alpha,\beta\in(0,1)$. Kramerove formule impliciraju da su rešenja sistema jednačina (3.20) i (3.21) konačna. □

Lema 3.7. *Zajednički moment $E(X_n^2Y_n^2)$ je rešenje jednačine*

$$(1-\alpha^2\beta^2(p+q-2pq))E(X_n^2Y_n^2) = d_1E(X_n^2Y_n) + d_2E(X_nY_n^2) + d_3E(X_nY_n) + \phi_n \tag{3.22}$$

iz skupa realnih brojeva, gde su koeficijenti d_1,d_2,d_3 *i* ϕ *dati jednačinama*

$$
\begin{aligned}
d_1 &= -\alpha\beta((1+2a)\beta(-1+p)q + \alpha((1+2b)\beta q + 2(-a+b)\beta p^2 q \\
&\quad + p(-1+\beta+q-2\beta q+4a\beta q-2a\beta q^2+2b(-1+\beta+q-4\beta q+\beta q^2)))) \\
d_2 &= -\alpha\beta(\alpha(1+2b)(-1+p)q + \beta(-2\alpha(a-b)p^2(-1+q) \\
&\quad + \alpha q(1-2b(-1+q)+2aq) + p(-1+\alpha(1+2b(1-q)^2-2q)+q-2a(1-q+\alpha q^2)))) \\
d_3 &= \alpha\beta(1-\alpha-2\alpha b+2\alpha bp+2a(1-\alpha p))(-1+\beta-2b(1+\beta(-1+q))+2a\beta q) \\
&\quad \cdot(-q+p(-1+2q)) \\
\phi &= 4a^4\alpha\beta^2 p(2+\alpha(5+p(-2+q)-2q)-q)q \\
&\quad + a^3[2\alpha\beta p(1+\alpha(2-p+2\beta(6+p(-2+q)-2q))-3\beta(-2+q))q \\
&\quad + 4\alpha b\beta q((1-\alpha(-2+p))p+\beta(-1+\alpha p^2+p(1+\alpha(-2+q)-q)+q))] \\
&\quad + a^2[3\alpha\beta pq+4\alpha^2\beta pq+4\alpha\beta^2 pq+4\alpha^2\beta^2 pq-2\alpha^2\beta p^2 q-2\alpha\beta^2 pq^2 \\
&\quad - 4b^2(-1+\alpha^2\beta(1-p)p(1-q)(1+2\beta q)+\alpha\beta(q+p(1+(-2+\beta)q-\beta q^2))) \\
&\quad - 2b(-1+\alpha\beta((1-3\beta(-1+q))q+p(1-(5+\beta)q+\beta q^2)) \\
&\quad + \alpha^2\beta p(1+(-5+6\beta)q-4\beta q^2+p(-1+(3-4\beta)q+2\beta q^2)))] \\
&\quad + a[\alpha\beta pq-12\alpha^2\beta^2 pq+b(1+2\alpha\beta-2\alpha^2\beta p+2\alpha^2\beta p^2 \\
&\quad - 3\alpha\beta q-2\alpha\beta^2 q+2\alpha\beta^2 q^2-3\alpha\beta p(1-2q)) \\
&\quad - 4\alpha b^3\beta(-1+p)(1-q-\alpha pq+\beta(1-q)(1+q-\alpha(p+q))) \\
&\quad - 2b^2(-1+\alpha\beta(-3+p(4-5q)+4q+\beta(1-q)(-2(1+q)+p(2+3q))) \\
&\quad + \alpha^2\beta(1-p)(2\beta(1-q)q+p(2+q-2\beta(1-q^2)))))] \\
&\quad + 4\alpha^2 b^4\beta(1-p)(1-q)[1+p+\beta(2+p+q+pq)] \\
&\quad + 2\alpha b^3\beta(1-p)(1-q)[1+\beta+\beta q+\alpha(3(1+p)+2\beta(3+p+q+pq))] \\
&\quad + b^2[\alpha\beta(-1+p)(-1+q)(3+2\alpha(1+2\beta+p)+2\beta(1+q))] \\
&\quad + b\alpha\beta(1-12\alpha\beta)(1-p)(1-q).
\end{aligned}
$$

Dokaz: Možemo primetiti da su koeficijenti jednačine (3.22) konačne vrednosti, pa na osnovu leme (3.6) zaključujemo da je izraz na desnoj strani jednakosti konačan. Dalje, kako je $0 \leq p+q-2pq \leq 1$ to sledi da je $1-\alpha^2\beta^2(p+q-2pq) > 0$, što implicira da je rešenje jednačine (3.22) konačno. $\square$

Lema 3.8. *Zajednički momenti* $E(X_n^3 Y_n)$ *i* $E(X_n Y_n^3)$ *su rešenja sistema jednačina*

$$
\begin{aligned}
(1-p(1-q)\alpha^3\beta)E(X_n^3 Y_n) - q(1-p)\alpha^3\beta E(X_n Y_n^3) &= \xi_1 \\
-(1-p)q\alpha\beta^3 E(X_n^3 Y_n) + (1-p(1-q)\alpha\beta^3)E(X_n Y_n^3) &= \xi_2
\end{aligned}
$$

iz skupa realnih brojeva, gde su ξ_1 i ξ_2 dati jednačinama

$$
\begin{aligned}
\xi_1 = {} & EXY^2[3\alpha^2\beta(1-p)(1+a(1-\alpha p)-\alpha(1+b-bp))q] \\
& + EX^2Y3\alpha^2\beta p(1-q)[1+a(1-\alpha p)+\alpha(1+b-bp)] \\
& + EXY[-\alpha\beta(1+\alpha(-3+6b(-1+p))+6a^2(1-\alpha p+\alpha^2(-1+p)p) \\
& + \alpha^2(2-3b(-1+p)+6b^2(-1+p)p)-3a(-2+\alpha^2(-1+4b(-1+p))p \\
& + \alpha(1-2b(-1+p)+2p)))(-q+p(-1+2q))] \\
& + 6a^4\alpha\beta p[1+\alpha(2-p)+\alpha^2(3-3p+p^2)]q \\
& + a^3[6\alpha\beta p(2+2\alpha(2-p)+\alpha^2(3-3p+p^2))q \\
& - 6b(-1+\alpha^3\beta(1-p)^2p+\alpha^2\beta(1-p)p(1-q)+\alpha\beta(p+q-2pq))] \\
& + a^2[\alpha\beta(7+6\alpha(2-p))pq+6\alpha b^2\beta(1-p)(1-q-\alpha pq \\
& - \alpha^2p(q+p-2pq))-6b(-1+\alpha^2\beta(1-p)p(2-q)+\alpha^3\beta(1-p)^2p(1+q) \\
& - \alpha\beta(1-2q-p(2-3q)))] \\
& + a[\alpha\beta pq-12\alpha^3\beta pq \\
& + 6\alpha^2b^3\beta(-1+p)(-1+\alpha p^2+p(-1+q)+q) \\
& - 6\alpha b^2\beta(-1+p)(1+\alpha^2p^2(-2+q)-q+\alpha(1+p-q-2pq)) \\
& + b(1+6\alpha^2\beta(-1+p)p+\alpha\beta(6-7q+p(-7+8q)))] \\
& + 6b^3\alpha^2\beta(1-p)(1-q)[1+p+\alpha(1+p+p^2)] \\
& + b^2[\alpha\beta(1-p)+6\alpha^2\beta(1-p)(1+p)(1-q)-\alpha\beta(1-p)q] \\
& + b[\alpha(1-12\alpha^2)\beta(1-p)(1-q)]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\xi_2 = {} & EXY^2[3\alpha\beta^2p(-1+q)(-1+\beta+a\beta q+b(-1+\beta-\beta q))] \\
& + EX^2Y[-3\alpha\beta^2(-1+p)q(1-\beta+b(1+\beta(-1+q))-a\beta q)] \\
& + EXY[\alpha\beta(q+p(1-2q))(1-3\beta(1+2aq) \\
& + \beta^2(2+3aq+6a^2(-1+q)q)+6b^2(1+\beta(-1+q) \\
& + \beta^2(-1+q)q)-3b(-2+\beta(3+2(-1+a)q)+\beta^2(-1+q)(1+4aq)))] \\
& + 6a^4\alpha\beta^3pq(3-3q+q^2) \\
& + a^3[-6\alpha b\beta^2(p(-2+q)+\beta(1-q)^2)q-6\alpha\beta^2pq(-2+q-\beta(3-3q+q^2))] \\
& + a^2[\alpha\beta pq+6\alpha\beta^2p(2-q)q-6\alpha b\beta q(-p+\beta^2(1+p)(1-q)^2 \\
& + \beta(1-3p-q+2pq))-6\alpha b^2\beta q(-p+\beta(1-p)(1-q) \\
& + \beta^2(1-q)(p+q-2pq))] \\
& + a[\alpha\beta pq-12\alpha\beta^3pq+b(1-\alpha\beta p-\alpha\beta q-6\alpha\beta^2q+8\alpha\beta pq+6\alpha\beta^2q^2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ 6b^3(1 + \alpha\beta(q(-1 + \beta^2(-1 + q)q) + p(-1 + (2 - \beta)q + \beta q^2))) \\
&- 6b^2(-1 + \alpha\beta(q(1 + \beta - \beta q + 2\beta^2(1 - q)q) + p(1 - (3 - \beta)q - \beta(1 + \beta)q^2 + \beta^2 q^3)))] \\
&+ 6\alpha\beta b^4(1 - p)(1 - q)(1 + \beta(1 + q) + \beta^2(1 + q + q^2)) \\
&+ 6\alpha b^3\beta(1 - p)(1 - q)(2 + 2\beta(1 + q) + \beta^2(1 + q + q^2)) \\
&+ b^2[7\alpha\beta - 7\alpha\beta p + 6\alpha\beta^2(1 - q) - 6\alpha\beta^2 p(1 - q) - 7\alpha\beta q \\
&+ 7\alpha\beta pq + 6\alpha\beta^2(1 - q)q - 6\alpha\beta^2 p(1 - q)q] \\
&+ b[\alpha\beta - \alpha\beta p - 12\alpha\beta^3(1 - q) + 12\alpha\beta^3 p(1 - q) - \alpha\beta q + \alpha\beta pq].
\end{aligned}
$$

Dokaz: Dokaz je analogan dokazu teoreme (3.6).□

Najzad, možemo primeniti teoremu 3.2 iz Tjøstheim (1986) kojom dobijamo asimptotsku raspodelu MCLS ocena nepoznatih parametara.

Teorema 3.9 (Popović, Ristić i Nastić (2015), teorema 4). *Niz ocena nepoznatih parametara dobijenih MCLS metodom, $\hat{\boldsymbol{\Theta}}_n^{cls}$, ima asimptotski normalnu raspodelu sa srednjom vrednošću $\boldsymbol{\Theta}$ i disperzijom $n^{-1}\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{R}\boldsymbol{U}$, gde su $\boldsymbol{R} = E\left(\frac{\partial \boldsymbol{g}_n'}{\partial \boldsymbol{\Theta}} \boldsymbol{f}_{n|n-1} \frac{\partial \boldsymbol{g}_n}{\partial \boldsymbol{\Theta}}\right)$ i $\boldsymbol{U} = E\left(\frac{\partial \boldsymbol{g}_n'}{\partial \boldsymbol{\Theta}} \frac{\partial \boldsymbol{g}_n}{\partial \boldsymbol{\Theta}}\right)$, pri čemu je*

$$
\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix}
\tilde{X}_{n-1}^2 & \tilde{X}_{n-1}\tilde{Y}_{n-1} & 0 & 0 & (1-\theta_1)\tilde{X}_{n-1} & -\theta_2\tilde{X}_{n-1} \\
\tilde{X}_{n-1}\tilde{Y}_{n-1} & \tilde{Y}_{n-1}^2 & 0 & 0 & (1-\theta_1)\tilde{Y}_{n-1} & -\theta_2\tilde{Y}_{n-1} \\
0 & 0 & \tilde{X}_{n-1}^2 & \tilde{X}_{n-1}\tilde{Y}_{n-1} & -\theta_3\tilde{X}_{n-1} & (1-\theta_4)\tilde{X}_{n-1} \\
0 & 0 & \tilde{X}_{n-1}\tilde{Y}_{n-1} & \tilde{Y}_{n-1}^2 & -\theta_3\tilde{Y}_{n-1} & (1-\theta_4)\tilde{Y}_{n-1} \\
(1-\theta_1)\tilde{X}_{n-1} & (1-\theta_1)\tilde{Y}_{n-1} & -\theta_3\tilde{X}_{n-1} & -\theta_3\tilde{Y}_{n-1} & (1-\theta_1)^2+\theta_3^2 & -\theta_2(1-\theta_1)-\theta_3(1-\theta_4) \\
-\theta_2\tilde{X}_{n-1} & -\theta_2\tilde{Y}_{n-1} & (1-\theta_4)\tilde{X}_{n-1} & (1-\theta_4)\tilde{Y}_{n-1} & -\theta_2(1-\theta_1)-\theta_3(1-\theta_4) & \theta_2^2+(1-\theta_4)^2
\end{bmatrix}
$$

gde je $\tilde{X}_{n-1} = X_{n-1} - a$ i $\tilde{Y}_{n-1} = Y_{n-1} - b$.

Dokaz: Svi elementi matrice $\boldsymbol{R}$ su linearne kombinacije momenata $E(X_n^i Y_n^j)$, $i + j = 4$, $i, j \geq 1$. Kako smo dokazali da su ovi momenti konačni to su i elementi matrice $\boldsymbol{R}$ konačni. Dakle, prema teoremi 3.2 Tjøstheim (1986), za MCLS ocene definisane teoremom 3.5 važi da $\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\Theta}}_n^{cls} - \boldsymbol{\Theta}) \to \mathcal{N}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{R}\boldsymbol{U}^{-1})$ kad $n \to \infty$. □

Asimptotsku raspodelu ocena polaznih parametara $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, $\hat{p}$ i $\hat{q}$ dobijamo na sledeći način. Uvedimo funkcije $g_1(x, y) = x + y$, $g_2(x, y) = \frac{x}{x+y}$ i neka je

$$
\boldsymbol{g}(x_1, x_2, x_3, x_4) = (g_1(x_1, x_2), g_1(x_3, x_4), g_2(x_1, x_2), g_2(x_3, x_4))'.
$$

Funkciju $\boldsymbol{g}$ smo uveli tako da je $\boldsymbol{g}(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \hat{\theta}_3, \hat{\theta}_4) = (\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{p}, \hat{q})$. Kako su $g_1(\cdot)$ i $g_2(\cdot)$ neprekidno diferencijabilne funkcije, to primenom teoreme 6.4.3 iz Brockwell i Davis (1991) dobijamo da je $\boldsymbol{g}(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \hat{\theta}_3, \hat{\theta}_4)$ asimptotski normalno raspodeljen sa srednjom vrednošću $\boldsymbol{g}(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)$, i disperzijom $\boldsymbol{D}\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{R}\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{D}'$ pri čemu je matrica $\boldsymbol{D}$ data jednačinom (2.28).

Metod uslovne maksimalne verodostojnosti

Uslovna raspodela verovatnoća slučajnog vektora (X_n, Y_n) (u odnosu na (X_{n-1}, Y_{n-1})) koji je definisan BVGGINAR(1) modelom data je jednačinom (3.13). Označimo vektor nepoznatih parametara sa $\boldsymbol{\theta} = (\alpha, \beta, p, q, a, b)$, koji ćemo oceniti na osnovu slučajnog uzorka $\{(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)\}$. Ocene parametara dobijamo kao vrednosti koje maksimiziraju logaritamsku funkciju verodostojnosti

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{\theta}) = & \sum_{t=2}^{n} \log \Bigg\{ A_1 H_p(x_{t-1}, y_{t-1}, x_t, \alpha, 1_{\{x_t=k\}}) + \frac{A_2}{1+a} H_p\left(x_{t-1}, y_{t-1}, x_t, \alpha, \frac{a}{1+a}\right) \\ & + \frac{A_3}{1+\alpha(a-ap+bp)} H_p\left(x_{t-1}, y_{t-1}, x_t, \alpha, \frac{\alpha(a-ap+bp)}{1+\alpha(a-ap+bp)}\right)\Bigg\} \\ & + \sum_{t=2}^{N} \log \Bigg\{ B_1 H_q(x_{t-1}, y_{t-1}, y_t, \beta, 1_{\{y_t=k\}}) + \frac{B_2}{1+b} H_q\left(x_{t-1}, y_{t-1}, y_t, \beta, \frac{b}{1+b}\right) \\ & + \frac{B_3}{1+\alpha(a-aq+bq)} H_q\left(x_{t-1}, y_{t-1}, y_t, \beta, \frac{\beta(a-aq+bq)}{1+\beta(a-aq+bq)}\right)\Bigg\}, \end{aligned}$$

gde je

$$H_r(u, v, w, \delta, D) = r \sum_{k=0}^{\min(u,w)} \binom{u}{k} \delta^k (1-\delta)^{u-k} D^{w-k} + (1-r) \sum_{k=0}^{\min(v,w)} \binom{v}{k} \delta^k (1-\delta)^{v-k} D^{w-k},$$

a A_i i B_j, $i, j \in \{1, 2, 3\}$ su verovatnoće definisane teoremom 3.3. Početne vrednosti X_1 i Y_1 su fiksirane. Zbog kompleksnosti funkcije verodostojnosti, njene ekstremne vrednosti ne možemo naći analitičkim putem, već ćemo maksimizaciju sprovesti numerički pomoću programskog jezika `R` i funkcije `nlm`.

Rezultati na osnovu simulacija

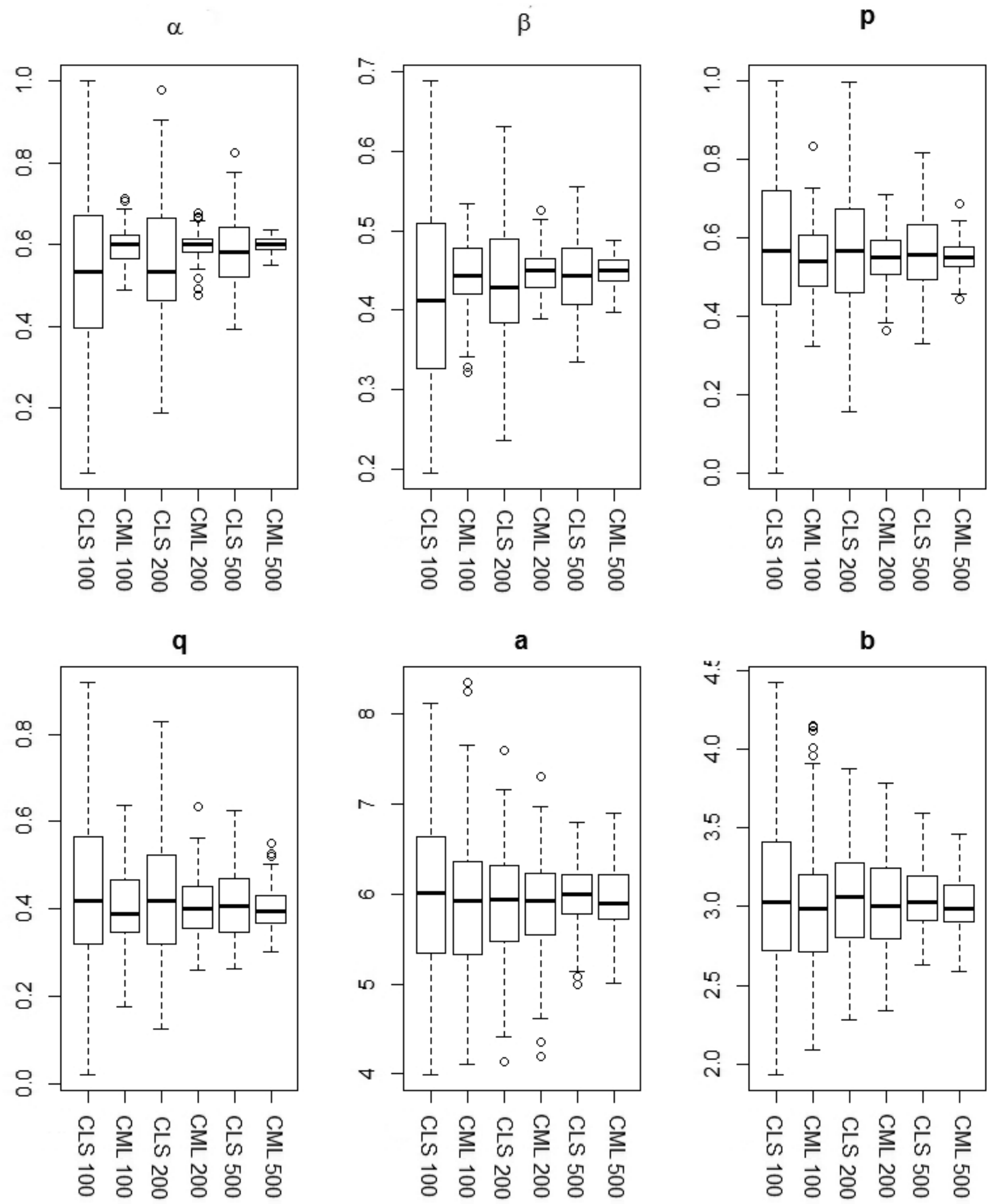
Izvršićemo upoređivanje ocena nepoznatih parametara dobijenih MCLS i CML metodom. U tu svrhu generisaćemo skup od 100 uzoraka obima 100, 200 i 500. Uzorci su generisani na osnovu jednačina (3.1) i (3.2), slučajnim uzorkovanjem iz odgovarajućih raspodela verovatnoća za proces preživljavanja i za inovacioni proces. Simulacije se sprovode za različite vrednosti parametara. Regresioni koeficijenti, α i β, uzimaju vrednosti između 0.1 i 0.6 gde pretpostavljamo da oba ova parametra imaju male vrednosti (kad fiksiramo 0.1 za α i 0.2 za β), zatim kada imaju velike vrednosti (pa je uzeto 0.6 za α i 0.45 za β) i slučaj kada su parametri slični onima iz poglavlja 3.1.5 gde proučavamo primenu modela na stvarnim podacima. Permutovanje vrednosti za ove parametre nema posledice na zaključke o podobnosti MCLS i CML metoda, pa ćemo ih ovom prilikom izostaviti. Parametri p i q su izabrani tako da favorizuju autoregresivnost nizova $\{X_t\}$ i $\{Y_t\}$ ali i da obezbede zavisnost

Tabela 3.1: Ocenjene vrednosti nepoznatih parametara za BVGGINAR(1) model - Za svaki obim uzorka prva vrsta sadrži ocenjene vrednosti, druga vrsta standardnu devijaciju.

	MCLS						CML					
Obim	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{p}$	$\hat{q}$	$\hat{a}$	$\hat{b}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{p}$	$\hat{q}$	$\hat{a}$	$\hat{b}$
a) $\alpha = 0.1$, $\beta = 0.2$, $p = 0.55$, $q = 0.4$, $a = 6$, $b = 3$												
100	0.1305	0.2017	0.2996	0.4244	6.0196	3.0210	0.1212	0.186	0.5725	0.4204	6.0301	3.0353
	0.1780	0.1163	0.3564	0.2792	0.6179	0.4037	0.0805	0.0592	0.3353	0.2108	0.6186	0.3873
200	0.1257	0.2042	0.3462	0.4516	6.0371	2.9855	0.1172	0.2075	0.5691	0.4354	6.0337	2.9798
	0.1345	0.0805	0.3558	0.2135	0.4224	0.2536	0.0782	0.0488	0.2651	0.1542	0.4355	0.2631
500	0.1054	0.2015	0.4917	0.4058	5.9882	2.9878	0.1091	0.2062	0.5633	0.4127	5.9891	2.9905
	0.0835	0.0530	0.3610	0.1201	0.3088	0.1610	0.0676	0.0394	0.2192	0.0897	0.3115	0.1711
b) $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.3$, $p = 0.8$, $q = 0.8$, $a = 3$, $b = 2$												
100	0.49	0.2845	0.761	0.7845	2.974	1.9891	0.5181	0.2985	0.8147	0.8046	3.306	2.2315
	0.1657	0.1248	0.2006	0.2021	0.513	0.331	0.0552	0.0677	0.1163	0.1466	1.1312	0.4891
200	0.5034	0.2973	0.783	0.7797	3.0353	2.002	0.5042	0.2944	0.8075	0.8146	3.1367	2.0792
	0.1074	0.0875	0.1479	0.1683	0.375	0.2221	0.0383	0.0512	0.0755	0.1214	0.751	0.3242
500	0.5032	0.2957	0.7941	0.7916	3.0352	2.0151	0.5014	0.2984	0.7991	0.8031	3.1121	2.0397
	0.0684	0.0509	0.1004	0.1211	0.2171	0.137	0.0292	0.0282	0.0454	0.0732	0.4701	0.2051
c) $\alpha = 0.6$, $\beta = 0.45$, $p = 0.55$, $q = 0.4$, $a = 6$, $b = 3$												
100	0.5773	0.4329	0.5293	0.4249	6.1196	3.0326	0.5722	0.4435	0.5457	0.3883	5.935	3.0323
	0.2082	0.1042	0.2422	0.1986	0.9770	0.4979	0.0785	0.0592	0.1296	0.1377	0.9225	0.4274
200	0.5920	0.4382	0.5312	0.4241	6.1005	3.0539	0.5881	0.4471	0.5439	0.3891	6.0379	2.9527
	0.1477	0.0846	0.1695	0.1482	0.7116	0.3898	0.0513	0.0507	0.1193	0.1272	0.6982	0.4091
500	0.5822	0.4464	0.5457	0.4034	6.0144	3.0256	0.6021	0.4521	0.5562	0.4022	5.9441	3.0213
	0.0963	0.0480	0.1165	0.0756	0.4516	0.2294	0.0477	0.0423	0.1003	0.0965	0.4329	0.3251

između ovih nizova. Stoga smo za parametar p uzeli vrednost 0.55, a za q 0.4. Takođe smo razmatrali slučaj kad su vrednosti za oba parametra velike, gde je $p = q = 0.8$. Dalje, simuliraćemo nizove koji imaju relativno velike i relativno male srednje vrednosti, pa u prvom slučaju vrednosti parametara a i b postavljamo na 6 i 3 redom, a u drugom na 3 i 2, redom. Na kraju, dobijamo sledeće tri kombinacije parametara: a) $\alpha = 0.1$, $\beta = 0.2$, $p = 0.55$, $q = 0.4$, $a = 6$, $b = 3$; b) $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.3$, $p = 0.8$, $q = 0.8$, $a = 3$, $b = 2$; c) $\alpha = 0.6$, $\beta = 0.45$, $p = 0.55$, $q = 0.4$, $a = 6$, $b = 3$. Slučaj a) generiše nizove $\{X_t\}$ i $\{Y_t\}$ sa srednjim vrednostima 6 i 3, disperzijama 42 i 12 redom i kovarijacijom 0.25. Za slučaj pod b), srednje vrednosti su 3 i 2, disperzije 12 i 6, a kovarijacija 1.25. Kod testa c) srednje vrednosti su 6 i 3, disperzije 42 i 12, a kovarijansa 3.9. Dobijeni rezultati prikazani su u tabeli 3.1. U tabeli 3.1 pored ocena parametara, takođe su prikazane vrednosti standardnih devijacija dobijenih ocena.

Ocenjivanje metodama CML i MCLS sprovodi se numeričkim putem, gde smo koristili programski jezik `R`. Kako su MCLS ocene $\hat{\theta}_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, $\hat{a}$ i $\hat{b}$ rešenja nelinearnog sistema jednačina, do njih dolazimo pomoću funkcije `BBsolve` koja se nalazi u paketu `BB` (Varadhan i Gilbert (2009)). Za polazne vrednosti MCLS ocena uzimamo $\theta_{0i} = 0.5$, $i = 1, 2, 3, 4$, a za parametre a i b koristili smo sredine uzoraka X i Y, redom. Na kraju smo ocene za parametre α, β, p i q dobili iz jednačina $\hat{\alpha} = \hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2$, $\hat{\beta} = \hat{\theta}_3 + \hat{\theta}_4$, $\hat{p} = \hat{\theta}_1/(\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2)$ i $\hat{q} = \hat{\theta}_3/(\hat{\theta}_3 + \hat{\theta}_4)$. Kako se do ocena parametara dolazi numeričkim putem, dešava se da ocenjene vrednosti nisu iz oblasti definisanosti parametara za posmatrani model. U tom slučaju za vrednost parametara



Slika 3.1: Kutija dijagram ocenjenih parametara za slučaj c).

uzima se najbliža granica intervala definisanosti. Ovakav scenario uglavnom se dešava kad je obim uzorka mali, a prave vrednosti parametara su blizu granice intervala definisanosti. Na primer, za slučaj a), ocenjene vrednosti za parametar α u 17 od 100 slučajeva bile su van granica definisanosti kada je obim uzorka 100. U tim slučajevima za ocenu parametra α uzimali smo vrednost 0.001.

Ocene metodom CML dobijene su pomoću funkcije `nlm` programskog jezika `R`. Uzete su iste inicijalne vrednosti kao za MCLS metod. Ograničenja za parametre su implementirana u optimizacioni algoritam, tako da su sve ocenjene vrednosti iz intervala definisanosti modela.

Rezultati prikazani u tabeli 3.1 pokazuju da se obe metode ponašaju dobro kad je obim uzorka 500. Za obime uzorka 100 i 200, parametri α, β, p i q bolje su ocenjeni CML metodom. Ocene parametara a i b su sasvim dobre kod oba pristupa. Slika 3.1 prikazuje dijagrame ocenjenih vrednosti za izbor parametara c). Možemo primetiti veliku razliku u standardnoj devijaciji ocena u korist CML metode. Kada je obim uzorka 100 uočavamo ocenjene vrednosti za α i p koje izlaze iz intervala definisanosti kod MCLS metode. To za posledicu ima lošije ocene tih parametara. Zaključci su slični i za slučajeve pod a) i b) te ih nećemo posebno navoditi.

Potrebno vreme za ocenjivanje parametara MCLS metodom je značajno kraće nego kod CML pristupa. CML metodi treba između 5 i 10 minuta da oceni parametra kada je uzorak obima 100. Takođe, vrednosti parametara utiču na vreme izračunavanja. Tako je za izbor parametara b) procedura znatno brža nego za slučaj pod a). Sa porastom obima uzorka vreme izračunavanja drastično raste. MCLS metodi treba manje od minut za bilo koji izbor parametara kada je obim uzorka 100. (Izračunavanja su sprovedena sa procesorom od 2.9GHz izgrađenim na 32nm tehnologiji.)

