УНИВЕРЗИТЕТ У НИШУ
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Ана М. Велимировић

Конформне, конциркуларне и пројективне (геодезијске) трансформације у просторима несиметричне афине конексије и генералисаним Римановим просторима

Докторска дисертација

Ниш, 2022.

UNIVERSITY OF NIŠ
FACULTY OF SCIENCES AND MATHEMATICS

Ana M. Velimirović

Conformal, Concircular and Projective (Geodesic) Transformations at the Nonsymmetric Affine Connection Spaces and Generalized Riemannian Spaces

Doctoral Dissertation

Niš, 2022.

Подаци о докторској дисертацији

Име кандидата: Ана М. Велимировић

Ментор: Др Милан Љ. Златановић, редовни професор, Природно-математички факултет, Универзитет у Нишу

Наслов: Конформне, концикуларне и пројективне (геодезијске) трансформације у просторима несиметричне афине конексије и генералисаним Римановим просторима

Рад се односи на проблеме простора несиметричне афине конексије и генералисаоних Риманових простора који су и данас отворени. Ајзенхарт и Ајнштајн су се први позабавили овим проблемима, а они су и данас актуелни. Проучили смо еквиторзиона пресликавања два простора, пресликавање код кога се торзија не мења, тј. Постаје инваријантна.

К. Јано је у R_N увео концепт геодезијског круга. Такође смо увели тај концепт у GR_N и проучавали његова својства. Проучавали смо услове интеграбилности диференцијалних једначина геодетских кругова, као и линије у GR_N. Разматрају се геодетски кругови који представљају генерализацију резултата К.Јаноа. Дефинисани су геодетски кругови првог и другог реда и услови да геодезијски круг буде првог и другог реда.

У проучавању пресликавања (трансформације) простора GR_N и GA_N применили смо посебне процедуре и добили нове инваријанте за конформне, концикуларне и пројективне транформације тензора и псеудотензора кривине.
Надаље, разматрали смо могућност представљања конформног и концикуларног тензора из придруженог простора R_N помоћу тензор кривине и торзије из GR_N.

Резиме:

Аналогно томе, посматрали смо представљање Вајловоф тензора из GA_N и из GR_N. У својој дисертацији С. М. Минчић је увео појам псеудотензора кривине, који представља генерализацију тензора кривине, јер се у случају A_N (R_N) они своде на тензоре кривине. Такође смо урадили горе поменуто и за псеудотензоре.

Решен је проблем колико линерних конексија са торзијом и без торзије постоји које имају својство да буду паралелне у односу на тензорско поље. За бројање ових веза користе се алгебарске методе.

Кључне речи:

Генералисан Риманов простор, конформне трансформације, концируларне трансформације

УДК:

514.756.2(043)

514.763.2(043)

514.763.4/.5(043)

Научна област:

Математичке науке

Научна дисциплина:

Диференцијална геометрија

CERIF класификација:

P150 Геометрија алгебарска топологија

Data on Doctoral Dissertation

Name of the Candidate: Ana M. Velimirović

Doctoral Supervisor: Dr Milan LJ. Zlatanović, full professor, Faculty of Sciences and Mathematics, University of Niš

Title: Conformal, Concircular and Projective (Geodesic) Transformations at the Nonsymmetric Affine Connection Spaces and Generalized Riemannian Spaces

The paper refers to the problems of non-symmetric affine connection spaces and generalized Riemannian spaces, which are still open today. Eisenhart and Einstein were the first to deal with these problems, and they are still relevant today.

K. Yano introduced the concept of a geodesic circle in R_N. We also introduced that concept in $GR_N$and studied its properties. We have studied the integrability conditions of differential equations of geodesic circles, as well as lines in GR_N. Geodesic circles that represent a generalization of the results of K. Yano are considered. Geodesic circles of the first and second order and the conditions for a geodesic circle to be of the first and the second order are defined.

In the study of the mapping (transformation) of the spaces GR_N and GA_N, we applied special procedures and obtained new invariants for conformal, concircular and projective ransformations of tensors and pseudotensors of curvature.

Furthermore, we considered the possibility of representing the conformal and concircular tensor from the associated space R_N using the curvature and torsion tensor from GR_N.

Analogously, we looked at the representation of the Wayl tensor from GA_N and from GR_N. In his dissertation S. M. Minčić introduced

Abstract:

the notion of curvature pseudotensor, which represents a generalization of curvature tensors, because in the case of A_N (R_N) they reduce to curvature tensors. We have also done above mentioned for curvature tensors for pseudotensors.

The problem of how many linear connections with torsion and without torsion exist that have the property of being parallel with respect to the tensor field are solved. Algebraic methods are used to count these connections.

Key Words:

Generalized Riemannian space, conformal transformations, concircular transformations

UDC:

514.756.2(043)

514.763.2(043)

514.763.4/.5(043)

Scientific Field:

Mathematical Sciences

Scientific Discipline:

Differential Geometry

CERIF Classification:

P150 Geometry Algebraic topology

Creative Commons

License Type:

Прилог 4/1

ПРИРОДНО - МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
НИШ

КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА

Редни број, **РБР**:	
Идентификациони број, **ИБР**:	
Тип документације, **ТД**:	монографска
Тип записа, **ТЗ**:	текстуални
Врста рада, **ВР**:	докторска дисертација
Аутор, **АУ**:	Ана М. Велимировић
Ментор, **МН**:	Милан Љ. Златановић
Наслов рада, **НР**:	Конформне, concirkularne и пројективне (геодезијске) трансформације у просторима несиметричне афине конексије и генералисаним Римановим просторима
Језик публикације, **ЈП**:	српски
Језик извода, **ЈИ**:	енглески
Земља публиковања, **ЗП**:	Србија
Уже географско подручје, **УГП**:	Србија
Година, **ГО**:	2022.
Издавач, **ИЗ**:	ауторски репринт
Место и адреса, **МА**:	Ниш, Вишеградска 33.
Физички опис рада, **ФО**: (поглавља/страна/ цитата/табела/слика/графика/прилога)	131 стр.
Научна област, **НО**:	математика
Научна дисциплина, **НД**:	Диференцијална геометрија
Предметна одредница/Кључне речи, **ПО**:	генералисани Риманов простор, трансформације
УДК	514.756.2(043) 514.763.2(043) 514.763.4/.5(043) 514.764.2/.4(043)
Чува се, **ЧУ**:	библиотека
Важна напомена, **ВН**:	
Извод, **ИЗ**:	Проучили смо еквиторзиона пресликавања два простора, пресликавање код кога се торзија не мења, т.ј. постаје инваријантна. У проучавању пресликавања (трансформације) простора GR_N и GA_N применили смо посебне поступке и добили нове инваријанте за конформне, concirkularне и пројективне трансформације тензора кривине.
Датум прихватања теме, **ДП**:	8.11.2021

Датум одбране, **ДО**:		уписује се накнадно руком
Чланови комисије, **КО**:	Председник:	
	Члан:	
	Члан, ментор:	

ПРИРОДНО - МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
НИШ

KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number, **ANO**:	
Identification number, **INO**:	
Document type, **DT**:	**monograph**
Type of record, **TR**:	**textual**
Contents code, **CC**:	**doctoral dissertation**
Author, **AU**:	**Ana M. Velimirović**
Mentor, **MN**:	**Milan Lj. Zlatanović**
Title, **TI**:	Conformal, Concircular and Projective (Geodesic) Transformations at the Nonsymmetric Affine Connection Spaces and Generalized Riemannian Spaces
Language of text, **LT**:	**Serbian**
Language of abstract, **LA**:	**English**
Country of publication, **CP**:	**Serbia**
Locality of publication, **LP**:	**Serbia**
Publication year, **PY**:	**2022**
Publisher, **PB**:	**author's reprint**
Publication place, **PP**:	**Niš, Višegradska 33.**
Physical description, **PD**: (chapters/pages/ref./tables/pictures/graphs/appendixes)	**131 p. ; graphic representations**
Scientific field, **SF**:	**Mathematics**
Scientific discipline, **SD**:	**Differential Geometry**
Subject/Key words, **S/KW**:	**Generalized Riemannian spaces, transformations**
UC	514.756.2(043) 514.763.2(043) 514.763.4/.5(043)
Holding data, **HD**:	**library**
Note, **N**:	
Abstract, **AB**:	We have studied equitorsion mappings of two spaces, a mapping where the torsion does not change, i.e. becomes invariant. In the study of the mapping (transformation) of the spaces GR_N $and\ GA_N$, we applied special procedures and obtained new invariants for conformal, concircular and projective transformations of the curvature tensors and pseudotensors.
Accepted by the Scientific Board on, **ASB**:	8.11.2021
Defended on, **DE**:	

Defended Board, **DB**:	President:	
	Member:	
	Member, Mentor:	

Образац Q4.09.13 - Издање 1

Предговор

Риманова многострукост је генерализација еуклидског простора. Може се локално описати као еуклидски простор, опремљен је метричким тензорором g_{ij}.

Данас диференцијална геометрија и специјално Риманова геометрија добија на значају. У компјутерској визуализацији, диференцијална геометрија као и Риманова геометрија се користи за анализу облика. У обради слике се користи за анализу података на површима.

Геометријска информатика је интердисциплинарна област која примењује технике диференцијалне геометрије за проучавање теорије вероватноће и статистике. Проучава статистичке многострукости, које су Риманове многострукости чије тачке одговарају дистрибуцијама у вероватноћи. Употребљава се за анализу великог броја података.

Ова дисертација разматра проблеме генералисаног Римановог простора.

Риманову геометрију први је генерално представио и дао основне идеје Б. Риман у 19. веку. Она се бави широким опсегом проблема геометрије чија се метричка својства разликују од тачке до тачке. Риманова геометрија се бави Римановим простором. Основе Риманове геометрије је поставио још Б. Риман у свом раду *"О претпоставкама, које леже у основама геометрије"*.

Риманову геометрију су развили значајни математичари, посебно Ричи, а затим и Ајнштајн у вези са теоријом релативности. Ајнштајн је 1916. године објавио своју Општу теорију релативности, у којој се као простор узима јединствени просторно-временски континуум, у коме је метрика одређена са

$$(ds)^2 = g_{ij}dx^i dx^j, \quad g_{ij}(x) = g_{ji}(x), \quad i, j = 1, 2, 3, 4.$$

Са тачке гледишта Диференцијалне геометрије, простор Опште теорије релативности је Риманов простор R_4. Тачка $(x^1, x^2, x^3,\ x^4)$ у Општој теорији релативности се зове *догађај*, јер је са прве три координате одређено *место*, а четвртом *време*.

Ајнштајн није био задовољан Општом теоријом релативности, па је, почев од 1923. године, радио на проналажењу Јединствене теорије поља, која би обухватила гравитационо и електромагнетно поље. У даљим радовима је користио комплексан основни тензор g_{ij}, чији је реални део симетричан, а имагинарни антисиметричан по индексима i, j. У Ајнштајновим радовима се симетрични део афине конексије односи на гравитацију, док се тензор торзије односи на електомагнетизам. Након Ајнштајна, допринос теорији простора несиметричне афине конексије је дао и Л. П. Ајзенхарт, који је увео дефиницију генералисаног Римановог простора. Генералисан Риманов простор у смислу Ајзенхартове дефиниције је N-димензиона диференцијабилна многострукост снабдевена несиметричним основним тензором g_{ij} где је конексија експлицитно одређена. Теоријом простора несиметричне афине конексије су се даље бавили или се и даље баве Ф. Граиф, С. Бохнер, К. Нитеску, М. Првановић и многи други.

Проблеми који се односе на просторе несиметричне афине конексије и на генералисане Риманове просторе, као њихов специјалан случај, су и данас остали отворени, а постављена су и многа нова питања. Особине ових простора и њихова пресликавања су у овој дисертацији разматрани и пронађени су неки нови резултати.

Дисертација се састоји од осам глава:

1. Увод,
2. ЕТ конформне трансформације и ЕТ комформни тензори,
3. Еквиторзионе конциркуларне трансформације у GR_N,
4. Представљање конформног тензора и конциркуларног тензора,
5. Представљање Вајловог тензора $\mathbf{W^i_{jmn}}$,
6. ЕТ конформне трансформације псеудотензора кривине,
7. ЕТ конциркуларна трансформација псеудотензора кривине,
8. Линеарне конексије са и без торзије.

Прва глава садржи познате појмове и резултате који су нам потребни за даљи рад.

Друга глава, под називом **ЕТ конформне трансформације и ЕТ**

конформни тензори се састоји из 2 дела. Први део **Геодезијски кругови у** GR_N представља уопштење резултата К. Јана [155]. Дефинише се крива у GR_N која је геодезијски круг I и II врсте. Одређује се потребан и довољан услов да геодезијски круг C I врсте (II врсте) буде истовремено геодезијски круг II врсте (I врсте).

Такође се одређује геодезијски круг као крива која је истовремено геодезијски круг I и II врсте. Резултати нису публиковани.

У другом делу се разматра еквиторзиона конформна трансформација у GR_N. Одређује се потребан и довољан услов да конформна трансформација буде еквиторзиона. Такође се одређује еквиторзиона конформна трансформација кривине $\underset{\theta}{R}, \quad \theta = 1, 2, \ldots, 5$

Одређује се еквиторзиони конформни тензор $1., \ldots, 5.$ врсте као и инваријанте еквиторзионе конформне трансформације, тј. еквиторзиони конформни тензори.

Трећа глава је посвећена еквиторзионим конциркуларним трансформацијама и тензорима. Одређени су еквиторзиони конциркуларни тензори врсте $\theta, \quad \theta = 1, 2, \ldots, 5$. Овим трансформацијама се бавио К. Јано [155]. Ми у [142] у GR_N посматрамо конциркуларне трансформације узимајући

$$\underset{\theta}{\rho}_{ij} = \underset{\theta}{\phi}(x) g_{ij}, \quad (g_{ij} \neq g_{ji}). \tag{0.0.1}$$

Поступак је општији јер користимо да је $g_{ij} \neq g_{ji}$. На тај начин добијамо конциркуларне тензоре као инваријанте конциркуларне трансформације.

Изложени су услови интеграбилности диференцијалних једначина геодезијских кругова у GR_N, где су као оргинални резултати добијене теореме.

У делу који се односи на $\rho-$линије, доказана је теорема која тврди да ако је конформна трансформација $\bar{g}_{ij} = \rho^2 g_{ij}$ у GR_N конциркуларна, тј. ако важи (0.0.1), онда је потребан и довољан услов

$$\underset{V}{g_{pq}} \rho^2 = 0 \tag{0.0.2}$$

да криве $x^i = x^i(t)$ чији се тангентни правац поклапа са правцем вектора ρ^i, буду геодезијске линије.

Наредна, **четврта глава**, је посвећена представљању конформног тензора C^i_{jmn} и концирkуларног тензора Z^i_{jmn} из придруженог простора R_N помоћу тензора кривине и торзије из GR_N. За задат простор $GR_N = (\mathcal{M}_N, g_{ij} \neq g_{ji})$ конформни тензори C^i_{jmn} придруженог простора $R_N = (\mathcal{M}_N, g_{\underline{ij}})$ се представља помоћу $\underset{\theta}{R}^i_{jmn}, \theta = 1, \ldots, 5$ и торзије $T^i_{jk} = 2\Gamma^i_{\underset{\vee}{jk}}$.

Ако је задат простор $GR_N = (\mathcal{M}_N, g_{ij} \neq g_{ji})$, концирkуларни тензор Z^i_{jmn} придруженог простора $R_N = (\mathcal{M}_N, g_{\underline{ij}})$ помоћу $\underset{\theta}{R}^i_{jmn}$, $\theta = 1, \ldots, 5$ и торзије $T^i_{jk} = 2\Gamma^i_{\underset{\vee}{jk}}$ представља се једначинама.

У **петој глави** посматрамо геодезијску (пројективну) трансформацију у простору GA_N несиметричне афине конексије L^i_{jk}. Вајлов тензор $W^i{}_{jmn}$ из придруженог простора A_N симетричне афине конексије $L^i_{\underline{jk}}$ може се, користећи независне тензоре кривине $\underset{\theta}{R}^i{}_{jmn}, \theta = 1, .., 5$, представити на 5 начина.

Такође, ако је f пројективна трансформација у GR_N, Вајлов пројективни тензор $W^i{}_{jmn}$ из придуженог простора R_N, се може, помоћу независних тензора кривине $\underset{\theta}{R}_{jm}, \theta = 1, ..., 5$ из GR_N представити на 5 начина.

Показано је како се, користећи везу између тензора кривине R и $\underset{\theta}{R}$, може $W^i{}_{jmn}$ изразити преко $\underset{\theta}{R}$ и торзије.

У **шестој глави** ћемо прво разматрати независне псеудотензоре кривине у GR_N. Затим, разматрамо еквиторзионе конформне трансформације псеудотензора прве, друге, треће, шесте и седме врсте. Добијене величине се зову еквиторзиони конформни псеудотензори прве, друге, шесте и седме врсте.

Аналогно ономе што је урађено за тензоре кривине, овде је то уопштено на псеудотензоре кривине.

У **седмој глави** се разматрају еквиторзионе концирkуларне трансформације псеудотензора кривине и одређују инваријанте такве трансформације, еквиторзиони концирkуларни псеудотензори прве, друге, треће, шесте, седме врсте.

За дати простор $GR_N = (\mathcal{M}_{\mathcal{N}}, g_{ij} \neq g_{ji})$ конформни тензор C^i_{jmn} и концирkуларни тензор Z^i_{jmn} из придруженог простора $R_N = (\mathcal{M}_{\mathcal{N}}, g_{\underline{jm}})$ представља се помоћу независног псеудотензора $\underset{\theta}{A}^i_{jmn}, \theta = 1, 2, 3, 6, 7$ и торзије $T^i_{jk} = 2\Gamma^i_{\underset{\vee}{jk}}$.

У **осмој глави** наше проучавање је развијено у општем оквиру, а то је многострукост M са $(1,1)$-тензорским пољем φ, које је интеграбилно. Овде решавамо следећа два проблема: колико линеарних конексија са торзијом и без торзије постоји, које имају својство да буду паралелне у односу на φ. За пребројавање свих ових веза са датим својствима, у целој глави се користе одређене алгебарске технике и резултати.

Дисертација је урађена под менторством проф. др Милана Златановића. Овом приликом му се захваљујем на великој помоћи коју ми је пружио у току израде дисертације, пратећи читав ток израде, као и на корисним примедбама и сугестијама, које су допринеле коначном изгледу дисертације.

Користим прилику да се захвалим и проф. др Мићи Станковићу на подршци и помоћи коју ми је пружио током израде дисертације и током студија, као и на корисним примедбама и сугестијама.

Овом приликом се захваљујем и проф. др Зорану Ракићу који ми је, током ових година, пружао помоћ и подршку.

Посебну захвалност дугујем својим колегама и коауторима Др Ненаду Весићу, Др Милошу Петровићу и Проф Др Корнелији Ливији Бежан који су ми пружили подршку на почетку мог рада. Захваљујем Др Владислави Миленковић која ми је помагала током израде дисертације.

Изузетну захвалност дугујем мом деки, С. Минчићу, који ми је увек био узор и пружао несебичну помоћ.

Посебну захвалност дугујем својој породици на разумевању и подршци коју ми је несебично пружала приликом израде ове дисертације.

Ниш, 1.07.2022. Ана М. Велимировић

Садржај

ГЛАВА 1

Увод

Како су радови Алберта Ајнштајна [1] дали прве подстицаје теорији која користи несиметричан основни тензор и несиметричну конексију, то ћемо се најпре осврнути на ту његову делатност. У раду [18] из 1905. године Ајнштајн поставља основе своје **специјалне теорије релативности (СТР)** у којој се посматра четвородимензионални просторно-временски континуум, при чему се метричка форма узима у облику

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2, \tag{1.0.1}$$

где су x, y, z просторне координате, t време, а c брзина светлости. У математичком смислу, посматрајући (1.0.1), простор СТР је уствари **простор Минковског** $\mathcal{M}_4$.

Настављајући проучавање проблема простора и времена, Ајнштајн 1916. године објављује своју **Општу теорију релативности (ОТР)** у [19], где је уместо (1.0.1) основна метричка форма

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j, g_{ij} = g_{ji}, \quad i, j \in \{1, 2, 3, 4\},$$

а $g_{ij} = g_{ij}(x)$ су функције тачке у простору.

Ајнштајн се није задовољио својом Општом теоријом релативности, већ је почев од 1923. године до краја живота (1955) радио на теорији која би објединила теорију гравитације и теорију електромагнетизма,

---

[1] A. Einstein, 1879-1955, немачки физичар и математичар, јеврејског порекла

то је **Јединствена теорија поља (ЈТП)**. Користећи разне варијанте, Ајнштајн 1945. у [20] и 1946. године у [21] користи комплексан основни тензор g_{ij}, чији је реални део симетричан, а имагинарни -антисиметричан по i, j.

Почев од 1950. године у [22] Ајнштајн користи реалан несиметрични основни тензор у радовима у вези са ЈТП. Такав је његов последњи рад [24] из 1955. године.

Л. П. Ајзенхарт [2] се почев од 1951. године доста бавио просторима са несиметричним основним тензором [26]- [31]. У [26] Ајзенхарт дефинише **генералисани Риманов простор** (GR_N), као "простор координата x^i, са којим је асоциран несиметрични тензор g_{ij}".

Конексија у GR_N се уводи помоћу **генералисаних Кристофелових симбола I и II врсте**

$$\Gamma_{i.jk} = \frac{1}{2}(g_{ji,k} - g_{jk,i} + g_{ik,j}), \quad g_{ij,k} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}, \tag{1.0.2}$$

$$\Gamma^i_{jk} = g^{\underline{ip}}\Gamma_{p.jk} = \frac{1}{2}g^{\underline{ip}}(g_{jp,k} - g_{jk,p} + g_{pk,j}), \tag{1.0.3}$$

при чему се симетрични део од g_{ij} означава са $g_{\underline{ij}}$, а антисиметрични део са $g_{\underset{\vee}{ij}}$, док је $(g^{\underline{ij}}) = (g_{\underline{ij}})^{-1}$.

У раду [27] Ајзенхарт добија два тензора кривине у GR_N.

У наредном периоду су се многи математичари бавили просторима са несиметричним основним тензором и несиметричном конексијом. Међу радовима страних математичара ту су радови аутора као што су италијански математичари Е. Бомпани [4], Ф. Граф [35,36], М. Пастори [100], Е. Бринис [6], а такође индијски математичари као К. Д. Синг [120], У. П. Синг [121], С. Ц. Саксена, Р. Бехари, [18, 119] и др.

Прва од српских (и југословенских) математичара, која се бавила просторима несиметричне афине конексије, била је М. Прврановић. Даље, у овој области раде С. Минчић, М. Станковић, Љ. Велимировић, М. Златановић и други.

На почетку напоменимо да се разматрања у овом раду врше у лока-

---

[2] L. P. Eisenhart 1876-1965, амерички математичар

лним координатама, тј. користе се ознаке са индексима.

Према Ајзенхарту, на N-димензионалној многострукости $\mathcal{M}_N$ се уводи коваријантни несиметрични основни тензор

$$g_{ij}(x^1,...,x^N) \equiv g_{ij}(x) \neq g_{ji}(x),$$

у наставку пишемо само g_{ij}, са симетричним односно антисиметричним делом

$$g_{\underline{ij}} = \frac{1}{2}(g_{ij} + g_{ji}), \quad g_{\underset{\vee}{ij}} = \frac{1}{2}(g_{ij} - g_{ji}).$$

Одговарајући контраваријантни тензор $g^{\underline{ij}}$ се дефинише условом

$$g_{\underline{ij}}g^{\underline{jk}} = \delta^k_i, \ (det(g_{\underline{ij}}) \neq 0).$$

Тензори $g_{\underline{ij}}(g^{\underline{ij}})$ служе за спуштање (подизање) индекса. Како је показано у [78] у GR_N важи

$$\frac{\underline{g}_{,k}}{2\underline{g}} = \Gamma^p_{kp}, \tag{1.0.4}$$

где је $\underline{g} = det(g_{\underline{ij}})$, а запетом је означен парцијални извод, $\underline{g}_{,k} = \frac{\partial \underline{g}}{\partial x^k}$. Из (1.0.2) следи да у GR_N важи

$$\Gamma^p_{\underset{\vee}{kp}} = 0.$$

Ако уведемо трансформацију координата у GR_N

$$x^{i'} = x^{i'}(x^1,\dots,x^N), \quad i' = 1',\dots,N',$$

и инверзну трансформацију

$$x^i = x^i(x^{1'},\dots,x^{N'}), \quad i = 1,\dots,N,$$

па уведемо ознаке

$$\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} = x^{i'}_i, \quad \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} = x^i_{i'},$$

имаћемо

$$x^i_j = \frac{\partial x^i}{\partial x^j} = x^i_{i'}x^{i'}_j = \delta^i_j, \quad x^{i'}_{j'} = x^{i'}_j x^j_{j'} = \delta^{i'}_{j'} = \delta^i_j.$$

Ако пођемо од **закона трансформације** основног тензора $g_{ij}(g^{ij})$

$$g_{i'j'} = x^i_{i'} x^j_{j'} g_{ij}, \quad g^{i'j'} = x^{i'}_i x^{j'}_j g^{ij}, \tag{1.0.5}$$

где је g^{ij} одређен условом

$$g_{ij} g^{jk} = \delta^k_i, \quad (det(g_{\underline{ij}}) \neq 0),$$

за Кристофелове симболе (1.0.2), (1.0.3) ћемо добити закон трансформације

$$\Gamma_{i'.j'k'} = x^i_{i'} x^j_{j'} x^k_{k'} \Gamma_{i.jk} + x^i_{i'} x^j_{j'k'} g_{\underline{ij}} \tag{1.0.6}$$

$$\Gamma^{i'}_{j'k'} = x^{i'}_i x^j_{j'} x^k_{k'} \Gamma^i_{jk} + x^{i'}_i x^i_{j'k'}. \tag{1.0.7}$$

где је $x^i_{j'k'} = \partial^2 x^i / \partial x^{j'} \partial x^{k'}$.

Дефинисаћемо неке основне појмове

Дефиниција 1.0.1. *Кристофелови симболи II врсте Γ^i_{jk} се такође зову* **коефицијенти конексије**. *Ако на диференцијабилној многострукости $\mathcal{M}_N$ директно (а не помоћу g_{ij}) уведемо функције $L^i_{jk}(x^1, \ldots, x^N)$ (сада пишемо L уместо Γ) са законом трансформације, аналогно (1.0.7):*

$$L^{i'}_{j'k'} = x^{i'}_i x^j_{j'} x^k_{k'} L^i_{jk} + x^{i'}_i x^i_{j'k'},$$

онда $GA_N = (\mathcal{M}_N, L^i_{jk})$ зовемо **простор афине (линеарне) конексије**. *Ако је $L^i_{jk} = L^i_{kj}$, конексија је* **симетрична**, *а за $L^i_{jk} \neq L^i_{kj}$ конексија је* **несиметрична**. *Аналогно основном тензору g_{ij}, дефинишемо* **симетричан** *односно* **антисиметричан део** *конексије, редом:*

$$L^i_{\underline{jk}} = \frac{1}{2}(L^i_{jk} + L^i_{kj}), \quad L^i_{\underset{\vee}{jk}} = \frac{1}{2}(L^i_{jk} - L^i_{kj}) = \frac{1}{2} T^i_{jk}.$$

Симетрични део $L^i_{\underline{jk}}$ задовољава закон (1.0.7), па је $L^i_{\underline{jk}}$ **симетрична конексија.**

Разлика

$$T^i_{jk} = L^i_{jk} - L^i_{kj} = 2 L^i_{\underset{\vee}{jk}}$$

је тензор- **тензор торзије** *(у локалним координатама).*

Понекад се и $L^i_{\underset{V}{jk}}$ *зове торзија.*

Важан појам у вези са конексијом је **коваријантни извод** тензора. Помоћу несиметричне конексије је могуће увести 4 врсте коваријантног извода (С. Минчић [58, 66, 68]). На пример, за тензор a^i_j у локалним координатама имамо

$$a^i_{j\underset{\substack{1\\2\\3\\4}}{|}m} = a^i_{j,m} + L^i_{\underset{\substack{mp\\pm\\mp}}{pm}} a^p_j - L^p_{\underset{\substack{mj\\mj\\jm}}{jm}} a^i_p.$$

Користећи поновљене коваријантне изводе, добијамо **идентитете Ричијевог типа и 4 тензора кривине** разматране у радовима [58]- [68]:

$$a^i_{j\underset{1}{|}mn} - a^i_{j\underset{1}{|}nm} = \underset{1}{R}{}^i_{pmn} a^p_j - \underset{1}{R}{}^p_{jmn} a^i_p - 2L^p_{\underset{\vee}{mn}} a^i_{j\underset{1}{|}p},$$

$$a^i_{j\underset{2}{|}mn} - a^i_{j\underset{2}{|}nm} = \underset{2}{R}{}^i_{pmn} a^p_j - \underset{2}{R}{}^p_{jmn} a^i_p + 2L^p_{\underset{\vee}{mn}} a^i_{j\underset{2}{|}p},$$

$$a^i_{j\underset{1}{|}m\underset{2}{|}n} - a^i_{j\underset{2}{|}n\underset{1}{|}m} = \underset{3}{R}{}^i_{pmn} a^p_j + \underset{3}{R}{}^p_{jmn} a^i_p,$$

$$a^i_{j\underset{3}{|}m\underset{4}{|}n} - a^i_{j\underset{4}{|}n\underset{3}{|}m} = \underset{4}{R}{}^i_{pmn} a^p_j + \underset{3}{R}{}^p_{jnm} a^i_p.$$

У осталим идентитетима Ричијевог типа, којих има укупно 10 добијених помоћу 1. и 2. врсте коваријантног извода и 10 добијених помоћу 3. и 4. врсте, појављују се и величине, које имају форму и улогу тензора кривине, али нису тензори, што ћемо ускоро утврдити. С. Минчић у [58, 68] уводи величине које назива **псеудотензори кривине** A^i_{jk} и то $1., \dots, 15.$ врсте.

На пример, за тензоре a^i, a_j имамо

$$a^i_{\underset{1}{|}m\underset{2}{|}n} - a^i_{\underset{1}{|}n\underset{2}{|}m} = \underset{1}{A}{}^i_{pmn} a^p + 2L^p_{\underset{V}{mn}} a^i_{\underset{1}{|}p},$$

$$a_{j\underset{1}{|}m\underset{2}{|}n} - a_{j\underset{1}{|}n\underset{2}{|}m} = -\underset{2}{A}{}^p_{jmn} a_p - 2L^p_{\underset{V}{mn}} a_{j\underset{1}{|}p}.$$

Тензори кривине, добијени у $GA_N(GR_N)$ на наведени начин су [68], [88]:

$$\underset{1}{R}{}^i_{jmn} = L^i_{jm,n} - L^i_{jn,m} + L^p_{jm} L^i_{pn} - L^p_{jn} L^i_{pm}, \qquad (1.0.8)$$

$$\underset{2}{R}{}^i_{jmn}=L^i_{mj,n}-L^i_{nj,m}+L^p_{mj}L^i_{np}-L^p_{nj}L^i_{mp}, \tag{1.0.9}$$

$$\begin{aligned}\underset{3}{R}{}^i_{jmn}&=\underset{15}{A}{}^i_{jmn}+2L^p_{nm}L^i_{\underset{\vee}{pj}}\\ &=L^i_{jm,n}-L^i_{nj,m}+L^p_{jm}L^i_{np}-L^p_{nj}L^i_{pm}+L^p_{nm}(L^i_{pj}-L^i_{jp}),\end{aligned} \tag{1.0.10}$$

$$\begin{aligned}\underset{4}{R}{}^i_{jmn}&=\underset{15}{A}{}^i_{jmn}+2L^p_{nm}L^i_{\underset{\vee}{pj}}\\ &=L^i_{jm,n}-L^i_{nj,m}+L^p_{jm}L^i_{np}-L^p_{nj}L^i_{pm}+L^p_{mn}(L^i_{pj}-L^i_{jp}).\end{aligned} \tag{1.0.11}$$

Разним комбинацијама помоћу 15 псеудотензора кривине је добијено још 8 тензора кривине. У [68] је доказано да у GA_N има укупно 5 независних тензора кривине (или 6 независних), при чему је $\underset{5}{R}$ у [68] означен са $\underset{2}{\tilde{R}}$. Дакле,

$$\begin{aligned}\underset{5}{R}{}^i_{jmn}&=\frac{1}{2}(\underset{7}{A}+\underset{13}{A})^i_{jmn}=\frac{1}{2}(\underset{9}{A}+\underset{11}{A})^i_{jmn}\\ &=\frac{1}{2}(L^i_{jm,n}+L^i_{mj,n}-L^i_{jn,m}-L^i_{nj,m}\\ &\quad+L^p_{jm}L^i_{pn}L^p_{mj}L^i_{np}-L^p_{jn}L^i_{mp}-L^p_{nj}L^i_{pm})\end{aligned} \tag{1.0.12}$$