3.1.5 Primena na stvarnim podacima

U ovom potpoglavlju ilustrovaćemo primenu BVGGINAR(1) modela na stvarnim podacima. Podaci koje ćemo koristiti su zapisi o kriminalnim aktivnostima u Pitsburgu u periodu od januara 1990. do decembra 2001. godine. Ovi podaci mogu se naći na internet adresi `http://www.forecastingprinciples.com/index.php?option=com_content&view=article&id=47&Itemid=250`. Dva niza na koje se fokusiramo jesu broj pljački (ROBB) i broj ozbiljnih napada (AGGASS) zabeleženih u policijskoj stanici broj 510. AGGASS je definisano od strane FBI-a kao "nezakonit napad jedne osobe na drugu sa posledicom nanošenja teških telesnih povreda... Kada je AGGASS praćen krađom, onda ono potpada pod kategoriju razbojništva (ROBB)". Vidimo na osnovu definicije da je prirodno da ova dva vremenska niza budu zavisna. Ono što je zajedničko za oba ova niza jeste da je malo verovatno da oštećena osoba počini ista dela. Zato možemo reći da proces preživljavanja nije samoindukovan. Sa druge strane, počinioci su verovatni učesnici istih ovih dela u budućnosti dok najzad ne budu uhapšeni. Što će reći da inovacioni proces ima sporu stopu opadanja.

BVGGINAR(1) model uporedićemo sa još nekim dvodimenzionalnim modelima, kao što su modeli koje su predstavili Pedeli i Karlis (2011). Ovi modeli su takođe prilagođeni za nizove sa različitim marginalnim raspodelama. Bazirani su na binomnom tining operatoru. Prvi od dva modela, BVPOIBINAR(1) pretpostavlja Puasonovu dvodimenzionalnu raspodelu inovacionih procesa, dok je kod drugog, BVNBIBINAR(1) dvodimenzionalna geometrijska raspodela inovacionih procesa. Još ćemo ispitati kako se BVGGINAR(1) ponaša ako pretpostavimo istu marginalnu raspodelu za posmatrane nizove (odnosno $a = b$). Ovaj proces označićemo sa BVEGINAR(1). Kriterijum za utvrđivanje adekvatnosti modela biće Akaike

Tabela 3.2: Ocenjeni parametri sa standardnom devijacijom u zagradi, AIC, BIC i RMS za vremenske nizove ROBB i AGGASS.

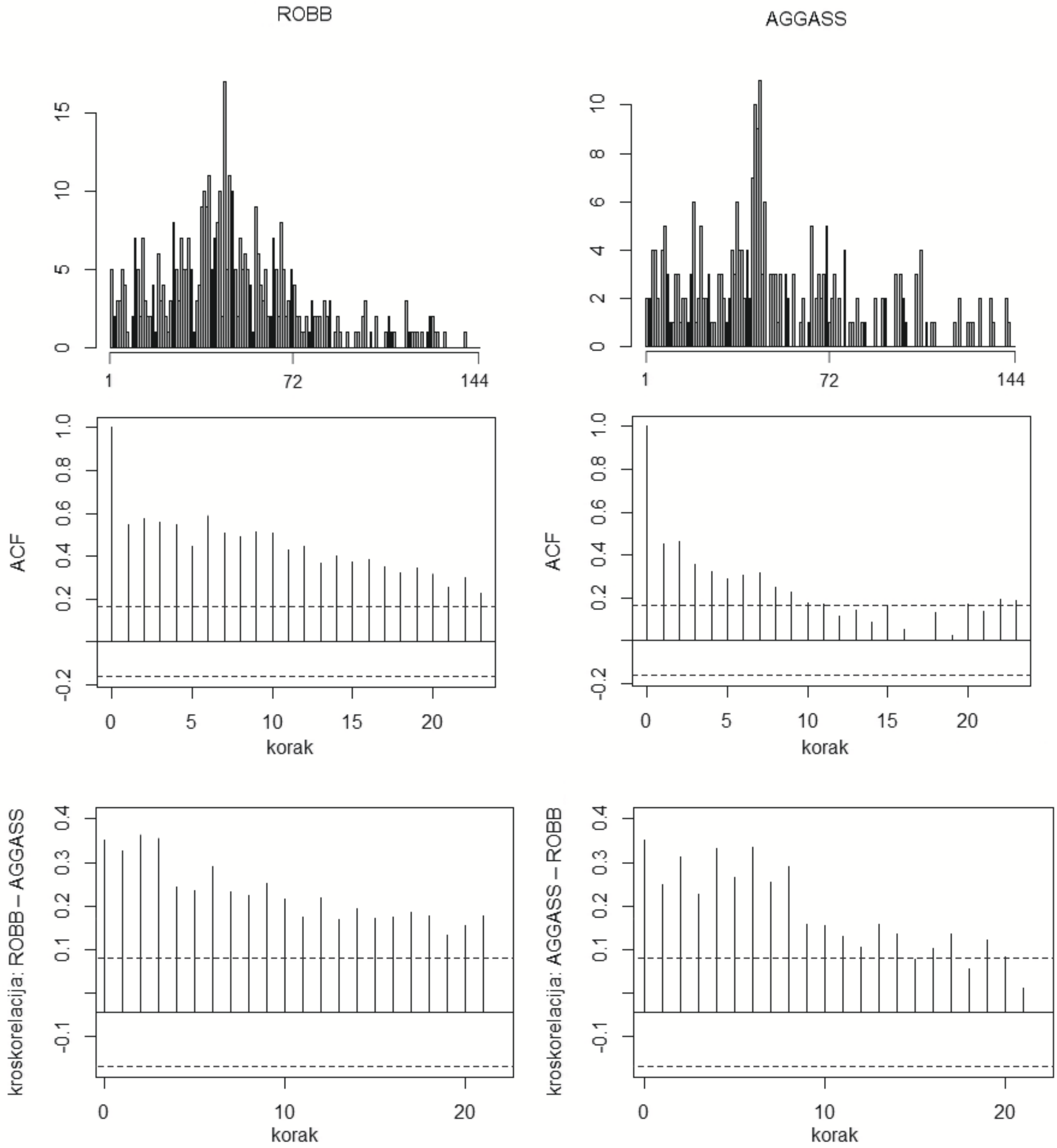
Model	CML ocene	AIC	BIC	RMS ROBB	RMS AGGASS
BVGGINAR(1)	$\hat{\alpha} = 0.499(0.052)$, $\hat{\beta} = 0.281(0.058)$ $\hat{p} = 0.887(0.12)$, $\hat{q} = 0.805(0.192)$ $\hat{a} = 2.877(0.328)$, $\hat{b} = 1.765(0.187)$	1065.83	1083.65	2.496	1.827
BVPOIBINAR(1)	$\hat{\alpha}_1 = 0.413(0.042)$, $\hat{\lambda}_1 = 1.664(0.148)$ $\hat{\alpha}_2 = 0.21(0.053)$, $\hat{\lambda}_2 = 1.389(0.128)$ $\hat{\phi} = 0.443(0.107)$	1183.76	1198.61	2.541	1.857
BVNBIBINAR(1)	$\hat{\alpha}_1 = 0.413(0.046)$, $\hat{\lambda}_1 = 1.665(0.205)$ $\hat{\alpha}_2 = 0.169(0.061)$, $\hat{\lambda}_2 = 1.461(0.182)$ $\hat{\beta} = 0.883(0.176)$	1077.39	1092.24	2.541	1.88
BVEGINAR(1)	$\hat{\alpha} = 0.468(0.039)$, $\hat{\beta} = 0.289(0.064)$ $\hat{p} = 0.98(0.14)$, $\hat{q} = 0.625(0.184)$ $\hat{a} = \hat{b} = 2.65(0.391)$	1082.77	1100.59	2.521	1.992

informacioni kriterijum (AIC), Bajesov informacioni kriterijum (BIC) i srednje kvadratna greška (RMS). Dok nam prva dva kriterijuma govore koliko je pretpostavljena raspodela modela odgovarajuća za posmatrane podatke, treći kriterijum procenjuje grešku predviđanja za jedan korak unapred.

Pre nego što započnemo modelovanje vremenskih nizova, iskoristićemo χ^2 test kako bi proverili da su posmatrani nizovi sa geometrijskom raspodelom. Za vremenski niz ROBB p-vrednost test statistike je 0.367, dok je kod AGGASS 0.417. Stoga, prihvatamo hipotezu da su serije geometrijski raspodeljene.

Srednje vrednosti za ROBB i AGGASS su 2.87 i 1.76, a disperzije 9.03 i 4.04 redom. Koeficijent korelacije je 0.51. Vidimo da je odnos disperzije i srednje vrednosti znatno veći od jedinice kod oba niza. Kao što smo i pretpostavili, koeficijent korelacija između nizova je veoma velik. Sa slike 3.2 možemo primetiti prisustvo autokorelacije kod oba niza. Takođe postoji i značajna korelacija sa korakom jedan između nizova.

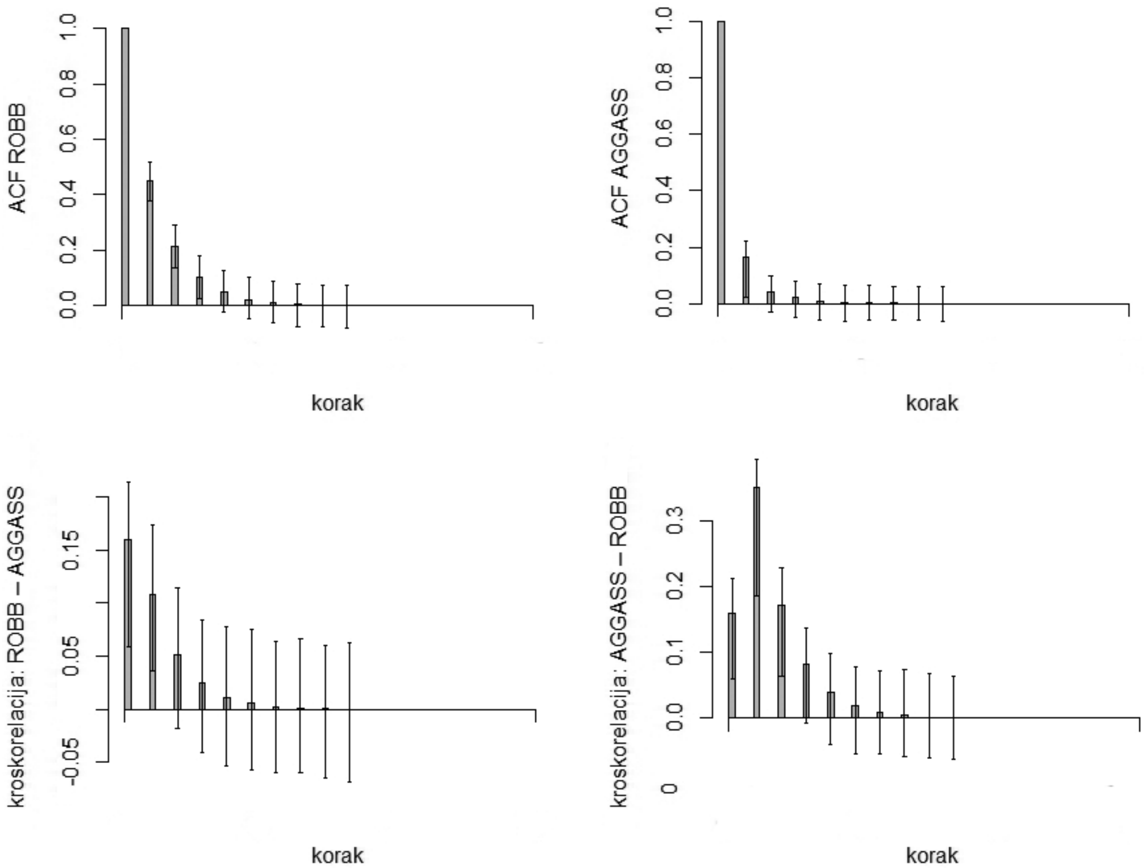
Tabela 3.2 sadrži dobijene rezultate. Pored vrednosti ocenjenih parametara, tu su i standardne devijacije dobijenih ocena navedene u zagradama. Za razmatrane vremenske nizove BVGGINAR(1) model daje najbolje rezultate po sva tri kriterijuma. Zbog značajno veće disperzije od srednje vrednosti ovih vremenskih nizova, modeli sa geometrijskom i negativnom binomnom raspodelom su bolji izbor, što se i odrazilo na vrednosti AIC mere. BVEGINAR(1) model pretpostavlja jednakost marginalnih raspodela što dovodi do pogoršanja RMS kod oba niza. Kako su srednje vrednosti nizova prilično različite, pretpostavka o njihovoj jednakosti dovodi do lošije vrednosti funkcije verodostojnosti, pa ni pretpostavka o pravoj marginalnoj raspodeli ne može da dovede do željenih rezultata. Prema



Slika 3.2: Trakasti dijagram, grafik autokorelacione i kroskorelacione funkcije za vremenske nizove ROBB i AGGASS.

rezultatima testa količnika verodostojnosti BVGGINAR(1) i BVEGINAR(1) modela (gde je p-vrednost $1.34e^{-5}$), oni značajno drugačije modeluju podatke. Svi ovi zaključci ukazuju na to da bi pretpostavka o jednakosti marginalnih raspodela bila pogrešna.

Kako bismo dalje ispitali BVGGINAR(1) model, simuliraćemo autokorelacionu (acf) i kroskorelacionu (ccf) funkciju na osnovu ocenjenih parametara modela. Primenjujući bootstrap metod, nalazimo 95% interval poverenja za vrednosti ovih funkcija. Bootstrap metod sprovodimo tako što simuliramo 1000 uzoraka obeju nizova sa ocenjenim vrednostima parametara modela. Dužina simuliranih nizova je 144. Za svaki par simuliranih nizova, ponovo ocenimo parametre i simuliramo novi par nizova dužine 500. Za te nove nizove računamo acf i ccf. Grafici dobijeni ovim putem dati su na slici 3.3. Možemo uočiti eksponencijalno opadanje autokorelacije kod oba niza, pri čemu je autokorelacija značajna na prvom koraku. Grafici sugerišu veliku autokoreliranost niza ROBB, pri čemu nema značajne kroskoreliranosti. Na drugoj strani, niz AGGASS pokazuje značajnu autokoreliranost samo na koraku jedan ali vrlo veliku kroskoreliranost na koraku jedan.



Slika 3.3: Simulirane autokorelacione i kroskorelacione funkcije za nizove ROBB i AGGASS.

3.2 Model sa različitim parametrima tining operatora

U ovom poglavlju definisaćemo dvodimenzionalni nenegativni celobrojni autoregresivni model reda jedan sa različitim Bernulijevim raspodelama brojačkih nizova (BVDCINAR(1)). Brojački nizovi su definisani pomoću Bernulijeve raspodele sa različitim parametrima. I dalje oba procesa dvodimenzionalnog modela učestvuju u definisanju procesa preživljavanja, samo je stopa "preživljavanja" različita kod jednog i kod drugog procesa. Inovacioni procesi su međusobno nezavisni i raspodeljeni tako da isprate pretpostavku o stacionarnosti procesa. Za marginalne raspodele procesa uzeta je geometrijska raspodela. Još jedna motivacija za uvođenje ovakvog procesa je kombinovanje binomne i geometrijske raspodele. Tako je omogućeno modelovanje vremenskih nizova čiji su procesi preživljavanja i inovacioni procesi sa različitim osobinama. Kako je proces preživljavanja baziran na binomnom tining operatoru, on nije u mogućnosti da generiše nove događaje. Na taj način je evolucija novih događaja u potpunosti određena procesom inovacije. Kako bismo podržali motivaciju za uvođenje jednog ovakvog procesa razmatrali smo i njegovu primenu na stvarnim podacima.

U nastavku poglavlja razmatraćemo sledeće. Potpoglavlje 3.2.1 daće nam definiciju modela i neke osobine binomnog tining operatora karakteristične za navedeni model. Osobine modela biće razmatrane u potpoglavlju 3.2.2. Ocenom nepoznatih parametara bavićemo se u potpoglavlju 3.2.3, gde ćemo diskutovati generalisani metod momenata i metod uslovne maksimalne verodostojnosti. Na kraju ćemo u potpoglavlju 3.2.4 dati primer primene modela na stvarnim podacima.

3.2.1 Definicija modela

Razmatramo dvodimenzionalni vremenski niz $\{(X_t, Y_t)\}_{t\in\mathbb{N}_0}$ sa istim marginalnim raspodelama. Marginalna raspodela nizova je geometrijska sa parametrom $a/(1+a)$, $X_t, Y_t \sim Geom(a/(1+a))$, gde je raspodela verovatnoća $P(X_t = k) = a^k(1+a)^{-k-1}$, $a > 0$, $k = 0, 1, 2, \dots$ BVDCINAR(1) model definisan je jednačinama

$$X_t = \begin{cases} \alpha_1 \circ X_{t-1} + \varepsilon_t, & \text{s.v. } p, \\ \alpha_2 \circ Y_{t-1} + \varepsilon_t, & \text{s.v. } 1-p, \end{cases} \tag{3.23}$$

$$Y_t = \begin{cases} \beta_1 \circ X_{t-1} + \eta_t, & \text{s.v. } q, \\ \beta_2 \circ Y_{t-1} + \eta_t, & \text{s.v. } 1-q, \end{cases} \tag{3.24}$$

pri čemu važi $p, q \in [0,1]$ i α_i, $\beta_i \in (0,1)$, $i = 1, 2$. Binomni tining operator definisan je kao $\alpha \circ X = \sum_{i=1}^{X} B_i$. Brojački niz $\{B_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ je niz identički raspodeljenih slučajnih promenljivih sa Bernulijevom raspodelom sa parametrom α. Slučajne promenljive $\alpha_1 \circ X_t$, $\alpha_2 \circ Y_t$, $\beta_1 \circ X_t$ i $\beta_2 \circ Y_t$ nazivaju se procesi preživljavanja, a brojački nizovi koji ih generišu su međusobno nezavisni za svako $t \in \mathbb{N}_0$. Nenegativni vremenski nizovi $\{\varepsilon_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ i $\{\eta_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ su međusobno nezavisni, sa konačnim momentima prvog i drugog reda, pri čemu još važi da je (ε_t, η_t) nezavisno od (X_s, Y_s) za $s < t$. Slučajne promenljive sa Bernulijevom raspodelom određuju procese preživljavanja. Kako one reprodukuju 0 ili 1 događaj, to procesi preživljavanja nemaju mogućnost da generišu nove događaje. S druge strane, marginalna raspodela modela je geometrijska što omogućava modelovanje vremenskih nizova čiji je odnos disperzije i srednje vrednosti veći od jedan. Posebna motivacija za uvođenje ovakvog modela je što je izbačena pretpostavka o jednakim raspodelama procesa preživljavanja.

Za kompletiranje definicije modela potrebna nam je i marginalna raspodela inovacionih procesa. Raspodela za procese $\{\varepsilon_t\}$ i $\{\eta_t\}$ data je sledećom teoremom.

Teorema 3.10 (Popović (2015*b*), teorema 1). *Neka su α_1, α_2, β_1, $\beta_2 \in (0,1)$, p, $q \in [0,1]$, $a > 0$ i $X_0 \stackrel{d}{=} Y_0 \stackrel{d}{=} Geom(a/(1+a))$. Stacionarni dvodimenzionalni vremenski niz $\{(X_t, Y_t)\}_{t\geq 0}$ dat jednačinama (3.23) i (3.24) je sa geometrijskom marginalnom raspodelom sa parametrom $\frac{a}{1+a}$ ako i samo ako je raspodela procesa $\{\varepsilon_t\}$ i $\{\eta_t\}$ definisana kao*

$$\varepsilon_t \stackrel{d}{=} \begin{cases} Geom(\frac{a}{1+a}), & s.v.\ \frac{(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)}{1-\alpha_1(1-p)-\alpha_2 p} \\ Geom\left(\frac{a(\alpha_1(1-p)+\alpha_2 p)}{1+a(\alpha_1(1-p)+\alpha_2 p)}\right), & s.v.\ \frac{(\alpha_1-\alpha_2)^2(1-p)p}{(\alpha_1(1-p)+\alpha_2 p)(1-\alpha_1(1-p)-\alpha_2 p)} \\ 0, & s.v.\ \frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1(1-p)+\alpha_2 p} \end{cases} \tag{3.25}$$

i

$$\eta_t \stackrel{d}{=} \begin{cases} Geom(\frac{a}{1+a}), & s.v.\ \frac{(1-\beta_1)(1-\beta_2)}{1-\beta_1(1-q)-\beta_2 q} \\ Geom\left(\frac{a(\beta_1(1-q)+\beta_2 q)}{1+a(\beta_1(1-q)+\beta_2 q)}\right), & s.v.\ \frac{(\beta_1-\beta_2)^2(1-q)q}{(\beta_1(1-q)+\beta_2 q)(1-\beta_1(1-q)-\beta_2 q)} \\ 0, & s.v.\ \frac{\beta_1\beta_2}{\beta_1(1-q)+\beta_2 q} \end{cases}. \tag{3.26}$$

Dokaz: Neka je $\{(X_t, Y_t)\}$ stacionarni dvodimenzionalni vremenski niz definisan jednačinama (3.23) i (3.24), sa marginalnim raspodelama $Geom(\frac{a}{1+a})$. Na osnovu osobina binomnog tining operatora i pretpostavke da je dvodimenzionalni niz stacionaran, sledi da je $\Phi_{\alpha\circ X}(s) = \Phi_X(1-\alpha(1-s))$ (gde je $\Phi_X(s)$ funkcija generatrisa verovatnoća slučajne promenljive X). Tako dobijamo da je

$$\begin{aligned} \Phi_{\varepsilon_t}(s) &= \frac{(1+a\alpha_1(1-s))(1+a\alpha_2(1-s))}{(1+a(1-s))(1+a(\alpha_2 p+\alpha_1(1-p))-a(\alpha_2 p+\alpha_1(1-p))s)} \\ &= \frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1(1-p)+\alpha_2 p} + \frac{A_1}{1+a(1-s)} + \frac{A_2}{1+a(\alpha_1(1-p)+\alpha_2 p)(1-s)} \end{aligned}$$

pri čemu smo uveli oznake $A_1 = \frac{(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)}{1-\alpha_1(1-p)-\alpha_2 p}$ i $A_2 = \frac{(\alpha_1-\alpha_2)^2(1-p)p}{(\alpha_1(1-p)+\alpha_2 p)(1-\alpha_1(1-p)-\alpha_2 p)}$. Ako i prvi sabirak gornje jednačine označimo sa A_3, možemo jednostavno proveriti da je $\sum_{i=1}^{3} A_i = 1$. Kako je $1 = 1-p+p > \alpha_1(1-p)+\alpha_2 p$, to je $A_i \geq 0$ za svako i, odakle sledi da su A_i dobro definisane verovatnoće. Dokaz je analogan za proces $\{\eta_t\}$.

Pretpostavimo sada da su procesi $\{\varepsilon_t\}$ i $\{\eta_t\}$ raspodeljeni prema jednačinama (3.25) i (3.26), redom. Kako je $X_0, Y_0 \sim Geom(\frac{a}{1+a})$ to imamo da je

$$\begin{aligned}
\Phi_{X_1}(s) &= \left(p\Phi_{X_0}(1-\alpha_1(1-s)) + (1-p)\Phi_{Y_0}(1-\alpha_2(1-s))\right)\Phi_{\varepsilon_1}(s) \\
&= \left(\frac{p}{1+a-a(1-\alpha_1(1-s))} + \frac{1-p}{1+a-a(1-\alpha_2(1-s))}\right) \\
&\times \frac{(1+\alpha_1 a(1-s))(1+\alpha_2 a(1-s))}{(1+a(1-s))[1+a(\alpha_2 p+\alpha_1(1-p))(1-s)]} = ... = \frac{1}{1+a(1-s)} \\
\Phi_{Y_1}(s) &= \left(q\Phi_{X_0}(1-\beta_1(1-s)) + (1-q)\Phi_{Y_0}(1-\beta_2(1-s))\right)\Phi_{\eta_1}(s) \\
&= \left(\frac{q}{1+a-a(1-\beta_1(1-s))} + \frac{1-q}{1+a-a(1-\beta_2(1-s))}\right) \\
&\times \frac{(1+\beta_1 a(1-s))(1+\beta_2 a(1-s))}{(1+a(1-s))[1+a(\beta_2 q+\beta_1(1-q))(1-s)]} = ... = \frac{1}{1+a(1-s)},
\end{aligned}$$

pa je $X_1, Y_1 \sim Geom(\frac{a}{1+a})$. Matematičkom indukcijom dokazujemo da i X_t i Y_t imaju geometrijsku raspodelu sa parametrom $\frac{a}{1+a}$ za svako $t \in \mathbb{N}_0$. $\square$

Inovacioni procesi definisani su prilično komplikovanim jednačinama, ali ako malo pažljivije pogledamo, videćemo da su oni zapravo linearne kombinacije dve slučajne promenljive sa geometrijskim raspodelama i degenerisane slučajne promenljive u nuli. Ovakav proces može biti veoma primenljiv, jer pretpostavka da inovacioni proces ima istu raspodelu na celom vremenskom intervalu ne mora uvek da važi. Dakle, činjenica da parametri $\nu_1 = \frac{a}{1+a}$ i $\nu_2 = \frac{a(\alpha_1(1-p)+\alpha_2 p)}{1+a(\alpha_1(1-p)+\alpha_2 p)}$ koji definišu proces $\{\varepsilon_t\}$ nisu jednaki, čini ovaj proces prirodnijim. Teoretski, može se dogoditi da parametri ν_1 i ν_2 budu višestruko različiti, što bi praktični aspekt procesa $\{\varepsilon_t\}$ dovelo u pitanje. Očigledno da je $\nu_1 = \nu_2$ kada je $\alpha_1(1-p)+\alpha_2 p = 1$. Tada je slučajna promenljiva ε_t kombinacija geometrijski raspodeljene slučajne promenljive sa parametrom $a/(1+a)$ čiji je težinski koeficijent $1-\alpha_1\alpha_2$ i degenerisane slučajne promenljive u nuli sa težinskim koeficijentom $\alpha_1\alpha_2$. Ista diskusija važi i za proces $\{\eta_t\}$. Definicija inovacionih procesa se ne može uprostiti jer nam je cilj očuvanje stacionarnosti modela.

Razmotrimo neke specijalne slučajeve modela za određeni izbor parametara.

- Za $p = 1$ i $q = 0$, dobijamo dva nezavisna autoregresivna procesa reda jedan koji glase $X_t = \alpha \circ X_{t-1} + \varepsilon_t$ i $Y_t = \beta \circ Y_{t-1} + \eta_t$.

- Za $p = 0$ i $q = 1$, dobijamo model gde se vremenski niz $\{Y_t\}$ naziva dualnim u odnosu na niz $\{X_t\}$ (slično kao model Dewald, Lewis i McKenzie (1989)).

- Za $p = 1$ i $q = 1$, oba niza $\{X_t\}$ i $\{Y_t\}$ su generisani samo preko $\{X_t\}$ i inovacionih procesa, gde $\{\varepsilon_t\}$ definiše niz $\{X_t\}$, a $\{\eta_t\}$ niz $\{Y_t\}$. Dobijamo model oblika $X_t = \alpha \circ X_{t-1} + \varepsilon_t$ i $Y_t = \beta \circ X_{t-1} + \eta_t$.

- Za $p = 0$ i $q = 0$, oba niza $\{X_t\}$ i $\{Y_t\}$ su generisana samo preko $\{Y_t\}$ i inovacionih procesa, gde $\{\varepsilon_t\}$ definiše niz $\{X_t\}$, a $\{\eta_t\}$ niz $\{Y_t\}$. Dobijamo model oblika $X_t = \alpha \circ Y_{t-1} + \varepsilon_t$ i $Y_t = \beta \circ Y_{t-1} + \eta_t$.

- Za $\alpha_1 = \alpha_2$ i $\beta_1 = \beta_2$, model je sličan modelu koji su definisali Ristić, Nastić, Jayakumar i Bakouch (2012) samo sa drugim tining operatorom.

BVDCINAR(1) model može se predstaviti u matričnom obliku kao u jednačini (2.4), pri čemu bi slučajne promenljive U_{it} i V_{it}, koje su elemeni slučajne matrice $\boldsymbol{A}_t$, bile definisane kao $P(U_{1t} = \alpha_1, U_{2t} = 0) = 1 - P(U_{1t} = 0, U_{2t} = \alpha_2) = p$ i slično $P(V_{1t} = \beta_1, V_{2t} = 0) = 1 - P(V_{1t} = 0, V_{2t} = \beta_2) = q$. Pa bi shodno tome imali da je

$$\boldsymbol{A}_t = \begin{bmatrix} U_{1t} & U_{2t} \\ V_{1t} & V_{2t} \end{bmatrix}, \tag{3.27}$$

a onda je i

$$E(\boldsymbol{A}_t) = \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \alpha_1 p & \alpha_2(1-p) \\ \beta_1 q & \beta_2(1-q) \end{bmatrix}. \tag{3.28}$$

Naredna lema potrebna nam je kako bi dokazali jednu bitnu osobinu koja važi za binomni tining operator primenjen na matricu $\boldsymbol{A}_t$.

Lema 3.11. *Neka su $\alpha, \beta \in (0,1)$, a X i Y zavisne slučajne promenljive. Tada je $\alpha \circ \alpha \circ X + \alpha \circ \beta \circ Y \stackrel{d}{=} \alpha^2 \circ X + \alpha\beta \circ Y$.*

Dokaz: Ako je $\Phi_X(s)$ funkcija generatrisa verovatnoća slučajne promenljive X onda važi da je $\Phi_{\alpha\circ(\beta\circ X)}(s) = \Phi_{\beta\circ X}(1-\alpha+\alpha s) = \Phi_X(1-\alpha\beta+\alpha\beta s) = \Phi_{\alpha\beta\circ X}(s)$, pa je $\alpha\circ(\beta\circ X) \stackrel{d}{=} (\alpha\beta)\circ X$. Koristeći ovaj rezultat, imamo da je

$$\begin{aligned}
&\Phi_{\alpha\circ(\alpha\circ X),\alpha\circ(\beta\circ Y)}(s_1, s_2) = E\left(s_1^{\alpha\circ(\alpha\circ X)} s_2^{\alpha\circ(\beta\circ Y)}\right) = E\left[E\left(s_1^{\alpha\circ(\alpha\circ X)} s_2^{\alpha\circ(\beta\circ Y)} \middle| X, Y\right)\right] \\
=&E\left[E\left(s_1^{\alpha\circ(\alpha\circ X)}|X\right) E\left(s_2^{\alpha\circ(\beta\circ Y)}|Y\right)\right] = E\left[E\left(s_1^{\alpha^2\circ X}|X\right) E\left(s_2^{(\alpha\beta)\circ Y}|Y\right)\right] \\
=&\Phi_{\alpha^2\circ X,(\alpha\beta)\circ Y}(s_1, s_2)
\end{aligned}$$

odakle sledi da je $(\alpha\circ(\alpha\circ X), \alpha\circ(\beta\circ Y)) \stackrel{d}{=} (\alpha^2\circ X, (\alpha\beta)\circ Y)$. To dalje povlači da je $\alpha\circ(\alpha\circ X) + \alpha\circ(\beta\circ Y) \stackrel{d}{=} \alpha^2\circ X + (\alpha\beta)\circ Y$. $\square$

Lema 3.12. *Za slučajnu matricu $\boldsymbol{A}_t$ datu jednačinom (3.27) i slučajni vektor $\boldsymbol{Z} = (X, Y)'$ važi da je $\boldsymbol{A}_t \circ (\boldsymbol{A}_{t-1} \circ \boldsymbol{Z}) \stackrel{d}{=} (\boldsymbol{A}_t \boldsymbol{A}_{t-1}) \circ \boldsymbol{Z}$.*

Dokaz: Imamo da je

$$\boldsymbol{A}_t \circ \boldsymbol{A}_{t-1} = \begin{bmatrix} U_{1t} \circ U_{1t-1} + U_{2t} \circ V_{1t-1} & U_{1t} \circ U_{2t-1} + U_{2t} \circ V_{2t-1} \\ V_{1t} \circ U_{1t-1} + V_{2t} \circ V_{1t-1} & V_{1t} \circ U_{2t-1} + V_{2t} \circ V_{2t-1} \end{bmatrix}.$$

Onda je

$$\begin{aligned} P\left((U_{1t} \circ U_{1t-1} \right. & \left. + U_{2t} \circ V_{1t-1}) \circ X + (U_{1t} \circ U_{2t-1} + U_{2t} \circ V_{2t-1}) \circ Y = x\right) \\ &= pP\left((\alpha_1 \circ U_{1t-1} + 0 \circ V_{1t-1}) \circ X + (\alpha_1 \circ U_{2t-1} + 0 \circ V_{2t-1}) \circ Y = x\right) \\ &+ (1-p)P\left((0 \circ U_{1t-1} + \alpha_2 \circ V_{1t-1}) \circ X + (0 \circ U_{2t-1} + \alpha_2 \circ V_{2t-1}) \circ Y = x\right). \end{aligned}$$

Posmatrajmo samo prvi sabirak i imajmo u vidu lemu 3.11

$$\begin{aligned} pP\left((\alpha_1 \circ U_{1t-1} \right. & \left. + 0 \circ V_{1t-1}) \circ X + (\alpha_1 \circ U_{2t-1} + 0 \circ V_{2t-1}) \circ Y = x\right) \\ &= p[pqP\left((\alpha_1 \circ \alpha_1 + 0 \circ \beta_1) \circ X + (\alpha_1 \circ 0 + 0 \circ 0) \circ Y = x\right) \\ &+ p(1-q)P\left((\alpha_1 \circ \alpha_1 + 0 \circ 0) \circ X + (\alpha_1 \circ 0 + 0 \circ \beta_2) \circ Y = x\right) \\ &+ (1-p)qP\left((\alpha_1 \circ 0 + 0 \circ \beta_1) \circ X + (\alpha_1 \circ \alpha_2 + 0 \circ 0) \circ Y = x\right) \\ &+ (1-p)(1-q)P\left((\alpha_1 \circ 0 + 0 \circ 0) \circ X + (\alpha_1 \circ \alpha_2 + 0 \circ \beta_2) \circ Y = x\right) \\ &= p[pqP\left((\alpha_1 \cdot \alpha_1 + 0 \cdot \beta_1) \cdot X + (\alpha_1 \cdot 0 + 0 \cdot 0) \cdot Y = x\right) \\ &+ p(1-q)P\left((\alpha_1 \cdot \alpha_1 + 0 \cdot 0) \cdot X + (\alpha_1 \cdot 0 + 0 \cdot \beta_2) \cdot Y = x\right) \\ &+ (1-p)qP\left((\alpha_1 \cdot 0 + 0 \cdot \beta_1) \cdot X + (\alpha_1 \cdot \alpha_2 + 0 \cdot 0) \cdot Y = x\right) \\ &+ (1-p)(1-q)P\left((\alpha_1 \cdot 0 + 0 \cdot 0) \cdot X + (\alpha_1 \cdot \alpha_2 + 0 \cdot \beta_2) \cdot Y = x\right) \\ &= pP\left((\alpha_1 \cdot U_{1t-1} + 0 \cdot V_{1t-1}) \cdot X + (\alpha_1 \cdot U_{2t-1} + 0 \cdot V_{2t-1}) \cdot Y = x\right). \end{aligned}$$

Alanogno se pokazuje i za drugi sabirak polazne jednačine što na kraju implicira da je

$$\begin{aligned} & P\left((U_{1t} \circ U_{1t-1} + U_{2t} \circ V_{1t-1}) \circ X + (U_{1t} \circ U_{2t-1} + U_{2t} \circ V_{2t-1}) \circ Y = x\right) \\ = & P\left((U_{1t} \cdot U_{1t-1} + U_{2t} \cdot V_{1t-1}) \cdot X + (U_{1t} \cdot U_{2t-1} + U_{2t} \cdot V_{2t-1}) \cdot Y = x\right). \end{aligned}$$

Isti pristup se koristi za dokazivanje jednakosti zajedničkih raspodela. $\square$

Ponavljanjem jednačine (2.4) i koristeći lemu 3.12, dobićemo da je

$$\boldsymbol{Z}_t \stackrel{d}{=} \left(\prod_{i=1}^{k} \boldsymbol{A}_{t-i}\right) \circ \boldsymbol{Z}_{t-k} + \sum_{i=0}^{k-1} \left(\prod_{j=0}^{i} \boldsymbol{A}_{t-j}\right) \circ \boldsymbol{e}_{t-i} + \boldsymbol{e}_t. \tag{3.29}$$

Kako su slučajne matrice $\boldsymbol{A}_i$ i $\boldsymbol{A}_j$ nezavisne za $i \neq j$, imamo da je $E\left(\prod_{i=1}^{k} \boldsymbol{A}_{t-i}\right) = \boldsymbol{A}^k$. Tako možemo da srednju vrednost niza $\{\boldsymbol{Z}_t\}$ izrazimo preko srednje vrednosti inovacionog procesa

$\{\boldsymbol{e}_t\}$ kao $E(\boldsymbol{Z}_t) = \boldsymbol{A}^t E\boldsymbol{Z}_0 + (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}^t)E(\boldsymbol{e}_t)$.

Lema 3.13 (Popović (2015*b*), lema 2). *Za slučajnu matricu $\boldsymbol{A}_t$ i matricu $\boldsymbol{A}$ date jednačinama (3.27) i (3.28), redom, i slučajni vektor $\boldsymbol{Z} = (X, Y)$ važi $E((\boldsymbol{A}_t \circ \boldsymbol{Z})(\boldsymbol{A}_t \circ \boldsymbol{Z})') = \boldsymbol{A}E(\boldsymbol{Z}\boldsymbol{Z}')\boldsymbol{A}' + \boldsymbol{C}$ pri čemu je*

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} p(1-p)\left(vec\begin{bmatrix} \alpha_1^2 & -\alpha_1\alpha_2 \\ -\alpha_1\alpha_2 & \alpha_2^2 \end{bmatrix}\right)' & 0 \\ 0 & q(1-q)\left(vec\begin{bmatrix} \beta_1^2 & -\beta_1\beta_2 \\ -\beta_1\beta_2 & \beta_2^2 \end{bmatrix}\right)' \end{bmatrix}$$

$$\otimes\, vec(E(\boldsymbol{Z}\boldsymbol{Z}')) + \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1(1-\alpha_1)p \\ \alpha_2(1-\alpha_2)(1-p) \end{bmatrix}' & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} \beta_1(1-\beta_1)q \\ \beta_2(1-\beta_2)(1-q) \end{bmatrix}' \end{bmatrix} \otimes E\boldsymbol{Z},$$

gde je $\otimes$ Kronekerov proizvod.

Dokaz: Primetimo da je $E((U_{1t} \circ X) \cdot (U_{2t} \circ Y)) = pE((\alpha \circ X) \cdot (0 \circ Y)) + (1-p)E((0 \circ X) \cdot (\alpha \circ Y)) = 0$ jer su U_{1t} i U_{2t} zavisne slučajne promenljive od kojih je uvek jedna jednaka nuli. Takođe, imajmo u vidu da je $E(U_{1t} \circ X)^2 = \alpha^2 pEX^2 + \alpha(1-\alpha)pEX$. Izvedimo dokaz za svaki element pojedinačno matrice $E((\boldsymbol{A}_t \circ \boldsymbol{Z})(\boldsymbol{A}_t \circ \boldsymbol{Z})')$. Imamo da je

$$\begin{aligned} E(U_{1t} \circ X + U_{2t} \circ Y)^2 &= E\left((U_{1t} \circ X)^2 + 2(U_{1t} \circ X) \cdot (U_{2t} \circ Y) + (U_{2t} \circ Y)^2\right) \\ &= \alpha_1^2 pEX^2 + \alpha_1 p(1-\alpha_1)EX \\ &+ \alpha_2^2(1-p)EY^2 + \alpha_2(1-p)(1-\alpha_2)EY \\ &= \alpha_1^2 p^2 EX^2 + 2\alpha_1\alpha_2 p(1-p)EXY + \alpha_2^2(1-p)^2 EY^2 + c_1, \end{aligned}$$

gde je c_1 element matrice $\boldsymbol{C}$ na poziciji 1,1 i

$$\begin{aligned} c_1 &= \alpha_1^2 p(1-p)EX^2 + \alpha_2^2 p(1-p)EY^2 - 2\alpha_1\alpha_2 p(1-p)EXY + \\ &+ \alpha_1(1-\alpha_1)pEX + \alpha_2(1-\alpha_2)(1-p)EY \\ &= p(1-p)\begin{bmatrix} \alpha_1^2 & -\alpha_1\alpha_2 & -\alpha_1\alpha_2 & \alpha_2^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} EX^2 & EXY & EXY & EY^2 \end{bmatrix}'. \end{aligned}$$

Na sličan način dobićemo $E(V_{1t} \circ X + V_{2t} \circ Y)^2$. Dalje, za elemente van glavne dijagonale imamo da je

$$\begin{aligned} E((U_{1t} \circ X + U_{2t} \circ Y)(V_{1t} \circ X + V_{2t} \circ Y)) &= E\left((U_{1t} \circ X) \cdot (V_{1t} \circ X)\right) + E\left((U_{1t} \circ X) \cdot (V_{2t} \circ Y)\right) \\ &+ E\left((U_{2t} \circ Y) \cdot (V_{1t} \circ X)\right) + E\left((U_{2t} \circ Y) \cdot (V_{2t} \circ Y)\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \alpha_1\beta_1 pqEX^2 + \alpha_1\beta_2 p(1-q)EXY \\
&+ \alpha_2\beta_1(1-p)qEXY + \alpha_2\beta_2(1-p)(1-q)EY^2
\end{aligned}
$$

što je jednako elementima van glavne dijagonale matrice $\boldsymbol{A}E(\boldsymbol{Z}\boldsymbol{Z}')\boldsymbol{A}'$.$\square$

Navešćemo još jednu lemu iz koje slede osobine modela diskutovane ranije.

Lema 3.14 (Popović (2015*b*), lema 3). *Sve sopstvene vrednosti matrice $\boldsymbol{A}$, definisane jednačinom (3.28), su unutar jediničnog kruga.*

Dokaz: Označimo sopstvene vrednosti sa λ_1 i λ_2. Imamo da je

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \alpha_1 p + \beta_2(1-q) > 0.$$

Bez gubitka opštosti pretpostavimo da je $\lambda_2 > \lambda_1$. To povlači da je $\lambda_2 > 0$. Dalje,

$$\lambda_1\lambda_2 = \alpha_1\beta_2 p(1-q) - \alpha_2\beta_1(1-p)q.$$

Primetimo da je

$$
\begin{aligned}
(1-\lambda_1)(1-\lambda_2) &= 1 - (\lambda_1+\lambda_2) + \lambda_1\lambda_2 = (1-\beta_2(1-q))(1-\alpha_1 p) - \alpha_2\beta_1(1-p)q \\
&> (1-(1-q))(1-p) - (1-p)q = 0.
\end{aligned}
$$

Dakle važi da je $(\lambda_1 > 1 \wedge \lambda_2 > 1)$ ili $(\lambda_1 < 1 \wedge \lambda_2 < 1)$. Kako je $\lambda_1 + \lambda_2 < \alpha_1 + \beta_2 < 2$, imamo da je $\lambda_1 < 1$ i $\lambda_2 < 1$. Na sličan način zaključujemo

$$(1+\lambda_1)(1+\lambda_2) = 1 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_1\lambda_2 = (1+\alpha_1 p)(1+\beta_2(1-q)) - \alpha_2\beta_1(1-p)q.$$

Kako je umanjenik veći od jedan, a umanjilac manji od jedan, razlika je pozitivna. Kako je $\lambda_2 > 0$, onda je $\lambda_1 > -1$. Dakle dokazali smo da je $-1 < \lambda_1 < 1$ i $0 < \lambda_2 < 1$. $\square$

3.2.2 Osobine modela

U ovom potpoglavlju navešćemo neke važne osobine BVDCINAR(1) modela, kao što su uslovno očekivanje, uslovna raspodela verovatnoća i korelaciona struktura modela. Dokazaćemo strogu stacionarnost, mešanje i ergodičnost modela.

Uslovno očekivanje slučajnih promenljivih X_{t+1} i Y_{t+1} za poznate vrednosti X_t i Y_t dato je jednačinama

$$
\begin{aligned}
E(X_{t+1}|X_t, Y_t) &= \alpha_1 pX_t + \alpha_2(1-p)Y_t + \mu_\varepsilon \\
E(Y_{t+1}|X_t, Y_t) &= \beta_1 qX_t + \beta_2(1-q)Y_t + \mu_\eta
\end{aligned}
$$

gde su očekivane vrednosti inovacionih procesa $\mu_\varepsilon = a(1-\alpha_1 p - \alpha_2(1-p))$ i $\mu_\eta = a(1-\beta_1 q - \beta_2(1-q))$. Uslovno očekivanje za k koraka unapred dato je jednačinom (2.8).

Kovarijaciona struktura BVDCINAR(1) modela data je jednačinom (2.9). Ovde ćemo navesti samo elemente kovarijacione matrice. Na osnovu marginalnih raspodela, jasno je da su elementi na glavnoj dijagonali $Var(X_t) = Var(Y_t) = a(1+a)$. Elementi van glavne dijagonale dati su izrazom

$$Cov(X_t, Y_t) = \frac{a(1+a)(\alpha_1\beta_1 pq + \alpha_2\beta_2(1-p)(1-q))}{1-\alpha_2\beta_1(1-p)q - \alpha_1\beta_2 p(1-q)}, \tag{3.30}$$

gde je jednačina dobijena na osnovu činjenice da je proces stacionaran, a imenilac strogo pozitivan. Prateći lemu 3.13 možemo pokazati da važi sledeća lema

Lema 3.15. *Disperzija vremenskog niza $\{\boldsymbol{Z}_t\}$ zadovoljava diferencnu jednačinu*

$$Var(\boldsymbol{Z}_t) = \boldsymbol{A} Var(\boldsymbol{Z}_t)\boldsymbol{A}' + Var(\boldsymbol{e}_t) + \boldsymbol{C}.$$

Dokaz:

$$\begin{aligned}
Var(\boldsymbol{Z}_t) &= E((\boldsymbol{A}_t \circ \boldsymbol{Z}_{t-1} + \boldsymbol{e}_t)(\boldsymbol{A}_t \circ \boldsymbol{Z}_{t-1} + \boldsymbol{e}_t)^{'}) - E\boldsymbol{Z}_t E\boldsymbol{Z}_t)^{'} \\
&= E((\boldsymbol{A}_t \circ \boldsymbol{Z}_{t-1})(\boldsymbol{A}_t \circ \boldsymbol{Z}_{t-1})^{'}) + E(\boldsymbol{A}_t \circ \boldsymbol{Z}_{t-1} \cdot \boldsymbol{e}_t^{'}) + E(\boldsymbol{e}_t \cdot (\boldsymbol{A}_t \circ \boldsymbol{Z}_{t-1})^{'}) \\
&+ E(\boldsymbol{e}_t \boldsymbol{e}_t^{'}) - E\boldsymbol{Z}_t E\boldsymbol{Z}_t^{'} \\
&= \boldsymbol{A} E(\boldsymbol{Z}_{t-1}\boldsymbol{Z}_{t-1}^{'})\boldsymbol{A}^{'} + \boldsymbol{C} + \boldsymbol{A} E(\boldsymbol{Z}_{t-1}\boldsymbol{e}_t^{'}) + E(\boldsymbol{e}_t \boldsymbol{Z}_{t-1}^{'})\boldsymbol{A}^{'} + E(\boldsymbol{e}_t\boldsymbol{e}_t^{'}) - E\boldsymbol{Z}_t E\boldsymbol{Z}_t^{'} \\
&- \boldsymbol{A} E\boldsymbol{Z}_{t-1} E\boldsymbol{Z}_{t-1}^{'}\boldsymbol{A}^{'} + \boldsymbol{A} E\boldsymbol{Z}_{t-1} E\boldsymbol{Z}_{t-1}^{'}\boldsymbol{A}^{'} \\
&= \boldsymbol{A} Var\boldsymbol{Z}_t \boldsymbol{A}^{'} + \boldsymbol{A} E\boldsymbol{Z}_{t-1} E\boldsymbol{Z}_{t-1}\boldsymbol{A}^{'} + \boldsymbol{A} E\boldsymbol{Z}_{t-1} E\boldsymbol{e}_t^{'} + E\boldsymbol{e}_t E\boldsymbol{Z}_{t-1}^{'}\boldsymbol{A}^{'} - E\boldsymbol{Z}_t E\boldsymbol{Z}_t^{'} \\
&+ Var(\boldsymbol{e}_t) + E\boldsymbol{e}_t E\boldsymbol{e}_t^{'} + \boldsymbol{C} \\
&= \boldsymbol{A} Var\boldsymbol{Z}_t \boldsymbol{A}^{'} + (\boldsymbol{A} E\boldsymbol{Z}_{t-1} + E\boldsymbol{e}_t)(E\boldsymbol{Z}_{t-1}^{'}\boldsymbol{A}^{'} + E\boldsymbol{e}_t^{'}) \\
&- E\boldsymbol{Z}_t E\boldsymbol{Z}_t^{'} + Var(\boldsymbol{e}_t) + \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} Var\boldsymbol{Z}_t\boldsymbol{A}^{'} + Var(\boldsymbol{e}_t) + \boldsymbol{C}. \ \square
\end{aligned}$$

Koeficijent korelacije dobijamo iz jednačine (3.30) i on glasi

$$\rho = \frac{\alpha_1\beta_1 pq + \alpha_2\beta_2(1-p)(1-q)}{1-\alpha_2\beta_1(1-p)q - \alpha_1\beta_2 p(1-q)}.$$

Očigledno je da je nenegativan, a kako je $1-\rho = \frac{1-(\alpha_1 p+\alpha_2(1-p))(\beta_1 q+\beta_2(1-q))}{1-\alpha_2\beta_1(1-p)q-\alpha_1\beta_2 p(1-q)}$, gde je $1-(\alpha_1 p+\alpha_2(1-p))(\beta_1 q + \beta_2(1-q)) > 1-(p+1-p)(q+1-q) = 0$, možemo da zaključimo da je $\rho \in [0,1)$.

Uslovna raspodela verovatnoća slučajnog vektora (X_t, Y_t) u odnosu na (X_{t-1}, Y_{t-1}), bazira se na činjenici da su slučajne promenljive X_t i Y_t uslovno nezavisne i ona je data jednačinom (3.13). Uslovna raspodela slučajne promenljive X_t u odnosu na X_{t-1} i Y_{t-1} data je jednačinom (3.14), dok je uslovna raspodela slučajne promenljive Y_t u odnosu na X_{t-1} i Y_{t-1} data jednačinom (3.15). Teorema 3.10 definiše raspodele verovatnoća slučajnih promenljivih ε_t i η_t i one su date jednačinama

$$\begin{aligned}P(\varepsilon_t = x) &= 1_{\{x=0\}}\frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1(1-p)+\alpha_2 p} + \frac{(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)}{1-\alpha_1(1-p)-\alpha_2 p}\cdot\frac{a^x}{(1+a)^{x+1}}\\ &+ \frac{(\alpha_1-\alpha_2)^2(1-p)p}{(\alpha_1(1-p)+\alpha_2 p)(1-\alpha_1(1-p)-\alpha_2 p)}\cdot\frac{(a(\alpha_1(1-p)+\alpha_2 p))^x}{(1+a(\alpha_1(1-p)+\alpha_2 p))^{x+1}}\end{aligned} \tag{3.31}$$

i

$$\begin{aligned}P(\eta_t = y) &= 1_{\{y=0\}}\frac{\beta_1\beta_2}{\beta_1(1-q)+\beta_2 q} + \frac{(1-\beta_1)(1-\beta_2)}{1-\beta_1(1-q)-\beta_2 q}\cdot\frac{a^y}{(1+a)^{y+1}}\\ &+ \frac{(\beta_1-\beta_2)^2(1-q)q}{(\beta_1(1-q)+\beta_2 q)(1-\beta_1(1-q)-\beta_2 q)}\cdot\frac{(a(\beta_1(1-q)+\beta_2 q))^y}{(1+a(\beta_1(1-q)+\beta_2 q))^{y+1}},\end{aligned} \tag{3.32}$$

gde je 1_A indikatorska funkcija slučajnog događaja A. Pomoću jednačine (3.29) može se izračunati uslovna raspodela verovatnoća za k koraka unapred, ali zbog kompleksnosti izraza $\boldsymbol{A}_t^k$, za veliko k potrebno je koristiti numeričke metode za to izračunavanje.

Naredne tri teoreme daće nam vrlo bitne osobine BVDCINAR(1) modela.

Lema 3.16 (**Popović (2015*b*), lema 4**). *BVDCINAR(1) model definisan jednačinama (3.23) i (3.24) je strogo stacionaran.*

Dokaz: BVDCINAR(1) model možemo definisati jednačinom (2.4) i matricom (3.27), te dobijamo proces Markova reda jedan i imamo da je

$$P(\boldsymbol{Z}_{t_1+l} = \boldsymbol{z}_1, \ldots, \boldsymbol{Z}_{t_n+l} = \boldsymbol{z}_n) = \prod_{i=2}^{n} P(\boldsymbol{Z}_{t_i+l} = \boldsymbol{z}_i | \boldsymbol{Z}_{t_{i-1}+l} = \boldsymbol{z}_{i-1}) P(\boldsymbol{Z}_{t_1+l} = \boldsymbol{z}_1).$$

Kako su vektori $\boldsymbol{e}_{t_i}$ i $\boldsymbol{e}_{t_i+l}$ međusobno nezavisni sa nezavisnim elementima, to iz jednačina (3.31) i (3.32) vidimo da je $P(\boldsymbol{e}_{t_i+l}) = P(\boldsymbol{e}_{t_i})$, što zajedno sa jednačinom (3.13) implicira da je $P(\boldsymbol{Z}_{t_i+l} = \boldsymbol{z}_i|\boldsymbol{Z}_{t_{i-1}+l} = \boldsymbol{z}_{i-1}) = P(\boldsymbol{Z}_{t_i} = \boldsymbol{z}_i|\boldsymbol{Z}_{t_{i-1}} = \boldsymbol{z}_{i-1})$. Jednačina (2.5) povlači da je $\boldsymbol{Z}_{t_1+l} \stackrel{d}{=} \boldsymbol{Z}_{t_1}$, što na kraju znači da je $P(\boldsymbol{Z}_{t_1+l} = \boldsymbol{z}_1, \ldots, \boldsymbol{Z}_{t_n+l} = \boldsymbol{z}_n) = P(\boldsymbol{Z}_{t_1} = \boldsymbol{z}_1, \ldots, \boldsymbol{Z}_{t_n} = \boldsymbol{z}_n)$ za proizvoljno $n \in \mathbb{N}_0$ i svako $l \in \mathbb{Z}$. □

Teorema 3.17 (**Popović (2015*b*), teorema 5**). *BVDCINAR(1) model definisan jednačinama (3.23) i (3.24) je ireducibilan i neperiodičan lanac Markova u skupu $\boldsymbol{N}_0^2$.*

Dokaz: Parametri modela, α_i i β_i, uzimaju vrednosti iz intervala $(0,1)$. Dakle, $P(\varepsilon_t = k) > 0$ i $P(\eta_t = k) > 0$ za svako $t, k \in \boldsymbol{N}_0$. Označimo sa $p_{u,z}^{(n)}$ verovatnoću prelaza u n koraka iz stanja u u z. Na osnovu definicije verovatnoće prelaza i jednačine (3.13), zaključujemo da je $p_{u,z}^{(1)} > 0$

za svako $z, u \in \boldsymbol{N}_0^2$. Lanac je ireducibilan ako iz svakog stanja može preći u bilo koje stanja sa pozitivnom verovatnoćom u konačno mnogo koraka.

Uslovna raspodela za k koraka unapred sledi iz jednačine (3.29) na osnovu koje imamo da je

$$\begin{aligned} p_{0,0}^{(k)} &= P\left(\left(\prod_{i=1}^{k} \boldsymbol{A}_{t-i}\right) \circ \boldsymbol{Z}_t = \boldsymbol{0} | \boldsymbol{Z}_t = \boldsymbol{0}\right) \prod_{i=0}^{k-1} P\left(\left(\prod_{j=0}^{i} \boldsymbol{A}_{t-j}\right) \circ \boldsymbol{e}_t = \boldsymbol{0}\right) \\ &= \prod_{i=0}^{k-1} P\left(\left(\prod_{j=0}^{i} \boldsymbol{A}_{t-j}\right) \circ \boldsymbol{e}_t = \boldsymbol{0}\right). \end{aligned}$$

Uvedimo oznaku $\boldsymbol{A}_t^i = \prod_{j=0}^{i} \boldsymbol{A}_{t-j}$. Možemo da primetimo da je

$$P(\boldsymbol{A}_t^i \circ \boldsymbol{e}_t = \boldsymbol{0}) = \sum_m \sum_n P(\boldsymbol{A}_t^i \circ \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}) P(\varepsilon_t = m) P(\eta_t = n). \tag{3.33}$$

Matrica $\boldsymbol{A}_t^i$ je oblika

$$\boldsymbol{A}_t^i = \begin{bmatrix} \tilde{U}_{1t}^i & \tilde{U}_{2t}^i \\ \tilde{V}_{1t}^i & \tilde{V}_{2t}^i \end{bmatrix},$$

pri čemu su elementi zavisne slučajne promenljive raspodeljene kao

$$(\tilde{U}_{1t}^i, \tilde{U}_{2t}^i, \tilde{V}_{1t}^i, \tilde{V}_{2t}^i) : \begin{pmatrix} (\tilde{\alpha}_{11}^i, \tilde{\alpha}_{21}^i, \tilde{\beta}_{11}^i, \tilde{\beta}_{21}^i) & \cdots & (\tilde{\alpha}_{1s}^i, \tilde{\alpha}_{2s}^i, \tilde{\beta}_{1s}^i, \tilde{\beta}_{2s}^i) \\ \tilde{p}_1 & \cdots & \tilde{p}_s \end{pmatrix}$$

gde je s broj stanja slučajnog vektora $(\tilde{U}_{1t}^i, \tilde{U}_{2t}^i, \tilde{V}_{1t}^i, \tilde{V}_{2t}^i)$. Vrednosti $\tilde{\alpha}_{js}^i$ i $\tilde{\beta}_{js}^i$ su funkcije od α_j, β_j i nule, $j = 1, 2$, $i \in \mathbb{N}_0$. Prema tome prvi činilac u jednačini (3.33) glasi

$$\begin{aligned} & P\left(\tilde{U}_{1t}^i \circ m + \tilde{U}_{2t}^i \circ n = 0, \tilde{V}_{1t}^i \circ m + \tilde{V}_{2t}^i \circ n = 0\right) \\ &= \sum_{k=1}^{s} \tilde{p}_k P(\tilde{\alpha}_{1k}^i \circ m + \tilde{\alpha}_{2k}^i \circ n = 0, \tilde{\beta}_{1k}^i \circ m + \tilde{\beta}_{2k}^i \circ n = 0) \\ &= \sum_{k=1}^{s} \tilde{p}_k P(\tilde{\alpha}_{1k}^i \circ m = 0) P(\tilde{\alpha}_{2k}^i \circ n = 0) P(\tilde{\beta}_{1k}^i \circ m = 0) P(\tilde{\beta}_{2k}^i \circ n = 0). \end{aligned}$$

Dobili smo sumu proizvoda verovatnoća slučajnih promenljivih sa binomnim raspodelama. Drugi i treći činilac u izrazu (3.33) dati su jednačinama (3.25) i (3.26), redom. Dakle, izraz (3.33) je strogo pozitivan. Zaključujemo da je $p_{0,0}^{(k)} > 0$ za bilo koje $k \in \mathbb{N}$. Kako je najveći zajednički delilac za sve k-ove za koje je $p_{0,0}^{(k)} > 0$ jedan, onda je stanje **0** neperiodično.

Na osnovu diskusije iz Rosenblatt (1971) strana 7, kod ireducibilnih lanaca Markova ili su sva stanja periodična ili ni jedno nije. Kako smo našli jedno stanje koje nije periodično, to je posmatrani lanac Markova ireducibilan i neperiodičan. □

Navedena teorema ukazuje na to da se iz jednog stanja može preći u bilo koje drugo stanje. To opravdava upotrebu modela i za vremenske nizove čije vrednosti dosta osciluju. Sledeća teorema ide jedan korak dalje i ispituje korelaciju između stanja sistema u različitim trenucima. Ona ukazuje na to da su stanja asimptotski nezavisna. Kako vreme između opservacija raste, to opservirane vrednosti postaju nezavisne.