Псеудотензори кривине $\underset{\theta}{A}{}^i_{jkl}, \theta=1,\ldots,15$ у $GA_N(GR_N)$, [88], гласе

$$\begin{aligned}
\underset{1}{A}{}^i_{jmn}&=R^i_{jmn}+L^i_{\underset{\vee}{jm};n}-L^i_{\underset{\vee}{jn};m}+L^p_{\underset{\vee}{jm}}L^i_{\underset{\vee}{np}}-L^p_{\underset{\vee}{jn}}L^i_{\underset{\vee}{mp}}+2L^p_{\underline{jm}}L^i_{\underset{\vee}{np}}-2L^p_{\underline{jn}}L^i_{\underset{\vee}{mp}},\\
\underset{2}{A}{}^i_{jmn}&=R^i_{jmn}+L^i_{\underset{\vee}{jm};n}-L^i_{\underset{\vee}{jn};m}+L^p_{\underset{\vee}{mj}}L^i_{\underset{\vee}{pn}}-L^p_{\underset{\vee}{nj}}L^i_{\underset{\vee}{pm}}+2L^p_{\underset{\vee}{mj}}L^i_{\underline{pn}}-2L^p_{\underset{\vee}{nj}}L^i_{\underline{pm}},\\
\underset{3}{A}{}^i_{jmn}&=R^i_{jmn}+L^i_{\underset{\vee}{mj};n}-L^i_{\underset{\vee}{nj};m}+L^p_{\underset{\vee}{mj}}L^i_{\underset{\vee}{pn}}-L^p_{\underset{\vee}{nj}}L^i_{\underset{\vee}{pm}}-2L^p_{\underline{nj}}L^i_{\underset{\vee}{pm}},\\
\underset{4}{A}{}^i_{jmn}&=R^i_{jmn}+L^i_{\underset{\vee}{mj};n}-L^i_{\underset{\vee}{nj};m}+L^p_{\underset{\vee}{jm}}L^i_{\underset{\vee}{np}}-L^p_{\underset{\vee}{jn}}L^i_{\underset{\vee}{mp}}+2L^p_{\underset{\vee}{jm}}L^i_{\underline{np}}-2L^p_{\underset{\vee}{jn}}L^i_{\underline{mp}},\\
\underset{5}{A}{}^i_{jmn}&=R^i_{jmn}+L^i_{\underset{\vee}{jm};n}-L^i_{\underset{\vee}{nj};m}+L^p_{\underset{\vee}{jm}}L^i_{\underset{\vee}{pn}}-L^p_{\underset{\vee}{nj}}L^i_{\underset{\vee}{mp}}+2L^p_{\underline{jm}}L^i_{pn}-2L^p_{\underline{nj}}L^i_{\underset{\vee}{mp}}+2L^p_{\underline{mn}}L^i_{\underset{\vee}{jp}},\\
\underset{6}{A}{}^i_{jmn}&=R^i_{jmn}+L^i_{\underset{\vee}{jm};n}-L^i_{\underset{\vee}{nj};m}+L^p_{\underset{\vee}{mj}}L^i_{\underset{\vee}{np}}-L^p_{\underset{\vee}{jn}}L^i_{\underset{\vee}{pm}}+2L^p_{\underset{\vee}{mj}}L^i_{\underline{np}}-2L^p_{\underset{\vee}{jn}}L^i_{\underline{pm}}+2L^p_{\underline{mn}}L^i_{\underset{\vee}{jp}},\\
\underset{7}{A}{}^i_{jmn}&=R^i_{jmn}+L^i_{\underset{\vee}{jm};n}-L^i_{\underset{\vee}{jn};m}+L^p_{\underset{\vee}{jm}}L^i_{\underset{\vee}{pn}}-L^p_{\underset{\vee}{jn}}L^i_{\underset{\vee}{mp}}-2L^p_{\underline{jn}}L^i_{\underset{\vee}{mp}},\\
\underset{8}{A}{}^i_{jmn}&=R^i_{jmn}+L^i_{\underset{\vee}{jm};n}-L^i_{\underset{\vee}{jn};m}+L^p_{\underset{\vee}{mj}}L^i_{\underset{\vee}{pn}}-L^p_{\underset{\vee}{jn}}L^i_{\underset{\vee}{pm}}+2L^p_{\underset{\vee}{mj}}L^i_{\underline{pn}},\\
\underset{9}{A}{}^i_{jmn}&=R^i_{jmn}+L^i_{\underset{\vee}{jm};n}-L^i_{\underset{\vee}{nj};m}+L^p_{\underset{\vee}{jm}}L^i_{\underset{\vee}{pn}}-L^p_{\underset{\vee}{nj}}L^i_{\underset{\vee}{pm}}+2L^p_{\underline{jm}}L^i_{\underset{\vee}{pn}}+2L^p_{\underline{mn}}L^i_{\underline{jp}},\\
\underset{10}{A}{}^i_{jmn}&=R^i_{jmn}+L^i_{\underset{\vee}{jm};n}-L^i_{\underset{\vee}{nj};m}+L^p_{\underset{\vee}{jm}}L^i_{\underset{\vee}{np}}-L^p_{\underset{\vee}{jn}}L^i_{\underset{\vee}{pm}}-2L^p_{\underset{\vee}{jn}}L^i_{\underline{pm}}+2L^p_{\underline{mn}}L^i_{\underset{\vee}{jp}},
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\underset{11}{A}{}^i_{jmn} &= R^i_{jmn}+L^i_{\underset{\vee}{mj};n}-L^i_{\underset{\vee}{nj};m}+L^p_{\underset{\vee}{mj}}L^i_{\underset{\vee}{np}}-L^p_{\underset{\vee}{jn}}L^i_{\underset{\vee}{mp}}+2L^p_{\underline{jm}}L^i_{\underset{\vee}{np}}-2L^p_{\underset{\vee}{mn}}L^i_{\underline{jp}},\\
\underset{12}{A}{}^i_{jmn} &= R^i_{jmn}+L^i_{\underset{\vee}{mj};n}+L^i_{\underset{\vee}{nj};m}+L^p_{\underset{\vee}{mj}}L^i_{\underset{\vee}{pn}}-L^p_{\underset{\vee}{nj}}L^i_{\underset{\vee}{mp}}+2L^p_{\underline{mn}}L^i_{\underset{\vee}{pj}}+2L^p_{\underset{\vee}{jn}}L^i_{\underline{mp}},\\
\underset{13}{A}{}^i_{jmn} &= R^i_{jmn}+L^i_{\underset{\vee}{mj};n}-L^i_{\underset{\vee}{nj};m}+L^p_{\underset{\vee}{mj}}L^i_{\underset{\vee}{np}}-L^p_{\underset{\vee}{nj}}L^i_{\underset{\vee}{pm}}-2L^p_{\underline{jn}}L^i_{\underset{\vee}{pm}},\\
\underset{14}{A}{}^i_{jmn} &= R^i_{jmn}+L^i_{\underset{\vee}{mj};n}-L^i_{\underset{\vee}{nj};m}+L^p_{\underset{\vee}{jm}}L^i_{\underset{\vee}{np}}-L^p_{\underset{\vee}{nj}}L^i_{\underset{\vee}{mp}}+2L^p_{\underset{\vee}{jm}}L^i_{\underline{np}},\\
\underset{15}{A}{}^i_{jmn} &= R^i_{jmn}+L^i_{\underset{\vee}{jm};n}-L^i_{\underset{\vee}{nj};m}+L^p_{\underset{\vee}{jm}}L^i_{\underset{\vee}{np}}-L^p_{\underset{\vee}{nj}}L^i_{\underset{\vee}{pm}}+2L^p_{\underline{mn}}L^i_{\underset{\vee}{jp}}.
\end{aligned}
$$

У [68] је показано како се тензори кривине несиметричне конексије могу изразити помоћу тензора кривине симетричног дела конексије и торзије, што се показује као врло корисно. На пример, ако

$$L^i_{jk} = L^i_{\underline{jk}} + L^i_{\underset{\vee}{jk}}$$

сменимо у (1.0.8), добијамо

$$
\begin{aligned}
\underset{1}{R}{}^i_{jmn} = R^i_{jmn} &+ (L^i_{\underset{\vee}{jm},n} + L^i_{\underline{pn}}L^p_{\underset{\vee}{jm}} - L^p_{\underline{jn}}L^i_{\underset{\vee}{pm}} - L^p_{\underline{mn}}L^i_{\underset{\vee}{jp}})\\
&- (L^i_{\underset{\vee}{jn},m} + L^i_{\underline{pm}}L^p_{\underset{\vee}{jn}} - L^p_{\underline{jm}}L^i_{\underset{\vee}{pn}} - L^p_{\underline{nm}}L^i_{\underset{\vee}{jp}}) + L^p_{\underset{\vee}{jm}}L^i_{\underset{\vee}{pn}} - L^p_{\underset{\vee}{jn}}L^i_{\underset{\vee}{pn}},
\end{aligned}
\tag{1.0.13}
$$

где је R^i_{jmn} тензор кривине симетричне конексије

$$R^i_{jmn} = L^i_{\underline{jm},n} - L^i_{\underline{jn},m} + L^p_{\underline{jm}}L^i_{\underline{pn}} - L^p_{\underline{jn}}L^i_{\underline{pm}}.$$

Ако тачком и зарезом (;) означимо коваријантни извод с обзиром на $L^i_{\underline{jk}}$ једначина (1.0.13) постаје

$$\underset{1}{R}{}^i_{jmn} = R^i_{jmn} + L^i_{\underset{\vee}{jm};n} - L^i_{\underset{\vee}{jn};m} + L^p_{\underset{\vee}{jm}}L^i_{\underset{\vee}{pn}} - L^p_{\underset{\vee}{jn}}L^i_{\underset{\vee}{pm}}. \tag{1.0.14}$$

Уведимо следеће означавање

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{A} = L^i_{\underset{\vee}{jm};n},\ \mathcal{B} = L^p_{\underset{\vee}{jm}}L^i_{\underset{\vee}{pn}},\ \mathcal{C} = L^p_{\underset{\vee}{mn}}L^i_{\underset{\vee}{pj}},\\
&\mathcal{A}' = L^i_{\underset{\vee}{jn};m},\ \mathcal{B}' = L^p_{\underset{\vee}{jn}}L^i_{\underset{\vee}{pm}},
\end{aligned}
\tag{1.0.15}
$$

где су $L^i_{\underline{jk}}, L^i_{\underset{\vee}{jk}}$ симетрични односно антиметрични део конексије L^i_{jk}, и са (;) је обележен извод с обзиром на $L^i_{\underline{jk}}$, чији је тензор кривине R. На тај начин, користећи одговарајуће једначине и изостављајући индексе у R^i_{jmn} и тако даље, добија се

$$
\begin{aligned}
&\underset{1}{R} = R + \mathcal{A} - \mathcal{A}' + \mathcal{B} - \mathcal{B}',\\
&\underset{2}{R} = R - \mathcal{A} + \mathcal{A}' + \mathcal{B} - \mathcal{B}',\\
&\underset{3}{R} = R + \mathcal{A} + \mathcal{A}' - \mathcal{B} + \mathcal{B}' - 2\mathcal{C},\\
&\underset{4}{R} = R + \mathcal{A} + \mathcal{A}' - \mathcal{B} + \mathcal{B}' + 2\mathcal{C},\\
&\underset{1}{\widetilde{R}} = R - \mathcal{B} + \mathcal{B}',\ \underset{2}{\widetilde{R}} = R + \mathcal{B} + \mathcal{B}' = \underset{5}{R},\ \underset{3}{\widetilde{R}} = R - \mathcal{B} - \mathcal{B}',\\
&\underset{4}{\widetilde{R}} = R + \frac{1}{3}(-\mathcal{A} + \mathcal{A}' - \mathcal{B} + \mathcal{B}' - 2\mathcal{C}),\\
&\underset{5}{\widetilde{R}} = R - \mathcal{A} + \mathcal{A}' - 3\mathcal{B} - \mathcal{B}',\ \underset{6}{\widetilde{R}} = R - \mathcal{A} + \mathcal{A}' + \mathcal{B} + 3\mathcal{B}',\\
&\underset{7}{\widetilde{R}} = R + \mathcal{A} - \mathcal{A}' + \mathcal{B} + 3\mathcal{B}',\\
&\underset{8}{\widetilde{R}} = R + \mathcal{A} - \mathcal{A}' - 3\mathcal{B} - \mathcal{B}'.
\end{aligned}
\tag{1.0.16}
$$

Аналогно се поступа са псеудотензорима кривине и то ћемо разматрати детаљније у одговарајућем делу рада.

ГЛАВА 2

ЕТ конформне трансформације и ЕТ комформни тензори

2.1 Геодезијски кругови у GR_N

Велике кругове на земљиној сфери можемо посматрати као геодезијске кругове. Стога, геодезијски кругови налазе примену у мерењу одстојања на земљиној површи.

2.1.1 Геодезијски кругови I врсте у GR_N

Нека је у GR_N задата крива $C : x^i = x^i(s)$, где је s лук рачунат од неке тачке, а x^i координате у GR_N. Тада је метричка форма

$$(ds)^2 = g_{ij} dx^i dx^j, \quad i = 1, 2, ..., n, \tag{2.1.1}$$

док је тангента на C представљена

$$t^i_{(0)} \equiv t^i = \frac{dx^i}{ds} = \frac{Dx^i}{Ds}, \tag{2.1.2}$$

где је са $\frac{D}{Ds}$ означен апсолутни извод I врсте по луку у GR_N, тј. за неки вектор ν^i је

$$\frac{Dv^i}{Ds} = v^i_{\underset{1}{|}m} \frac{dx^m}{ds} = \left(\frac{\partial v^i}{\partial x^m} + \Gamma^i_{pm} v^p \right) \frac{dx^m}{ds} = \frac{dv^i}{ds} + \Gamma^i_{pm} v^p \frac{dx^m}{ds}. \tag{2.1.3}$$

Френеове формуле I **врсте** у GR_N гласе [73, 88]:

$$\frac{Dt^i_{(n)}}{Ds} = -k_{(r)}t^i_{(r-1)} + k_{(r+1)}t^i_{(r+1)}, \quad r = 0, 1, ..., N-1, \tag{2.1.4}$$

где је

$$g_{\underline{ij}}t^i_{(r)}t^j_{(q)} = \delta_{rq}, \quad t^i_{(0)} = t^i = \frac{dx^i}{ds}, \quad k_{(0)} = k_{(N)} = 0.$$

Дефиниција 2.1.1. *Скалари* $k_{(1)}, \dots k_{(N-1)}$*, су* $1., 2., \dots, N-1$*-ва* **кривина** I **врсте***, док су* $t^i, t^i_{(1)}, ..., t^i_{(N-1)}$ *тангента,* $1, 2, ..., N-1$*-ва* **јединична нормала** I **врсте** *криве* C *у* GR_N*.*

За $r = 0, 1$, добијамо познате формуле:

$$\frac{Dt^i}{Ds} = k_{(1)}t^i_{(1)}, \quad \frac{Dt^i_{(1)}}{Ds} = -k_{(1)}t^i_{(0)} + k_{(2)}t^i_{(2)} \tag{2.1.5}$$

Код круга у E_3 је $k_{(1)} = 1/R = const., k_{(2)}$(торз.)$\equiv 0$.

Дефиниција 2.1.2. *Крива у* GR_N *је* **геодезијски круг** I **врсте** *ако је* $k_{(1)} = c$*, где је* c *константа, односно торзија* $k_{(2)} \equiv 0$*.*

За геодезијски круг из (2.1.5) следе Френеове формуле (I врсте):

$$a) \quad \frac{Dt^i}{Ds} = k_{(1)}t^i_{(1)}, \quad b) \quad \frac{Dt^i_{(1)}}{Ds} = -k_{(1)}t^i. \tag{2.1.6}$$

Како је $k_{(1)} = const.$, то:

$$\frac{D^2t^i}{Ds^2} = \frac{D}{Ds}\left(\frac{Dt^i}{Ds}\right) \underset{(2.1.6a))}{=} k_{(1)}\frac{D}{Ds}t^i_{(1)} \underset{(2.1.6b))}{=} -{k_{(1)}}^2 t^i. \tag{2.1.7}$$

Како је t^i јединични, то важи (2.1.2), па из ((2.1.6)a)):

$$|k_{(1)}t^i_{(1)}|^2 = k^2_{(1)} = \left|\frac{Dt^i}{Ds}\right|^2 = g_{\underline{kl}}\frac{Dt^k}{Ds}\frac{Dt^l}{Ds} = g_{\underline{kl}}\frac{D^2x^k}{Ds^2}\frac{D^2x^l}{Ds^2},$$

тј.

$$(k_{(1)})^2 = g_{\underline{ij}}\frac{D^2x^i}{Ds^2}\frac{D^2x^j}{Ds^2}. \tag{2.1.8}$$

Из (2.1.7) и (2.1.2) следи

$$\frac{D^3x^i}{Ds^3} = \frac{D^2}{Ds^2}\left(\frac{Dx^i}{Ds}\right) = \frac{D^2}{Ds^2}t^i = -{k_{(1)}}^2 t^i = -\, g_{\underline{jk}}\frac{D^2x^j}{Ds^2}\frac{D^2x^k}{Ds^2}\frac{dx^i}{ds},$$

тј.

$$\frac{D^3x^i}{Ds^3}+g_{\underline{jk}}\frac{D^2x^j}{Ds^2}\frac{D^2x^k}{Ds^2}\frac{dx^i}{ds}=0. \tag{2.1.9}$$

Једначине (2.1.9) су диференцијалне (парцијалне) једначине геодезијских кругова I врсте у GR_N.

2.1.2 Геодезијски кругови II врсте у GR_N

Пошто је изабрана конексија несиметрична, могу се разматрати и **Френеове формуле** II **врсте** у GR_N [73, 88]:

$$\frac{\delta t^i_{(r)}}{\delta s}=-\chi_{(r)}\tau^i_{(r-1)}+\chi_{(r+1)}\tau^i_{(r+1)}, \qquad r=0,1,...,N-1, \tag{2.1.10}$$

где је

$$g_{\underline{ij}}\tau^i_{(r)}\tau^j_{(q)}=\delta_{rq}, \qquad \tau^i_{(0)}=\tau^i=\frac{dx^i}{ds}, \qquad \chi_{(0)}=\chi_{(N)}=0,$$

при чему уместо (2.1.3), имамо

$$\frac{\delta v^i}{\delta s}=v^i_{\underset{2}{|}m}\frac{dx^m}{ds}=\frac{dv^i}{ds}+\Gamma^i_{mp}v^p\frac{dx^m}{ds}. \tag{2.1.11}$$

За јединични тангентни вектор t^i је:

$$\frac{\delta t^i}{\delta s}=\frac{\delta}{\delta s}\left(\frac{dx^i}{ds}\right)=\frac{d}{ds}\left(\frac{dx^i}{ds}\right)+\Gamma^i_{mp}\frac{dx^m}{ds}\frac{dx^p}{ds}=\frac{Dt^i}{Ds},$$

па имамо Френеову формулу II врсте, која се поклапа са (2.1.5a)):

$$\frac{\delta t^i}{\delta s}=\chi_{(1)}\tau^i_{(1)}=k_{(1)}t^i_{(1)}, \qquad \chi_{(1)}=k_{(1)}, \qquad \tau^i_{(1)}=t^i_{(1)}. \tag{2.1.12}$$

Према (2.1.10) је

$$\frac{\delta t^i_{(1)}}{\delta s}=\frac{\delta\tau^i_{(1)}}{\delta s}=-k_{(1)}t^i+\chi_{(2)}\tau^i_{(2)}. \tag{2.1.13}$$

Аналогно Дефиницији 2.1.1. имамо следећу дефиницију:

Дефиниција 2.1.3. *Скалари* $\chi_{(1)}\equiv k_{(1)},\chi_{(2)},\dots\chi_{(N-1)}$, *су* **кривине** II **врсте,** *док су* $t^i\equiv\tau^i_{(1)}\equiv t^i_{(1)},...,\tau^i_{(N-1)}$ **јединичне нормале** II *врсте криве* C *у* GR_N.