Teorema 3.18 (**Popović (2015*b*), teorema 6**). *BVDCINAR(1) model definisan jednačinama (3.23) i (3.24) je strogo mešanje.*

Dokaz: Prema teoremi 3.16 i teoremi 3.17, vremenski niz $\{\boldsymbol{Z}_t\}$, koji se može predstaviti jednačinom (2.4) i matricom (3.27), je ireducibilan, neperiodičan, stacionaran, proces Markova reda jedan. Označimo sa $p_{i,j}^{(n)}$ verovatnoću prelaza za n koraka iz stanja i u stanje j, a sa $p = (p_i)$ raspodelu verovatnoća. Kako je niz ireducibilan i stacionaran, prema teorema 1 na strani 9 iz Rosenblatt (1971), imamo da je $p_j = \frac{1}{\mu_j}$ gde je μ_j srednje vreme povratka za stanje j. Rosenblatt (1971), teorema 2, strana 10, implicira da $p_{i,j}^{(n)} \to p_j$ kad $n \to \infty$. Na osnovu ovoga i činjenice da je $\sum_i p_i = 1$ imamo da

$$\sum_i p_i |p_{i,j}^{(n)} - p_j| \leq \max_i |p_{i,j}^{(n)} - p_j| \sum_i p_i \to 0 \tag{3.34}$$

za svako j kad $n \to \infty$. Neka je $L^1 = L^1(p)$ linearni prostor svih p-integrabilnih funkcija f gde je funkcija $f = (f_i)$ integrabilna ako je $\|f\|_1 = \sum_i |f_i| p_i < \infty$. Norma $\|f\|_k$ se definiše kao $\|f\|_k = \sum_i |f_i|^k p_i$. Posmatrajmo sada neki vektor $f = (f_i) \in L^1(v)$ gde je $\sup_i |f_i| = 1$ i $f \perp p$ (odnosno $\sum_i f_i p_i = 0$ $(*)$). Označimo sa T operator prelaza iz $L^1(p)$ u $L^1(p)$, pri čemu je za prelaz u n koraka iz stanja x operator definisan kao $(T^n f)(x) = \sum_j p_{x,j} f_j$. Tada je

$$\begin{aligned}
\|T^n f\|_1 &= \sum_i p_i \left| \sum_j p_{i,j}^{(n)} f_j \right| \overset{(*)}{=} \sum_i p_i \left| \sum_j p_{i,j}^{(n)} f_j - \sum_j p_j f_j \right| = \sum_i p_i \left| \sum_j (p_{i,j}^{(n)} - p_j) f_j \right| \\
&= \sum_i p_i \left| \sum_{j=1}^{N} (p_{i,j}^{(n)} - p_j) f_j \right| + \sum_i p_i \left| \sum_{j>N} (p_{i,j}^{(n)} - p_j) f_j \right| \\
&\leq \sum_{j=1}^{N} |f_j| \sum_i p_i |(p_{i,j}^{(n)} - p_j)| + \sum_i p_i \left| \sum_{j>N} (p_{i,j}^{(n)} - p_j) f_j \right|.
\end{aligned}$$

Iz izraza (3.34), prvi sabirak gornje nejednakosti teži nuli kad n teži beskonačnosti. Dalje, za svako $\epsilon > 0$, postoji $N = N(\epsilon)$ takvo da je $\sum_{j>N(\epsilon)} p_j < \epsilon$. Dakle, za drugi sabirak važi

$$\begin{aligned}
&\sum_i p_i \left| \sum_{j>N} (p_{i,j}^{(n)} - p_j) f_j \right| \leq \sum_{j>N} |f_j| \sum_i p_i \left| (p_{i,j}^{(n)} - p_j) \right| \\
&\leq \sum_{j>N} |f_j| \left(\sum_i p_i p_{i,j}^{(n)} + \sum_i p_i p_j \right) \to 2 \sum_{j>N} p_j |f_j| < 2\epsilon
\end{aligned}$$

kad $n \to \infty$. Strogo mešanje sledi na osnovu Rosenblatt (1971), lema 1, strana 200. $\square$

Na osnovu leme 2, na strani 207, Rosenblatt (1971), zaključujemo da teorema 3.18 takođe implicira da je vremenski niz $\{\boldsymbol{Z}_t\}$ ergodičan.

3.2.3 Ocenjivanje nepoznatih parametara

U ovom potpoglavlju proučavaćemo metode za ocenjivanje nepoznatih parametara BVDCINAR(1) modela. Proučavaćemo generalisani metod momenata (GMM) i metod uslovne maksimalne verodostojnosti (CML). Detaljno ćemo razmatrati GMM, gde ćemo ispitati i asimptotske osobine metoda. Takođe, diskutovaćemo upotrebu različitih težinskih matrica kod GMM metoda. Na kraju ćemo uporediti preciznost svih metoda na simuliranim skupovima podataka.

Metod uslovne maksimalne verodostojnosti

Za BVDCINAR(1) model uslovna raspodela verovatnoća data je jednačinom (3.13). Vremenski nizovi $\{X_t\}$ i $\{Y_t\}$ su uslovno nezavisni, pri čemu je uslovna nezavisnost slučajnih promenljivih X_t i Y_t definisana u odnosu na X_{t-1} i Y_{t-1}, a njihova raspodela verovatnoća je konvolucija binomne i raspodele verovatnoća inovacionih procesa koje su određene jednačinama (3.31) i (3.32). Označimo vektor nepoznatih parametara sa $\boldsymbol{\theta} = (\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, p, q)$. Funkcija koju želimo da maksimizujemo je oblika

$$L(\boldsymbol{\theta}|x, y) = \sum_{i=2}^{n} \ln f(x_i, y_i|x_{i-1}, y_{i-1}, \boldsymbol{\theta}).$$

gde je

$$\begin{aligned} f(x_i, y_i|x_{i-1}, y_{i-1}, \boldsymbol{\theta}) &= (p\psi(\alpha_1, x_{t-1}, x_t, \varepsilon_t) + (1-p)\psi(\alpha_2, y_{t-1}, x_t, \varepsilon_t)) \\ &\quad \times (q\psi(\beta_1, x_{t-1}, y_t, \eta_t) + (1-q)\psi(\beta_2, y_{t-1}, y_t, \eta_t)) \end{aligned}$$

i $\psi(\alpha, s, c, \epsilon) = \sum_{k=0}^{\min(s,c)} \binom{s}{k} \alpha^k (1-\alpha)^{s-k} P(\epsilon = c - k)$. Do rešenja se ne može stići analitičkim putem, pa se maksimizacija vrši numerički. U tu svrhu koristili smo funkciju `nlm` iz programskog jezika `R`.

Generalisani metod momenata

Predstavićemo GMM za ocenu nepoznatih parametara BVDCINAR(1) modela. GMM metod za INAR modele prvi je izučavao Brännäs (1993). Sledeći ovaj koncept, primenićemo GMM na dvodimenzionalne INAR modele. Ocenjivanje parametara pristupom GMM odvija se u dva koraka. U prvom ocenjujemo vektor parametara $\boldsymbol{\phi} = (\alpha_1, \alpha_2, p)$ koristeći kao ograničavajuće funkcije, funkcije momenata vremenskog niza definisanog jednačinom (3.23). U drugom koraku ocenjujemo parametre $\boldsymbol{\psi} = (\beta_1, \beta_2, q)$ gde su nam sada ograničavajuće funkcije odgovarajuće funkcije momenata vremenskog niza (3.24). Ideja je da se nađu parametri koji minimiziraju izraz

$$\boldsymbol{m}'(\boldsymbol{\Theta})\widehat{\boldsymbol{W}}^{-1}\boldsymbol{m}(\boldsymbol{\Theta}), \tag{3.35}$$

gde je $\boldsymbol{m}(\boldsymbol{\Theta})$ vektor ograničavajućih funkcija momenata, $\boldsymbol{\Theta} = (\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\psi})$ i $\widehat{\boldsymbol{W}}$ težinska matrica koja mora biti simetrična i pozitivno definitna. Postoje dva pristupa za određivanje vektora ograničavajućih funkcija momenta, uslovni i bezuslovni. Prvi je numerički nestabilan tako da ćemo se usresrediti na drugi pristup. Kako vektor $\boldsymbol{m}$ može biti proizvoljnih dimenzija, moguće je imati više jednačina nego nepoznatih parametara, pa stoga i nejedinstveno rešenje. Ali nekad dodavanje novih elemenata vektoru $\boldsymbol{m}$ može povećati efikasnost ocenjivanja. Obično se proces ocenjivanja odvija u dva koraka. U prvom koraku, za težinsku matricu postavimo jediničnu matricu odgovarajuće dimenzije, $\widehat{\boldsymbol{W}} = \boldsymbol{I}$. Kad ocenimo parametre pomoću jedinične matrice, u drugom koraku težinsku matricu $\widehat{\boldsymbol{W}}$ određujemo kao kovarijacionu matricu vektora ograničavajućih funkcija momenata. Težinsku matricu računamo metodom koji su prezentovali Newey i West (1986) gde su uvedene neke modifikacije kovarijacione matrice. Tako pri ocenjivanju vektora $\boldsymbol{\phi}$, matricu $\widehat{\boldsymbol{W}}$ računamo kao

$$\begin{aligned}\widehat{\boldsymbol{W}} &= \widehat{\boldsymbol{\Omega}}_0 + \sum_{j=1}^{k}\left(1 - \frac{j}{k+1}\right)\left(\widehat{\boldsymbol{\Omega}}_j + \widehat{\boldsymbol{\Omega}}_j'\right) \\ \widehat{\boldsymbol{\Omega}}_j &= \frac{1}{n}\sum_{i=j+1}^{n}\boldsymbol{m}'\left(\widehat{\boldsymbol{\phi}}\right)\boldsymbol{m}\left(\widehat{\boldsymbol{\phi}}\right)\end{aligned} \tag{3.36}$$

i analogno za vektor $\boldsymbol{\psi}$. Broj k se unapred zadaje, a prema diskusiji koju je izneo Brännäs (1993), dovoljno je uzeti $k = 2$. Kada budemo testirali GMM na simuliranom skupu podataka možemo preskočiti prvi korak, jer znamo stvarne vrednosti parametara, pa možemo odmah krenuti sa računanjem matrice $\widehat{\boldsymbol{W}}$.

Vektor $\boldsymbol{m}$ nije jedinstveno određen. Izbor ograničavajućih funkcija momenata koje će činiti ovaj vektor odredićemo putem testiranja. Simulirali smo vremenske nizove kao što je opisano u nastavku podpoglavlja, a zatim ocenjivali nepoznate parametre modela koristeći različite ograničavajuće funkcije momenata i različite dimenzije za vektor $\boldsymbol{m}$. Na osnovu sprovedenog testiranja zaključili smo da se najbolji rezultati dobijaju izborom sledeće tri funkcije:

$$\begin{aligned}m_1 &= (T-1)^{-1}\sum_{i=2}^{T} e_i \\ m_2 &= (T-1)^{-1}\sum_{i=2}^{T} e_i X_{i-1}\end{aligned}$$

$$m_3 = (T-1)^{-1} \sum_{i=2}^{T} \left[e_i^2 - (E(X_i^2|X_{i-1}, Y_{i-1}) - (E(X_i|X_{i-1}, Y_{i-1}))^2 \right]$$

gde je $e_i = X_i - E(X_i|X_{i-1}, Y_{i-1})$. Dodavanje i drugih funkcija u vektor $\boldsymbol{m}$ samo povećavaju vreme izračunavanja. Već nam i sama funkcija m_1 daje dobre rezultate. Uvođenje funkcija m_2 i m_3 doprinele su da se dođe do boljih rezultata za uzorke manjih obima. Analogne funkcije se razmatraju i za ocenjivanje vektora $\boldsymbol{\psi}$. Parametar a ocenjujemo kao sredinu datog uzorka, odnosno $\hat{a} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} S_i$, gde je $S_i = (X_i + Y_i)/2$.

Asimptotska raspodela ocena dobijenih GMM metodom

Parametar a je ocenjen kao sredina uzorka $\{(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)\}$, a zatim je ta ocenjena vrednost korišćena za ocenjivanje preostalih šest parametara α_1, α_2, β_1, β_2, p i q. Zato utvrdimo najpre asimptotsku raspodelu ocene parametra a.

Teorema 3.19 (Popović (2015*b*), teorema 7). *Niz ocenjenih vrednosti* $\{\hat{a}_n\}$*, gde je* $\hat{a}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} S_i$*, je asimptotski normalno raspodeljen sa parametrima* a *i* $n^{-1}v_s$ *gde je* $v_s = \sum_{k=-\infty}^{\infty} Cov(S_n, S_{n-k})$*, a* $S_i = (X_i + Y_i)/2, i = \overline{1, n}$*.*

Dokaz: Teoreme 3.16 i 3.18 dokazale su da je $\{\boldsymbol{Z}_t\}$ strogo stacionaran i ergodičan, što implicira da je i $\{S_t\}$ stacionaran. Prateći diskusiju iz potpoglavlja (3.2.2), niz $\{S_t\}$ je takođe ergodičan. Dakle, slučajni niz $\{S_t - a\}$ je stacionaran, ergodičan sa srednjom vrednošću 0. Prema teoremi Wold-a o dekompoziciji (koja se takođe može naći u Brockwell (2002), strana 77.) ovaj niz može se predstaviti kao

$$S_t - a = \sum_{k=0}^{\infty} d_k \xi_{t-k}$$

gde je 1) $d_0 = 1$, 2) $\sum_{k=0}^{\infty} d_k^2 < \infty$ i 3) $\{\xi_t\}$ je beli šum sa parametrima $(0, \sigma^2)$. Tada se proces S_t može predstaviti kao

$$S_t = a + \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k \xi_{t-k} \tag{3.37}$$

gde je $d_k = 0$ za $k < 0$. Uslov 2) implicira da je $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |d_k| < \infty$. Takođe

$$Cov(S_t, S_{t-k}) = \frac{1}{4}\left(Cov(X_t, X_{t-k}) + Cov(X_t, Y_{t-k}) + Cov(X_{t-k}, Y_t) + Cov(Y_t, Y_{t-k})\right).$$

Ovi sabirci su elementi matrice $Cov(\boldsymbol{Z}_t, \boldsymbol{Z}_{t-k}) = \boldsymbol{A}^k Var(\boldsymbol{Z_t})$ i prema korelacionoj strukturi modela i osobina matrice $\boldsymbol{A}$, svi sabirci iz gornje jednačine su nenegativni, dok su prvi i poslednji strogo pozitivni. Iz jednačine (3.37) sledi da je

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} Cov(S_t, S_{t-k}) = \sigma^2 (\sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k)^2,$$

što dalje implicira da je $\sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k \neq 0$. Sad možemo primeniti teoremu 7.1.2 iz Brockwell i Davis (1991), koja kaže da za niz $\{S_t\}$ koji je predstavljen jednačinom (3.37) važi da je za dati uzorak $(S_1, \ldots, S_n)$, srednja vrednost uzorka, $\overline{S}_t = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} S_i$, asimptotski normalno raspodeljena sa očekivanjem a i disperzijom $n^{-1}v_s$. $\square$

Brännäs (1993) je pokazao da je asimptotska kovarijaciona matrica ocena data izrazom

$$\frac{1}{n}\left(\widehat{\boldsymbol{G}}'\widehat{\boldsymbol{W}}^{-1}\widehat{\boldsymbol{G}}\right)^{-1}, \tag{3.38}$$

gde je $\widehat{\boldsymbol{G}} = \frac{\partial \boldsymbol{m}_X(\boldsymbol{\phi})}{\partial \boldsymbol{\phi}}(\widehat{\boldsymbol{\phi}}_n)$ i analogno za vektor $\boldsymbol{\psi}$. U nastavku ćemo detaljno prodiskutavati raspodelu ovih ocena.

Teorema 3.20 (Popović (2015*b*), teorema 8). *Niz GMM ocena* $\{\widehat{\boldsymbol{\phi}}_n\}$ *konvergira u raspodeli ka normalno raspodeljenom slučajnom vektoru sa očekivanjem* $\boldsymbol{\phi}$ *i kovarijacionom matricom* (3.38)*, pri čemu je* $\boldsymbol{\phi}$ *vektor stvarnih parametara.*

Dokaz: Da bismo dokazali teoremu iskoristićemo teoremu 3.1 autora Hansen (1982). Ova teorema bazirana je na šest pretpostavki. Teoreme 3.16 i 3.18 dokazale su da je BVDCINAR(1) model stacionaran i ergodičan, čime je zadovoljena pretpostavka 3.1 iz Hansen (1982). Prostor parametara je podskup od $\mathbb{R}^q$, gde q predstavlja broj nepoznatih parametara, što znači da je i pretpostavka 3.2 iz Hansen (1982) ispunjena. Pretpostavke 3.3 i 3.4 su trivijalno zadovoljene jer su ograničavajuće funkcije momenata kombinacije elementarnih funkcija pa su onda neprekidne i diferencijabilne. Za pretpostavku 3.5, uvedimo oznake slično kao i Hansen (1982)

$$\begin{aligned} W_t &= m(X_t, \boldsymbol{\phi}) \\ V_t &= E[W_0|\mathcal{F}(W_{-t}, W_{-t-1}, ...)] - E[W_0|\mathcal{F}(W_{-t-1}, W_{-t-2}, ...)] \end{aligned}$$

gde su $f(X_t, \boldsymbol{\phi})$ ograničavajuće funkcije momenata koje koristimo za GMM ocenjivanje. Postoje tri takve funkcije. Posmatrajmo σ-algebru $\mathcal{F}_{-t} = \mathcal{F}(W_{-t}, W_{-t-1}, ...)$. Za prvu funkciju važi

$$E(X_t - E(X_t|X_{t-1}, Y_{t-1})|\mathcal{F}_{t-k}) = E(X_t|\mathcal{F}_{t-k}) - E(E(X_t|X_{t-1}, Y_{t-1})|\mathcal{F}_{t-k}), \tag{3.39}$$

$k = 1, 2, \ldots$. Prateći definiciju procesa imamo da je $E(X_t|X_{t-1}, Y_{t-1}) = E(X_t|\mathcal{F}_{t-1})$. Kako je $\mathcal{F}_{t-k} \subseteq \mathcal{F}_{t-1}$, jednačina (3.39) je jednaka nuli. Iz istog razloga i za drugu funkciju momenta imamo

$$E(X_{t-1}E(X_t|X_{t-1},Y_{t-1})|\mathcal{F}_{t-k}) = E(E(X_tX_{t-1}|\mathcal{F}_{t-1})|\mathcal{F}_{t-k}) = E(X_tX_{t-1}|\mathcal{F}_{t-k}),$$

odnosno $E(X_{t-1}(X_t - E(X_t|X_{t-1},Y_{t-1}))|\mathcal{F}_{t-k}) = 0$. Dalje, imajući u vidu prethodnu diskusiju $E(X_t^2|\mathcal{F}_{t-k}) = E(E(X_t^2|X_{t-1},Y_{t-1})|\mathcal{F}_{t-k})$. Na osnovu osobina binomnog tining operatora da je $E(U_{1t} \circ (X_tY_t)|\mathcal{F}_{t-k}) = \alpha_1 pE(X_tY_t|\mathcal{F}_{t-k})$ i na osnovu definicije procesa zaključujemo da je

$$E(X_tE(X_t|X_{t-1}Y_{t-1})|\mathcal{F}_{t-k}) = E((E(X_t|X_{t-1}Y_{t-1}))^2|\mathcal{F}_{t-k}),$$

što implicira da je uslovno očekivanje treće ograničavajuće funkcije momenta u odnosu na $\mathcal{F}_{t-k}$ takođe nula. Prema tome, za sve ograničavajuće funkcije momenata važi $E(W_t|\mathcal{F}_{t-k}) = 0$ za $k = 1, 2, ...$ Ovo takođe implicira da je V_t uvek nula, čime je zadovoljena pretpostavka 5. U vezi pretpostavke 6 uvešćemo sledeće oznake:

$$\begin{aligned} m_{j,x,n} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_j(X_i, \boldsymbol{\phi}) \\ \boldsymbol{a}_n^* &= \boldsymbol{G}_n \boldsymbol{W}_n^{-1} \\ \boldsymbol{G}_n &= \frac{\partial \boldsymbol{m}_{x,n}}{\partial \boldsymbol{\phi}}(\boldsymbol{\phi_n}). \end{aligned}$$

Pretpostavimo da $\boldsymbol{\phi}_n$ minimizira vektor ograničavajućih funkcija momenata, $\boldsymbol{m}_{x,n}$. To znači da je $\frac{\partial \boldsymbol{m}_{x,n}}{\partial \boldsymbol{\phi}}(\boldsymbol{\phi_n}) = 0$, što dalje implicira da je $\frac{\partial \boldsymbol{m}_{x,n}}{\partial \boldsymbol{\phi}}(\boldsymbol{\phi_n})\boldsymbol{W}_n^{-1}\boldsymbol{m}_{x,n}(\boldsymbol{\phi_n}) = 0$ odnosno $\boldsymbol{a}_n^*\boldsymbol{m}_{x,n}(\boldsymbol{\phi}_n) = 0$. Tada, na osnovu definicije 3.1. iz Hansen (1982) $\boldsymbol{\phi_n}$ je niz ocena dobijenih GMM metodom koje konvergiraju u verovatnoći ka $\boldsymbol{\phi}_0$. Kako w_j konvergira u verovatnoći ka nekoj konstantnoj vrednosti, to imamo da matrica $\boldsymbol{W}_n$ konvergira u verovatnoći ka nekoj konstantnoj matrici, jer su njeni elementi linearna kombinacija od w_j. Matrica $\boldsymbol{W}_n$ je regularna pa stoga $\boldsymbol{W}_n^{-1}$ konvergira u verovatnoći ka nekoj konstantnoj matrici. Prema lemi 3.2 koju je dao Hansen (1982), imamo da $\boldsymbol{a}_n^*$ konvergira u verovatnoći ka konstantnoj matrici.

Na osnovu teoreme 3.1 od Hansen (1982), niz GMM ocena $\{\hat{\boldsymbol{\phi}}_n\}$ konvergira u raspodeli ka normalno raspodeljenom slučajnom vektoru sa očekivanjem $\boldsymbol{\phi}$ i kovarijacionom matricom (3.38). □

Rezultati na osnovu simulacija

U nastavku potpoglavlja ocenjivaćemo nepoznate parametre BVDCINAR(1) modela na simuliranom uzorku pomoću GMM i CML metoda. Takođe ćemo testirati GMM metod sa različitim težinskim matricama. Najpre ćemo implementirati GMM metod sa težinskom matricom koju su predstavili Newey i West (1986) (GMM_W) i koja je data jednačinom (3.36),

Tabela 3.3: Ocenjene vrednosti nepoznatih parametara za BVDCINAR(1) model za izbor parametara a) i b). Za svaki metod prva vrsta sadrži ocenjene vrednosti, druga vrsta standardnu devijaciju.

	a) $\alpha_1 = 0.6, \alpha_2 = 0.55\ \beta_1 = 0.45, \beta_2 = 0.5, p = 0.55, q = 0.4, a = 3$							b) $\alpha_1 = 0.6, \alpha_2 = 0.55\ \beta_1 = 0.45, \beta_2 = 0.5, p = 0.55, q = 0.4, a = 15$						
Metod	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{p}$	$\hat{q}$	$\hat{a}$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{p}$	$\hat{q}$	$\hat{a}$
	obim=100							obim=100						
GMM_W	0.6341	0.5961	0.4739	0.5466	0.5251	0.4302	2.9337	0.6323	0.589	0.4852	0.5539	0.5288	0.4272	14.9863
	0.2091	0.203	0.2105	0.2203	0.2143	0.2315	0.4722	0.169	0.1421	0.132	0.1881	0.1791	0.1943	2.1839
GMM_I	0.629	0.4562	0.5177	0.4758	0.4839	0.4505	2.9337	0.646	0.5076	0.4271	0.4401	0.5149	0.4539	14.9863
	0.2591	0.2052	0.2271	0.2401	0.2406	0.2449	0.4722	0.221	0.198	0.2081	0.1982	0.2279	0.2439	2.1839
CML	0.6039	0.5211	0.4678	0.5266	0.5656	0.4281	3.0577	0.606	0.5457	0.4555	0.502	0.5353	0.4114	14.9901
	0.2384	0.2802	0.2352	0.2259	0.2868	0.314	0.7301	0.0295	0.0345	0.0458	0.0323	0.0892	0.0938	0.0895
	obim=500							obim=100						
GMM_W	0.6175	0.5804	0.4672	0.5298	0.5314	0.3971	2.99	0.6145	0.5701	0.4309	0.5287	0.5393	0.4064	14.8596
	0.1105	0.0793	0.0925	0.091	0.0957	0.1059	0.2224	0.0918	0.0874	0.122	0.1162	0.0984	0.1023	0.9568
GMM_I	0.5831	0.4946	0.4831	0.4814	0.5266	0.4126	2.99	0.5985	0.5634	0.4283	0.4701	0.5412	0.4145	14.8596
	0.1443	0.1115	0.141	0.1192	0.141	0.1515	0.2224	0.1191	0.1263	0.1437	0.1337	0.1292	0.1314	0.9568
CML	0.6202	0.543	0.4446	0.5003	0.5549	0.4006	3.0041	0.6006	0.5482	0.4535	0.4984	0.5448	0.3957	14.9936
	0.0343	0.0294	0.0434	0.0358	0.0445	0.058	0.1738	0.014	0.0132	0.0218	0.0161	0.0383	0.0373	0.0673
	obim=1000							obim=100						
GMM_W	0.6074	0.5701	0.4548	0.5167	0.5424	0.3959	2.9975	0.6118	0.5674	0.4512	0.519	0.5491	0.4021	14.8778
	0.075	0.0551	0.0742	0.0883	0.0765	0.0897	0.1448	0.0728	0.0715	0.0801	0.0821	0.0744	0.0736	0.6192
GMM_I	0.5963	0.5291	0.4688	0.489	0.5297	0.4114	2.9975	0.6023	0.5577	0.4625	0.4789	0.5614	0.4138	14.8778
	0.1103	0.0762	0.0993	0.0904	0.1036	0.1025	0.1448	0.0879	0.0941	0.0883	0.0975	0.0912	0.0858	0.6192
CML	0.6021	0.5429	0.447	0.4994	0.5552	0.4001	3.0102	0.5995	0.5476	0.4514	0.4999	0.5455	0.3997	14.9961
	0.0224	0.0243	0.0299	0.0248	0.0276	0.0425	0.1338	0.0089	0.0102	0.0138	0.0101	0.0237	0.0264	0.0198

a zatim i sa jediničnom težinskom matricom dimenzije 3×3 (GMM_I). Generisali smo podatke sa sledećim kombinacijama parametara: a) $\alpha_1 = 0.6$, $\alpha_2 = 0.55$ $\beta_1 = 0.45$, $\beta_2 = 0.5$, $p = 0.55$, $q = 0.4$, $a = 3$; b) $\alpha_1 = 0.6$, $\alpha_2 = 0.55$ $\beta_1 = 0.45$, $\beta_2 = 0.5$, $p = 0.55$, $q = 0.4$, $a = 15$; c) $\alpha_1 = 0.1$, $\alpha_2 = 0.25$ $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.15$, $p = 0.55$, $q = 0.4$, $a = 3$; d) $\alpha_1 = 0.1$, $\alpha_2 = 0.25$ $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.15$, $p = 0.55$, $q = 0.4$, $a = 15$. Vrednosti parametara su izabrane tako da dobijemo nizove sa malom srednjom vrednošću i izraženom autokorelacijom i kroskorelacijom (izbor parametara a), zatim sa velikom srednjom vrednošću i izraženom autokorelacijom i kroskorelacijom (izbor parametara b), onda sa malom srednjom vrednošću i malom autokorelacijom i kroskorelacijom (izbor parametara c) i na kraju sa velikom srednjom vrednošću i malom autokorelacijom i kroskorelacijom (izbor parametara d). Skupovi podataka sadrže po 100 uzoraka obima 100, 500 i 1000. Rezultati su predstavljeni u tabelama 3.3 i 3.4. U tabelama pored vrednosti ocenjenih parametara, nalaze se i standardne devijacije dobijenih ocena.

Rezultati prikazani u tabelama 3.3 i 3.4 sugerišu da sva tri metoda konvergiraju ka stvarnim vrednostima parametara sa porastom obima uzorka. U celini gledano, CML metod daje rezultate najbliže stvarnim vrednostima. Ocenjene vrednosti CML metoda bliske su stvarnim vrednostima čak i za uzorak obima 100. Postoje neka odstupanja ovog metoda za izbor parametara c), gde je najbolje vrednosti ocena dao GMM_W. Mogu se uočiti prednosti upotrebe matrice $\boldsymbol{W}$ kao težinske matrice umesto jedinične matrice. Konvergencija je brža, a standardna devijacija ocena je manja. Inače najmanju standardnu devijaciju dobijamo CML metodom. Za izbor parametara a) i b), kad su parametri relativno velike vrednosti, upotreba

Tabela 3.4: Ocenjene vrednosti nepoznatih parametara za BVDCINAR(1) model za izbor parametara c) i d). Za svaki metod prva vrsta sadrži ocenjene vrednosti, druga vrsta standardnu devijaciju.

	c) $\alpha_1 = 0.1$, $\alpha_2 = 0.25$ $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.15$, $p = 0.55$, $q = 0.4$, $a = 3$							d) $\alpha_1 = 0.1$, $\alpha_2 = 0.25$ $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.15$, $p = 0.55$, $q = 0.4$, $a = 15$						
Metod	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{p}$	$\hat{q}$	$\hat{a}$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{p}$	$\hat{q}$	$\hat{a}$
	obim=100							obim=100						
GMM_W	0.1193	0.2701	0.2125	0.1941	0.5288	0.3474	3.0193	0.1061	0.2593	0.2218	0.1789	0.5221	0.3701	15.0338
	0.1229	0.1194	0.1221	0.1039	0.1165	0.1088	0.3108	0.1406	0.1032	0.153	0.1192	0.1045	0.0922	1.2568
GMM_I	0.1141	0.2669	0.1784	0.2073	0.5126	0.3409	3.0193	0.0923	0.2598	0.1579	0.1979	0.5165	0.353	15.0338
	0.1826	0.1574	0.1923	0.154	0.133	0.1222	0.3108	0.1867	0.1334	0.1786	0.168	0.1145	0.1039	1.2568
CML	0.1356	0.2736	0.2274	0.1756	0.5572	0.4418	2.9917	0.1082	0.2539	0.2076	0.1668	0.5332	0.4122	15.016
	0.1077	0.1481	0.1652	0.1284	0.1825	0.1891	0.2513	0.0574	0.0839	0.0818	0.0616	0.1841	0.1755	0.1283
	obim=500							obim=100						
GMM_W	0.1126	0.2534	0.2109	0.1792	0.5493	0.3872	3.0042	0.1065	0.2556	0.2117	0.1624	0.5349	0.3808	14.9269
	0.1018	0.0814	0.0995	0.0701	0.0521	0.0389	0.12	0.0404	0.0529	0.0663	0.0908	0.0225	0.0607	0.5627
GMM_I	0.1124	0.2587	0.1774	0.1877	0.5444	0.3747	3.0042	0.1096	0.2494	0.1671	0.1797	0.5354	0.3646	14.9269
	0.1224	0.0565	0.1044	0.0779	0.0681	0.0473	0.12	0.0566	0.0764	0.0764	0.1042	0.0392	0.0585	0.5627
CML	0.1111	0.257	0.2078	0.1663	0.5322	0.4208	3.0053	0.1028	0.247	0.198	0.1538	0.5456	0.3988	14.992
	0.0539	0.0798	0.102	0.0616	0.1348	0.146	0.1198	0.0262	0.0376	0.0374	0.0197	0.0774	0.0931	0.083
	obim=1000							obim=100						
GMM_W	0.1089	0.2505	0.2024	0.1603	0.5489	0.3965	3.0114	0.1004	0.251	0.2108	0.1614	0.5471	0.3901	14.9696
	0.041	0.0622	0.0371	0.0497	0.0329	0.0378	0.0899	0.0214	0.0445	0.0501	0.0644	0.0205	0.0267	0.3953
GMM_I	0.1114	0.2535	0.1867	0.1782	0.5552	0.3845	3.0114	0.1047	0.2545	0.1775	0.1634	0.5373	0.3724	14.9696
	0.0315	0.0615	0.0458	0.0676	0.0331	0.0452	0.0899	0.0394	0.0525	0.0526	0.074	0.0339	0.0257	0.3953
CML	0.1044	0.2524	0.2095	0.1555	0.5344	0.4011	3.0107	0.1011	0.2474	0.1966	0.151	0.5486	0.3953	14.9879
	0.0318	0.052	0.0697	0.0409	0.09	0.1067	0.0906	0.0183	0.0253	0.0226	0.0161	0.048	0.0604	0.1089

matrice $\boldsymbol{W}$ još više dobija na značaju. Već za uzorak obima 500, ocenjene vrednosti GMM_W metodom su vrlo blizu stvarnim vrednostima. Kada primenjujemo GMM_I metod na uzorke malog obima postoje odstupanja od stvarnih vrednosti, dok za uzorke obima 1000 dobijene ocene su sasvim dobre. Primetimo još da je vreme potrebno za izračunavanje znatno kraće kod GMM_I metoda nego kod ostala dva. Stoga, kada je vreme bitan faktor pri izračunavanju, GMM_I je bolji izbor za uzorke obima 1000 i veće.