Дакле, за $r = 0, 2$, из (2.1.10) уместо (2.1.5) имамо (2.1.12),(2.1.13).

Дефиниција 2.1.4. *Крива у* GR_N *је* **геодезијски круг** II **врсте***, ако је* $\chi_{(1)} \equiv k_{(1)} = const., \chi_{(2)} \equiv 0$.

Доказаћемо следећу теорему:

Теорема 2.1.1. *Потребан и довољан услов да геодезијски круг C I врсте (II врсте) буде истовремено геодезијски круг II врсте (I врсте) је*

$$T^i_{pm} t^p_{(1)} \frac{dx^m}{ds} = 0, \quad i = 1, ..., N, \tag{2.1.14}$$

где је T^i_{jk} тензор торзије простора GR_N, $t^i_{(1)}$ јединична I нормала, $\frac{dx^i}{dt} = t^i$ јединична тангента криве C.

Доказ. Из (2.1.5) и (2.1.13) добијамо

$$\frac{Dt^i_{(1)}}{Ds} - \frac{\delta t^i_{(1)}}{\delta s} = k_{(2)} t^i_{(2)} - \chi_{(2)} \tau^i_{(2)}. \tag{2.1.15}$$

Са друге стране, имамо једначине

$$\frac{Dt^i_{(1)}}{Ds} = \frac{dt^i_{(1)}}{ds} + \Gamma^i_{pm} t^{(p)}_{(1)} \frac{dx^m}{ds}$$

$$\frac{\delta t^i_{(1)}}{\delta s} = \frac{dt^i_{(1)}}{ds} + \Gamma^i_{mp} t^{(p)}_{(1)} \frac{dx^m}{ds}.$$

одузимањем последње две једначине

$$\frac{Dt^i_{(1)}}{Ds} - \frac{\delta t^i_{(1)}}{\delta s} = (\Gamma^i_{pm} - \Gamma^i_{mp}) t^{(p)}_{(1)} \frac{dx^m}{ds} = T^i_{pm} t^p_{(1)} \frac{dx^m}{ds}. \tag{2.1.16}$$

Упоређивањем (2.1.15) и (2.1.16):

$$k_{(2)} t^i_{(2)} - \chi_{(2)} \tau^i_{(2)} = T^i_{pm} t^p_{(1)} \frac{dx^m}{ds}. \tag{2.1.17}$$

($\Longrightarrow$): Ако је C истовремено геодезијски круг I и II врсте, биће $k_{(2)} = \chi_{(2)} \equiv 0$ (по дефиницијама 2.1.2 и 2.1.4), па на основу (2.1.16) следи (2.1.13).

($\Longleftarrow$): Обратно, из (2.1.14) и (2.1.17) следи $k_{(2)} t^i_{(2)} = \chi_{(2)} \tau^i_{(2)}$, одакле видимо да су $t^i_{(2)}$ и $\tau^i_{(2)}$ (јединични) колинеарни вектори, па $k_{(2)} = \chi_{(2)}$

и ако је једна од ових величина 0, мора бити и друга. Дакле, услов (2.1.14) је и довољан.

Дефиниција 2.1.5. *За криву C из GR_N, која је истовремено геодезијски круг I и II врсте (тј. важи* (2.1.14)*), кажемо да је* **геодезијски круг** *у GR_N (тј. важи $k_{(1)} = \chi_{(1)} = const.$ и $k_{(2)} = \chi_{(2)} = 0$).*

У (2.1.14) имамо N једначина по T^i_{jk}, број непознатих T^i_{jk} је $N\binom{N}{2} = \frac{1}{2}N^2(N-1)$. Дакле, из система (2.1.13) можемо наћи највише N непознатих T^i_{jk}, а осталих $P = N\binom{N}{2} - N = \frac{N}{2}[N(N-1)-2]$ можемо узети произвољно, тј. не морају сви T^i_{jk} бити $= 0$, тј. $T \neq 0$, односно GR_N се у општем случају не своди на R_N.

Пример 2.1.1. За $N = 3$ имамо 3 једначине ако је геодезијски круг I врсте истовремено и II врсте, а $3\binom{3}{2}$ је број непознатих. Дакле, 6 непознатих можемо узети произвољно. Конкретно, из (2.1.14) за $N = 3$, тј. за GR_3 имамо (стављајући $\frac{dx^m}{ds} = t^m$):

$$\begin{aligned}
T^1_{12}(t^1_{(1)}t^2 - t^2_{(1)}t^1) + T^1_{13}(t^1_{(1)}t^3 - t^3_{(1)}t^1) + T^1_{23}(t^2_{(1)}t^3 - t^3_{(1)}t^2) = 0,\\
T^2_{12}(t^1_{(1)}t^2 - t^2_{(1)}t^1) + T^2_{13}(t^1_{(1)}t^3 - t^3_{(1)}t^1) + T^2_{23}(t^2_{(1)}t^3 - t^3_{(1)}t^2) = 0,\\
T^3_{12}(t^1_{(1)}t^2 - t^2_{(1)}t^1) + T^3_{13}(t^1_{(1)}t^3 - t^3_{(1)}t^1) + T^3_{23}(t^2_{(1)}t^3 - t^3_{(1)}t^2) = 0.
\end{aligned}$$

Овде се може, нпр. $T^1_{12}, T^2_{12}, T^3_{12}$ изразити преко осталих 6 компоненти T^i_{jk}, које можемо узети произвољно.

Испитаћемо једначину, која би за II врсту апсолутног извода одговарала једначини (2.1.9). Имамо:

$$\frac{\delta x^i}{\delta s} = \frac{Dx^i}{Ds} = \frac{dx^i}{ds} = t^i \tag{2.1.18}$$

$$\frac{\delta^2 x^i}{\delta s^2} = \frac{\delta}{\delta s}\left(\frac{\delta x^i}{\delta s}\right) = \frac{\delta t^i}{\delta s} = \frac{dt^i}{ds} + \Gamma^i_{mp}t^p\frac{dx^m}{ds},$$

тј.

$$\frac{\delta^2 x^i}{\delta s^2} = \frac{d}{ds}\left(\frac{dx^i}{ds}\right) + \Gamma^i_{mp}\frac{dx^p}{ds}\frac{dx^m}{ds} = \frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{mp}\frac{dx^m}{ds}\frac{dx^p}{ds},$$

$$\frac{\delta^2 x^i}{\delta s^2} = \frac{D^2x^i}{Ds^2} = Q^i, \tag{2.1.19}$$

где смо заједничку вредност означили са Q^i. Тада је

$$\frac{\delta^3 x^i}{\delta s^3}=\frac{\delta Q^i}{ds}=\frac{dQ^i}{ds}+\Gamma^i_{mp}Q^p\frac{dx^m}{ds}\underset{(2.1.18)}{=}\frac{d}{ds}\left(\frac{D^2x^i}{Ds^2}\right)+\Gamma^i_{mp}\frac{D^2x^p}{Ds^2}\frac{dx^m}{ds}$$

а на исти начин

$$\frac{D^3x^i}{Ds^3}=\frac{d(D^2x^i)}{ds}+\Gamma^i_{pm}\frac{D^2x^p}{Ds^2}\frac{dx^m}{ds}.$$

Дакле,

$$\frac{D^3x^i}{Ds^3}-\frac{\delta^3x^i}{\delta s^3}=T^i_{pm}\frac{D^2x^p}{Ds^2}\frac{dx^m}{ds}. \tag{2.1.20}$$

Са друге стране, поступком који је примењен за извођење једначине (2.1.9), добијамо **диференцијалне(парцијалне) једначине геодезијских кругова** II **врсте** у GR_N

$$\frac{\delta^3x^i}{\delta s^3}-g_{\underline{jk}}\frac{\delta^2x^j}{\delta s^2}\frac{\delta^2x^k}{\delta s^2}\frac{dx^i}{ds}=0. \tag{2.1.21}$$

Испитајмо под којим условом су једначине (2.1.9) и (2.1.21) еквивалентне. Ако одузмемо (2.1.9) и (2.1.21) и узмемо у обзир (2.1.18), (2.1.19) и (2.1.20), добијамо

$$T^i_{pm}\frac{D^2x^p}{Ds^2}\frac{dx^m}{ds}=0. \tag{2.1.22}$$

Како је

$$\frac{D^2x^p}{Ds^2}=\frac{D}{Ds}\left(\frac{Dx^p}{Ds}\right)=\frac{Dt^p}{Ds}=k_{(1)}t^p_{(1)},$$

то сменом у (2.1.22):

$$T^i_{pm}k_{(1)}t^p_{(1)}\frac{dx^m}{ds}=0.$$

како можемо скратити са $k_{(1)}\neq 0$, то се ова једначина своди на једначину (2.1.14).

Дакле, важи следећа теорема

Теорема 2.1.2. *Услови* (2.1.14) *и* (2.1.22) *су еквивалентни, као потребан и довољан услов да би једначине* (2.1.9) *и* (2.1.21) *биле* **диференцијалне једначине геодезијских кругова и** I **и** II **врсте**.

2.2 ЕТ конформна трансформација у GR_N

Конформна трансформација, која се назива и конформно пресликавање, је трансформација која чува локалне углове, али не нужно и дужине. Конформне мапе чувају и углове и облике бесконачно малих фигура, али не нужно њихову величину.

Дефиниција 2.2.1. Конформна трансформација у GR_N *је трансформација при којој се основни тензор мења по закону [142]*

$$\bar{g}_{ij} = \rho^2 g_{ij}, \quad (g_{ij} \neq g_{ji}) \tag{2.2.23}$$

где је $\rho(x) = \rho(x^1, ..., x^N)$ *нека диференцијабилна функција координата у* GR_N.

Тензори g_{ij} и $\bar{g}_{ij}$ се посматрају у заједничком систему координата. Исто важи и за остале геометријске објекте.

Напоменимо да се такође узима $\bar{g}_{ij} = e^{2\psi} g_{ij}$, па на основу (2.2.23) следи $e^{\psi} = \rho, \psi(x^1, \ldots, x^N) = \ln\rho, \frac{\partial \ln\rho}{\partial x^i} = \rho_i$. Овај други начин је коришћен, за конформну трансформацију у [132, 155, 159] и др.

Дакле имамо:

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j, \quad \bar{ds}^2 = \bar{g}_{ij} dx^i dx^j = \rho^2 g_{ij} dx^i dx^j,$$

$$\bar{ds}^2 = \rho^2 ds^2 \Longleftrightarrow \frac{\bar{ds}}{ds} = \rho.$$

Кристофелови симболи I **врсте (коваријантни)** се дефинишу као:

$$\Gamma_{i.jk} = \frac{1}{2}(g_{ji,k} - g_{jk,i} + g_{ik,j}),$$

где је нпр. $g_{ji,k} = \frac{\partial g_{ji}}{\partial x^k}$, док се подизањем индекса добијају **Кристофелови симболи** II **врсте (мешовити)**:

$$\Gamma^i_{jk} = g^{ip}\Gamma_{p.jk} = \frac{g^{ip}}{2}(g_{jp,k} - g_{jk,p} + g_{pk,j}). \tag{2.2.24}$$

При конформној трансформацији (2.2.23), везе између Кристофеловиx симбола простора $\overline{GR}_N$ и GR_N:

$$\begin{aligned}\overline{\Gamma}_{i.jk} &= \frac{1}{2}(\overline{g}_{ji,k} - \overline{g}_{jk,i} + \overline{g}_{ik,j}) = \\ &= \rho^2\left[\frac{\rho_{,k}}{\rho}g_{ji} - \frac{\rho_{,i}}{\rho}g_{jk} + \frac{\rho_{,j}}{\rho}g_{ik} + \frac{1}{2}(g_{ji,k} - g_{jk,i} + g_{ik,j})\right].\end{aligned}$$

Ако означимо

$$(\ln\rho)_{,i} = \frac{\partial(\ln\rho)}{\partial x^i} = \frac{1}{\rho_,}\rho_{,i} = \rho_i, \tag{2.2.25}$$

претходна једначина даје

$$\overline{\Gamma}_{i.jk} = \rho^2(\Gamma_{i.jk} + g_{ji}\rho_k - g_{jk}\rho_i + g_{ik}\rho_j). \tag{2.2.26}$$

За Γ^i_{jk}, према (2.2.24) се добија

$$\overline{\Gamma}^i_{jk} = \frac{1}{2}\overline{g}^{\underline{ip}}(\overline{g}_{jp,k} - \overline{g}_{jk,p} + \overline{g}_{pk,j}).$$

Како је инверзна матрица за $(g_{\underline{ij}})$ матрица $(g^{\underline{ij}})$, то је

$$\overline{g}^{\underline{ij}} = [\rho]^{-2}g^{\underline{ij}}, \tag{2.2.27}$$

па према (2.2.24), (2.2.26), (2.2.27):

$$\begin{aligned}\overline{\Gamma}^i_{jk} &= \Gamma^i_{jk} + \delta^i_j\rho_k + \delta^i_k\rho_j - \rho^i g_{\underline{jk}} + g^{\underline{ip}}(\underset{V}{g_{ip}}\rho_k - \underset{V}{g_{jk}}\rho_p + \underset{V}{g_{pk}}\rho_j) \\ &= \Gamma^i_{jk} + \delta^i_j\rho_k + \delta^i_k\rho_j - \rho^i g_{\underline{jk}} + \xi^i_{jk},\end{aligned} \tag{2.2.28}$$

где је

$$\xi^i_{jk} = g^{\underline{ip}}(\underset{V}{g_{ip}}\rho_k - \underset{V}{g_{jk}}\rho_p + \underset{V}{g_{pk}}\rho_j).$$

Означимо још

$$\rho^i = g^{\underline{ip}}\rho_p \underset{(2.2.25)}{=} g^{\underline{ip}}(\ln\rho)_{,p}.$$

Из једначине (2.2.28), за симетричан део конексије

$$\bar{T}^i_{\underline{jk}} = \Gamma^i_{\underline{jk}} + \delta^i_j\rho_k + \delta^i_k\rho_j - \rho^i g_{\underline{jk}},$$

а за тензор торзије (двоструки антисиметрични део конексије)

$$\bar{T}^i_{jk} = 2\bar{\Gamma}^i_{\underset{V}{jk}} = T^i_{jk} + 2g^{\underline{ip}}(g_{\underset{V}{jp}}\rho_k - g_{\underset{V}{kp}}\rho_j + g_{\underset{V}{kj}}\rho_p) = T^i_{jk} + 2\xi^i_{jk} \tag{2.2.29}$$

С. Минчић и М. Станковић су у раду [87] први пут увели еквиторзиону трансформацију покушавајући да нађу инваријантне геометријске објекте конформног пресликавања.

Дефиниција 2.2.2. Еквиторзиона (ЕТ) конформна трансформација конексије *у GR_N је она конформна трансформација, код које се торзија очувава, тј.*

$$\bar{T}^i_{jk} = \bar{\Gamma}^i_{jk} - \bar{\Gamma}^i_{kj} = \Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj} = T^i_{jk}.$$

Из једначине (2.2.29) следи

Теорема 2.2.1. *Потребан и довољан услов да конформна трансформација буде еквиторзиона је*

$$\xi^i_{jk} = g^{\underline{ip}}(g_{\underset{V}{jp}}\rho_k - g_{\underset{V}{kp}}\rho_j + g_{\underset{V}{kj}}\rho_p) = 0.$$

К. Јано у раду [155] разматра конформну и концилкуларну трансформацију у R_N, при чему, наравно, посматра један, тј. Риманов тензор кривине.

С. Минчић је у својој докторској дисертацији [62], користећи несиметричну конексију, добио 4 тензора кривине (помоћу 4 врсте коваријантног извода), [58, 64, 66], а такође 15 величина, које је назвао "псеудотензорима кривине" у GR_N, јер у одговарајућим идентитетима Ричијевог типа (којих има 10 добијених помоћу 1. и 2. врсте коваријантног извода и још 10 помоћу 3. и 4. врсте играју улогу тензора кривине). Комбинујући на погодан начин псеудотензоре кривине, добија нових 8 тензора кривине (који су названи тензори кривине) [68]. Све што је овде речено о тензорима кривине у GR_N, важи и у општем простору несиметричне афине конексије GA_N. У [68] је доказано да од 12 наведених тензора кривине у $GR_N(GA_N)$ има укупно 5 независних $\underset{1}{R}, ..., \underset{5}{R}$, док се остали могу изразити као линеарна комбинација ових 5 тензора и тензора R формираног помоћу симетричног дела несиметричне конексије.

Свакако да се 5 независних тензора кривине може изабрати на разне начине међу укупно 12 тензора. Тако је у [159] међу поменутих 12 изабрана другачија комбинација независних тензора кривине који су означени са $\underset{1}{K}, ..., \underset{5}{K}$ при чему се неки од њих поклапају са некима од $\underset{\theta}{R}$ (нпр. $\underset{1}{K} \equiv \underset{1}{R}$, $\underset{2}{K} \neq \underset{2}{R}$, $\underset{3}{K} \equiv \underset{3}{R}, ...$).

Надаље ћемо разматрати тензоре $\underset{1}{R}, ..., \underset{5}{R}$ у односу на еквиторзиону конформну и концилкуларну трансформацију тензора $\underset{\theta}{R}, \theta = 1, ..., 5$.