3.2.4 Primena na stvarnim podacima

U ovom poglavlju razmatraćemo praktični aspekt BVDCINAR(1) modela. Model je baziran na binomnom tining operatoru, što nam sugeriše da je model pogodan za serije čiji procesi preživljavanja ne generišu nove događaje. S druge strane, marginalne raspodele nizova su geometrijske pa pripadaju skupu "samo-generišućih" nizova. Ova osobina obuhvaćena je kroz inovacioni proces. Izabraćemo nizove sa ovakvim osobinama iz baze podataka, koja se može naći na adresi `http://www.forecastingprinciples.com/index.php?option=com_content&view=article&id=47&Itemid=250`. Fokusiraćemo se na informacije iz policijske stanice broj 36055002700 iz Ročestera, na broj lakih prestupa (SIMPASS) i broj provala (BRG). Ova krivična dela koja se događaju u istom kraju grada, verovatno su počinjena od strane istih prestupnika, što ukazuje na zavisnost između nizova. Za aktivnosti je karakteristično da oštećena osoba nije potencijalni počinilac istih ovih dela. Tako, proces preživljavanja predstavlja broj ponovnih počinioca prestupa i on ne generiše nove prestupnike.

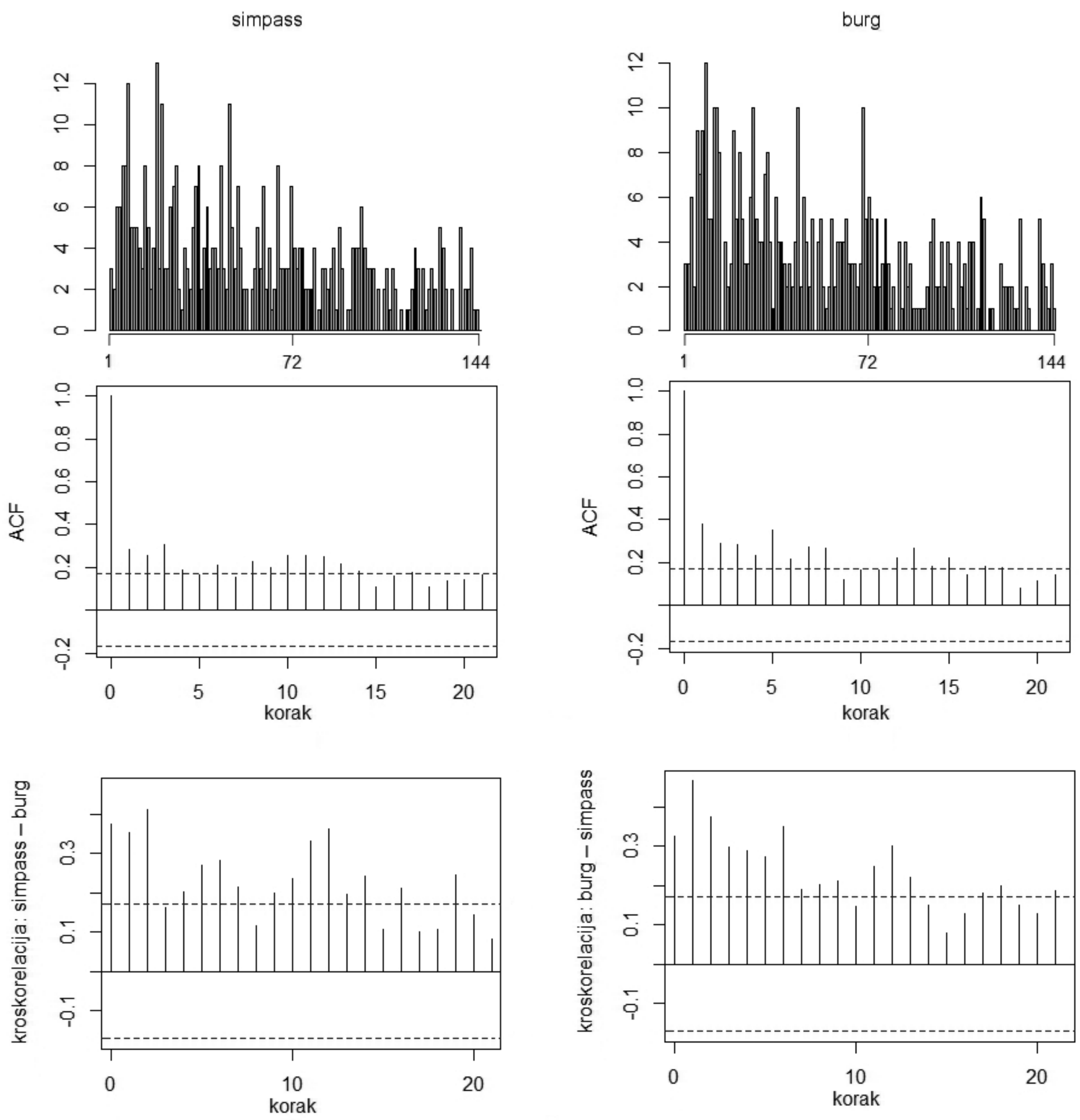
Tabela 3.5: Ocenjeni parametri sa standardnom devijacijom u zagradi, AIC, BIC, RMS za vremenske nizove SIMPASS i BRG.

Model	CML ocene	AIC	BIC	RMS SIMPASS	RMS BRG
BVDCINAR(1)	$\hat{\alpha}_1 = 0.314(0.089)$, $\hat{\alpha}_2 = 0.73(0.072)$ $\hat{\beta}_1 = 0.824(0.052)$, $\hat{\beta}_2 = 0.426(0.065)$ $\hat{p} = 0.516(0.107)$, $\hat{q} = 0.428(0.077)$ $\hat{a} = 3.27(0.302)$	1150.1	1170.28	2.39	2.18
BVGGINAR(1)	$\hat{\alpha} = 0.554(0.052)$, $\hat{\beta} = 0.574(0.044)$ $\hat{p} = 0.427(0.101)$, $\hat{q} = 0.472(0.099)$ $\hat{a} = 2.456(0.277)$	1158.3	1178.48	2.41	2.23
BVNGINAR(1)	$\hat{\alpha} = 0.698(0.074)$, $\hat{\beta} = 0.768(0.087)$ $\hat{p} = 0.505(0.061)$, $\hat{q} = 0.612(0.085)$ $\hat{\mu} = 3.327(0.522)$	1153.94	1168.35	2.43	2.23
FULLBVPOIBINAR(1)	$\hat{\alpha}_{11} = 0.164(0.058)$, $\hat{\alpha}_{12} = 0.173(0.057)$ $\hat{\alpha}_{21} = 0.291(0.057)$, $\hat{\alpha}_{22} = 0.206(0.054)$ $\hat{\lambda}_1 = 1.78(0.283)$, $\hat{\lambda}_2 = 1.273(0.26)$ $\hat{\phi} = 0.45(0.186)$	1164.35	1184.53	2.42	2.25
BVPOIBINAR(1)	$\hat{\alpha}_1 = 0.182(0.058)$, $\hat{\lambda}_1 = 2.774(0.239)$ $\hat{\alpha}_2 = 0.239(0.055)$, $\hat{\lambda}_2 = 2.615(0.227)$ $\hat{\phi} = 0.541(0.207)$	1197.52	1211.94	2.46	2.4
BVNBIBINAR(1)	$\hat{\alpha}_1 = 0.155(0.07)$, $\hat{\lambda}_1 = 2.866(0.306)$ $\hat{\alpha}_2 = 0.222(0.066)$, $\hat{\lambda}_2 = 2.675(0.288)$ $\hat{\beta} = 0.273(0.065)$	1153.15	1167.56	2.46	2.41

Takođe, možemo primetiti da je kod oba niza odnos disperzije i srednje vrednosti veći od jedan, što na neki način sugeriše da bi geometrijska raspodela mogla biti adekvatna. Ovi nizovi sadrže 132 opservacije od januara 1991. do decembra 2001. godine. Ova dva niza su pozitivno korelisana i imaju koeficijent korelacije 0.32. Uzoračke sredine nizova su 3.39 i 3.43, a uzoračke disperzije 6.5 i 6.61 za SIMPASS i BRG redom. Za poređenje BVDCINAR(1) modela, uzećemo dvodimenzionalne modele koje su uveli Ristić, Nastić, Jayakumar i Bakouch (2012) (BVNGINAR(1)), Pedeli i Karlis (2011) (BVPOIBINAR(1) i BVNBIBINAR(1)), Pedeli i Karlis (2013) (FULLBVPOIBINAR(1)) i model razmatran u ovom poglavlju ali sa istim parametrima tining operatora (BVGGINAR(1)). Poređenje ne implicira da je neki model najbolji, već samo da su konkretne serije bolje opisane tim modelom. Kao kriterijume za poređenje koristićemo Akaike informacioni kriterijum (AIC), Bajesov informacioni kriterijum (BIC) i srednjekvadratnu grešku (RMS).

Grafik 3.4 pokazuje prisustvo autokorelacije kod ovih serija. Takođe, kroskorelacioni grafici ukazuju na značajnu koreliranost sa korakom jedan između nizova. Rezultati dobijeni razmatranim modelima sumirani su u tabeli 3.5. Ocene nepoznatih parametara dobijene su CML metodom jer želimo da uvažimo raspodelu posmatranih nizova.

Tabela 3.5 pokazuje da je BVDCINAR(1) model najbolji izbor za posmatrane serije. Postiže najnižu AIC vrednost, dok je BIC vrednost samo malo iznad BIC vrednosti BVNGINAR(1) i BVNBIBINAR(1) modela, ali ima RMS manji za oba niza, a najveće poboljšanje je ostvareno kod RMS za BRG niz. Primetimo razliku između parametara α_1 i α_2,



Slika 3.4: Trakasti dijagrami, grafici autokorelacije i kroskorelacije za vremenske nizove SIMPASS i BRG.

a takođe i između β_1 i β_2. Ove vrednosti u opšte nisu slične, pa bi pretpostvaka o njihovoj jednakosti bila pogrešna. To se potvrđuje i kroz rezultate postignute BVDCINAR(1) i BVGGINAR(1) modelima. Postoje poboljšanja po sva tri kriterijuma kad pretpostavimo da ovi parametri nisu jednaki. Pomenimo još da su vrednosti parametara p i q daleko od 1 i 0, što takođe potvrđuje međusobnu zavisnost ova dva niza.

Glava 4

Dvodimenzionalni model sa slučajnim koeficijentima i zavisnim inovacionim procesima

Modeli koji će se izučavati u ovom poglavlju definisani su preko slučajnih koeficijenata ali za razliku od do sada razmatranih modela, imaju zavisne inovacione procese. Procesi preživljavanja su sada definisani kao nepotpune autoregresivne komponente posmatranog vremenskog niza. Drugim rečima, model sa verovatnoćom p ima autoregresivnu komponentu dok je sa verovatnoćom $1 - p$ ta komponenta izostavljena. Jednodimenzionalne modele sa ovakvim procesima preživljavanja posmatrali su Zheng, Basawa i Datta (2007) i Bakouch i Ristić (2010). Kako su koeficijenti kojima je opisana autoregresivnost slučajne promenljive, omogućena je kontrola uticaja prethodnog stanja procesa na trenutno stanje. Ovi modeli su pogodni za modelovanje dvodimenzionalnih slučajnih nizova kod kojih u pojedinim momentima nizovi nisu zavisni od vrednosti iz prethodnog stanja.

Razmatraćemo dva modela ovog tipa. Dok jedan pretpostavlja da su inovacioni procesi generisani dvodimenzionalnom Puasonovom raspodelom, drugi za zajedničku raspodelu inovacionih procesa uzima dvodimenzionalnu negativnu binomnu. Kako bismo opravdali uvođenje ovakvih modela dali smo primer primene modela na stvarnim podacima.

Poglavlje je podeljeno na dve celine. Najpre ćemo razmatrati model u opštem smislu bez uvođenja pretpostavke o raspodeli inovacionih procesa. Pored egzistencije dokazaćemo i statističke osobine modela. Zatim ćemo detaljno diskutovati model kod koga su inovacioni procesi generisani dvodimenzionalnom Puasonovom raspodelom. Izvešćemo metode za ocenjivanje nepoznatih parametara i dokazati asimptotsku raspodelu tih ocena. Daćemo primer primene modela gde ćemo posmatrati dva vremenska niza stvarnih podataka. Navešćemo jednu od mogućih modifikacija modela gde ćemo posmatrati model kod koga su inovacioni procesi generisani dvodimenzionalnom negativnom binomnom raspodelom.

4.1 Opšta definicija modela

U ovom poglavlju definisaćemo dvodimenzionalni autoregresivni model reda jedan za nenegativne celobrojne vrednosti sa zavisnim inovacionim procesima, pri čemu nećemo uvoditi pretpostavku o zajedničkoj raspodeli inovacionih procesa. Posmatrajući ovako opštu formu, dokazaćemo postojanje modela, a odredićemo i momente i korelacionu strukturu.

Dvodimenzionalni vremenski niz $\{(X_{1,t}, X_{2,t})\}_{t\in\mathbb{Z}}$ definisan je jednačinama

$$X_{1,t} = \begin{cases} \alpha_1 \circ X_{1,t-1} + \varepsilon_{1,t}, & \text{s.v. } p_1, \\ \varepsilon_{1,t}, & \text{s.v. } 1 - p_1, \end{cases} \tag{4.1}$$

$$X_{2,t} = \begin{cases} \alpha_2 \circ X_{2,t-1} + \varepsilon_{2,t}, & \text{s.v. } p_2, \\ \varepsilon_{2,t}, & \text{s.v. } 1 - p_2, \end{cases} \tag{4.2}$$

gde su $\alpha_1, \alpha_2 \in (0,1)$ i $p_1, p_2 \in [0,1]$. Binomni tining operator definisan je kao $\alpha_j \circ X_{j,t} = \sum_{i=1}^{X_{j,t}} B_{ji}$, gde je $\{B_{ji}\}$ niz međusobno nezavisnih jednako raspodeljenih slučajnih promenljivih sa Bernulijevom raspodelom i parametrom α_j, $j = 1, 2$. Brojački nizovi koji definišu $\alpha_1 \circ X_{1,t}$ i $\alpha_2 \circ X_{2,t}$ su međusobno nezavisni, pa su i slučajne promenljive $\alpha_1 \circ X_{1,t}$ i $\alpha_2 \circ X_{2,t}$ međusobno nezavisne za poznate vrednosti $X_{1,t}$ i $X_{2,t}$. Slučajne promenljive $\varepsilon_{1,t}$ i $\varepsilon_{2,t}$ su u opštem slučaju međusobno zavisne jer pretpostavljamo da su generisane nekom dvodimenzionalnom raspodelom, dok su nezavisne od brojačkih nizova za svako $t \in \mathbb{N}_0$. Još važi da je slučajni vektor $(\varepsilon_{1,t}, \varepsilon_{2,t})$ nezavisan od $(X_{1,s}, X_{2,s})$ za $s < t$.

Slično kao u poglavlju 2.1, definisaćemo nezavisne slučajne promenljive α_{1t} i α_{2t} tako da je

$$P(\alpha_{1t} = \alpha_1) = 1 - P(\alpha_{1t} = 0) = p_1$$
$$P(\alpha_{2t} = \alpha_2) = 1 - P(\alpha_{2t} = 0) = p_2.$$

Sada jednačine (4.1) i (4.2) možemo zapisati kao

$$X_{1,t} = \alpha_{1t} \circ X_{1,t-1} + \varepsilon_{1,t}, \quad t \in \mathbb{N},$$
$$X_{2,t} = \alpha_{2t} \circ X_{2,t-1} + \varepsilon_{2,t}, \quad t \in \mathbb{N}.$$

Tako smo dobili nenegativne celobrojne autoregresivne vremenske nizove reda jedan sa slučajnim koeficijentima. Gornje jednačine možemo da zapišemo i u matričnom obliku uvođenjem slučajne matrice $\boldsymbol{A_t} = \begin{bmatrix} \alpha_{1t} & 0 \\ 0 & \alpha_{2t} \end{bmatrix}$ i slučajnih vektora $\boldsymbol{Z}_t = (X_{1,t}, X_{2,t})'$ i

$\boldsymbol{e}_t = (\varepsilon_{1,t}, \varepsilon_{2,t})'$. Sada naš model ima oblik

$$\boldsymbol{Z}_t = \boldsymbol{A}_t \circ \boldsymbol{Z}_{t-1} + \boldsymbol{e}_t, \ \ t \in \mathbb{N}, \tag{4.3}$$

gde je $\boldsymbol{A}_t \circ$ definisano kao množenje matrica pri čemu se umesto operatora množenja primenjuje binomni tining operator. Model definisan jednačinom (4.3) je proces Markova reda jedan. Primetimo da je očekivanje slučajne matrice $\boldsymbol{A}_t$ jednako

$$E\boldsymbol{A}_t = \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \alpha_1 p_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 p_2 \end{bmatrix}.$$

Kako je $det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = (\alpha_1 p_1 - \lambda)(\alpha_2 p_2 - \lambda)$, zaključujemo da matrica $\boldsymbol{A}$ ima sopstvene vrednosti $\lambda_1 = \alpha_1 p_1$ i $\lambda_2 = \alpha_2 p_2$, a one se nalaze unutar jediničnog kruga. Prema tome, prateći diskusiju iz Latour (1997) matrica $\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}$ je regularna. Na osnovu osobina binomnog tining operatora dobijamo da važi sledeća lema.

Lema 4.1 (Popović (2015*a*), lema 2.1). *Za slučajnu matricu $\boldsymbol{A}_t$ i slučajni vektor $\boldsymbol{Z} = (X, Y)'$ važi:*

1. $E(\boldsymbol{A}_t \circ \boldsymbol{Z}) = \boldsymbol{A} E \boldsymbol{Z}$
2. $E((\boldsymbol{A}_t \circ \boldsymbol{Z})(\boldsymbol{A}_t \circ \boldsymbol{Z})') = \boldsymbol{A} E(\boldsymbol{Z}\boldsymbol{Z}')\boldsymbol{A} + \begin{bmatrix} \alpha_1^2 p_1(1-p_1)EX^2 & 0 \\ 0 & \alpha_2^2 p_2(1-p_2)EY^2 \end{bmatrix}$
$+ \begin{bmatrix} \alpha_1 p_1(1-\alpha_1)EX & 0 \\ 0 & \alpha_2 p_2 (1-\alpha_2)EY \end{bmatrix}.$

Dokaz: Prva osobina sledi direktno iz osobina binomnog tining operatora. Druga osobina sledi na osnovu leme 3.13 kada je $\alpha_2 = \beta_2 = 0$. □

Lema 4.2. *Za slučajnu matricu $\boldsymbol{A}_t$ i slučajni vektor $\boldsymbol{Z} = (X, Y)'$, važi*

$$\boldsymbol{A}_t \circ (\boldsymbol{A}_{t-1} \circ \boldsymbol{Z}) \stackrel{d}{=} (\boldsymbol{A}_t \cdot \boldsymbol{A}_{t-1}) \circ \boldsymbol{Z}.$$

Dokaz: Primetimo da je

$$\boldsymbol{A}_t \circ (\boldsymbol{A}_{t-1} \circ \boldsymbol{Z} \circ) = \begin{bmatrix} \alpha_{1t} \circ (\alpha_{1t-1} \circ X) & 0 \\ 0 & \alpha_{2t} \circ (\alpha_{2t-1} \circ Y) \end{bmatrix}.$$

Slučajne promenljive α_{it} i α_{jt-1}, su međusobno nezavisne za svako $i, j = 1, 2$ i $t \in \mathbb{N}$ pa imamo da je

$$P(\alpha_{1t} \circ (\alpha_{1t-1} \circ X) = x, \alpha_{2t} \circ (\alpha_{2t-1} \circ Y) = y)$$

$$
\begin{aligned}
&= p_1p_2P(\alpha_1 \circ (\alpha_{1t-1} \circ X) = x, \alpha_2 \circ (\alpha_{2t-1} \circ Y) = y) \\
&+ (1-p_1)p_2P(0 \circ (\alpha_{1t-1} \circ X) = x, \alpha_2 \circ (\alpha_{2t-1} \circ Y) = y) \\
&+ p_1(1-p_2)P(\alpha_1 \circ (\alpha_{1t-1} \circ X) = x, 0 \circ (\alpha_{2t-1} \circ Y) = y) \\
&+ (1-p_1)(1-p_2)P(0 \circ (\alpha_{1t-1} \circ X) = x, 0 \circ (\alpha_{2t-1} \circ Y) = y).
\end{aligned}
$$

Na osnovu leme 3.11, prvi sabirak ove jednačine dalje glasi

$$
\begin{aligned}
&p_1p_2P(\alpha_1 \circ (\alpha_{1t-1} \circ X) = x, \alpha_2 \circ (\alpha_{2t-1} \circ Y) = y) \\
&\quad = p_1p_2[p_1p_2P(\alpha_1 \circ (\alpha_1 \circ X) = x, \alpha_2 \circ (\alpha_2 \circ Y) = y) \\
&\quad + (1-p_1)p_2P(\alpha_1 \circ (0 \circ X) = x, \alpha_2 \circ (\alpha_2 \circ Y) = y) \\
&\quad + p_1(1-p_2)P(\alpha_1 \circ (\alpha_1 \circ X) = x, \alpha_2 \circ (0 \circ Y) = y) \\
&\quad + (1-p_1)(1-p_2)P(\alpha_1 \circ (0 \circ X) = x, \alpha_2 \circ (0 \circ Y) = y)] \\
&\quad = p_1p_2[p_1p_2P((\alpha_1 \cdot \alpha_1) \circ X = x, (\alpha_2 \cdot \alpha_2) \circ Y = y) \\
&\quad + (1-p_1)p_2P((\alpha_1 \cdot 0) \circ X = x, (\alpha_2 \cdot \alpha_2) \circ Y = y) \\
&\quad + p_1(1-p_2)P((\alpha_1 \cdot \alpha_1) \circ X = x, (\alpha_2 \cdot 0) \circ Y = y) \\
&\quad + (1-p_1)(1-p_2)P((\alpha_1 \cdot 0) \circ X = x, (\alpha_2 \cdot 0) \circ Y = y)] \\
&\quad = p_1p_2P((\alpha_1 \cdot \alpha_{1t-1}) \circ X = x, (\alpha_2 \cdot \alpha_{2t-1}) \circ Y = y).
\end{aligned}
$$

Na isti način možemo predstaviti i ostala tri sabirka polazne jednačine, što na kraju implicira da je

$$
P(\alpha_{1t} \circ (\alpha_{1t-1} \circ X) = x, \alpha_{2t} \circ (\alpha_{2t-1} \circ Y) = y) = P((\alpha_{1t} \cdot \alpha_{1t-1}) \circ X = x, (\alpha_{2t} \cdot \alpha_{2t-1}) \circ Y = y),
$$

čime je lema dokazana. □

Lema 4.3. *Proizvod niza slučajnih matrica $\{\boldsymbol{A}_t\}$ je slučajna matrica definisana kao*

$$
\prod_{i=1}^{n} \boldsymbol{A}_i = \begin{bmatrix} \alpha_{1n} & 0 \\ 0 & \alpha_{2n} \end{bmatrix},
$$

gde je $\alpha_{in} : \begin{pmatrix} \alpha_i^n & 0 \\ p_i^n & 1-p_i^n \end{pmatrix}$, $i = 1, 2$.

Dokaz: Dokaz ćemo izvesti matematičkom indukcijom. Primetimo da je

$$
\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2 = \begin{bmatrix} \alpha_{11}\alpha_{12} & 0 \\ 0 & \alpha_{21}\alpha_{22} \end{bmatrix},
$$

gde imamo da je $P(\alpha_{i1}\alpha_{i2} \neq 0) = P(\alpha_{i1}\alpha_{i2} = \alpha_i^2) = p_i^2$, $i = 1, 2$. Još važi da je $P(\alpha_{i1}\alpha_{i2} =$

$0) = 1 - p_i^2$, $i = 1, 2$. Pretpostavimo da ovo važi za prvih n slučajnih matrica. Onda je

$$\prod_{i=1}^{n} \boldsymbol{A}_i \cdot \boldsymbol{A}_{n+1} = \begin{bmatrix} \alpha_{1n} & 0 \\ 0 & \alpha_{2n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_{1n+1} & 0 \\ 0 & \alpha_{2n+1} \end{bmatrix}.$$

Sada je po indukcijskoj pretpostavci $P(\alpha_{in}\alpha_{in+1} \neq 0) = P(\alpha_{in}\alpha_{in+1} = \alpha_i^n \alpha_i) = p_i^n p_i = p_i^{n+1}$. Takođe važi da je $P(\alpha_{in}\alpha_{in+1} = 0) = 1 - p_i^{n+1}$, čime je lema dokazana. $\square$

Sledeća teorema daje nam dokaz o postojanju modela definisanog jednačinom (4.3).

Teorema 4.4 (Popović (2015*a*), teorema 2.1). *Postoji jedinstveno strogo stacionarno, ergodično rešenje jednačine (4.3).*

Dokaz: Primenom jednačine (4.3) k-puta i prateći rezultate leme 4.2, proces $\boldsymbol{Z}_t$ možemo zapisati kao

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Z}_t &= \boldsymbol{A}_t \circ (\boldsymbol{A}_{t-1} \circ \boldsymbol{Z}_{t-2} + \boldsymbol{e}_{t-1}) + \boldsymbol{e}_t \\ &= \boldsymbol{A}_t \circ \boldsymbol{A}_{t-1} \circ \ldots \boldsymbol{A}_{t-k+1} \circ \boldsymbol{Z}_{t-k} + \boldsymbol{A}_t \circ \boldsymbol{A}_{t-1} \circ \ldots \boldsymbol{A}_{t-k+2} \circ \boldsymbol{e}_{t-k+1} + \ldots + \boldsymbol{A}_t \circ \boldsymbol{e}_{t-1} + \boldsymbol{e}_t \\ &\stackrel{d}{=} \left(\prod_{i=0}^{k-1} \boldsymbol{A}_{t-i} \right) \circ \boldsymbol{Z}_{t-k} + \sum_{i=1}^{k} \left(\prod_{j=0}^{i-1} \boldsymbol{A}_{t-j} \right) \circ \boldsymbol{e}_{t-i} + \boldsymbol{e}_t. \end{aligned}$$

Označimo sa $\boldsymbol{Y}_t = \boldsymbol{Z}_t - \sum_{i=1}^{k} \left(\prod_{j=0}^{i-1} \boldsymbol{A}_{t-j} \right) \circ \boldsymbol{e}_{t-i} - \boldsymbol{e}_t$. Tada

$$\begin{aligned} E\left(\boldsymbol{Y}_t \boldsymbol{Y}_t^{'}\right) &= E\left[\left(\left(\prod_{i=0}^{k-1} \boldsymbol{A}_{t-i} \right) \circ \boldsymbol{Z}_{t-k} \right) \left(\left(\prod_{i=0}^{k-1} \boldsymbol{A}_{t-i} \right) \circ \boldsymbol{Z}_{t-k} \right)^{'} \right] \\ &= E((\boldsymbol{A}_{kt} \circ \boldsymbol{Z}_{t-k}) (\boldsymbol{A}_{kt} \circ \boldsymbol{Z}_{t-k})^{'}) \end{aligned} \tag{4.4}$$

gde je matrica $\boldsymbol{A}_{kt}$ definisana u lemi 4.3. Ona je oblika

$$\boldsymbol{A}_{kt} = \begin{bmatrix} \alpha_{1kt} & 0 \\ 0 & \alpha_{2kt} \end{bmatrix},$$

a elementi ove matrice su slučajne promenljive raspodeljene kao

$$\alpha_{1kt} : \begin{pmatrix} \alpha_1^k & 0 \\ p_1^k & 1 - p_1^k \end{pmatrix} \text{ i } \alpha_{2kt} : \begin{pmatrix} \alpha_2^k & 0 \\ p_2^k & 1 - p_2^k \end{pmatrix}.$$

Na osnovu osobine 2 iz leme 4.1 jednačina (4.4) postaje

$$E(\boldsymbol{Y}_t \boldsymbol{Y}_t^{'}) = \begin{bmatrix} (\alpha_1 p_1)^k & 0 \\ 0 & (\alpha_2 p_2)^k \end{bmatrix} E(\boldsymbol{Z}_t \boldsymbol{Z}_t^{'}) \begin{bmatrix} (\alpha_1 p_1)^k & 0 \\ 0 & (\alpha_2 p_2)^k \end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix} \alpha_1^{2k}p_1^k(1-p_1^k)EX_{1,t}^2 & 0 \\ 0 & \alpha_2^{2k}p_2^k(1-p_2^k)EX_{2,t}^2 \end{bmatrix}$$
$$+\begin{bmatrix} (\alpha_1 p_1)^k(1-\alpha_1^k)EX_{1,t} & 0 \\ 0 & (\alpha_2 p_2)^k(1-\alpha_2^k)EX_{2,t} \end{bmatrix}.$$

Prema tome, $E(\boldsymbol{Y}_t\boldsymbol{Y}_t^{'})$ teži ka nula matrici kad k teži beskonačnosti, čime smo dokazali postojanje rešenja u srednje kvadratnom smislu. Možemo zaključiti da je rešenje jednačine (4.3) u srednje kvadratnom smislu oblika

$$\boldsymbol{Z}_t = \sum_{i=1}^{\infty}\left(\prod_{j=0}^{i-1}\boldsymbol{A}_{t-j}\right)\circ \boldsymbol{e}_{t-i}+\boldsymbol{e}_t. \tag{4.5}$$

Kako rešenje (4.5) ima istu funkcionalnu formu za svako t, zaključujemo da je stacionarno. Kako je rešenje stacionarno to sledi da je i $\{\boldsymbol{Z}_t = (X_{1t}, X_{2t})'\}$ stacionaran vremenski niz. Sada na osnovu jednačine (4.3) i konstatacije da je matrica $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ regularna dobijamo da je

$$E\boldsymbol{Z}_t = (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{\mu}_e, \tag{4.6}$$

gde je $\boldsymbol{\mu}_e$ očekivanje slučajnog vektora $\boldsymbol{e}_t$.