2.2.1 Тензори кривине у ЕТ конформној трансформацији

1. ЕТ конформна трансформација тензора кривине I врсте

Први од наведених пет независних тензора кривине у GR_N је

$$\underset{1}{R}{}^i_{jmn} = \Gamma^i_{jm,n} - \Gamma^i_{jn,m} + \Gamma^p_{jm}\Gamma^i_{pn} - \Gamma^p_{jn}\Gamma^i_{pm}.$$

На основу раније изведене везе између Кристофелових симбола за еквиторзиону конформну трансформацију имамо

$$\overline{\Gamma}^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} + \delta^i_j\rho_k + \delta^i_k\rho_j - \rho^i g_{\underline{jk}}.$$

Ако је при трансформацији конексије Γ у $\overline{\Gamma}$

$$a) \quad \overline{\Gamma}^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} + P^i_{jk}, \qquad b) \quad P^i_{jk} = \delta^i_j\rho_k + \delta^i_k\rho_j - \rho^i g_{\underline{jk}} = P^i_{kj} \tag{2.2.30}$$

можемо посматрати како се трансформишу, нпр., поједини тензори кривине.

Према (2.2.30) за $\underset{1}{R}$ имамо

$$\begin{aligned}\underset{1}{R}{}^i_{jmn} =& \Gamma^i_{jm,n} - \Gamma^i_{jn,m} + \Gamma^p_{jm}\Gamma^i_{pn} - \Gamma^p_{jn}\Gamma^i_{pm}\\ =& R^i_{jmn} + P^i_{jm\underset{1}{|}n} - P^i_{jn\underset{1}{|}m} + P^p_{jm}P^i_{pn} - P^p_{jn}P^i_{pm} + T^p_{mn}P^i_{jp},\end{aligned}$$

па сменом P из (2.2.30)b):

$$\begin{aligned}\underset{1}{\bar{R}}{}^i_{jmn} &= \underset{1}{R}{}^i_{jmn} + \delta^i_j(\rho_{m\underset{1}{|}n} - \rho_{n\underset{1}{|}m} + T^p_{mn}\rho_p) + \delta^i_m(\rho_{j\underset{1}{|}n} - \rho_j\rho_n)\\ &- \delta^i_n(\rho_{j\underset{1}{|}m} - \rho_j\rho_m) + (\rho^i_{\underset{1}{|}m} - \rho^i\rho_m)g_{\underline{jn}} - (\rho^i_{\underset{1}{|}n} - \rho^i\rho_n)g_{\underline{jm}}\\ &+ \rho^p\rho_p(\delta^i_m g_{\underline{jn}} - \delta^i_n g_{\underline{jm}}) + T^i_{mn}\rho_j - T_{j.mn}\rho^i.\end{aligned} \tag{2.2.31}$$

Како је

$$\rho_{m\underset{1}{|}n} - \rho_{n\underset{1}{|}m} = \rho_{m,n} - \Gamma^p_{mn}\rho_p - \rho_{n,m} + \Gamma^p_{nm}\rho_p,$$

и

$$\rho_{m,n} = \frac{\partial}{\partial x^n}(\frac{\partial \ln \rho}{\partial x^m}) = \frac{\partial^2 \ln \rho}{\partial x^n \partial x^m} = \rho_{n,m},$$

то је

$$\rho_{m\underset{1}{|}n} - \rho_{n\underset{1}{|}m} = -T^p_{mn}\rho_p,$$

други сабирак на десној страни у (2.2.31) је 0. Ако уведемо ознаку

$$\underset{1}{\rho}_{ij} = \rho_{i\underset{1}{|}j} - \rho_i\rho_j + \frac{1}{2}g^{\underline{rs}}\rho_r\rho_s\rho_{\underline{ij}} = \rho_{i\underset{1}{|}j} - \rho_i\rho_j + \frac{1}{2}\rho_r\rho^r g_{\underline{ij}}, \tag{2.2.32}$$

имаћемо

$$\underset{1}{\rho}_{mn} - \underset{1}{\rho}_{nm} \underset{(2.2.32)}{=} \rho_{m\underset{1}{|}n} - \rho_{n\underset{1}{|}m} = -T^p_{mn}\rho_p,$$

и за $\underset{1}{\bar{R}}{}^i{}_{jmn}$ добијамо

$$\begin{aligned}\underset{1}{\bar{R}}{}^i{}_{jmn} = \underset{1}{R}{}^i_{jmn} &+ \delta^i_m(\underset{1}{\rho}_{jn} - \frac{1}{2}g^{\underline{rs}}\rho_r\rho_s g_{\underline{jn}}) - \delta^i_n(\underset{1}{\rho}_{jm} - \frac{1}{2}g^{\underline{rs}}\rho_r\rho_s g_{\underline{jm}})\\ &+ g^{\underline{ip}}g_{\underline{jn}}(\rho_{p\underset{1}{|}m} - \rho_p\rho_m) - g^{\underline{ip}}g_{\underline{jm}}(\rho_{p\underset{1}{|}n} - \rho_p\rho_n) + \rho_p\rho^p(\delta^i_m g_{\underline{jn}} - \delta^i_n g_{\underline{jm}}) + B^i_{jmn},\end{aligned}$$

где је

$$B^i_{jmn} = T^i_{mn}\rho_j - T_{j.mn}\rho^i. \tag{2.2.33}$$

Дакле,

$$\begin{aligned}\underset{1}{\bar{R}}{}^i{}_{jmn} &= \underset{1}{R}{}^i_{jmn} + \delta^i_m(\underset{1}{\rho}_{jn} - \frac{1}{2}g^{\underline{rs}}\rho_r\rho_s g_{\underline{jn}}) - \delta^i_n(\underset{1}{\rho}_{jm} - \frac{1}{2}g^{\underline{rs}}\rho_r\rho_s g_{\underline{jm}})\\ &+ g^{\underline{ip}}g_{\underline{jn}}(\underset{1}{\rho}_{pm} - \frac{1}{2}g^{\underline{rs}}\rho_r\rho_s g_{\underline{pm}}) - g^{\underline{ip}}g_{\underline{jm}}(\underset{1}{\rho}_{pn} - \frac{1}{2}g^{\underline{rs}}\rho_r\rho_s g_{\underline{pn}})\\ &+ \rho_p\rho^p(\delta^i_m g_{\underline{jn}} - \delta^i_n g_{\underline{jm}}) + B^i_{jmn},\end{aligned}$$

одакле

$$\begin{aligned}\underset{1}{\bar{R}}{}^{i}{}_{jmn} = \underset{1}{R}{}^{i}_{jmn} &+ \delta^i_m \underset{1}{\rho}_{jn} - \delta^i_n \underset{1}{\rho}_{jm} - \delta^i_m g_{\underline{jn}}\rho_p\rho^p + \delta^i_n g_{\underline{jm}}\rho_p\rho^p \\ &+ \underset{1}{\rho}{}^i_m g_{\underline{jn}} - \underset{1}{\rho}{}^i_n g_{\underline{jm}} + \rho_p\rho^p(\delta^i_m g_{\underline{jn}} - \delta^i_n g_{\underline{jm}}) + B^i_{jmn},\end{aligned}$$

и сређивањем:

$$\underset{1}{\bar{R}}{}^{i}{}_{jmn} = \underset{1}{R}{}^{i}_{jmn} + \delta^i_m \underset{1}{\rho}_{jn} - \delta^i_n \underset{1}{\rho}_{jm} + \underset{1}{\rho}{}^i_m g_{\underline{jn}} - \underset{1}{\rho}{}^i_n g_{\underline{jm}} + B^i_{jmn}, \tag{2.2.34}$$

где је B^i_{jmn} дато са (2.2.33).

2. ЕТ конформна трансформација тензора кривине *II* врсте

Тензор $\underset{2}{R}$ у GR_N је задат на следећи начин:

$$\underset{2}{R}{}^{i}_{jmn} = \Gamma^i_{mj,n} - \Gamma^i_{nj,m} + \Gamma^p_{mj}\Gamma^i_{np} - \Gamma^p_{nj}\Gamma^i_{mp},$$

и за $\underset{2}{\bar{R}}{}^{i}_{jmn}$ према (2.2.30*a*) следи

$$\underset{2}{\bar{R}}{}^{i}_{jmn} = \underset{2}{R}{}^{i}_{jmn} + P^i_{mj\underset{2}{|}n} - P^i_{nj\underset{2}{|}m} + P^p_{mj}P^i_{mp} - P^p_{nj}P^i_{mp} - T^p_{mn}P^i_{pj}.$$

Смењујући (2.2.30*b*) у ову једначину добијамо

$$\begin{aligned}\underset{2}{\bar{R}}{}^{i}_{jmn} = \underset{2}{R}{}^{i}_{mj,n} &+ \delta^i_j(\rho_{m\underset{2}{|}n} - \rho_{n\underset{2}{|}m} - T^p_{mn}\rho_p) + \delta^i_m(\rho_{j\underset{2}{|}n} - \rho_i\rho_n) \\ &- \delta^i_n(\rho_{j\underset{2}{|}m} - \rho_i\rho_m) + (\rho^i_{\underset{2}{|}m} - \rho^i\rho_m)g_{\underline{jn}} - (\rho^i_{\underset{2}{|}n} - \rho^i\rho_n)g_{\underline{jm}} \\ &+ \rho_p\rho^p(\delta^i_m g_{\underline{jn}} - \delta^i_n g_{\underline{jm}}) - T^i_{mn}\rho_j + T_{j.mn}\rho^i.\end{aligned} \tag{2.2.35}$$

Израз у првој загради са десне стране је 0, јер је

$$\rho_{m\underset{2}{|}n} - \rho_{n\underset{2}{|}m} = T^p_{mn}\rho_p. \tag{2.2.36}$$

Ако уведемо ознаку

$$\underset{2}{\rho}_{ij} = \rho_{i\underset{2}{|}j} - \rho_i\rho_j + \frac{1}{2}\rho_r\rho^r g_{\underline{ij}}, \tag{2.2.37}$$

имамо

$$\underset{2}{\rho}_{mn} - \underset{2}{\rho}_{nm} = \rho_{m\underset{2}{|}n} - \rho_{n\underset{2}{|}m} = T^p_{mn}\rho_p$$

и за $\underset{2}{\bar{R}}{}^i_{jmn}$ из (2.2.35) – (2.2.37) следи

$$\underset{2}{\bar{R}}{}^i_{jmn} = \underset{2}{R}{}^i_{jmn} + \delta^i_m \underset{2}{\rho}_{jn} - \delta^i_n \underset{2}{\rho}_{jm} + \underset{2}{\rho}{}^i_m g_{\underline{jn}} - \underset{2}{\rho}{}^i_n g_{\underline{jm}} - B^i_{jmn}, \qquad (2.2.38)$$

где je B^i_{jmn} дато са (2.2.33).

3. ET конформна трансформација тензора кривине *III* врсте

Тензор $\underset{3}{R}$ у GR_N je задат помоћу следеће једначине:

$$\underset{3}{R}{}^i_{jmn} = \Gamma^i_{jm,n} - \Gamma^i_{nj,m} + \Gamma^p_{jm}\Gamma^i_{np} - \Gamma^p_{nj}\Gamma^i_{pm} + \Gamma^p_{nm}T^i_{pj},$$

где je T^i_{pj} тензор торзије у локалним координатама. За $\underset{3}{R}{}^i_{jmn}$ на основу (2.2.30) имамо

$$\underset{3}{\bar{R}}{}^i_{jmn} = \underset{3}{R}{}^i_{\;jmn} + P^i_{jm\underset{2}{|}n} - P^i_{nj\underset{1}{|}m} + P^i_{np}P^p_{jm} - P^i_{pm}P^p_{nj} + T^i_{pj}P^p_{nm}, \qquad (2.2.39)$$

где смо узели у обзир да je P^i_{jp} симетричан, с обзиром на (2.2.30) .

Смењујући према (2.2.30), добијамо

$$\begin{aligned}\underset{3}{\bar{R}}{}^i_{jmn} &= \underset{3}{R}{}^i_{jmn} + \delta^i_m(\underset{2}{\rho}_{jn} - \frac{1}{2}\rho_p\rho^p g_{\underline{jn}}) - \delta^i_n(\underset{1}{\rho}_{jm} - \frac{1}{2}\rho_p\rho^p - g_{\underline{jm}})\\ &+ g^{\underline{ip}}g_{\underline{jn}}(\underset{1}{\rho}_{pm} - \frac{1}{2}\rho_r\rho^r g_{\underline{pm}}) - g^{\underline{ip}}g_{\underline{jm}}(\underset{2}{\rho}_{pn} - \frac{1}{2}\rho_r\rho^r g_{\underline{pm}})\\ &+ \rho_p\rho^p\delta^i_m g_{\underline{jn}} - \rho_p\rho^p\delta^i_n g_{\underline{jm}} + D^i_{jmn},\end{aligned}$$

где je

$$D^i_{jmn} = T^i_{jm}\rho_n + T^i_{nj}\rho_m + g^{\underline{ps}}g_{\underline{mn}}T^i_{jp}\rho_s. \qquad (2.2.40)$$

Из (2.2.40) добијамо

$$\underset{3}{\bar{R}}{}^i_{jmn} = \underset{3}{R}{}^i_{jmn} + \delta^i_m \underset{2}{\rho}_{jn} - \delta^i_n \underset{1}{\rho}_{jm} + \underset{1}{\rho}{}^i_m g_{\underline{jn}} - \underset{2}{\rho}{}^i_n g_{\underline{jm}} + D^i_{jmn}. \qquad (2.2.41)$$

4. ЕТ конформна трансформација тензора кривине IV врсте

За тензор $\underset{4}{R}$ у GR_N задат на следећи начин:

$$\underset{4}{R}{}^i_{jmn} = \Gamma^i_{jm,n} - \Gamma^i_{nj,m} + \Gamma^p_{jm}\Gamma^i_{np} - \Gamma^p_{nj}\Gamma^i_{pm} + \Gamma^p_{mn}T^i_{pj},$$

где је T^i_{pj} тензор торзије у локалним координатама. За $\underset{4}{R}{}^i_{jmn}$ на основу (2.2.30) се добија

$$\underset{4}{\bar{R}}{}^i_{jmn} = \underset{4}{R}{}^i_{\ jmn} + P^i_{jm\underset{2}{|}n} - P^i_{nj\underset{1}{|}m} + P^i_{np}P^p_{jm} - P^i_{pm}P^p_{nj} + T^i_{pj}P^p_{mn}. \tag{2.2.42}$$

Из (2.2.39), (2.2.42) следи

$$\underset{4}{\bar{R}}{}^i_{jmn} - \underset{3}{\bar{R}}{}^i_{jmn} = \underset{4}{R}{}^i_{jmn} - \underset{3}{R}{}^i_{jmn} + \underset{V}{P}{}^p_{mn}T^i_{pj} = \underset{4}{R}{}^i_{jmn} - \underset{3}{R}{}^i_{jmn}$$

због $\underset{V}{P}{}^p_{mn} = 0$. Тако имамо

$$\underset{4}{\bar{R}}{}^i_{jmn} - \underset{4}{R}{}^i_{jmn} = \underset{3}{\bar{R}}{}^i_{jmn} - \underset{3}{R}{}^i_{jmn} = \delta^i_m \underset{2}{\rho}_{jn} - \delta^i_n \underset{1}{\rho}_{jm} + \underset{1}{\rho}{}^i_m g_{\underline{jn}} - \underset{2}{\rho}{}^i_n g_{\underline{jm}} + D^i_{jmn}, \tag{2.2.43}$$

где D^i_{jmn} је дат у (2.2.40).

5. ЕТ конформна трансформација тензора кривине V врсте

Коначно разматрамо тензор кривине $\underset{5}{R}$ у GR_N (у [68] $\underset{5}{R}$ је обележен са $\underset{2}{\tilde{R}}$). Имамо [68, 88],

$$\begin{aligned}\underset{5}{R}{}^i_{jmn} = \frac{1}{2}(&L^i_{jm,n} + L^i_{mj,n} - L^i_{jn,m} - L^i_{nj,mp}\\ &+ L^p_{jm}L^i_{pn} + L^p_{mj}L^i_{np} - L^p_{jn}L^i_{mp} - L^p_{nj}L^i_{pm}),\end{aligned} \tag{2.2.44}$$

што може бити написано у облику:

$$\begin{aligned}\underset{5}{\bar{R}}{}^i_{jmn} =&\underset{5}{R}{}^i_{\ jmn} + \frac{1}{2}(P^i_{jm\underset{3}{|}n} - P^i_{jn\underset{4}{|}m} + P^i_{nm\underset{4}{|}n} - P^i_{nj\underset{3}{|}n}\\ &+P^p_{jm}P^i_{pn} - P^p_{jn}P^i_{mp} + P^p_{mj}P^i_{np} - P^p_{nj}P^i_{pm}),\end{aligned}$$

где је P^i_{jk} дат у (2.2.30). Смењујући P из (2.2.30), добија се

$$\begin{aligned}\underset{5}{\bar{R}}{}^{i}_{jmn} &= \frac{1}{2}[\delta^{i}_{j}(\rho_{m\underset{2}{|}n} - \rho_{n\underset{1}{|}m} - \rho_{m\underset{1}{|}n} - \rho_{n\underset{2}{|}m})\\ &+ \delta^{i}_{m}(\rho_{j\underset{2}{|}n} + \rho_{j\underset{1}{|}n} - 2\rho_j\rho_n + \rho_p\rho^p g_{\underline{jn}})\\ &- \delta^{i}_{n}(\rho_{j\underset{1}{|}m} + \rho_{j\underset{2}{|}m} - 2\rho_j\rho_m + \rho_p\rho^p g_{\underline{jm}})\\ &+ g_{\underline{jn}}(\rho^{i}_{\underset{1}{|}m} + \rho^{i}_{\underset{2}{|}m} - 2\rho^i\rho_m) - g_{\underline{jm}}(\rho^{i}_{\underset{1}{|}n} + \rho^{i}_{\underset{2}{|}n} - 2\rho^i\rho_n)].\end{aligned} \tag{2.2.45}$$

Користећи (3.1.8) и (2.2.36) и уводећи обележавање

$$\underset{5}{\rho}_{ij} = \frac{1}{2}(\rho_{i\underset{1}{|}j} + \rho_{i\underset{2}{|}j} - 2\rho_i\rho_j + \rho_p\rho^p g_{\underline{ij}}) = \frac{1}{2}(\underset{1}{\rho}_{ij} + \underset{2}{\rho}_{ij}) = \underset{5}{\rho}_{ji},$$

једначина (2.2.45) добија облик

$$\underset{5}{\bar{R}}{}^{i}_{jmn} = \underset{5}{R}{}^{i}_{jmn} + \delta^{i}_{m}\underset{5}{\rho}_{jn} - \delta^{i}_{n}\underset{5}{\rho}_{jm} + \underset{5}{\rho}{}^{i}_{m}g_{\underline{jn}} - \underset{5}{\rho}{}^{i}_{n}g_{\underline{jm}} + \rho_p\rho^p(\delta^{i}_{n}g_{\underline{jm}} - \delta^{i}_{m}g_{\underline{jm}}). \tag{2.2.46}$$

2.2.2 ЕТ конформни тензори

1. ЕТ конформни тензори I врсте

Према (2.2.34) имамо

$$\underset{1}{\bar{R}}{}^{i}{}_{jmn} = \underset{1}{R}{}^{i}_{jmn} + \delta^{i}_{m}\underset{1}{\rho}_{jn} - \delta^{i}_{n}\underset{1}{\rho}_{jm} + \underset{1}{\rho}{}^{i}_{m}g_{\underline{jn}} - \underset{1}{\rho}{}^{i}_{n}g_{\underline{jm}} + B^{i}_{jmn}, \tag{2.2.47}$$

где је

$$B^{i}_{jmn} = T^{i}_{mn}\rho_j - T_{j.mn}\rho^i. \tag{2.2.48}$$

Контракцијом са $i = n$ из (2.2.47) добијамо

$$\underset{1}{\bar{R}}_{jm} = \underset{1}{R}_{jm} + \underset{1}{\rho}_{jm} - N\underset{1}{\rho}_{jm} + \underset{1}{\rho}_{jm} - \underset{1}{\rho}{}^{p}_{p}g_{\underline{jm}} - T_{j.mn}\rho^i, \tag{2.2.49}$$

јер је

$$T^{i}_{mi} = 0$$

у GR_N. Након композиције у (2.2.49) са $\rho^2 \bar{g}^{\underline{jm}} = g^{\underline{jm}}$ добијамо

$$\rho^2 \underset{1}{\bar{R}} = \underset{1}{R} + \underset{1}{R}{}^m_m - N \underset{1}{\rho}{}^m_m + \underset{1}{\rho}{}^m_m - \underset{1}{\rho}{}^p_p N,$$

одакле је

$$\underset{1}{\rho}{}^p_p = \frac{\underset{1}{\rho} - \rho^2 \underset{1}{\bar{R}}}{2(N-1)}. \tag{2.2.50}$$

Сменом из (2.2.50) у (2.2.49), добијамо

$$\underset{1}{\rho}{}_{jm} = \frac{1}{N-2} \left(\underset{1}{R}{}_{jm} - \underset{1}{\bar{R}}{}_{jm} + \frac{\rho^2 \underset{1}{\bar{R}} - \underset{1}{R}}{2(N-1)} g_{\underline{jm}} + T_{j.im} \rho^i \right) \tag{2.2.51}$$

одакле, множењем обе стране са $g^{\underline{kj}} = \rho^2 \bar{g}^{\underline{kj}}$, долазимо до

$$\underset{1}{\rho}{}^k_m = \frac{1}{N-2} \left(\underset{1}{R}{}^k_m - \rho^2 \underset{1}{\bar{R}}{}^k_m + \frac{\rho^2 \underset{1}{\bar{R}} + \underset{1}{R}}{2(N-1)} \delta^k_m + T^k_{im} \rho^i \right). \tag{2.2.52}$$

Из (2.2.51), (2.2.52) сменимо у (2.2.47):

$$\begin{aligned} \underset{1}{\bar{R}}{}^i{}_{jmn} = {} & \underset{1}{R}{}^i_{jmn} + \delta^i_m \frac{1}{N-2} \left(\underset{1}{R}{}_{jn} - \underset{1}{\bar{R}}{}_{jn} + \frac{\rho^2 \underset{1}{\bar{R}} + \underset{1}{R}}{2(N-1)} g_{\underline{jn}} + T_{j.pn} \rho^p \right) \\ & - \delta^i_n \frac{1}{N-2} \left(\underset{1}{R}{}_{jm} - \underset{1}{\bar{R}}{}_{jm} + \frac{\rho^2 \underset{1}{\bar{R}} + \underset{1}{R}}{2(N-1)} g_{\underline{jm}} + T_{j.pm} \rho^p \right) \\ & + \frac{1}{N-2} g_{\underline{jn}} \left(\underset{1}{R}{}^i_m - \rho^2 \underset{1}{\bar{R}}{}^i_m + \frac{\rho^2 \underset{1}{\bar{R}} + \underset{1}{R}}{2(N-1)} \delta^i_m + T^i_{pm} \rho^p \right) \\ & - \frac{1}{N-2} g_{\underline{jm}} \left(\underset{1}{R}{}^i_n - \rho^2 \underset{1}{\bar{R}}{}^i_n + \frac{\rho^2 \underset{1}{\bar{R}} + \underset{1}{R}}{2(N-1)} \delta^i_m + T^i_{pm} \rho^p \right) + B^i_{jmn}. \end{aligned} \tag{2.2.53}$$

Да бисмо извели потребне закључке из (2.2.53) навешћемо претходно неке релације које важе код конформних трансформација у GR_N

$$\begin{aligned} & a) \quad \delta^i_m \underset{1}{\bar{R}}{}_{jn} = \bar{\delta}^i_m \underset{1}{\bar{R}}{}_{jn}, \qquad b) \quad \rho^2 \underset{1}{\bar{R}} g_{\underline{jn}} = \underset{1}{\bar{R}} \bar{g}_{\underline{jn}}, \\ & c) \quad g_{\underline{jn}} \rho^2 \underset{1}{\bar{R}}{}^i_m = \bar{g}_{\underline{jn}} \underset{1}{\bar{R}}{}^i_m, \qquad d) \quad \rho_j = \frac{1}{N} (\bar{\Gamma}^p_{jp} - \Gamma^p_{jp}). \end{aligned} \tag{2.2.54}$$

Како је

$$\bar{T}_{i.jm} = \rho^2 T_{i.jm},$$

то следи

$$\delta^i_m T_{j.pn}\rho^p = \frac{1}{N}(\bar{\delta}^i_m \bar{T}_{j.pn}\bar{g}^{\underline{ps}}\bar{\Gamma}^t_{st} - \delta^i_m T_{j.pn} g^{\underline{ps}}\Gamma^t_{st}),$$

$$g_{\underline{jn}} T^i_{pm}\rho^p = \frac{1}{N}(\bar{g}_{\underline{jn}}\bar{T}^i_{pm}\bar{g}^{\underline{ps}}\bar{\Gamma}^t_{st} - g_{\underline{jn}} T^i_{pm} g^{\underline{ps}}\Gamma^t_{st}).$$

Из (2.2.48) добијамо

$$B^i_{jmn} = \frac{1}{N}(\bar{T}^i_{mn}\bar{\Gamma}^p_{jp} - \bar{g}^{\underline{ip}}\bar{g}_{\underline{qj}}\bar{T}^q_{mn}\bar{\Gamma}^s_{ps} - T^i_{mn}\Gamma^p_{jp} + \bar{g}^{\underline{ip}}\bar{g}_{\underline{qj}} T^q_{mn}\Gamma^s_{ps}). \tag{2.2.55}$$

На основу (2.2.54)-(2.2.55) из једначине (2.2.53) закључујемо да важи следећа теорема.

Теорема 2.2.2. *Тензор*

$$\begin{aligned} \underset{1}{C}{}^i_{jmn} &= \underset{1}{R}{}^i_{jmn} + \frac{1}{N-2}(\delta^i_m \underset{1}{R}{}_{jn} - \delta^i_n \underset{1}{R}{}_{jm} + g_{\underline{jn}}\underset{1}{R}{}^i_m - g_{\underline{jm}}\underset{1}{R}{}^i_n) \\ &+ \frac{1}{(N-1)(N-2)}\underset{1}{R}(\delta^i_n g_{\underline{jm}} - \delta^i_m g_{\underline{jn}}) \\ &+ \frac{1}{(N-2)N} g^{\underline{ps}}\Gamma^t_{st}(\delta^i_n T_{j.pm} - \delta^i_m T_{j.pm} + g_{\underline{jm}} T^i_{pm} - g_{\underline{jn}} T^i_{pm}) \\ &+ \frac{1}{N}(g^{\underline{ip}}\Gamma^t_{pt} T_{j.mn} - \Gamma^t_{jt} T^i_{mn}) \end{aligned} \tag{2.2.56}$$

је **ЕТ конформна инваријанта** *конформне трансформације у* GR_N*, тј. важи*

$$\underset{1}{\bar{C}}{}^i_{jmn} = \underset{1}{C}{}^i_{jmn}. \tag{2.2.57}$$

Дефиниција 2.2.3. *Тензор* $\underset{1}{C}{}^i_{jmn}$ *се зове* **ЕТ конформни тензор** I **врсте** *у* GR_N.

2. ЕТ конформни тензори II врсте

Ако (2.2.56) напишемо у облику

$$\underset{1}{C}{}^i_{jmn} = \underset{1}{P}{}^i_{jmn} + \underset{1}{Q}{}^i_{jmn},$$

где смо са $\underset{1}{P}{}^i_{jmn}$ изразили збир у (2.2.56) где се не појављује тензор торзије, а са $\underset{1}{Q}{}^i_{jmn}$ збир осталих чланова, поступком као у претходној теореми може се доказати да важи

Теорема 2.2.3. *Тензор*

$$\underset{2}{C}{}^i_{jmn} = \underset{2}{P}{}^i_{jmn} - \underset{1}{Q}{}^i_{jmn},$$

где се $\underset{2}{P}$ *добија из* $\underset{1}{P}$ *заменом* $1 \to 2$, *је инваријанта конформне ЕТ трансформације у* GR_N, *тј. важи:*

$$\underset{2}{\bar{C}}{}^i_{jmn} = \underset{2}{C}{}^i_{jmn}.$$

Дефиниција 2.2.4. *Тензор* $\underset{2}{C}{}^i_{jmn}$ *је* **ЕТ конформни тензор** II **врсте** *у* GR_N.

3. ЕТ конформни тензор III врсте

Пођимо од облика (2.2.41), тј.

$$\underset{3}{\bar{R}}{}^i{}_{jmn} = \underset{3}{R}{}^i_{jmn} + \delta^i_m \underset{2}{\rho}_{jn} - \delta^i_n \underset{1}{\rho}_{jm} + \underset{1}{\rho}{}^i_m g_{\underline{jn}} - \underset{2}{\rho}{}^i_n g_{\underline{jm}} + D^i_{jmn}, \tag{2.2.58}$$

где је

$$D^i_{jmn} = T^i_{jm}\rho_n + T^i_{nj}\rho_m + g^{\underline{ps}} g_{\underline{mn}} T^i_{jp}\rho_s, \tag{2.2.59}$$

при чему је

$$\underset{1}{\rho}_{jm} = \rho_{jm} - \frac{1}{2}T^p_{jm}\rho_p,$$

$$\rho_{jm} = \rho_{j;m} - \rho_j\rho_m + \frac{1}{2}\rho_p\rho^p g_{\underline{jm}} = \rho_{mj}, \tag{2.2.60}$$

док је

$$\underset{2}{\rho}_{jn} = \rho_{j\underset{2}{|}n} - \rho_j\rho_n + \frac{1}{2}\rho_p\rho^p g_{\underline{jn}} = \rho_{j;n} - \rho_j\rho_n + \frac{1}{2}\rho_p\rho^p g_{\underline{jn}} + \frac{1}{2}T^p_{jn}\rho_p,$$

односно

$$\underset{2}{\rho}_{jn} = \rho_{jn} + \frac{1}{2}T^p_{jn}\rho_p.$$

Сада (2.2.58) постаје

$$\begin{aligned}\underset{3}{\bar{R}}{}^{i}{}_{jmn} =&\underset{3}{R}{}^{i}_{jmn} + \delta^i_m\rho_{jn} + \frac{1}{2}\delta^i_m T^p_{jn}\rho_p - \delta^i_n\rho_{jm} + \frac{1}{2}\delta^i_n T^p_{jm}\rho_p \\ &+ (\rho^i_m - \frac{1}{2}g^{\underline{is}}T^p_{sm}\rho_p)g_{\underline{jn}} - (\rho^i_n + \frac{1}{2}g^{\underline{is}}T^p_{sn}\rho_p)g_{\underline{jm}} + D^i_{jmn},\end{aligned} \tag{2.2.61}$$

одакле, за $i = n$ добијамо

$$\begin{aligned}\underset{3}{\bar{R}}{}_{jm} = \underset{3}{R}{}_{jm} + \rho_{jm} + \frac{1}{2}T^p_{jm}\rho_p - N\rho_{jm} + \frac{1}{2}NT^p_{jm}\rho_p \\ + \rho_{jm} - \frac{1}{2}T^p_{sm}\rho_p - \rho^i_i g_{\underline{jm}} - \frac{1}{2}g^{\underline{is}}T^p_{si}\rho_p g_{\underline{jm}},\end{aligned} \tag{2.2.62}$$

јер је

$$D^i_{jmi} = T^i_{jn}\rho_i + T^i_{ij}\rho_m + g^{\underline{ps}}g_{\underline{mi}}T^i_{jp}\rho_s = T^i_{jm}\rho_i + T_{m.jp}\rho^p = T_{i.jm}\rho^i - T_{p.jm}\rho^p = 0.$$

Дакле,

$$\underset{3}{\bar{R}}{}_{jm} = \underset{3}{R}{}_{jm} + \rho_{jm}(2 - N) + \frac{1}{2}NT^p_{jm}\rho_p - \rho^i_i g_{\underline{jm}},$$

јер је

$$g^{\underline{is}}T^p_{si}\rho_p g_{\underline{jm}} = 0.$$

Вршећи композицију са $\rho^2\bar{g}^{\underline{jm}} = g^{\underline{jm}}$, следи

$$\rho^2\underset{3}{\bar{R}} = \underset{3}{R} + (2 - N)\rho^m_m - \rho^i_i N, \tag{2.2.63}$$

јер је $T^p_{jm}g^{\underline{jm}} = 0$. Из (2.2.63) је

$$\rho^p_p = \frac{\underset{3}{R} - \rho^2\underset{3}{\bar{R}}}{2(N-1)}.$$

Заменом ове вредности у (2.2.62), добијамо

$$\rho_{jm} = \frac{1}{N-2}\left(\underset{3}{R}{}_{jm} - \underset{3}{\bar{R}}{}_{jm} - \frac{\underset{3}{R} - \rho^2\underset{3}{\bar{R}}}{2(N-1)}g_{\underline{jm}} + \frac{N}{2}T^p_{jm}\rho_p\right). \tag{2.2.64}$$

У (2.2.61) извршимо замену према (2.2.64):

$$\begin{aligned}\underset{3}{\bar{R}}{}^{i}{}_{jmn} &= \underset{3}{R}{}^{i}_{jmn} + \delta^{i}_{m}\frac{1}{N-2}\left(\underset{3}{R}_{jn} - \underset{3}{\bar{R}}_{jn} + \frac{\rho^{2}\underset{3}{\bar{R}} - \underset{3}{R}}{2(N-1)}g_{\underline{jn}} + \frac{N}{2}T^{p}_{jn}\rho_{p}\right) + \frac{1}{2}\delta^{i}_{m}T^{p}_{jn}\rho_{p}\\
&- \delta^{i}_{n}\frac{1}{N-2}\left(\underset{3}{R}_{jm} - \underset{3}{\bar{R}}_{jm} + \frac{\rho^{2}\underset{3}{\bar{R}} - \underset{3}{R}}{2(N-1)}g_{\underline{jm}} + \frac{N}{2}T^{p}_{jm}\rho_{p}\right) + \frac{1}{2}\delta^{i}_{n}T^{p}_{jm}\rho_{p}\\
&+ g_{\underline{jn}}\left[\frac{1}{N-2}\left(\underset{3}{R}{}^{i}_{m} - \rho^{2}\underset{3}{\bar{R}}{}^{i}_{m} + \frac{\rho^{2}\underset{3}{\bar{R}} - \underset{3}{R}}{2(N-1)}\delta^{i}_{m} + \frac{N}{2}g^{\underline{is}}T^{p}_{sm}\rho_{p}\right) - \frac{1}{2}g^{\underline{is}}T^{p}_{sm}\rho_{p}\right]\\
&- g_{\underline{jm}}\left[\frac{1}{N-2}\left(\underset{3}{R}{}^{i}_{n} - \rho^{2}\underset{3}{\bar{R}}{}^{i}_{n} + \frac{\rho^{2}\underset{3}{\bar{R}} - \underset{3}{R}}{2(N-1)}\delta^{i}_{n} + \frac{N}{2}g^{\underline{is}}T^{p}_{sn}\rho_{p}) + \frac{1}{2}g^{\underline{is}}T^{p}_{sn}\rho_{p}\right)\right]\\
&+ D^{i}_{jmn},\end{aligned}\tag{2.2.65}$$