Dokažimo jedinstvenost rešenja. Pretpostavimo da postoji još jedno rešenje $\boldsymbol{Z}_t^*$. Pokažimo da je u srednjekvadratnom smislu razlika između ova dva rešenja jednaka nuli. Kako je $\boldsymbol{Z}_t^*$ takođe rešenje jednačine (4.3), to prema jednačini (4.6) važi $E(\boldsymbol{Z}_t) = E(\boldsymbol{Z}_t^*)$. Dalje, na osnovu stacionarnosti rešenja važi da je

$$\begin{aligned} E(X_{1,t}-X_{1,t}^*)^2 &= EX_{1,t}^2 - 2EX_{1,t}EX_{1,t}^* + EX_{1,t}^{*\ 2} \\ &= EX_{1,t-1}^2 - 2EX_{1,t-1}EX_{1,t-1}^* + EX_{1,t-1}^{*2} = E(X_{1,t-1}-X_{1,t-1}^*)^2, \end{aligned} \tag{4.7}$$

kao i da je

$$\begin{aligned} E\left((X_{1,t}-X_{1,t}^*)(X_{2,t}-X_{2,t}^*)\right) &= E(X_{1,t}X_{2,t}) - EX_{1,t}EX_{2,t}^* - EX_{1,t}^*EX_{2,t} + E(X_{1,t}^*X_{2,t}^*) \\ &= E\left((X_{1,t-1}-X_{1,t-1}^*)(X_{2,t-1}-X_{2,t-1}^*)\right). \end{aligned} \tag{4.8}$$

Na osnovu osobine 2 iz leme 4.1 imamo da je

$$\begin{aligned} E((\boldsymbol{Z}_t-\boldsymbol{Z}_t^*)(\boldsymbol{Z}_t-\boldsymbol{Z}_t^*)') &= E((\boldsymbol{A}_t\circ(\boldsymbol{Z}_{t-1}-\boldsymbol{Z}_{t-1}^*))(\boldsymbol{A}_t\circ(\boldsymbol{Z}_{t-1}-\boldsymbol{Z}_{t-1}^*))') = \\ &= \boldsymbol{A}E((\boldsymbol{Z}_{t-1}-\boldsymbol{Z}_{t-1}^*)(\boldsymbol{Z}_{t-1}-\boldsymbol{Z}_{t-1}^*)')\boldsymbol{A}' \\ &+\begin{bmatrix} \alpha_1^2p_1(1-p_1)E(X_{1,t-1}-X_{1,t-1}^*)^2 & 0 \\ 0 & \alpha_2^2p_2(1-p_2)E(X_{2,t-1}-X_{2,t-1}^*)^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$+\begin{bmatrix} \alpha_1 p_1(1-\alpha_1)E(X_{1,t-1}-X^*_{1,t-1}) & 0 \\ 0 & \alpha_2 p_2(1-\alpha_2)E(X_{2,t-1}-X^*_{2,t-1}) \end{bmatrix}.$$

Iz ove jednakosti, po elementima, važi da je

$$\begin{aligned}
E(X_{1,t}-X^*_{1,t})^2 &= E(\alpha_{1t}\circ X_{1,t-1}+\varepsilon_t-\alpha_{1t}\circ X^*_{1,t-1}-\varepsilon_t)^2 = E(\alpha_{1t}\circ(X_{1,t-1}-X^*_{1,t-1}))^2 \\
&= \alpha_1^2 p_1 E(X_{1,t-1}-X^*_{1,t-1})^2 + \alpha_1 p_1(1-\alpha_1)E(X_{1,t-1}-X^*_{1,t-1}) \\
&= \alpha_1^2 p_1^2 E(X_{1,t-1}-X^*_{1,t-1})^2 + \alpha_1^2 p_1(1-p_1)E(X_{1,t-1}-X^*_{1,t-1})^2 \\
&+ \alpha_1 p_1(1-\alpha_1)E(X_{1,t-1}-X^*_{1,t-1}) \\
&\le \alpha_1 p_1^2 E(X_{1,t-1}-X^*_{1,t-1})^2 + \alpha_1 p_1(1-p_1)E(X_{1,t-1}-X^*_{1,t-1})^2 \\
&= \alpha_1 p_1 E(X_{1,t-1}-X^*_{1,t-1})^2,
\end{aligned}$$

kao i

$$\begin{aligned}
&E\left((X_{1,t}-X^*_{1,t})(X_{2,t}-X^*_{2,t})\right) \\
&= E\left[E\left((\alpha_{1t}\circ(X_{1,t-1}-X^*_{1,t-1}))\cdot(\alpha_{2t}\circ(X_{2,t-1}-X^*_{2,t-1}))|X_{1,t-1},X^*_{1,t-1},X_{2,t-1},X^*_{2,t-1}\right)\right] \\
&= E\left[E\left(\alpha_{1t}\circ(X_{1,t-1}-X^*_{1,t-1})|X_{1,t-1},X^*_{1,t-1}\right)\cdot E\left(\alpha_{2t}\circ(X_{2,t-1}-X^*_{2,t-1})|X_{2,t-1},X^*_{2,t-1}\right)\right] \\
&= E\left[\alpha_{1t}(X_{1,t-1}-X^*_{1,t-1})\cdot\alpha_{2t}(X_{2,t-1}-X^*_{2,t-1})\right] \\
&= E\alpha_{1t}E\alpha_{2t}E\left((X_{1,t-1}-X^*_{1,t-1})(X_{2,t-1}-X^*_{2,t-1})\right) \\
&= \alpha_1\alpha_2 p_1 p_2 E\left((X_{1,t-1}-X^*_{1,t-1})(X_{2,t-1}-X^*_{2,t-1})\right).
\end{aligned}$$

Sada na osnovu jednačina (4.7) i (4.8) imamo da važi da je $E(X_{1,t}-X^*_{1,t})^2 = 0$ i $E\left((X_{1,t}-X^*_{1,t})(X_{2,t}-X^*_{2,t})\right) = 0$. Zaključujemo da je $E((\boldsymbol{Z}_t-\boldsymbol{Z}_t^*)(\boldsymbol{Z}_t-\boldsymbol{Z}_t^*)') = 0$, što implicira da je rešenje $\boldsymbol{Z}_t$ jedinstveno u srednjekvadratnom smislu.

Dalje, $\boldsymbol{e}_i$ i $\boldsymbol{e}_j$ su nezavisni za $i \neq j$. Slučajni vektori $\boldsymbol{B}_{1i}$ i $\boldsymbol{B}_{2j}$, koji su generisani brojačkim nizovima $\{B_{1t}\}$ i $\{B_{2t}\}$, su međusobno nezavisni za svako $i,j \in \mathbb{N}$, a nezavisni su i od $\boldsymbol{e}_i$. Dakle, $\{(\boldsymbol{e}_t, \boldsymbol{B}_{1t}, \boldsymbol{B}_{2t})\}$ je niz nezavisnih jednako raspodeljenih slučajnih vektora, pa je on i ergodičan. Neka je σ-algebra $\mathcal{G}_t$ generisana sa $(\boldsymbol{Z}_t, \boldsymbol{Z}_{t-1}, ...)$. Onda je $\mathcal{G}_t$ podalgebra σ-algebre $\mathcal{F}_t$ koja je generisana sa $(\boldsymbol{e}_t, \boldsymbol{B}_{1t}, \boldsymbol{B}_{2t}, \boldsymbol{e}_{t-1}, \boldsymbol{B}_{1t-1}, \boldsymbol{B}_{2t-1}, \ldots)$ za svako t. Stoga zaključujemo da je i niz $\{\boldsymbol{Z}_t\}$ ergodičan. $\square$

Napomena 2. *Za neke specijalne slučajeve ovaj model se svodi na poznate modele:*

- *Ako su $p_1 = 1$ i $p_2 = 1$ model se svodi na model koji su uveli Pedeli i Karlis (2011).*
- *Ako pretpostavimo nezavisnost između nizova $\{\varepsilon_{1,t}\}$ i $\{\varepsilon_{2,t}\}$, tada su (4.1) i (4.2) dva nezavisna jednodimenzionalna niza koje su razmatrali Bakouch i Ristić (2010).*

4.1.1 Osobine modela

U ovom potpoglavlju diskutovaćemo kako marginalnu tako i zajedničku raspodelu za uvedeni model. Takođe, izvešćemo uslovnu raspodelu verovatnoća i uslovne i bezuslovne momente. Uslovni momenti su izvedeni za k koraka unapred i diskutovane su njihove asimptotske osobine.

Raspodelu ćemo izvesti pomoću funkcije generatrisa verovatnoće. Najpre obratimo pažnju na funkciju generatrisa verovatnoća slučajne promenljive $X_{i,t}$, $i = 1, 2$ koja je data kao

$$\begin{aligned}
\Phi_{X_{i,t}}(s) &= p_i \Phi_{\alpha_i \circ X_{i,t-1}}(s)\Phi_{\varepsilon_{i,t}}(s) + (1-p_i)\Phi_{\varepsilon_{i,t}}(s) \\
&= p_i \Phi_{X_{i,t-1}}(1-\alpha_i(1-s))\Phi_{\varepsilon_{i,t}}(s) + (1-p_i)\Phi_{\varepsilon_{i,t}}(s) \\
&= p_i^2 \Phi_{X_{i,t-2}}(1-\alpha_i^2(1-s))\Phi_{\varepsilon_{i,t-1}}(1-\alpha_i(1-s))\Phi_{\varepsilon_{i,t}}(s) \\
&+ p_i(1-p_i)\Phi_{\varepsilon_{i,t-1}}(1-\alpha_i(1-s))\Phi_{\varepsilon_{i,t}}(s) + (1-p_i)\Phi_{\varepsilon_{i,t}}(s) \\
&= p_i^k \Phi_{X_{i,t-k}}(1-\alpha_i^k(1-s)) \prod_{m=0}^{k-1} \Phi_{\varepsilon_{i,t-m}}(1-\alpha_i^m(1-s)) \\
&+ (1-p_i)\sum_{j=1}^{k} p_i^{j-1} \prod_{m=0}^{j-1} \Phi_{\varepsilon_{i,t-m}}(1-\alpha_i^m(1-s)). \qquad (4.9)
\end{aligned}$$

Kako se konstrukcija modela bazira na pretpostavci o zajedničkoj raspodeli inovacionih procesa, označimo sa μ_{ε_1} i μ_{ε_2} očekivane vrednosti, a sa $\sigma^2_{\varepsilon_1}$ i $\sigma^2_{\varepsilon_2}$ disperzije ovih procesa. Kovarijansu između inovacionih procesa označimo sa ϕ. Dobijamo za vremenske nizove $\{X_{i,t}\}$

$$E(X_{i,t}) = \frac{\mu_{\varepsilon_i}}{1-\alpha_i p_i}, \quad i = 1, 2. \qquad (4.10)$$

Dalje, imamo da je

$$\begin{aligned}
E(X_{i,t}^2) &= p_i E(\alpha_i \circ X_{i,t-1} + \varepsilon_{i,t})^2 + (1-p_i)E(\varepsilon_{i,t}^2) \\
&= \alpha_i^2 p_i E(X_{i,t}^2) + \alpha_i(1-\alpha_i)p_i E(X_{i,t}) + 2\alpha_i p_i E(X_{i,t})E(\varepsilon_{i,t}) + E(\varepsilon_{i,t}^2),
\end{aligned}$$

odakle sledi da je

$$E(X_{i,t}^2) = \frac{E(\varepsilon_{i,t})(\alpha_i(1-\alpha_i)p_i + 2\alpha_i p_i E(\varepsilon_{i,t})) + (1-\alpha_i p_i)E(\varepsilon_{i,t}^2)}{(1-\alpha_i^2 p_i)(1-\alpha_i p_i)}. \qquad (4.11)$$

Na osnovu jednačina (4.10) i (4.11) dobijamo disperziju slučajne promenljive $X_{i,t}$ koja glasi

$$Var(X_{i,t}) = \frac{\alpha_i p_i(1-\alpha_i)(1-\alpha_i p_i)\mu_{\varepsilon_i} + \alpha_i^2 p_i(1-p_i)\mu_{\varepsilon_i}^2 + (1-\alpha_i p_i)^2\sigma_{\varepsilon_i}^2}{(1-\alpha_i^2 p_i)(1-\alpha_i p_i)}, \quad i = 1, 2. \qquad (4.12)$$

Kovarijacija niza za k koraka računa se kao

$$
\begin{aligned}
&Cov(X_{i,t+k}, X_{i,t}) = p_i E((\alpha_i \circ X_{i,t+k-1})X_{i,t} + \varepsilon_{i,t+k}X_{i,t}) + (1-p_i)E(\varepsilon_{i,t+k}X_{i,t}) - (EX_{i,t})^2 \\
&= \alpha_i p_i E(X_{i,t+k-1}X_{i,t}) + E(\varepsilon_{i,t+k}X_t) - (EX_{i,t})^2 \\
&= \alpha_i p_i [p_i E((\alpha_i \circ X_{i,t+k-2})X_{i,t} + \varepsilon_{i,t+k-1}X_{i,t}) + (1-p_i)E(\varepsilon_{i,t+k-1}X_{i,t})] + E(\varepsilon_{i,t+k}X_t) - (EX_{i,t})^2 \\
&= \alpha_i^2 p_i^2 E(X_{i,t+k-2}X_{i,t}) + \alpha_i p_i E(\varepsilon_{i,t+k-1}X_t) + E(\varepsilon_{i,t+k}X_t) - (EX_{i,t})^2 \\
&= \alpha_i^k p_i^k E(X_{i,t}^2) - (EX_{i,t})^2 + \frac{\mu_{\varepsilon_i}^2}{1-\alpha_i p_i}\sum_{i=1}^{k}(\alpha_i p_i)^{i-1} \\
&= \alpha_i^k p_i^k \left(E(X_{i,t}^2) - (EX_{i,t})^2\right) + (EX_{i,t})^2 (\alpha_i^k p_i^k - 1) + \frac{\mu_{\varepsilon_i}^2 (1-\alpha_i^k p_i^k)}{(1-\alpha_i p_i)^2} \\
&= \alpha_i^k p_i^k \left(E(X_{i,t}^2) - (EX_{i,t})^2\right) + \frac{\mu_{\varepsilon_i}^2 (\alpha_i^k p_i^k - 1)}{(1-\alpha_i p_i)^2} + \frac{\mu_{\varepsilon_i}^2 (1-\alpha_i^k p_i^k)}{(1-\alpha_i p_i)^2} \\
&= \alpha_i^k p_i^k Var(X_{i,t}), \ \ i = 1, 2,
\end{aligned} \tag{4.13}
$$

pa imamo da ona teži nuli kad k teži beskonačnosti. Pre nego što odredimo kovarijaciju između slučajnih promenljivih $X_{1,t}$ i $X_{2,t}$ izračunaćemo očekivanje proizvoda ovih slučajnih promenljivih:

$$
\begin{aligned}
&E(X_{1,t}X_{2,t}) \\
&= p_1 p_2 E((\alpha_1 \circ X_{1,t-1} + \varepsilon_{1,t})(\alpha_2 \circ X_{2,t-1} + \varepsilon_{2,t})) + p_1(1-p_2)E((\alpha_1 \circ X_{1,t-1} + \varepsilon_{1,t})\varepsilon_{2,t}) \\
&+ (1-p_1)p_2 E(\varepsilon_{1,t}(\alpha_2 \circ X_{2,t-1} + \varepsilon_{2,t})) + (1-p_1)(1-p_2)E(\varepsilon_{1,t}\varepsilon_{2,t}) \\
&= p_1 p_2 E((\alpha_1 \circ X_{1,t-1})(\alpha_2 \circ X_{2,t-1})) + E((\alpha_1 \circ X_{1,t-1})\varepsilon_{2,t}) + E((\alpha_2 \circ X_{2,t-1})\varepsilon_{1,t}) + E(\varepsilon_{1,t}\varepsilon_{2,t}) \\
&= \alpha_1\alpha_2 p_1 p_2 E(X_{1,t-1}X_{2,t-1}) + \alpha_1 p_1 EX_{1,t-1}E\varepsilon_{2,t} + \alpha_2 p_2 EX_{2,t-1}E\varepsilon_{1,t} + E(\varepsilon_{1,t}\varepsilon_{2,t}).
\end{aligned}
$$

Onda je

$$
\begin{aligned}
&Cov(X_{1,t}, X_{2,t}) = E(X_{1,t}X_{2,t}) - EX_{1,t}EX_{2,t} = \\
&= \alpha_1\alpha_2 p_1 p_2 E(X_{1,t-1}X_{2,t-1}) + \alpha_1 p_1 EX_{1,t-1}E\varepsilon_{2,t} + \alpha_2 p_2 EX_{2,t-1}E\varepsilon_{1,t} + E(\varepsilon_{1,t}\varepsilon_{2,t}) \\
&- [\alpha_1\alpha_2 p_1 p_2 EX_{1,t-1}EX_{2,t-1} + \alpha_1 p_1 EX_{1,t-1}E\varepsilon_{2,t} + \alpha_2 p_2 EX_{2,t-1}E\varepsilon_{1,t} + E\varepsilon_{1,t}E\varepsilon_{2,t}] \\
&= \alpha_1\alpha_2 p_1 p_2 Cov(X_{1,t-1}, X_{2,t-1}) + Cov(\varepsilon_{1,t}, \varepsilon_{2,t}),
\end{aligned}
$$

odakle, na osnovu stacionarnosti niza $\{(X_{1,t}, X_{2,t})\}$ imamo da je

$$
Cov(X_{1,t}, X_{2,t}) = \frac{Cov(\varepsilon_{1,t}, \varepsilon_{2,t})}{1-\alpha_1\alpha_2 p_1 p_2}. \tag{4.14}
$$

Primećujemo da je kovarijacija između nizova proporcionalna kovarijaciji između inovacionih procesa. Na sličan način dobijamo da je

$$\begin{aligned}&E(X_{1,t+k},X_{2,t})=p_1\left[E(\alpha_1\circ X_{1,t+k-1}\cdot X_{2,t})+E(\varepsilon_{1,t+k}X_{2,t})\right]+(1-p_1)E(\varepsilon_{1,t+k}X_{2,t})\\&=\alpha_1p_1E(X_{1,t+k-1}X_{2,t})+E\varepsilon_{1,t+k}EX_{2,t}.\end{aligned}$$

Kovarijacija između nizova za k koraka dobija se kao

$$Cov(X_{i,t+k},X_{j,t})=\alpha_i^k p_i^k Cov(X_{i,t},X_{j,t}),\ \ i,j=1,2. \tag{4.15}$$

Iz jednačina (4.13) i (4.15) zaključujemo da kovarijacije teže nuli kad k teži beskonačnosti.

Na osnovu osobina binomnog tining operatora i definicije nizova $\{X_{1,t}\}$ i $\{X_{2,t}\}$ dobijamo da je uslovno očekivanje za k koraka unapred dato jednačinom

$$E(X_{i,t+k}|X_{1,t},X_{2,t})=\alpha_ip_iE(X_{i,t+k-1}|X_{1,t},X_{2,t})+\mu_{\varepsilon_i}=...=(\alpha_ip_i)^kX_{it}+\mu_{\varepsilon_i}\frac{1-(\alpha_ip_i)^k}{1-\alpha_ip_i}.$$

Zaključujemo iz gornje jednačine da uslovno očekivanje teži ka bezuslovnom kad k teži beskonačnosti. Pre nego što izvedemo i uslovnu disperziju procesa navešćemo sledeće jednakosti koje proizilaze iz osobina binomnog tining operatora primenjenog na posmatrani model:

$$\begin{aligned}E(\alpha_i\circ X_{i,t+k}|X_{1,t},X_{2,t})&=p_iE(\alpha_i\circ\alpha_i\circ X_{i,t+k-1}+\alpha_i\circ\varepsilon_{i,t+k}|X_{1,t},X_{2,t})+(1-p_i)E(\alpha_i\circ\varepsilon_{i,t+k})\\&=p_iE(\alpha_i^2\circ X_{i,t+k-1}|X_{1,t},X_{2,t})+E(\alpha_i\circ\varepsilon_{i,t+k}).\end{aligned}\tag{4.16}$$

Istim pristupom dolazimo i do

$$\begin{aligned}&E((\alpha_i\circ X_{i,t+k})^2|X_{1,t},X_{2,t})\\&=p_iE\left((\alpha_i\circ(\alpha_i\circ X_{t+k-1}+\varepsilon_{i,t+k}))^2|X_{1,t+k},X_{2,t+k}\right)+(1-p_i)E(\alpha_i\circ\varepsilon_{i,t+k})^2\\&=p_iE\left((\alpha_i^2\circ X_{i,t+k-1})^2|X_{1,t},X_{2,t}\right)+2\alpha_ip_iE(\alpha_i^2\circ X_{i,t+k-1}|X_{1,t},X_{2,t})E(\varepsilon_{i,t+k})\\&+E(\alpha_i\circ\varepsilon_{i,t+k})^2.\end{aligned}\tag{4.17}$$

Jednačine (4.16) i (4.17) odredjuju nam sledeći izraz:

$$\begin{aligned}&Var(\alpha_i\circ X_{i,t+k}|X_{1,t},X_{2,t})=p_iVar(\alpha_i^2\circ X_{i,t+k-1}|X_{1,t},X_{2,t})\\&+p_i(1-p_i)\left(E(\alpha_i^2\circ X_{i,t+k-1}|X_{1,t},X_{2,t})\right)^2+Var(\alpha_i\circ\varepsilon_{i,t+k})\\&=p_i^2Var(\alpha_i^3\circ X_{i,t+k-2}|X_{1,t},X_{2,t})+p_i^2(1-p_i)\left(E(\alpha_i^3\circ X_{i,t+k-2}|X_{1,t},X_{2,t})\right)^2\\&+Var(\alpha_i^2\circ\varepsilon_{i,t+k-1})+p_i(1-p_i)\left(E(\alpha_i^2\circ X_{i,t+k-1}|X_{1,t},X_{2,t})\right)^2+Var(\alpha_i\circ\varepsilon_{i,t+k})\\&=p_i^kVar(\alpha_i^{k+1}\circ X_{i,t}|X_{1,t},X_{2,t})\end{aligned}$$

$$+ (1-p_i)\sum_{j=1}^{k} p_i^j (E(\alpha_i^{j+1} \circ X_{1,t+k-j}|X_{1,t}, X_{2,t}))^2 + \sum_{j=0}^{k-1} p_i^j Var(\alpha_i^{j+1} \circ \varepsilon_{i,t+k-j}) \qquad (4.18)$$

Jednačina (4.18) nam je potrebna za izvođenje uslovne disperzije vremenskih nizova $\{X_{1,t}\}$ i $\{X_{2,t}\}$ za k koraka i ona se dobija kao

$$\begin{aligned}
&Var(X_{i,t+k}|X_{1,t}, X_{2,t})\\
&= p_i E((\alpha_i \circ X_{i,t+k-1})^2|X_{1,t}, X_{2,t}) + 2\alpha_i p_i E(X_{i,t+k-1}|X_{1,t}, X_{2,t})E\varepsilon_{i,t+k} + E\varepsilon_{i,t+k}^2\\
&- p_i^2 (E(\alpha_i \circ X_{i,t+k-1}|X_{1,t}, X_{2,t}))^2 - 2\alpha_i p_i E(X_{i,t+k-1}|X_{1,t}, X_{2,t})E\varepsilon_{i,t+k} - (E\varepsilon_{i,t+k})^2\\
&= p_i Var(\alpha_i \circ X_{i,t+k-1}|X_{1,t}, X_{2,t}) + p_i(1-p_i)(E(\alpha_i \circ X_{i,t+k-1}|X_{1,t}, X_{2,t}))^2 + Var(\varepsilon_{i,t+k})\\
&= p_i^k Var(\alpha_i^k \circ X_{i,t}|X_{1,t}, X_{2,t}) + (1-p_i)\sum_{j=1}^{k} p_i^j (E(\alpha_i^j \circ X_{i,t+k-j}|X_{1,t}, X_{2,t}))^2\\
&+ \sum_{j=0}^{k-1} p_i^j Var(\alpha_i^j \circ \varepsilon_{i,t+k-j})\\
&= p_i^k Var(\alpha_i^k \circ X_{i,t}|X_{1,t}, X_{2,t}) + (1-p_i)\left(\alpha_i^k p_i^k X_{i,t} + \frac{1-\alpha_i^k p_i^k}{1-\alpha_i p_i}\mu_{\varepsilon_i}\right)^2 \frac{1-\alpha_i^{2k} p_i^k}{1-\alpha_i^2 p_i}\alpha_i^2 p_i\\
&+ \sum_{j=0}^{k-1} p_i^j (\alpha_i^{2j}\sigma_{\varepsilon_i}^2 + \alpha_i^j (1-\alpha_i^j)\mu_{\varepsilon_i})\\
&= \alpha_i^k p_i^k (1-\alpha_i^k) X_{i,t}\\
&+ \left[(1-p_i)\left(\alpha_i^k p_i^k X_{i,t} + \frac{1-\alpha_i^k p_i^k}{1-\alpha_i p_i}\mu_{\varepsilon_i}\right)^2 \alpha_i^2 p_i + \sigma_{\varepsilon_i}^2 - \mu_{\varepsilon_i}\right] \frac{1-\alpha_i^{2k} p_i^k}{1-\alpha_i^2 p_i} + \mu_{\varepsilon_i}\frac{1-\alpha_i^k p_i^k}{1-\alpha_i p_i}.
\end{aligned}$$

Još jednom primećujemo da uslovna disperzija teži bezuslovnoj kad k teži beskonačnosti.

4.2 Model generisan dvodimenzionalnom Puasonovom raspodelom

U ovom poglavlju uvešćemo pretpostavku o zajedničkoj raspodeli inovacionih procesa. Za tako definisanu raspodelu, u potpoglavlju 4.2.1, izvešćemo bezuslovno očekivanje i disperziju i za k koraka unapred uslovno očekivanje i disperziju. Ocenjivanje nepoznatih parametara detaljno ćemo prodiskutovati. U potpoglavlju 4.2.2, izložićemo metod uslovne maksimalne verodostojnosti i metod momenata. Posmatrali smo takođe i asimptotsku raspodelu ocena dobijenih metodom momenata. Oba metoda su testirana na simuliranim skupovima podataka u potpoglavlju 4.2.2. Alternativni pristup konstrukciji modela izložili smo u potpoglavlju 4.2.4.

4.2.1 Definicija modela

Neka je zajednička raspodela slučajnih promenljivih $\varepsilon_{1,t}$ i $\varepsilon_{2,t}$ dvodimenzionalna Puasonova sa parametrima λ_1, λ_2 i ϕ, $\mathcal{BP}(\lambda_1, \lambda_2, \phi)$, pri čemu je raspodela verovatnoća data sa

$$\begin{aligned} P(\varepsilon_{1,t} = u, \varepsilon_{2,t} = v) &= e^{-(\lambda_1+\lambda_2-\phi)} \frac{(\lambda_1 - \phi)^u}{u!} \frac{(\lambda_2 - \phi)^v}{v!} \\ &\times \sum_{i=0}^{k} \binom{u}{i} \binom{v}{i} i! \left(\frac{\phi}{(\lambda_1 - \phi)(\lambda_2 - \phi)} \right)^i, \end{aligned} \tag{4.19}$$

gde je $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, $\phi \in [0, \min(\lambda_1, \lambda_2)]$, $u, v \in \mathbb{N}_0$ i $k = \min(u, v)$. Jednačine (4.1) i (4.2), uz pretpostavku o zajedničkoj raspodeli inovacionih procesa, definišu nam dvodimenzionalni autoregresivni model reda jedan za nenegativne celobrojne vremenske nizove sa zavisnim procesima inovacije, BVDPINAR(1). Dok parametri λ_1 i λ_2 određuju srednje vrednosti i disperzije slučajnih nizova $\{\varepsilon_{1,t}\}$ i $\{\varepsilon_{2,t}\}$, redom, korelacija između ovih nizova jednaka je parametru ϕ. Marginalna raspodela inovacionih procesa je Puasonova sa parametrima λ_1 i λ_2, redom. Ako pretpostavimo da je $\phi = 0$, tada se BVDPINAR(1) model svodi na dva nezavisna jednodimenzionalna nenegativna celobrojna autoregresivna modela. Jednačina (4.9) definiše nam marginalne raspodele slučajnih nizova $\{X_{1,t}\}$ i $\{X_{2,t}\}$, pa imamo da je

$$\begin{aligned} \Phi_{X_{i,t}}(s) &= p_i^k \Phi_{X_{i,t-k}}(1 - \alpha_i^k(1 - s)) e^{\lambda_i(s-1)\frac{1-\alpha_i^k}{1-\alpha_i}} \\ &+ (1 - p_i) \sum_{j=1}^{k} p_i^{j-1} e^{\lambda_i(s-1)\frac{1-\alpha_i^j}{1-\alpha_i}} \xrightarrow{k\to\infty} (1 - p_i) \sum_{j=1}^{\infty} p_i^{j-1} e^{\lambda_i(s-1)\frac{1-\alpha_i^j}{1-\alpha_i}} \end{aligned}$$

Srednje vrednosti i disperzije slučajnih nizova $\{X_{1,t}\}$ i $\{X_{2,t}\}$ su

$$EX_{i,t} = \frac{\lambda_i}{1 - \alpha_i p_i}, \quad i = 1, 2, \tag{4.20}$$

$$Var(X_{i,t}) = \frac{(1 - \alpha_i^2 p_i)(1 - \alpha_i p_i)\lambda_i + \alpha_i^2 p_i(1 - p_i)\lambda_i^2}{(1 - \alpha_i^2 p_i)(1 - \alpha_i p_i)^2}, \quad i = 1, 2. \tag{4.21}$$

Kovarijacija za k koraka unapred je data jednačinom (4.13) i glasi

$$Cov(X_{i,t+k}, X_{i,t}) = \frac{\alpha_i^k p_i^k \left[(1 - \alpha_i^2 p_i)(1 - \alpha_i p_i)\lambda_i + \alpha_i^2 p_i(1 - p_i)\lambda_i^2\right]}{(1 - \alpha_i^2 p_i)(1 - \alpha_i p_i)^2}, \quad i = 1, 2. \tag{4.22}$$

Kroskovarijacija između slučajnih promenljivih $X_{1,t}$ i $X_{2,t}$ iz jednačine (4.14) dobija se kao

$$Cov(X_{1,t}, X_{2,t}) = \frac{\phi}{1 - \alpha_1\alpha_2 p_1 p_2}. \tag{4.23}$$

Imajući u vidu da je $\alpha_i \in (0, 1)$, $p_i \in [0, 1]$, $i = 1, 2$, to iz činjenice da ϕ uzima nenegativne vrednosti, možemo zaključiti da su slučajne promenljive $X_{1,t}$ i $X_{2,t}$ nenegativno korelisane. Kroskovarijacija za k koraka unapred se preko jednačine (4.15) računa kao

$$Cov(X_{i,t+k}, X_{j,t}) = \frac{\alpha_i^k p_i^k \phi}{1 - \alpha_1\alpha_2 p_1 p_2}. \tag{4.24}$$

Dalje, uslovno očekivanje i uslovna disperzija date su redom jednačinama

$$\begin{aligned}
&E(X_{i,t+k}|X_{1,t}, X_{2,t}) = (\alpha_i p_i)^k X_{i,t} + \lambda_i \frac{1-(\alpha_i p_i)^k}{1-\alpha_i p_i}\\
&Var(X_{i,t+k}|X_{1,t}, X_{2,t}) = (\alpha_i p_i)^k (1-\alpha_i^k) X_{i,t} + \alpha_i^2 p_i (1-p_i)\\
&\times \left((\alpha_i p_i)^k X_{i,t} + \lambda_i \frac{1-(\alpha_i p_i)^k}{1-\alpha_i p_i} \right)^2 \frac{1-\alpha_i^{2k} p_i^k}{1-\alpha_i^2 p_i} + \lambda_i \frac{1-(\alpha_i p_i)^k}{1-\alpha_i p_i}.
\end{aligned}$$

Možemo primetiti da kad k teži beskonačnosti to uslovno očekivanje i disperzija teže bezuslovnom očekivanju i disperziji, redom.

4.2.2 Ocenjivanje nepoznatih parametara

BVDPINAR(1) model definisan je pomoću sedam parametara. U ovom potpoglavlju daćemo dva metoda za ocenjivanje tih parametara, metod uslovne maksimalne verodostojnosti (CML) i metod momenata (MM).

Metod uslovne maksimalne verodostojnosti

Uslovna raspodela verovatnoća slučajnog vektora $(X_{1,t+1}, X_{2,t+1})$ u odnosu na $(X_{1,t}, X_{2,t})$ je težinska suma uslovnih raspodela verovatnoća komponenata koje definišu slučajne promenljive $X_{1,t}$ i $X_{2,t}$:

$$\begin{aligned}
&P(X_{1,t+1} = x, X_{2,t+1} = y | X_{1,t} = u, X_{2,t} = v)\\
&= p_1 p_2 P(\alpha_1 \circ X_{1,t} + \varepsilon_{1,t+1} = x, \alpha_2 \circ X_{2,t} + \varepsilon_{2,t+1} = y | X_{1,t} = u, X_{2,t} = v)\\
&+ (1-p_1) p_2 P(\varepsilon_{1,t+1} = x, \alpha_2 \circ X_{2,t} + \varepsilon_{2,t+1} = y | X_{1,t} = u, X_{2,t} = v)\\
&+ p_1 (1-p_2) P(\alpha_1 \circ X_{1,t} + \varepsilon_{1,t+1} = x, \varepsilon_{2,t+1} = y | X_{1,t} = u, X_{2,t} = v)\\
&+ (1-p_1)(1-p_2) P(\varepsilon_{1,t+1} = x, \varepsilon_{2,t+1} = y | X_{1,t} = u, X_{2,t} = v)
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Slučajni vektor $(\varepsilon_{1,t}, \varepsilon_{2,t})$ nezavisan je od $(X_{1,s}, X_{2,s})$ za $s < t$. Binomni tining operator $\alpha_i \circ X_{i,t}$, za poznato $X_{i,t} = u_i$, definiše binomnu slučajnu promenljivu sa parametrima α_i i u_i, $Bin(\alpha_i, u_i)$, koja je pritom nezavisna od $X_{j,t}$, $i, j = 1, 2$, $i \neq j$, te na osnovu svega ovoga dobijamo jednačine

$$\begin{aligned}
&P(\alpha_1 \circ X_{1,t} + \varepsilon_{1,t+1} = x, \alpha_2 \circ X_{2,t} + \varepsilon_{2,t+1} = y | X_{1,t} = u, X_{2,t} = v) \\
&= \sum_{m=s_1}^{x} \sum_{n=s_2}^{y} P(Bin(\alpha_1, u) = x - m) P(Bin(\alpha_2, v) = y - n) P(\varepsilon_{1,t+1} = m, \varepsilon_{2,t+1} = n),
\end{aligned}$$

gde je $s_1 = \max(x - u, 0)$ i $s_2 = \max(y - v, 0)$. Još dve komponente jednačine (4.25) računamo kao

$$\begin{aligned}
&P(\varepsilon_{1,t+1} = x, \alpha_2 \circ X_{2,t} + \varepsilon_{2,t+1} = y | X_{1,t} = u, X_{2,t} = v) \\
&\qquad = \sum_{n=s_2}^{y} P(Bin(\alpha_2, v) = y - n) P(\varepsilon_{1,t+1} = x, \varepsilon_{2,t+1} = n) \\
&P(\alpha_1 \circ X_{1,t} + \varepsilon_{1,t+1} = x, \varepsilon_{2,t+1} = y | X_{1,t} = u, X_{2,t} = v) \\
&\qquad = \sum_{m=s_1}^{x} P(Bin(\alpha_1, u) = x - m) P(\varepsilon_{1,t+1} = m, \varepsilon_{2,t+1} = y).
\end{aligned}$$

Zajednička raspodela verovatnoća inovacionih procesa data je jednačinom (4.19), pa sada možemo jednačinu (4.25) zapisati kao

$$\begin{aligned}
&P(X_{1,t+1} = x, X_{2,t+1} = y | X_{1,t} = u, X_{2,t} = v) \\
&= p_1 p_2 \sum_{m=s_1}^{x} \sum_{n=s_2}^{y} P(Bin(\alpha_1, u) = x - m) P(Bin(\alpha_2, v) = y - n) P(\varepsilon_{1,t+1} = m, \varepsilon_{2,t+1} = n) \\
&+ (1 - p_1) p_2 \sum_{n=s_2}^{y} P(Bin(\alpha_2, v) = y - n) P(\varepsilon_{1,t+1} = x, \varepsilon_{2,t+1} = n) \\
&+ p_1 (1 - p_2) \sum_{m=s_1}^{x} P(Bin(\alpha_1, u) = x - m) P(\varepsilon_{1,t+1} = m, \varepsilon_{2,t+1} = y) \\
&+ (1 - p_1)(1 - p_2) P(\varepsilon_{1,t+1} = x, \varepsilon_{2,t+1} = y) \qquad (4.26)
\end{aligned}$$

Ocene nepoznatih parametara modela dobijamo kao vrednosti koje maksimiziraju logaritamsku funkciju verodostojnosti, koja je oblika

$$L(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^{n-1} \ln P(X_{1,i+1} = x_{1,i+1}, X_{2,i+1} = x_{2,i+1} | X_{1,i} = x_{1,i}, X_{2,i} = x_{2,i}, \boldsymbol{\theta})$$

gde je $\boldsymbol{\theta}$ vektor nepoznatih parametara. Maksimizaciju ove funkcije sprovodimo numeričkim metodama.

Metod momenata

Pretpostavimo da imamo slučajni uzorak $\{(X_{1,j}, X_{2,j})\}_{j=\overline{1,n}}$. Uvedimo nove parametre kao $u_1 = \alpha_1 p_1$ i $u_2 = \alpha_2 p_2$. Ovi parametri mogu se oceniti jednačinom (4.13) pa je

$$\hat{u}_i = \frac{\gamma_{X_i X_i}(1)}{\gamma_{X_i}(0)}, \quad i = 1, 2. \tag{4.27}$$

Sada, iz jednačine (4.20) dobijamo

$$\hat{\lambda}_i = (1 - \hat{u}_i)\overline{X}_i, \quad i = 1, 2, \tag{4.28}$$

gde je, za uzorak $\{X_{i,1}, \ldots, X_{i,n}\}$, $\overline{X}_i$ uzoračka sredina, $\gamma_{X_i}(0)$ uzoračka disperzija i $\gamma_{X_i X_i}(1)$ uzoračka autokovarijacija za korak jedan, $i = 1, 2$. Dalje, kad u jednačinu (4.21) uvedemo smenu $u_i = \alpha_i p_i$ dobićemo $Var(X_{i,t}) = \frac{u_i(1-\alpha_i)(1-u_i)\lambda_i + u_i(\alpha_i - u_i)\lambda_i^2 + (1-u_i)^2\lambda_i}{(1-\alpha_i u_i)(1-u_i)^2}$. Rešavanjem ove jednačine po α_i dobićemo ocenu parametra kao

$$\hat{\alpha}_i = \frac{\hat{\lambda}_i(1 - \hat{u}_i) - \hat{u}_i^2\hat{\lambda}_i^2 - (1 - \hat{u}_i)^2\gamma_{X_i}(0)}{\hat{u}_i(1 - \hat{u}_i)\hat{\lambda}_i - \hat{u}_i\hat{\lambda}_i^2 - \hat{u}_i(1 - \hat{u}_i)^2\gamma_{X_i}(0)}, \quad i = 1, 2. \tag{4.29}$$

Ocenu parametra p_i dobićemo kao $\hat{p}_i = \frac{\hat{u}_i}{\hat{\alpha}_i}, \quad i = 1, 2.$

Na kraju, parametar ϕ ocenjujemo iz jednačine (4.23) kao

$$\hat{\phi} = \frac{\gamma_{X_1 X_2}(0)}{1 - \hat{u}_1\hat{u}_2}, \tag{4.30}$$

pri čemu je $\gamma_{X_i X_j}(s) = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-s}(X_{i,k+s} - \overline{X}_i)(X_{j,k} - \overline{X}_j)$, $i, j = 1, 2$.

Označimo sa $\boldsymbol{m}_n = (m_1, \ldots, m_7)'$ vektor (ograničavajućih) funkcija momenata korišćenih za ocenjivanje parametara (n u indeksu označava obim uzorka), pri čemu su

$$
\begin{aligned}
m_1 &= \frac{\lambda_1}{1 - \alpha_1 p_1} - \overline{X}_1, \text{gde je } \overline{X}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_{1,i},\\
m_2 &= \frac{(1 - \alpha_1^2 p_1)(1 - \alpha_1 p_1)\lambda_1 + \alpha_1^2 p_1(1 - p_1)\lambda_1^2}{(1 - \alpha_1^2 p_1)(1 - \alpha_1 p_1)^2} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_{1,i} - \overline{X}_1),\\
m_3 &= \frac{\alpha_1^k p_1^k\left[(1 - \alpha_1^2 p_1)(1 - \alpha_1 p_1)\lambda_1 + \alpha_1^2 p_1(1 - p_1)\lambda_1^2\right]}{(1 - \alpha_1^2 p_1)(1 - \alpha_1 p_1)^2} - \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}(X_{1,i+1} - \overline{X}_1)(X_{1,i} - \overline{X}_1),\\
m_4 &= \frac{\lambda_2}{1 - \alpha_2 p_2} - \overline{X}_2, \text{gde je } \overline{X}_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_{2,i},\\
m_5 &= \frac{(1 - \alpha_2^2 p_2)(1 - \alpha_2 p_2)\lambda_2 + \alpha_2^2 p_2(1 - p_2)\lambda_2^2}{(1 - \alpha_2^2 p_2)(1 - \alpha_2 p_2)^2} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_{2,i} - \overline{X}_2),\\
m_6 &= \frac{\alpha_2^k p_2^k\left[(1 - \alpha_2^2 p_2)(1 - \alpha_2 p_2)\lambda_2 + \alpha_2^2 p_2(1 - p_2)\lambda_2^2\right]}{(1 - \alpha_2^2 p_2)(1 - \alpha_2 p_2)^2} - \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}(X_{2,i+1} - \overline{X}_2)(X_{2,i} - \overline{X}_2),
\end{aligned}
$$

$$m_7 = \frac{\phi}{1-\alpha_1\alpha_2 p_1 p_2} - \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_{1,i}-\overline{X}_1)(X_{2,i}-\overline{X}_2).$$

Vektor nepoznatih parametara označimo sa $\boldsymbol{\theta} = (\lambda_1, \lambda_2, \alpha_1, \alpha_2, p_1, p_2, \phi)$. Ako bi razvili u Tejlorov red $\boldsymbol{m}_n(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{0}$ u okolini stvarne vrednosti parametra, $\boldsymbol{\theta}_0$, dobićemo aproksimaciju

$$\mathbf{0} \approx \boldsymbol{m}_n(\boldsymbol{\theta}_0) + \boldsymbol{G}_n(\boldsymbol{\theta}_0)(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}_0),$$

iz koje dalje sledi da je

$$\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}_0) \approx -[\boldsymbol{G}_n(\boldsymbol{\theta}_0)]^{-1}\sqrt{n}\boldsymbol{m}_n(\boldsymbol{\theta}_0), \tag{4.31}$$

gde je $\boldsymbol{G}_n = [\frac{\partial \boldsymbol{m}_n}{\partial \boldsymbol{\theta}}]$. Kako su sve funkcije momenata neprekidne kao složene funkcije elementarnih funkcija, prema centralnoj graničnoj teoremi kad n teži beskonačnosti, $\sqrt{n}\boldsymbol{m}_n(\boldsymbol{\theta}_0)$ je normalno raspodeljen sa srednjom vrednošću $\mathbf{0}$ i kovarijacionom matricom $\boldsymbol{F} = [F_{jk}]$. Matrica $\boldsymbol{F}$ je dimenzije 7×7, čiji su elementi

$$F_{jk} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[(m_j(X_{1,i}.X_{2,i}) - \overline{m}_j)(m_k(X_{1,i}, X_{2,i}) - \overline{m}_k)],$$

pri čemu je $\overline{m}_j = 1/n\sum_{i=1}^{n} m_j(X_{1,i}, X_{2,i})$, $j = 1, 7$.

Dalje, kako su sve funkcije momenata funkcionalno nezavisne, $\boldsymbol{G}_n(\boldsymbol{\theta}_0)$ konvergira ka regularnoj konstantnoj matrici. Prema tome, desna strana jednakosti (4.31) je asimptotski normalno raspodeljena sa očekivanjem $\mathbf{0}$ i kovarijacionom matricom $\boldsymbol{\Phi}$. Kovarijaciona matrica dobija se kao granična vrednost od $\boldsymbol{\Phi}_n = \frac{1}{n}\left(\boldsymbol{G}_n'(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{G}_n(\boldsymbol{\theta})\right)^{-1}$, kad n teži beskonačnosti. Matrica $\boldsymbol{G} = [G_{ij}]$ je dimenzije 7×7, čiji su elementi parcijalni izvodi funkcija momenata $G_{ij} = \frac{\partial m_i}{\partial \theta_j}$ korišćenih za ocenjivanje parametara. Elementi ove matrice su:

$$\begin{aligned}
G_{11} &= \frac{1}{1-\alpha_1 p_1}\\
G_{13} &= \frac{p_1\lambda_1}{(1-\alpha_1 p_1)^2}\\
G_{15} &= \frac{\alpha_1\lambda_1}{(1-\alpha_1 p_1)^2}\\
G_{12} &= G_{14} = G_{16} = G_{17} = 0\\
G_{21} &= \frac{1}{1-\alpha_1 p_1} + \frac{2\alpha_1^2 p_1(1-p_1)\lambda_1}{(1-\alpha_1^2 p_1)(1-\alpha_1 p_1)^2}\\
G_{23} &= \frac{p_1\lambda_1}{(1-\alpha_1 p_1)^2} + \frac{\alpha_1 p_1(1-p_1)\lambda_1^2(2-\alpha_1 p_1(1+\alpha_1^2 p_1))}{(1-\alpha_1^2 p_1)^2(1-\alpha_1 p_1)^2}\\
G_{25} &= \frac{\alpha_1\lambda_1}{(1-\alpha_1 p_1)^2} + \frac{\alpha_1^2\lambda_1^2(1-2p_1+\alpha_1 p_1^2(1+\alpha_1-\alpha_1^2))}{(1-\alpha_1^2 p_1)^2(1-\alpha_1 p_1)^2}
\end{aligned}$$

$$G_{22} = G_{24} = G_{26} = G_{27} = 0$$
$$G_{31} = \frac{\alpha_1 p_1}{1-\alpha_1 p_1} + \frac{2\alpha_1^3 p_1^2(1-p_1)\lambda_1}{(1-\alpha_1^2 p_1)(1-\alpha_1 p_1)}$$
$$G_{33} = \frac{p_1\lambda_1}{(1-\alpha_1 p_1)^2} + \frac{\alpha_1^2 p_1^2(1-p_1)(3-\alpha_1 p_1(2+\alpha_1))\lambda_1^2}{(1-\alpha_1^2 p_1)^2(1-\alpha_1 p_1)^2}$$
$$G_{35} = \frac{\alpha_1\lambda_1}{(1-\alpha_1 p_1)^2} + \frac{\alpha_1^3 p_1\lambda_1^2(2-(3+\alpha_1+\alpha_1^2)p_1+2\alpha_1(1+\alpha_1)p_1^2-\alpha_1^3 p_1^3)}{(1-\alpha_1^2 p_1)^2(1-\alpha_1 p_1)^2}$$
$$G_{32} = G_{34} = G_{36} = G_{37} = 0$$
$$G_{42} = \frac{1}{1-\alpha_2 p_2}$$
$$G_{44} = \frac{p_2\lambda_2}{(1-\alpha_2 p_2)^2}$$
$$G_{46} = \frac{\alpha_2\lambda_2}{(1-\alpha_2 p_2)^2}$$
$$G_{41} = G_{43} = G_{45} = G_{47} = 0$$
$$G_{52} = \frac{1}{1-\alpha_2 p_2} + \frac{2\alpha_2^2 p_2(1-p_2)\lambda_2}{(1-\alpha_2^2 p_2)(1-\alpha_2 p_2)^2}$$
$$G_{54} = \frac{p_2\lambda_2}{(1-\alpha_2 p_2)^2} + \frac{\alpha_2 p_2(1-p_2)\lambda_2^2(2-\alpha_2 p_2(1+\alpha_2^2 p_2))}{(1-\alpha_2^2 p_2)^2(1-\alpha_2 p_2)^2}$$
$$G_{56} = \frac{\alpha_2\lambda_2}{(1-\alpha_2 p_2)^2} + \frac{\alpha_2^2\lambda_2^2(1-2p_2+\alpha_2 p_2^2(1+\alpha_2-\alpha_2^2))}{(1-\alpha_2^2 p_2)^2(1-\alpha_2 p_2)^2}$$
$$G_{51} = G_{53} = G_{55} = G_{57} = 0$$
$$G_{62} = \frac{\alpha_2 p_2}{1-\alpha_2 p_2} + \frac{2\alpha_2^3 p_2^2(1-p_2)\lambda_2}{(1-\alpha_2^2 p_2)(1-\alpha_2 p_2)}$$
$$G_{64} = \frac{p_2\lambda_2}{(1-\alpha_2 p_2)^2} + \frac{\alpha_2^2 p_2^2(1-p_2)(3-\alpha_2 p_2(2+\alpha_2))\lambda_2^2}{(1-\alpha_2^2 p_2)^2(1-\alpha_2 p_2)^2}$$
$$G_{66} = \frac{\alpha_2\lambda_2}{(1-\alpha_2 p_2)^2} + \frac{\alpha_2^3 p_2\lambda_2^2(2-(3+\alpha_2+\alpha_2^2)p_2+2\alpha_2(1+\alpha_2)p_2^2-\alpha_2^3 p_2^3)}{(1-\alpha_2^2 p_2)^2(1-\alpha_2 p_2)^2}$$
$$G_{61} = G_{63} = G_{65} = G_{67} = 0$$
$$G_{71} = G_{72} = 0$$
$$G_{73} = \frac{p_1\phi}{1-\alpha_1\alpha_2 p_1 p_2} + \frac{\alpha_1\alpha_2 p_1^2 p_2\phi}{(1-\alpha_1\alpha_2 p_1 p_2)^2}$$
$$G_{74} = \frac{\alpha_1^2 p_1^2 p_2\phi}{(1-\alpha_1\alpha_2 p_1 p_2)^2}$$
$$G_{75} = \frac{\alpha_1\phi}{1-\alpha_1\alpha_2 p_1 p_2} + \frac{\alpha_1^2\alpha_2 p_1 p_2\phi}{(1-\alpha_1\alpha_2 p_1 p_2)^2}$$
$$G_{76} = \frac{\alpha_1^2\alpha_2 p_1^2\phi}{(1-\alpha_1\alpha_2 p_1 p_2)^2}$$
$$G_{77} = \frac{\alpha_1 p_1}{1-\alpha_1\alpha_2 p_1 . p_2}$$

Kako su α_1 i α_2 strogo manji od nule, svi elementi matrice $\boldsymbol{G}$ su konačni, pa je i asimptotska kovarijaciona matrica, $\boldsymbol{\Phi}$, konačna.

Rezultati na osnovu simulacija

Naveli smo dva metoda za ocenjivanje nepoznatih parametara. Kako bismo ispitali preciznost ovih metoda, ocenjivaćemo parametre na simuliranom skupu podataka. Skupovi sadrže po 100 uzoraka obima 50, 100, 500 i 1000, gde su vrednosti generisane za sledeće izbore parametara: a) $\alpha_1 = 0.6$, $\alpha_2 = 0.55$, $p_1 = 0.55$, $p_2 = 0.4$, $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 3$, $\phi = 1$; b) $\alpha_1 = 0.3$, $\alpha_2 = 0.2$, $p_1 = 0.65$, $p_2 = 0.6$, $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 3$, $\phi = 1$. Rezultati su dati u tabeli 4.1. Tabela 4.1 sadrži kako ocenjene vrednosti parametara, tako i standardnu devijaciju tih ocena. U prvoj koloni dat je broj Monte Karlo simulacija za dati izbor parametara. Procedura ocenjivanja parametara implementirana je u programskom jeziku `R`.

Primećujemo da oba metoda konvergiraju ka stvarnim vrednostima parametara uz smanjenje standardne devijacije sa porastom obima uzorka. CML metod daje dobre rezultate čak i za uzorke obima 100, dok kod uzoraka obima 50 postoje neka odstupanja što se takođe može primetiti kroz nešto veću standardnu devijaciju dobijenih ocena. Standardna devijacija ocenjenih parametara manja je kod CML nego kod MM metoda. MM metod je dosta neprecizan za male obime uzorka. Kada parametri α_i uzimaju velike vrednosti, kao pri izboru parametara a), rezultati su nešto bolji ali je i dalje potreban uzorak obima većeg od 100 za postizanje ocenjenih vrednosti bliskih originalnim. Kada je uzorak obima 1000, ocenjene vrednosti dobijene MM metodom su sasvim dobre. Zbog kompleksnosti samog modela, vremena potrebna za izračunavanje na osnovu uzorka obima 1000 za MM i CML metode su

Tabela 4.1: Ocenjene vrednosti nepoznatih parametara za BVDPINAR(1). Prva vrsta sadrži ocenjene vrednosti, druga vrsta standardnu devijaciju.

	MM							CML						
	α_1	α_2	p_1	p_2	λ_1	λ_2	ϕ	α_1	α_2	p_1	p_2	λ_1	λ_2	ϕ
a) $\alpha_1 = 0.6$, $\alpha_2 = 0.55$, $p = 0.55$, $q = 0.4$, $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 3$, $\phi = 1$														
50	0.5986	0.4473	0.4963	0.488	5.0695	3.0345	1.1524	0.6013	0.5081	0.5396	0.472	4.955	2.9713	1.0303
	0.178	0.3332	0.2456	0.3652	0.9019	0.6349	1.092	0.1269	0.3027	0.1646	0.3119	0.6323	0.4463	1.1042
100	0.5971	0.4879	0.4941	0.4683	5.1058	2.9775	1.0263	0.5973	0.5645	0.5304	0.4204	4.9394	2.9868	1.0471
	0.1106	0.2658	0.1545	0.618	0.5776	0.4359	0.8233	0.0687	0.2132	0.1052	0.2324	0.4437	0.3459	0.6186
500	0.593	0.5059	0.5473	0.4523	4.9423	2.9246	1.1887	0.598	0.5529	0.548	0.3874	4.9278	2.9858	1.082
	0.0407	0.1044	0.0624	0.1366	0.2946	0.1953	0.4252	0.0271	0.0809	0.0418	0.0866	0.1784	0.1305	0.2845
1000	0.5956	0.5193	0.5498	0.4288	4.9314	2.9277	1.1826	0.5982	0.5504	0.5514	0.3925	4.9352	2.9826	1.069
	0.0298	0.0615	0.0504	0.0927	0.2302	0.1391	0.3177	0.021	0.0502	0.0306	0.0608	0.1342	0.0995	0.2049
b) $\alpha_1 = 0.3$, $\alpha_2 = 0.2$, $p = 0.65$, $q = 0.6$, $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 3$, $\phi = 1$														
50	0.3794	0.3447	0.4679	0.3286	5.2949	3.2607	1.267	0.3426	0.2086	0.6218	0.7023	5.0648	3.1589	1.1625
	0.2888	0.3592	0.351	0.3866	0.7692	0.5501	0.767	0.1566	0.2317	0.274	0.304	0.547	0.3648	0.5412
100	0.3692	0.3005	0.4865	0.3616	5.2166	3.1819	1.1993	0.3342	0.1943	0.5986	0.7001	5.0943	3.1565	1.1116
	0.2419	0.3178	0.2975	0.3814	0.6407	0.3967	0.5342	0.125	0.1754	0.248	0.2898	0.4813	0.3032	0.4312
500	0.3392	0.2368	0.5562	0.4844	5.0773	3.1136	1.1667	0.327	0.2046	0.6251	0.6208	5.0766	3.1254	1.0842
	0.0705	0.1879	0.141	0.3265	0.3022	0.1827	0.2404	0.0478	0.1557	0.1096	0.3057	0.2361	0.1714	0.1818
1000	0.324	0.2078	0.5925	0.5932	5.0449	3.117	1.1451	0.3099	0.207	0.6474	0.6189	5.0629	3.1269	1.066
	0.0437	0.1158	0.0893	0.2906	0.2023	0.1351	0.1661	0.0385	0.0841	0.0762	0.2755	0.1622	0.1205	0.1438

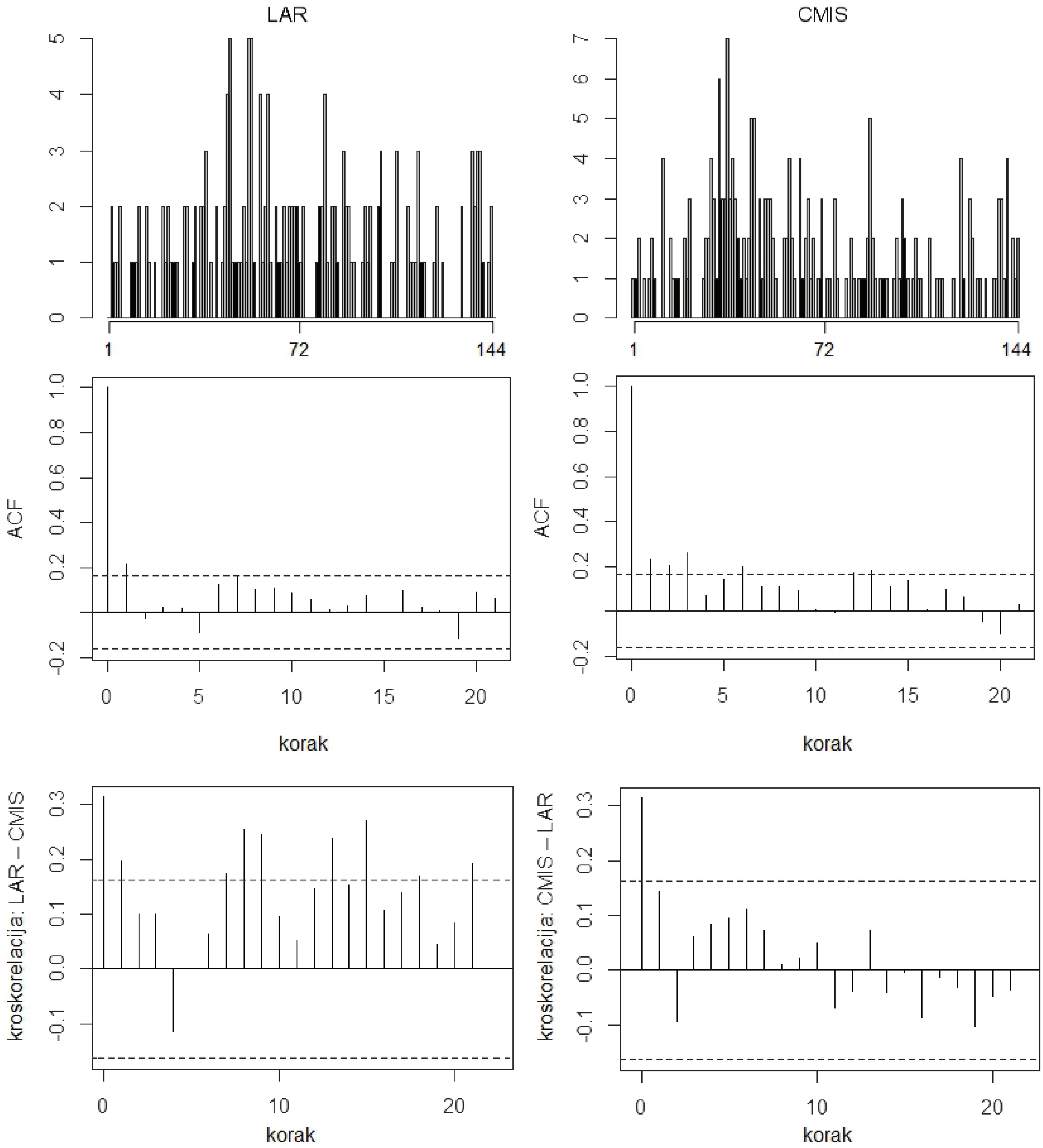
drastično različita. Vreme izračunavanja MM metodom meri se sekundama, dok se kod CML metoda meri satima.

4.2.3 Primena na stvarnim podacima

Kako bismo demonstrirali praktični značaj BVDPINAR(1) modela, posmatraćemo njegovu primenu na stvarnim podacima. Diskutovaćemo rezultate i statističke osobine razmatranih vremenskih nizova. Nije nam cilj da pokažemo da je model dobar samo za ove konkretne nizove, već želimo da opišemo problem za koji bi BVDPINAR(1) model nudio adekvatan pristup. Dobijeni rezultati biće upoređeni sa rezultatima nekih drugih BINAR modela.