где је D^{i}_{jmn} дато у (2.2.59). Како је

$$\rho^{2}\underset{3}{\bar{R}}g_{\underline{jn}} = \underset{3}{\bar{R}}\bar{g}_{\underline{jn}},\quad T^{p}_{jn}\rho_{p} = T^{p}_{jn}\frac{1}{N}(\bar{\Gamma}^{s}_{ps} - \Gamma^{s}_{ps}),\quad g_{\underline{jn}}\rho^{2}\underset{3}{\bar{R}}{}^{i}_{m} = \bar{g}_{\underline{jn}}\underset{3}{\bar{R}}{}^{i}_{m},$$

$$g_{\underline{jn}}\rho^{2}\underset{3}{\bar{R}}\delta^{i}_{m} = \bar{g}_{\underline{jn}}\underset{3}{\bar{R}}\bar{\delta}^{i}_{m},\quad g_{\underline{jn}}g^{\underline{is}} = \bar{g}_{\underline{jn}}\bar{g}^{\underline{is}},\tag{2.2.66}$$

$$D^{i}_{jmn} = \frac{1}{N}(\bar{T}^{i}_{jm}\bar{\Gamma}^{p}_{np} + \bar{T}^{i}_{nj}\bar{\Gamma}^{p}_{mp} + \bar{g}^{\underline{ps}}\bar{g}_{\underline{mn}}\bar{T}^{i}_{jp}\bar{\Gamma}^{r}_{sr} - T^{i}_{jm}\Gamma^{p}_{np} - T^{i}_{nj}\Gamma^{p}_{mp} - g^{\underline{ps}}g_{\underline{mn}}T^{i}_{jm}\Gamma^{p}_{np}),$$

то се једначина (2.2.65) може написати у облику:

$$\begin{aligned}\underset{3}{\bar{R}}{}^{i}{}_{jmn} &= \underset{3}{R}{}^{i}_{jmn} + \delta^{i}_{m}\frac{1}{N-2}[\underset{3}{R}_{jn} - \underset{3}{\bar{R}}_{jn} + \frac{1}{2(N-1)}(\underset{3}{\bar{R}}\bar{g}_{\underline{jn}} - \underset{3}{R}g_{\underline{jn}})\\
&+ \frac{N}{2}T^{p}_{jn}\frac{1}{N}(\bar{\Gamma}^{s}_{ps} - \Gamma^{s}_{ps})] + \frac{1}{2}\delta^{i}_{m}T^{p}_{jn}\frac{1}{N}(\bar{\Gamma}^{s}_{ps} - \Gamma^{s}_{ps})\\
&- \delta^{i}_{n}\frac{1}{N-2}[\underset{3}{R}_{jm} - \underset{3}{\bar{R}}_{jm} + \frac{1}{2(N-1)}(\underset{3}{\bar{R}}g_{\underline{jm}} - \underset{3}{R}g_{\underline{jm}})\\
&+ \frac{N}{2}T^{p}_{jm}\frac{1}{N}(\bar{\Gamma}^{s}_{ps} - \Gamma^{s}_{ps})] + \frac{1}{2}\delta^{i}_{n}T^{p}_{jm}\frac{1}{N}(\bar{\Gamma}^{s}_{ps} - \Gamma^{s}_{ps})\\
&+ \frac{1}{N-2}[g_{\underline{jn}}\underset{3}{R}{}^{i}_{m} - \bar{g}_{\underline{jn}}\underset{3}{\bar{R}}{}^{i}_{m} + \frac{\delta^{i}_{m}}{2(N-1)}g_{\underline{jn}}\underset{3}{R}{}^{i}_{m} - \bar{g}_{\underline{jn}}\underset{3}{\bar{R}}{}^{i}_{m}\\
&+ \frac{N}{2}g^{\underline{is}}T^{p}_{jm}(\bar{\Gamma}^{s}_{ps} - \Gamma^{s}_{ps})] - \frac{1}{2}g_{\underline{jn}}g^{\underline{is}}T^{p}_{jm}\frac{1}{N}(\bar{\Gamma}^{s}_{ps} - \Gamma^{s}_{ps})\\
&- \frac{1}{N-2}[g_{\underline{jm}}\underset{3}{R}{}^{i}_{n} - \bar{g}_{\underline{jm}}\underset{3}{\bar{R}}{}^{i}_{n} + \frac{\delta^{i}_{m}}{2(N-1)}g_{\underline{jn}}\underset{3}{R}{}^{i}_{m} - \bar{g}_{\underline{jm}}\underset{3}{\bar{R}}{}^{i}_{n}\\
&+ \frac{N}{2}g^{\underline{is}}T^{p}_{jm}(\bar{\Gamma}^{s}_{ps} - \Gamma^{s}_{ps})] + \frac{1}{2}g_{\underline{jn}}g^{\underline{is}}T^{p}_{jm}\frac{1}{N}(\bar{\Gamma}^{s}_{ps} - \Gamma^{s}_{ps}) + D^{i}_{jmn}.\end{aligned}\tag{2.2.67}$$

Сређивањем једначине (2.2.67) закључујемо да важи

Теорема 2.2.4. *Тензор*

$$\begin{aligned}\underset{3}{\bar{C}}{}^i_{jmn} = \underset{3}{R}{}^i_{jmn} &+ \frac{1}{N-2}[\delta^i_m \underset{3}{R}{}_{jn} - \delta^i_n \underset{3}{R}{}_{jm} + \underset{3}{R} g_{\underline{jn}} - \underset{3}{R} g_{\underline{jm}} \\ &- \frac{1}{2}\Gamma^t_{pt}(\delta^i_m T^p_{jn} - \delta^i_m T^p_{jm} + g^{\underline{is}} g_{\underline{jn}} T^p_{jm} - g^{\underline{is}} g_{\underline{jm}} T^p_{sn})] \\ &+ \frac{1}{(N-1)(N-2)} \underset{3}{R}(\delta^i_n g_{\underline{jm}} - \delta^i_m g_{\underline{jn}}) \\ &+ \frac{1}{2N}\Gamma^t_{pt}(\delta^i_m T^p_{jn} - \delta^i_m T^p_{jm} + g^{\underline{is}} g_{\underline{jn}} T^p_{jm} - g^{\underline{is}} g_{\underline{jm}} T^p_{jn}) \\ &+ \frac{1}{N}(g_{\underline{mn}} g^{\underline{ps}} T^i_{pj}\Gamma^t_{st} - T^i_{jm}\Gamma^t_{nt} + T^i_{jn}\Gamma^t_{mt})\end{aligned}$$

је инваријанта конформне ЕТ трансформације у GR_N, тј. важи

$$\underset{3}{\bar{C}}{}^i{}_{jmn} = \underset{3}{C}{}^i_{jmn}.$$

Дефиниција 2.2.5. *Тензор $\underset{3}{C}{}^i_{jmn}$ је* **ЕТ конформни тензор** *III* **врсте** *у GR_N.*

4. ЕТ конформни тензор IV врсте

Тензор $\underset{4}{R}{}^i_{jmn}$ је дат у (1.0.11):

$$\underset{4}{R}{}^i_{jmn} = \Gamma^i_{jm,n} - \Gamma^i_{nj,m} + \Gamma^p_{jm}\Gamma^i_{np} - \Gamma^p_{nj}\Gamma^i_{pm} + L^p_{mn}T^i_{pj}. \qquad (2.2.68)$$

Ако се изврши ЕТ конформна трансформација у GR_N, имамо

$$a) \quad \bar{\Gamma}^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} + P^i_{jk}, \qquad b) \quad P^i_{jk} = \delta^i_j\rho_k + \delta^i_k\rho_j - \rho^i g_{\underline{jk}} = P^i_{kj}. \qquad (2.2.69)$$

Како је

$$\underset{3}{R}{}^i_{jmn} = \Gamma^i_{jm,n} - \Gamma^i_{nj,m} + \Gamma^p_{jm}\Gamma^i_{np} - \Gamma^p_{nj}\Gamma^i_{pm} + L^p_{nm}T^i_{pj}, \qquad (2.2.70)$$

сменом у (2.2.70) и (2.2.68), према (2.2.69a)), добијамо

$$\underset{3}{\bar{R}}{}^i_{jmn} = \underset{3}{R}{}^i_{jmn} + P^i_{jm\underset{2}{|}n} - P^i_{jm\underset{1}{|}n} + P^i_{np}P^p_{jm} - P^i_{pm}P^p_{nj} + P^p_{nm}T^i_{pj}, \qquad (2.2.71)$$

$$\underset{4}{\bar{R}}{}^i_{jmn} = \underset{4}{R}{}^i_{jmn} + P^i_{jm\underset{2}{|}n} - P^i_{jm\underset{1}{|}n} + P^i_{np}P^p_{jm} - P^i_{pm}P^p_{nj} + P^p_{mn}T^i_{pj},$$

одакле је

$$\underset{4}{\bar{R}}{}^i_{jmn} - \underset{3}{\bar{R}}{}^i_{jmn} = \underset{4}{R}{}^i_{jmn} - \underset{3}{R}{}^i_{jmn} + 2P^p_{\underset{V}{mn}}T^i_{pj} = \underset{4}{R}{}^i_{jmn} - \underset{3}{R}{}^i_{jmn},$$

јер је $P^p_{\underset{V}{mn}} = 0$ (на основу (2.2.69b)). На тај начин је

$$\underset{4}{\bar{R}}{}^i_{jmn} - \underset{4}{R}{}^i_{jmn} = \underset{3}{\bar{R}}{}^i_{jmn} - \underset{3}{R}{}^i_{jmn}.$$

Полазећи од релације

$$\underset{4}{\bar{R}}{}^i_{jmn} = \underset{4}{R}{}^i_{jmn} + \delta^i_m \underset{2}{\rho}_{jn} - \delta^i_n \underset{1}{\rho}_{jm} + \underset{1}{\rho}{}^i_m g_{\underline{jn}} - \underset{2}{\rho}{}^i_n g_{\underline{jm}} + D^i_{jmn}, \tag{2.2.72}$$

где је D^i_{jmn} дато у (2.2.59), применом поступка који је спроведен за $\underset{3}{R}{}^i_{jmn}$, доказујемо да важи:

Теорема 2.2.5. *Тензор*

$$\begin{aligned}
\underset{4}{\bar{C}}{}^i_{jmn} = \underset{4}{R}{}^i_{jmn} &+ \frac{1}{N-2}[\delta^i_m \underset{4}{R}_{jn} - \delta^i_m \underset{4}{\bar{R}}_{jm} + \underset{4}{\bar{R}}\bar{g}_{\underline{jn}} - \underset{4}{R}g_{\underline{jm}} \\
&- \frac{1}{2}\Gamma^t_{pt}(\delta^i_m T^p_{jn} - \delta^i_m T^p_{jm} + g^{\underline{is}}g_{\underline{jn}}T^p_{jm} - g^{\underline{is}}g_{\underline{jm}}T^p_{jn})] \\
&+ \frac{1}{(N-1)(N-2)}\underset{4}{R}(\delta^i_n g_{\underline{jm}} - \delta^i_m g_{\underline{jn}}) \\
&+ \frac{1}{2N}\Gamma^t_{pt}(\delta^i_m T^p_{jn} - \delta^i_m T^p_{jm} + g^{\underline{is}}g_{\underline{jn}}T^p_{jm} - g^{\underline{is}}g_{\underline{jm}}T^p_{jn}) \\
&+ \frac{1}{N}(g_{\underline{mn}}g^{\underline{ps}}T^i_{pj}\Gamma^t_{st} - T^i_{jm}\Gamma^t_{nt} + T^i_{jn}\Gamma^t_{mt})
\end{aligned} \tag{2.2.73}$$

је инваријанта конформне ЕТ трансформације у GR_N, тј. важи

$$\underset{4}{\bar{C}}{}^i{}_{jmn} = \underset{4}{C}{}^i_{jmn}.$$

Дефиниција 2.2.6. *Тензор $\underset{4}{C}{}^i_{jmn}$ је* **ЕТ конформни тензор** *IV* **врсте** *у GR_N.*

5. ЕТ конформни тензор V врсте

Размотримо пети од пет независних тензора кривине у GR_N (у [68] он је означен са $\underset{2}{\tilde{R}}{}^i_{jmn}$)

$$\begin{aligned}\underset{5}{R}{}^i_{jmn} =&\frac{1}{2}(\Gamma^i_{jm,n}+\Gamma^i_{mj,n}-\Gamma^i_{jn,m}-\Gamma^i_{nj,m}\\ &+\Gamma^p_{jm}\Gamma^i_{pn}+\Gamma^p_{mj}\Gamma^i_{np}-\Gamma^p_{jn}\Gamma^i_{mp}-\Gamma^p_{nj}\Gamma^i_{pm}).\end{aligned}$$

Применом веза при конформној ЕТ трансформацији

$$\bar{\Gamma}^i_{jk}=\Gamma^i_{jk}+P^i_{jk},\qquad P^i_{jk}=\delta^i_j\rho_k+\delta^i_j\rho_j-\rho^i g_{jk},$$

добијамо да је

$$\begin{aligned}\underset{5}{\bar{R}}{}^i_{jmn}=\underset{5}{R}{}^i_{jmn}+\frac{1}{2}[&\delta^i_j(\rho_{m\underset{2}{|}n}-\rho_{n\underset{1}{|}m}+\rho_{m\underset{1}{|}n}-\rho_{n\underset{2}{|}m})\\ &+\delta^i_m(\rho_{j\underset{1}{|}n}-\rho_{j\underset{2}{|}n}-2\rho_j\rho_n+\rho_p\rho^p g_{\underline{jn}})\\ &-\delta^i_n(\rho_{j\underset{1}{|}m}+\rho_{j\underset{2}{|}m}-2\rho_j\rho_m+\rho_p\rho^p g_{\underline{jm}})\\ &+g_{\underline{jn}}(\rho^i_{\underset{1}{|}m}+\rho^i_{\underset{2}{|}m}-2\rho^i\rho_m)-g_{\underline{jm}}(\rho^i_{\underset{1}{|}n}+\rho^i_{\underset{2}{|}n}-2\rho^i\rho_n)],\end{aligned}$$

одакле је

$$\begin{aligned}\underset{5}{\bar{R}}{}^i_{jmn}=\underset{5}{R}{}^i_{jmn}+\frac{1}{2}[&\delta^i_j(0)+\delta^i_m(2\rho_{j;n}-2\rho_j\rho_n+\rho_p\rho^p g_{\underline{jn}})\\ &-\delta^i_n(2\rho_{j;m}-2\rho_j\rho_m+\rho_p\rho^p g_{\underline{jm}})\\ &+g_{\underline{jn}}(2\rho^i_{;m}-2\rho^i\rho_m)-g_{\underline{jm}}(2\rho^i_{;n}-2\rho^i\rho_n)],\end{aligned}$$

где је ρ_{jm} дато у (2.2.60), па имамо

$$\begin{aligned}\underset{5}{\bar{R}}{}^i_{jmn}=&\underset{5}{R}{}^i_{jmn}+2\delta^i_m\rho_{jn}-2\delta^i_n\rho_{jm}\\ &+2(\rho^i_m-\frac{1}{2}\rho_p\rho^p\delta^i_m)g_{\underline{jn}}-2(\rho^i_n-\frac{1}{2}\rho_p\rho^p\delta^i_n)g_{\underline{jm}}\\ &=\underset{5}{R}{}^i_{jmn}+2(\delta^i_m\rho_{jn}-\delta^i_n\rho_{jm})+2(\rho^i_m g_{\underline{jn}}-\rho^i_n g_{jm})\\ &+\rho_p\rho^p(g_{\underline{jm}}\delta^i_n-g_{\underline{jn}}\delta^i_m).\end{aligned}\tag{2.2.74}$$

Контракцијом са $i = n$:

$$\underset{5}{\bar{R}}_{jm} = \underset{5}{R}_{jm} + 2(2-N)\rho_{jm} + \rho_p \rho^p (N-1) g_{\underline{jm}} - 2\rho^p \rho_p g_{\underline{jm}}. \tag{2.2.75}$$

Ако извршимо композицију са $\rho^2 \bar{g}^{\underline{jm}} = g^{\underline{jm}}$, из (2.2.74) се добија

$$\begin{aligned}\rho^2 \underset{5}{\bar{R}} &= \underset{5}{R} + 2(2-N)\rho_{jm} g^{\underline{jm}} + \rho^p \rho_p N(N-1) - 2N\rho^p \rho_p \\ &= \underset{5}{R} + 4(1-N)\rho^p \rho_p + \frac{1}{2}\rho^p \rho_p,\end{aligned}$$

одакле

$$\rho^p_p = \frac{1}{4(N-1)}[\underset{5}{R} - \rho^2 \underset{5}{\bar{R}} + N(N-1)\rho_p \rho^p] \tag{2.2.76}$$

$$\rho_{jm} = \frac{1}{2(N-2)}[\underset{5}{R}_{jm} - \underset{5}{\bar{R}}_{jm} - \frac{1}{2(N-1)}(\underset{5}{R}_{jm} - \rho^2 \underset{5}{\bar{R}}_{jm}) g_{\underline{jm}} + \frac{1}{2}\rho^p \rho_p (N-2) g_{\underline{jm}}].$$

Ако заменимо из (2.2.76) у (2.2.75) добијамо

$$\begin{aligned}\underset{5}{\bar{R}}{}^i_{jmn} = \underset{5}{R}{}^i_{jmn} &+ \frac{1}{N-2}\delta^i_m [\underset{5}{R}_{jn} - \underset{5}{\bar{R}}_{jn} - \frac{1}{2(N-1)}(\underset{5}{R} - \rho^2 \underset{5}{\bar{R}}) g_{\underline{jn}} \\ &+ \frac{1}{2}\rho^p \rho_p (N-2) g_{\underline{jn}}] \\ &- \frac{1}{N-2}\delta^i_n [\underset{5}{R}_{jm} - \underset{5}{\bar{R}}_{jm} - \frac{1}{2(N-1)}(\underset{5}{R} - \rho^2 \underset{5}{\bar{R}}) g_{\underline{jm}} + \frac{1}{2}\rho^p \rho_p (N-2) g_{\underline{jm}}] \\ &+ \frac{1}{N-2}[\underset{5}{R}{}^i_m - \rho^2 \underset{5}{\bar{R}}{}^i_m - \frac{1}{2(N-1)}(\underset{5}{R} - \rho^2 \underset{5}{\bar{R}})\delta^i_m + \frac{1}{2}\rho^p \rho_p (N-2)\delta^i_m] g_{\underline{jn}} \\ &- \frac{1}{N-2}[\underset{5}{R}{}^i_n - \underset{5}{\bar{R}}{}^i_m - \frac{1}{2(N-1)}(\underset{5}{R} - \rho^2 \underset{5}{\bar{R}})\delta^i_n \\ &+ \frac{1}{2}\rho^p \rho_p (N-2)\delta^i_n] g_{\underline{jm}} + \rho^p \rho_p (g_{\underline{jm}}\delta^i_n - g_{\underline{jn}})\delta^i_m).\end{aligned} \tag{2.2.77}$$

Пошто се чланови који садрже $\rho^p \rho_p$ потиру, то после сређивања, закључујемо да важи:

Теорема 2.2.6. *Тензор*

$$\begin{aligned}\underset{5}{\bar{C}}{}^i_{jmn} = \underset{5}{R}{}^i_{jmn} &+ \frac{1}{N-2}[\delta^i_m \underset{5}{R}_{jn} - \delta^i_n \underset{5}{R}_{jm} + \underset{5}{R}{}^i_m g_{\underline{jn}} - \underset{5}{R}{}^i_n g_{\underline{jm}} \\ &+ \frac{1}{(N-1)(N-2)}\underset{5}{R}(\delta^i_n g_{\underline{jm}} - \delta^i_m g_{\underline{jn}})\end{aligned} \tag{2.2.78}$$

је инваријанта конформне ЕТ трансформације у GR_N, тј. важи

$$\underset{5}{\bar{C}}{}^{i}{}_{jmn} = \underset{5}{C}{}^{i}_{jmn}.$$

Дефиниција 2.2.7. *Тензор* $\underset{5}{C}{}^{i}_{jmn}$ *је* **ЕТ конформни тензор** V **врсте** *у* GR_N.