Analiziramo podatke iz baze `http://www.forecastingprinciples.com/index.php?option=com_content&view=article&id=47&Itemid=250`, gde se fokusiramo na broj mesečnih krađa (LAR) i broj narušavanja javnog reda (CMIS) u Pitsburgu od januara 1990. do decembra 2001. godine. Ove aktivnosti mogu se svrstati u lakša krivična dela. LAR se karakteriše kao nenasilna krađa, dok CMIS predstavlja oštećivanje ili uništavanje predmeta u tuđem vlasništvu ili javne svojine bez odobrenja. Dakle, isto socijalno okruženje dovodi do obeju ovih aktivnosti. S druge strane, ne može se opravdati kroskoreliranost sa korakom jedan između ovih nizova i ako su oni korelirani. Srednje vrednosti nizova LAR i CMIS su 1.18 i 1.43, dok su disperzije 1.37 i 1.95 redom. Koeficijent korelacije je 0.31. Kod obe serije količnik disperzije i srednje vrednosti je samo malo veći od jedinice, što sugeriše da bi Puasonova raspodela mogla biti dobar izbor. Imamo 144 opservacije. Grafici vremenskih nizova, autokorelacione funkcije i kroskorelacione funkcije dati su na slici 4.1. Primećujemo da nizovi imaju vrlo slično ponašanje kroz vreme, što opravdava pretpostavku da su zavisne. Autokorelacija sa korakom jedan prisutna je kod oba niza, dok je kroskorelacija na koraku jedan gotovo zanemarljiva, što je u skladu sa konstruisanim modelom.

Kriterijumi za ispitivanje adekvatnosti modela biće Akaike informacioni kriterijum (AIC), Bajesov informacioni kriterijum (BIC) i srednje kvadratna greška (RMS). Dok prva dva opisuju adekvatnost pretpostavljene raspodele vremenskih nizova, treći nam daje informaciju o preciznosti predviđanja za jedan korak unapred. BVDPINAR(1) model upoređujemo sa još dva slična modela ali sa konstantnim koeficijentima, a to su BVPOIBINAR(1) i BVNBIBINAR(1) modeli koje su uveli Pedeli i Karlis (2011) i još sa FULLBVPOIBINAR(1) modelom koji su uveli Pedeli i Karlis (2013), a koji modeluje i kroskoreliranost sa korakom jedan. Svi ovi modeli pretpostavljaju zavisnost između inovacionih procesa, gde su inovacioni procesi generisani dvodimenzionalnom Puasonovom raspodelom kod BVPOIBINAR(1) i FULLBVPOIBINAR(1), a negativnom binomnom kod BVNBIBINAR(1) modela. Nije nam cilj da pokažemo kako je neki model globalno gledano najbolji, već da je za nizove sa nekim specifičnim osobinama jedan model bolji od drugih. Rezultati su sumirani u tabeli 4.2. Za ocenjivanje parametara modela koristili smo CML metod iz dva razloga. Prvi je što želimo da



Slika 4.1: Trakasti dijagram, grafik autokorelacione i kroskorelacione funkcije za vremenske nizove LAR i CMIS.

uključimo raspodelu nizova u proces ocenjivanja, a drugi je taj što je uzorak mali za postizanje preciznih ocena MM metodom.

Iz tabele 4.2 možemo primetiti da su modeli bazirani na dvodimenzionalnoj Puasonovoj raspodeli bolji izbor, po sva tri kriterijuma. BVDPINAR(1) model postiže najbolje rezultate. Mogu se uočiti poboljšanja u odnosu na BVPOIBINAR(1) model, mada su im BIC vrednosti skoro iste, što je posledica činjenice da BVDPINAR(1) model ima dva parametra više nego

Tabela 4.2: Ocenjeni parametri sa standardnom devijacijom u zagradi, AIC, BIC i RMS za vremenske nizove LAR i CMIS.

Model	CML ocene	AIC	BIC	RMS LAR	RMS CMIS
BVDPINAR(1)	$\hat{\alpha}_1 = 0.977(0.273), \hat{p}_1 = 0.183(0.094)$ $\hat{\alpha}_2 = 0.323(0.188), \hat{p}_2 = 0.537(0.35)$ $\hat{\lambda}_1 = 0.979(0.106), \hat{\lambda}_2 = 1.179(0.125)$ $\hat{\phi} = 0.286(0.094)$	854.6	875.38	1.139	1.360
BVPOIBINAR(1)	$\hat{\alpha}_1 = 0.135(0.074), \hat{\lambda}_1 = 1.036(0.121)$ $\hat{\alpha}_2 = 0.121(0.065), \hat{\lambda}_2 = 1.261(0.13)$ $\hat{\phi} = 0.337(0.093)$	860.8	875.66	1.142	1.367
BVNBIBINAR(1)	$\hat{\alpha}_1 = 0.089(0.057), \hat{\lambda}_1 = 1.558(0.222)$ $\hat{\alpha}_2 = 0.002(0.0715), \hat{\lambda}_2 = 2.253(0.367)$ $\hat{\beta} = 0.918(0.067)$	905.43	920.28	1.24	1.61
FULLBVPOIBINAR(1)	$\hat{\alpha}_{11} = 0.271(0.109), \hat{\alpha}_{12} = 0.002(0.079)$ $\hat{\alpha}_{21} = 0.113(0.089), \hat{\alpha}_{22} = 0.159(0.089)$ $\hat{\lambda}_1 = 1.094(0.129), \hat{\lambda}_2 = 1.165(0.121)$ $\hat{\phi} = 0.404(0.105)$	881.11	901.19	1.161	1.369

BVPOIBINAR(1). Uključivanje kroskorelacije sa korakom jedan u modelovanje dodatno kvari rezultat, što se može videti iz vrednosti kriterijumskih funkcija za FULLBVPOIBINAR(1) model. Ako obratimo pažnju na ocenjene parametre BVDPINAR(1) modela, videćemo da je mala autokoreliranost konstatovana na slici 4.1 za niz LAR, opisana malom vrednošću za parametar p_1. Na osnovu ocenjenih parametara, srednje vrednosti nizova su 1.192 i 1.426, a disperzije su 1.437 i 1.482 za LAR i CMIS, redom. Ove vrednosti su sasvim blizu uzoračkoj sredini i disperziji kod oba niza. Parametar ϕ je različit od nule, što implicira da su inovacioni procesi nizova LAR i CMIS zavisni. Koeficijent korelacije je 0.202, dok je kroskorelacija sa korakom jedan između LAR i CMIS 0.036, a između CMIS i LAR 0.035 što je u skladu sa empirijskim rezultatima predstavljenim na slici 4.1.

4.2.4 Alternativni pristup konstrukciji modela

U ovom potpoglavlju razmotrićemo još jedan aspekt BINAR(1) modela sa zavisnim inovacionim procesima. Pretpostavićemo da je zajednička raspodela inovacionih procesa dvodimenzionalna negativna binomna. Za tako određenu raspodelu odredićemo osobine modela, kao što su bezuslovni i uslovni momenti, prodiskutovaćemo autokorelacionu i kroskorelacionu strukturu. Daćemo i metode za ocenjivanje nepoznatih parametara ali kako je ovaj model vrlo sličan modelu predstavljenom u potpoglavlju 4.2.1, nećemo se detaljno baviti efikasnošću metoda i asimptotskim raspodelama njihovih ocena. Praktični aspekt ovih modela takođe je detaljno razmatran u potpoglavlju 4.2.3, pa ćemo i to ovom prilikom izostaviti.

Pretpostavimo da je zajednička raspodela inovacionih procesa, $\{\varepsilon_{1,t}\}$ i $\{\varepsilon_{2,t}\}$, dvodimenzionalna negativna binomna sa parametrima λ_1, λ_2 i ϕ, $BNB(\lambda_1, \lambda_2, \phi)$. Raspodela verovatnoća slučajnog vektora $(\varepsilon_{1,t}, \varepsilon_{2,t})$ data je jednačinom

$$P(\varepsilon_{1,t} = x, \varepsilon_{2,t} = y) = \frac{\Gamma(\beta^{-1} + x + y)}{\Gamma(\beta^{-1})\Gamma(x+1)\Gamma(y+1)} \frac{\lambda_1^x \lambda_2^y \phi^{-1/\phi}}{(\lambda_1 + \lambda_2 + \phi^{-1})^{x+y+\phi^{-1}}}, \tag{4.32}$$

gde je $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$, dok su parametri $\lambda_1, \lambda_2, \phi$ strogo pozitivni. Jednačine (4.1) i (4.2), pri čemu je raspodela inovacionih procesa data jednačinom (4.32), definišu dvodimenzionalni autoregresivni model reda jedan za nenegativne celobrojne vremenske nizove BVDNBINAR(1). Za inovacione procese imamo da je marginalna raspodela slučajne promenljive $\varepsilon_{i,t}$ jednodimenzionalna negativna binomna sa parametrima ϕ^{-1} i $\frac{\phi^{-1}}{\lambda_i + \phi^{-1}}$, čije je očekivanje $\mu_{\varepsilon_i} = \lambda_i$ i disperzijom $\sigma^2_{\varepsilon_{i,t}} = \lambda_i(1 + \lambda_i \phi)$, $i = 1, 2$. Kovarijacija između nizova $\{\varepsilon_{1,t}\}$ i $\{\varepsilon_{2,t}\}$ određena je parametrom ϕ kao $Cov(\varepsilon_{1,t}, \varepsilon_{2,t}) = \lambda_1 \lambda_2 \phi$.

Prethodna diskusija i jednačine (4.10) i (4.12) daju nam srednju vrednosti i disperziju slučajne promenljive $X_{i,t}$ kao

$$E(X_{i,t}) = \frac{\lambda_i}{1 - \alpha_i p_i} \tag{4.33}$$

$$Var(X_{i,t}) = \frac{\lambda_i[1 - \alpha_i p_i(1 + \alpha_i p_i(1 - \alpha_i))] + \lambda_i^2[\alpha_i^2 p_i(1 - p_i) + \phi(1 - 2\alpha_i p_i + \alpha_i^2 p_i)]}{(1 - \alpha_i^2 p_i)(1 - \alpha_i p_i)^2} \tag{4.34}$$

gde je $i = 1, 2$. Autokovarijacija slučajnih nizova $\{X_{i,t}\}$, $i = 1, 2$ data je jednačinom (4.13), gde je takođe data veza između disperzije i autokovarijacije sa korakom k. Kovarijacija između ova dva niza računa se kao

$$Cov(X_{1,t}, X_{2,t}) = \frac{\lambda_1 \lambda_2 \phi}{1 - \alpha_1 \alpha_2 p_1 p_2}. \tag{4.35}$$

Uslovno očekivanje i disperzija slučajne promenljive $X_{i,t+k}$ u odnosu na $X_{1,t}$ i $X_{2,t}$ date su redom jednačinama

$$E(X_{i,t+k} | X_{1,t}, X_{2,t}) = (\alpha p)^k X_{i,t} + \lambda_i \frac{1 - (\alpha_i p_i)^k}{1 - \alpha_i p_i}, \quad i = 1, 2,$$

$$Var(X_{i,t+k} | X_{1,t}, X_{2,t}) = (\alpha_i p_i)^k (1 - \alpha_i^k) X_{i,t} + (1 - p) \left[(\alpha_i p_i)^k X_{i,t} + \frac{1 - (\alpha_i p_i)^k}{1 - \alpha_i p_i} \lambda_i \right]^2$$
$$\times \frac{1 - (\alpha_i^2 p_i)^k}{1 - \alpha_i^2 p_i} \alpha_i^2 p_i + \lambda_i^2 \phi \frac{1 - (\alpha_i^2 p)^k}{1 - \alpha_i^2 p_i} + \lambda_i \frac{1 - (\alpha_i p_i)^k}{1 - \alpha_i p_i}, \quad i = 1, 2.$$

Ocenjivanje nepoznatih parametara

Kao i kod prethodnog modela i za BVDNBINAR(1) model prokomentarisaćemo dva metoda za ocenjivanje nepoznatih parametara, metod uslovne maksimalne verodostojnosti

(CML) i metod momenata (MM). Kako je reč o sličnim modelima, oba metoda prodiskutovaćemo u kratkim crtama.

Kako BVDPINAR(1) tako i BVDNBINAR(1) model pripada grupi modela definisanoj u poglavlju 4.1 pa je njihova struktura ista. Prema tome, uslovna raspodela verovatnoća slučajnog vektora $(X_{1,t+1}, X_{2,t+1})$ kada je poznata realizacija vektora $(X_{1,t}, X_{2,t})$ data je jednačinom (4.25). Jedina razlika ogleda se u tome što je zajednička verovatnoća inovacionih procesa određena jednačinom (4.32).

Kada je reč o metodi momenata, ponovo ćemo uvesti parametar $u_i = \alpha_i p_i$, $i = 1, 2$. Tada je u_i ocenjen jednačinom (4.27). Parametre λ_i ocenjujemo jednačinom (4.28), dok ϕ ocenjujemo jednačinom (4.30). Jedina razlika je u jednačini za ocenjivanje parametra α_i koja sada glasi

$$\hat{\alpha}_i = \frac{(1-\hat{u}_i)^2 VarX_{i,t}\hat{\lambda}_i(1-\hat{u}_i(1-\hat{u}_i)) - \hat{\lambda}_i^2(\phi(1-2\hat{u}_i)-\hat{u}_i^2)}{\hat{u}_i(1-\hat{u}_i)^2 VarX_{i,t} + \hat{\lambda}_1\hat{u}_i(\hat{u}_i+\hat{\lambda}_i) + \hat{\lambda}_i^2\hat{\phi}}, \quad i = 1, 2.$$

Parametar p_i možemo oceniti kao $\hat{p}_i = \frac{\hat{u}_i}{\hat{\alpha}_i}$, $i = 1, 2$. Asimptotska raspodela ovako dobijenih ocena detaljno je razmatrana kod BVDPINAR(1) modela, pa je nećemo ponovo navoditi.

Glava 5

Zaključak

U disertaciji su predstavljeni dvodimenzionalni autoregresivni modeli prvog reda za nenegativne celobrojne vremenske nizove. Obrazložena je značajnost postojanja ovakvih modela i date su smernice daljeg razvoja. Dat je pregled već postojećih modela, a zatim su definisani novi modeli za ovakav tip vremenskih nizova. Suštinska razlika između već postojećih modela i onih koji su definisani u ovoj disertaciji ogleda se u tome što su ovi drugi zasnovani na slučajnim koeficijentima. Dokazane su najznačajnije osobine uvedenih modela. Posebna pažnja data je ocenjivanju nepoznatih parametara modela. Za svaki od uvedenih modela posmatrana je primena na stvarnim podacima, pri čemu su rezultati upoređivani sa rezultatima najznačajnijih, već poznatih modela.

U drugoj glavi definisan je dvodimenzionalni model kod koga su brojački nizovi generisani Bernulijevom raspodelom. Zavisnost između dva niza ovog dvodimenzionalnog modela definisana je kroz autoregresivnu komponentu koja je upravo određena ovim brojačkim nizovima. Detaljno je razmatrano ocenjivanje nepoznatih parametara modela, pri čemu su dokazane i asimptotske raspodele dobijenih ocena. Dat je paralelni prikaz dva modela ovakvog tipa, gde su kod jednog modela brojački nizovi generisani Bernulijevom, a kod drugog geometrijskom raspodelom. Na stvarnim podacima pokazano je da je model sa brojačkim nizovima generisanim Bernulijevom raspodelom pogodniji za nizove kod kojih prethodno stanje nije u mogućnosti da generiše nove događaje, dok je kod modela sa brojačkim nizovima generisanim geometrijskom raspodelom obrnut slučaj. U nastavku ove glave dat je novi pristup ocenjivanju greške predviđanja modela za jedan korak unapred. Kako se ovi modeli sastoje iz procesa preživljavanja i inovacionog procesa, izmerena je greška predviđanja koja je posledica predviđanja jednog ili drugog procesa zasebno. Ovako izmerene greške ukazuju na nesavršenosti jedne ili druge komponente modela i daju smernice za buduća poboljšanja.

Uopštavanja dvodimenzionalnih autoregresivnih modela reda jedan sa slučajnim koeficijentima za nenegativne celobrojne vremenske nizove uvedena su u trećoj glavi . Najpre je definisan dvodimenzionalnog modela kod koga su marginalne raspodele dva niza sa različitim parametrima. Ovakav model omogućio je modelovanje zavisnih nizova sa različitom srednjom vrednošću, što je znatno doprinelo potencijalnoj primeni modela. Takođe, dokazana je egzistencija ovakvih modela. Dalje uopštavanje zasnivalo se na definisanju modela kod koga su svi brojački nizovi generisani različitim Bernulijevim raspodelama. Na taj način izbegnuta je pretpostavka o jednakosti raspodela procesa preživljavanja. Konstruisan je model koji na prirodniji način modeluje zavisnost između dva niza. Praktični značaj svih ovih modela potkrepljen je rezultatima na stvarnim podacima.

Nešto drugačiji model, gde je prisutna zavisnost inovacionih procesa, razmatran je u četvrtoj glavi. Model je i dalje definisan preko slučajnih koeficijenata ali je sada proces preživljavanja generisan samo pod uticajem prethodnih stanja sopstvenog niza. Na taj način je obuhvaćeno i modelovanje dvodimenzionalnih nizova kod kojih nema zavisnosti između procesa preživljavanja. Dokazana je egzistencija ovakvih modela i data je njihova primena.

Kako je potencijalna primena ovakvih modela vrlo široka, od velikog je značaja nihov dalji razvoj i usavršavanje. Oni predstavljaju najprirodniji način za modelovanje celobrojnih nenegativnih vremenskih nizova i kao takvi biće oblast interesovanja mnogih još dugi niz godina.

Literatura

Al-Osh, M. A. i Aly, E.-E. A. (1992), 'First order autoregressive time series with negative binomial and geometric marginals', *Communications in Statistics-Theory and Methods* **21**(9), 2483–2492.

Al-Osh, M. A. i Alzaid, A. A. (1987), 'First-order integer-valued autoregressive (inar (1)) process', *Journal of Time Series Analysis* **8**(3), 261–275.

Al-Osh, M. i Alzaid, A. (1991), 'Binomial autoregressive moving average models', *Stochastic Models* **7**(2), 261–282.

Alzaid, A. i Al-Osh, M. (1990), 'An integer-valued pth-order autoregressive structure (inar (p)) process', *Journal of Applied Probability* pp. 314–324.

Alzaid, A. i Al-Osh, M. (1993), 'Some autoregressive moving average processes with generalized poisson marginal distributions', *Annals of the Institute of Statistical Mathematics* **45**(2), 223–232.

Bakouch, H. S. i Ristić, M. M. (2010), 'Zero truncated poisson integer-valued ar (1) model', *Metrika* **72**(2), 265–280.

Brännäs, K. (1993), *Estimation and testing in integer-valued AR (1) models*, University of Umeå.

Brännäs, K. i Nordstrom, J. (2000), 'A bivariate integer valued allocation model for guest nights in hotels and cottages'.

Brockwell, P. J. (2002), *Introduction to time series and forecasting*, Vol. 1, Taylor & Francis.

Brockwell, P. J. i Davis, R. A. (1991), *Time series: theory and methods*, Springer-Verlag, New York.

Cox, D. R. i Miller, H. D. (1965), *The theory of stochastic processes*, CRC Press.

DasGupta, A. (2008), *Asymptotic theory of statistics and probability*, Springer-Verlag, New York.

Davis, R. A. i Wu, R. (2009), 'A negative binomial model for time series of counts', *Biometrika* **96**(3), 735–749.

Dewald, L. S., Lewis, P. A. W. i McKenzie, E. (1989), 'A bivariate first-order autoregressive time series model in exponential variables (bear(1))', *Manage. Sci.* **35**(10), 1236–1246.
URL: *http://dx.doi.org/10.1287/mnsc.35.10.1236*

Du, J.-G. i Li, Y. (1991), 'The integer-valued autoregressive (inar (p)) model', *Journal of Time Series Analysis* **12**(2), 129–142.

Freeland, R. i McCabe, B. P. (2004), 'Analysis of low count time series data by poisson autoregression', *Journal of Time Series Analysis* **25**(5), 701–722.

Hansen, L. P. (1982), 'Large sample properties of generalized method of moments estimators', *Econometrica: Journal of the Econometric Society* pp. 1029–1054.

Heinen, A. i Rengifo, E. (2007), 'Multivariate autoregressive modeling of time series count data using copulas', *Journal of Empirical Finance* **14**(4), 564–583.

Jacobs, P. A. i Lewis, P. A. (1978*a*), 'Discrete time series generated by mixtures. i: Correlational and runs properties', *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)* pp. 94–105.

Jacobs, P. A. i Lewis, P. A. (1978*b*), 'Discrete time series generated by mixtures ii: asymptotic properties', *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)* pp. 222–228.

Jung, R. C., Ronning, G. i Tremayne, A. R. (2005), 'Estimation in conditional first order autoregression with discrete support', *Statistical Papers* **46**(2), 195–224.

Latour, A. (1997), 'The multivariate ginar (p) process', *Advances in Applied Probability* pp. 228–248.

Lawrance, A. i Lewis, P. (1980), 'The exponential autoregressive-moving average earma (p, q) process', *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)* pp. 150–161.

MacDonald, I. L. i Zucchini, W. (1997), *Hidden Markov and other models for discrete-valued time series*, Vol. 110, CRC Press.

McKenzie, E. (1985), 'Some simple models for discrete variate time series1'.

McKenzie, E. (1986), 'Autoregressive moving-average processes with negative-binomial and geometric marginal distributions', *Advances in Applied Probability* pp. 679–705.

McKenzie, E. (2003), 'Discrete variate time series', *Handbook of statistics* **21**, 573–606.

Nastić, A., Ristić, M. i Popović, P. (2014), 'Estimation in a bivariate integer-valued autoregressive process', *Communications in Statistics-Theory and Methods*, prihvaćen za štampu.

Nastić, A. S. (2011), 'Doprinos analizi vremenskih nizova sa nenegativnim celobrojnim vrednostima generisanih geometrijskim brojačkim nizovima', Doktorska disertacija, Univerzitet u Nišu.

Nastić, A. S., Ristić, M. M. i Bakouch, H. S. (2012), 'A combined geometric inar (p) model based on negative binomial thinning', *Mathematical and Computer Modelling* **55**(5), 1665–1672.

Newey, W. K. i West, K. D. (1986), 'A simple, positive semi-definite, heteroskedasticity and autocorrelationconsistent covariance matrix', *NBER Technical paper series*, Technical Working Paper No. 55.

Pedeli, X. i Karlis, D. (2011), 'A bivariate inar (1) process with application', *Statistical modelling* **11**(4), 325–349.

Pedeli, X. i Karlis, D. (2013), 'Some properties of multivariate inar (1) processes', *Computational Statistics & Data Analysis* **67**, 213–225.

Popović, P. (2015*a*), 'Random coefficient bivariate inar (1) process', *Facta Universitatis, Series: Mathematics and Informatics* **30**(3), 263–280.

Popović, P. M. (2015*b*), 'A bivariate inar (1) model with different thinning parameters', *Statistical Papers*, prihvaćen za štampu.

Popović, P. M., Ristić, M. M. i Nastić, A. S. (2015), 'A geometric bivariate time series with different marginal parameters', *Statistical Papers*, prihvaćen za štampu.

Quoreshi, A. S. (2006), 'Bivariate time series modeling of financial count data', *Communications in Statistics-Theory and Methods* **35**(7), 1343–1358.

Ristić, M. M., Bakouch, H. S. i Nastić, A. S. (2009), 'A new geometric first-order integer-valued autoregressive (NGINAR(1)) process', *Journal of Statistical Planning and Inference* **139**(7), 2218–2226.

Ristić, M. M. i Nastić, A. S. (2012), 'A mixed inar (p) model', *Journal of Time Series Analysis* **33**(6), 903–915.

Ristić, M. M., Nastić, A. S., Jayakumar, K. i Bakouch, H. S. (2012), 'A bivariate inar (1) time series model with geometric marginals', *Applied Mathematics Letters* **25**(3), 481–485.

Rosenblatt, M. (1971), *Markov processes: structure and asymptotic behavior*, Springer Berlin-Heidelberg-New York.

Scotto, M. G., Weiß, C. H., Silva, M. E. i Pereira, I. (2014), 'Bivariate binomial autoregressive models', *Journal of Multivariate Analysis* **125**, 233–251.

Shiryaev, A. N. (1996), *Probability*, Springer-Verlag, New York.

Silva, I. M. M. d. (2005), 'Contributions to the analysis of discrete-valued time series', PhD Thesis, Universidade do Porto. Reitoria.

Steutel, F. i Van Harn, K. (1979), 'Discrete analogues of self-decomposability and stability', *The Annals of Probability* **7**(5), 893–899.

Tjøstheim, D. (1986), 'Estimation in nonlinear time series models', *Stochastic Processes and their Applications* **21**(2), 251–273.

Varadhan, R. i Gilbert, P. (2009), 'An r package for solving a large system of nonlinear equations and for optimizing a high-dimensional nonlinear objective function, journal of statistical software', *Journal of Statistical Software* **32**(4), 1–26.

Zeger, S. L. (1988), 'A regression model for time series of counts', *Biometrika* **75**(4), 621–629.

Zheng, H., Basawa, I. V. i Datta, S. (2007), 'First-order random coefficient integer-valued autoregressive processes', *Journal of Statistical Planning and Inference* **137**(1), 212–229.

Propratna dokumentacija

Универзитет у Нишу

ИЗЈАВА О АУТОРСТВУ

Изјављујем да је докторска дисертација, под насловом

Моделовање дводимензионалних ауторегресивних временских низова са ненегативним целобројним вредностима

која је одбрањена на Природно-математичком факултету Универзитета у Нишу:

- резултат сопственог истраживачког рада;
- да ову дисертацију, ни у целини, нити у деловима, нисам пријављивао/ла на другим факултетима, нити универзитетима;
- да нисам повредио/ла ауторска права, нити злоупотребио/ла интелектуалну својину других лица.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци, који су у вези са ауторством и добијањем академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада, и то у каталогу Библиотеке, Дигиталном репозиторијуму Универзитета у Нишу, као и у публикацијама Универзитета у Нишу.

У Нишу, 23.6.2015.

Аутор дисертације: Предраг Поповић

Потпис аутора дисертације:

Поповић Предраг

Универзитет у Нишу

ИЗЈАВА О ИСТОВЕТНОСТИ ШТАМПАНОГ И ЕЛЕКТРОНСКОГ ОБЛИКА ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ

Име и презиме аутора: Предраг Поповић

Наслов дисертације: *Моделовање дводимензионалних ауторегресивних временских низова са ненегативним целобројним вредностима*

Ментор: др. Мирослав Ристић

Изјављујем да је штампани облик моје докторске дисертације истоветан електронском облику, који сам предао/ла за уношење у **Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу.**

У Нишу, 23.6.2015.

Потпис аутора дисертације:

Поповић Предраг

Универзитет у Нишу

ИЗЈАВА О КОРИШЋЕЊУ

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Никола Тесла“ да, у Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу, унесе моју докторску дисертацију, под насловом:

Моделовање дводимензионалних ауторегресивних временских низова са ненегативним целобројним вредностима.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском облику, погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију, унету у Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу, могу користити сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons), за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство **(CC BY)**

2. Ауторство – некомерцијално **(CC BY-NC)**

3. <u>Ауторство – некомерцијално – без прераде **(CC BY-NC-ND)**</u>

4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима **(CC BY-NC-SA)**

5. Ауторство – без прераде **(CC BY-ND)**

6. Ауторство – делити под истим условима **(CC BY-SA)**

(Молимо да подвучете само једну од шест понуђених лиценци; опис лиценци дат је у Упутству).

У Нишу, 23.6.2015

Аутор дисертације: Предраг Поповић

Потпис аутора дисертације:

Поповић Предраг

Biografija autora

Predrag Popović rođen je 7.10.1982. u Nišu. Osnovnu i srednju školu završio je kao dobitnik diplome *Vuk Karadžić*. Prirodno-matematički fakultet u Nišu upisao je školske 2001/2002. na odseku Matematika i informatika, smer Diplomirani matematičar za matematiku ekonomije. Diplomirao je maja 2006. Na studijama je postigo prosečnu ocenu 9.30, a tema diplomskog rada bila je *Značaj kvantitativnih metoda za određivanje optimalnog portfolija hartija od vrednosti*. Za vreme studija bio je stipendista Fondacije za razvoj naučnog i umetničkog podmlatka.

Školske 2006/2007. upisao je master studije na Ekonomskom fakultetu u Beogradu, smer International master in quantitative finance. Studije je završio decembra 2008. ostvarivši prosečnu ocenu 8.86. Tema završnog rada bila je *Pricing Options with Monte Carlo Simulations*.

Doktorske studije upisao je školske 2008/2009. na Prirodno-matematičkom fakultetu u Nišu, na odseku Matematika. Položio je sve ispite predviđene nastavnim planom i programom postigavši prosečnu ocenu 9.73. Objavio je pet radova u međunarodnim časopisima sa impakt faktorom i jedan rad u domaćem časopisu. Učesnik je više međunarodnih i domaćih konferencija.

Od oktobra 2010. zaposlen je kao asistent na katedri za Matematiku informatiku i fiziku Građevinsko-arhitektonskog fakulteta u Nišu. Angažovan je na izvođenju nastave iz predmeta Matematika 1, Matematika 2 i Matematika 3.

Radovi:

- Popović, P.M. (2015), Random coefficient bivariate INAR (1) process, Facta Universitatis, Series: Mathematics and Informatics 30, 263-280.

- Popović, P.M., Ristić, M.M., Nastić A.S. (2015), A geometric bivariate time series with different marginal parameters, Statistical Papers, DOI 10.1007/s00362-015-0677-z, prihvaćen za štampu.

- Popović, P.M. (2015), A bivariate INAR(1) model with different thinning parameters,

Statistical Papers, DOI 10.1007/s00362-015-0667-1, prihvaćen za štampu.

- Nastić, A.S., Ristić, M.M., Popović, P.M. (2014), Estimation in a Bivariate Integer-Valued Autoregressive Process, Communication in Statistics - Theory and Methods, prihvaćen za štampu.

- Stojanović V., Popović B., Popović P. (2014), Stochastic analysis of GSB process, Publications de l'Institut Mathematique 95, 149-159.

- Stojanović V., Popović B., Popović P. (2011), The Split-break Model, Brazilian Journal of Probability and Statistics, 25, 44-63.

Konferencije:

- Popović, P.M., Nastić, A.S., Ristić, M.M. (2014), On Modelling Bivariate Time Series Of Counts, TINKOS 2014, Niš, Jun 16-17, 2014.

- Popović, P.M., Nastić, A.S., Ristić, M.M. (2014), Bivariate autoregressive models in time series of counts forecasting, 13th Serbian Mathematical Congress, Vrnjačka banja, May 22-25, 2014.

- Ristić, M.M., Nastić, A.S., Popović, P.M. (2013), Bivariate models for time series of counts, Applied Statistics 2013, Ribno, September 22-25, 2013.

- Popović, P.M. (2011), Pricing Multi Assets American Options with Monte Carlo Simulation, Applied Statistics 2011, Ribno, September 25-28, 2011.