Из претходних једначина, којима су дати тензори $\underset{\theta}{C}{}^{i}{}_{jmn}$ за $\theta = 1, \ldots, 5$ у GR_N, очигледно је да се сви ови тензори у R_N своде на познати конформни тензор кривине C^{i}_{jmn} у R_N.

М. Станковић је у својој докторској дисертацији [129] први увео појам еквиторзионог (ЕТ конформног) пресликавања у просторима GA_N и GR_N и добио одговарајуће ЕТ конформне тензоре. У овом раду је примењен нешто другачији поступак, па се и неки резултати разликују.

ГЛАВА 3

ЕТ концикруларне трансформације

3.1 Дефиниција концикруларне трансформације у GR_N

Концикруларним трансформацијама у GR_N се прво бавио К. Јано [155], а осим других математичара такође и у [159] М. Златановић, И. Хинтерлајтнер, М. Најдановић. У том раду је коришћен нешто другачији метод, нису коришћене у свему исти тензори $\underset{\theta}{R}$, па се наредни резултати разликују од тамо добијених (А. Велимировић [142]).

Дефиниција 3.1.1. *Ако конформна трансформација у Римановом простору*

$$\bar{g}_{ij} = \rho^2 g_{ij}, \quad (g_{ij} = g_{ji})$$

сваки геодезијски круг трансформише у геодезијски круг, функција $\rho(x)$ задовољава парцијалну диференцијалну једначину (К. Јано [155])

$$\rho_{ij} = \Phi(x) g_{ij}(x), \quad (g_{ij} = g_{ji}), \tag{3.1.1}$$

где је

$$\rho_{ij} = \rho_{i;j} - \rho_i \rho_j + \frac{1}{2}\rho^r \rho_r g_{ij}, \quad (g_{ij} = g_{ji}), \tag{3.1.2}$$

онда се таква трансформација зове **концикруларна трансформација** *у R_N.*

Концикруларна геометрија *је геометрија која се бави концикруларним трансформацијама и просторима који допуштају такве транс-*

формације.

У GR_N ћемо посматрати трансформације

$$\bar{g}_{ij} = \rho^2 g_{ij}, \quad (g_{ij} \neq g_{ji}), \tag{3.1.3}$$

где је, уместо ρ_{ij}, (3.1.2), узето

$$\underset{1}{\rho}_{ij} = \rho_{i\underset{1}{|}j} - \rho_i\rho_j + \frac{1}{2}\rho_r\rho^r g_{\underline{ij}} \neq \underset{1}{\rho}_{ji}. \tag{3.1.4}$$

Наредни резултати су публиковани у раду [142].

3.1.1 Конциркуларни тензор I врсте

У GR_N узимамо конциркуларну трансформацију за $\underset{1}{R}$, где је $\underset{1}{\bar{R}}$ дато у (2.2.34) и

$$\underset{1}{\rho}_{ij} = \underset{1}{\Phi}(x) g_{ij}, \quad (g_{ij} \neq g_{ji}). \tag{3.1.5}$$

Упоређујући са (2.1.3) у [142], видимо да је тамо узето $g_{\underline{ij}}$, а ми смо узели $g_{ij} \neq g_{ji}$, сматрајући да је овако општије, пошто се ради у GR_N. Такву трансформацију зовемо конциркуларна трансформација I врсте у GR_N. Сменом за $\underset{1}{\rho}$ из (3.1.5) у (2.2.34) добијамо

$$\underset{1}{\bar{R}}{}^i_{jmn} = \underset{1}{R}{}^i_{jmn} + \underset{1}{\Phi}(\delta^i_m g_{jn} - \delta^i_n g_{jm} + g^i_m g_{\underline{jn}} - g^i_n g_{\underline{jm}}) + B^i_{jmn}, \tag{3.1.6}$$

где је B^i_{jmn} дато у (2.2.33). Ако извршимо контракцију индекса i и n, следи

$$\underset{1}{\bar{R}}_{jm} = \underset{1}{R}_{jm} + \underset{1}{\Phi}[2(1-N)g_{\underline{jm}} + (2-N)\underset{V}{g_{jm}} - g^{\underline{ip}}\underset{V}{g_{pi}}g_{\underline{jm}}] + B_{jm}. \tag{3.1.7}$$

Множећи одговарајуће стране претходне једначине са

$$\rho^2 \bar{g}^{\underline{jm}} = g^{\underline{jm}}, \tag{3.1.8}$$

добијамо

$$\rho^2 \underset{1}{\bar{R}} = g^{\underline{jm}}\{\underset{1}{R}_{jm} + \underset{1}{\Phi}[2(1-N)g_{\underline{jm}} + (2-N)\underset{V}{g_{jm}} - g^{\underline{ip}}\underset{V}{g_{pi}}g_{\underline{jm}}] + B_{jm}\},$$

где је $\underset{1}{\bar{R}}_{jm}\bar{g}^{\underline{jm}} = \underset{1}{\bar{R}}$ и тако даље, док

$$B_{jm}g^{\underline{jm}} = B^i_{jmi}g^{\underline{jm}} = (T^i_{mi}\rho_j - T_{j.mi}\rho^i)g^{\underline{jm}} = 0,$$

и добијамо

$$\rho^2 \underset{1}{\bar{R}} = \underset{1}{R} + \underset{1}{\Phi}[-2(N-1)N + 2g^{\underline{rs}}\underset{V}{g_{rs}}],$$

одакле је

$$\underset{1}{\Phi}(x) = -\frac{\rho^2 \underset{1}{\bar{R}} - \underset{1}{R}}{2(N-1)N},$$

јер је

$$g^{\underline{rs}}\underset{V}{g_{rs}} = -g^{\underline{rs}}\underset{V}{g_{sr}} = -g^{\underline{sr}}\underset{V}{g_{sr}} = -g^{\underline{rs}}\underset{V}{g_{rs}} = 0.$$

Сменом $\underset{1}{\Phi}$ у (3.1.6) добијамо

$$\underset{1}{\bar{R}}{}^i_{jmn} = \underset{1}{R}{}^i_{jmn} - \frac{\rho^2 \underset{1}{\bar{R}} - \underset{1}{R}}{2(N-1)N}(\delta^i_m g_{jn} - \delta^i_n g_{jm} + g^i_m g_{\underline{jn}} - g^i_n g_{\underline{jm}}) + B^i_{jmn},$$

а одавде

$$\begin{aligned}\underset{1}{\bar{R}}{}^i_{jmn} &= \frac{\underset{1}{\bar{R}}(\rho^2\delta^i_m g_{jn} - \rho^2\delta^i_n g_{jm} + g^i_m\rho^2 g_{\underline{jn}} - g_{\underline{jm}}\rho^2 g^i_n)}{2(N-1)N} \\ &= \underset{1}{R}{}^i_{jmn} + \frac{\underset{1}{R}(\delta^i_m g_{jn} - \delta^i_n g_{jm} + g^i_m g_{\underline{jn}} - g^i_n g_{\underline{jm}})}{2(N-1)N} + B^i_{jmn}.\end{aligned}$$

Ако узмемо у обзир да је

$$\rho_i = \frac{1}{N}(\bar{\Gamma}^p_{ip} - \Gamma^p_{ip}), \tag{3.1.9}$$

према (2.2.33) и (3.1.9) је

$$\begin{aligned}B^i_{jmn} &= T^i_{mn}\rho_j - T_{j.mn}\rho^i = \frac{1}{N}T^i_{mn}(\bar{\Gamma}^p_{jp} - \Gamma^p_{jp}) - g^{\underline{ip}}\rho_p T_{j.mn} \\ &= \frac{1}{N}\bar{T}^i_{mn}\bar{\Gamma}^p_{jp} - \frac{1}{N}T^i_{mn}\Gamma^p_{jp} - \frac{1}{N}\bar{g}^{\underline{ip}}\bar{g}_{\underline{qj}}\bar{T}^q_{mn}\bar{\Gamma}^s_{ps} + \frac{1}{N}g^{\underline{ip}}g_{\underline{qj}}T^q_{mn}\Gamma^s_{ps},\end{aligned} \tag{3.1.10}$$

где смо узели у обзир да је $T^i_{mn} = \bar{T}^i_{mn}$ (за 1. сабирак) и

$$g^{\underline{ip}} g_{\underline{qj}} = \bar{g}^{\underline{ip}} \bar{g}_{\underline{qj}}$$

(за 3. сабирак). Смењујући из (3.1.10) у (3.1.1) и узимајући у обзир да је

$$g^i_m = \bar{g}^i_m, \quad g^{\underline{rs}} g_{\underset{V}{rs}} = \bar{g}^{\underline{rs}} \bar{g}_{\underset{V}{rs}} = 0, \quad \rho^2 g_{jm} = \bar{g}_{jm}, \quad \bar{\delta}^i_m = \delta^i_m, \tag{3.1.11}$$

добијамо

$$\begin{aligned}
&\underset{1}{\bar{R}}{}^i_{jmn} + \frac{\underset{1}{\bar{R}}(\bar{\delta}^i_m \bar{g}_{jn} - \bar{\delta}^i_n \bar{g}_{jm} + \bar{g}^i_m g_{\underline{jn}} - \bar{g}_{\underline{jm}} \bar{g}^i_n)}{2(N-1)N} + \frac{1}{N}(\bar{g}^{\underline{ip}} \bar{g}_{\underline{qj}} \bar{T}^q_{mn} \bar{\Gamma}^s_{ps} - \bar{T}^i_{mn} \bar{\Gamma}^p_{jp}) \\
=&\underset{1}{R}{}^i_{jmn} + \frac{\underset{1}{R}(\delta^i_m g_{jn} - \delta^i_n g_{jm} + g^i_m g_{\underline{jn}} - g^i_n g_{\underline{jm}})}{2(N-1)N} + \frac{1}{N}(g^{\underline{ip}} g_{\underline{qj}} T^q_{mn} \Gamma^s_{ps} - T^i_{mn} \Gamma^p_{jp}).
\end{aligned}$$

На тај начин закључујемо да важи следећа теорема

Теорема 3.1.1. *Тензор*

$$\begin{aligned}
\underset{1}{\tilde{Z}}{}^i_{jmn} = \underset{1}{R}{}^i_{jmn} &+ \frac{\underset{1}{R}(\delta^i_m g_{jn} - \delta^i_n g_{jm} + g^i_m g_{\underline{jn}} - g^i_n g_{\underline{jm}})}{2(N-1)N} \\
&+ \frac{1}{N}(g^{\underline{ip}} g_{\underline{qj}} T^q_{mn} \Gamma^s_{ps} - T^i_{mn} \Gamma^p_{jp})
\end{aligned} \tag{3.1.12}$$

је инваријанта у простору GR_N, при ЕТ конциркуларној трансформацији, тј. према (3.1.12)*:*

$$\bar{\underset{1}{\tilde{Z}}}{}^i_{jmn} = \underset{1}{\tilde{Z}}{}^i_{jmn},$$

где је $\underset{1}{\tilde{Z}}{}^i_{jmn}$ дато (3.1.12).

Дефиниција 3.1.2. *Тензор $\underset{1}{\tilde{Z}}{}^i_{jmn}$ је* **ЕТ конциркуларни тензор** *I* **врсте** *у GR_N.*

Ако даље извршимо контракцију индекса i и n имамо

$$\begin{aligned}
\underset{1}{\tilde{Z}}{}_{jm} &\equiv \underset{1}{\tilde{Z}}{}^i_{jmi} \\
&= \underset{1}{R}{}_{jm} + \frac{\underset{1}{R}(g_{jm} - N g_{jm} + g^i_m g_{\underline{ji}} - g^i_i g_{\underline{jm}})}{2(N-1)N} + \frac{1}{N}(g^{\underline{ip}} g_{\underline{qj}} T^q_{mi} \Gamma^s_{ps}) \\
&= \underset{1}{R}{}_{jm} + \frac{\underset{1}{R} g_{jm}(1-N) - N g_{jm} + g_{jm}}{2(N-1)N} + \frac{1}{N}(g^{\underline{ip}} T_{j.mi} \Gamma^s_{ps}),
\end{aligned} \tag{3.1.13}$$

јер је

$$g^i_i g_{\underline{jm}} = g^{ik} g_{\underline{ik}} g_{\underline{jm}} = (g^{\underline{ik}} + g^{\overset{ik}{V}}) g_{\underline{ik}} g_{\underline{jm}} = (N+0) g_{\underline{jm}} = N g_{\underline{jm}},$$

пошто је

$$g^{\overset{ik}{V}} g_{\underline{ik}} = -g^{\overset{ki}{V}} g_{\underline{ki}} = -g^{\overset{ik}{V}} g_{\underline{ik}} = 0,$$

где смо на крају вршили замену индекса i и k. Сада (3.1.13) постаје

$$\underset{1}{\tilde{Z}}_{jm} = \underset{1}{R}_{jm} + \frac{\underset{1}{R}[g_{jm}(1-N) + g_{jm} - N(g_{jm} - \underset{V}{g_{jm}})]}{2(N-1)N} + \underset{1}{P}_{jm},$$

где смо са $\underset{1}{P}_{jm}$ обележили последњи сабирак у (3.1.13)

$$\underset{1}{\tilde{Z}}_{jm} = \underset{1}{R}_{jm} + \underset{1}{R} \cdot \frac{2(1-N)g_{jm} + N\underset{V}{g_{jm}}}{2(N-1)N} + \underset{1}{P}_{jm}$$

тј.

$$\underset{1}{\tilde{Z}}_{jm} = \underset{1}{R}_{jm} - \underset{1}{R}\left(\frac{g_{jm}}{N} - \frac{\underset{V}{g_{jm}}}{2(N-1)}\right) + \frac{1}{N}(g^{\underline{rp}} T_{r.jm} \Gamma^s_{ps}). \tag{3.1.14}$$

Ако извршимо композицију са $g^{\underline{jm}}$, добијамо

$$\underset{1}{\tilde{Z}} = \underset{1}{\tilde{Z}}_{jm} g^{\underline{jm}} = 0.$$

На основу изложеног важи

Теорема 3.1.2. *Тензор* $\underset{1}{\tilde{Z}}_{jm} = \underset{1}{\tilde{Z}}{}^i_{jmi}$ *дат у* (3.1.14) *је инваријанта конциркуларне трансформације у* GR_N, *док је* $\underset{1}{\tilde{Z}} = \underset{1}{\tilde{Z}}_{jm} g^{\underline{jm}} = 0$.

3.1.2 Конциркуларни тензор II врсте

Сада користимо конциркуларну трансформацију за $\underset{2}{R}$

$$\underset{2}{\rho}_{ij} = \underset{2}{\Phi} g_{ij}, \quad g_{ij} \neq g_{ji}$$

где је $\underset{2}{\Phi}$ диференцијабилна функција. Сменом $\underset{2}{\rho}_{ij}$ у (2.2.38), поступком као за $\underset{1}{R}$ добијамо

$$\underset{2}{\Phi} = -\frac{\rho^2 \underset{2}{\bar{R}} - \underset{2}{R}}{2(N-1)N} \tag{3.1.15}$$

и на крају:

$$\underset{2}{\bar{R}}{}^i_{jmn} = \underset{2}{R}{}^i_{jmn} - \frac{\rho^2 \underset{2}{\bar{R}} - \underset{2}{R}}{2(N-1)N}(\delta^i_m g_{jn} - \delta^i_n g_{jm} + g^i_m g_{\underline{jn}} - g^i_n g_{\underline{jm}}) - B^i_{jmn}, \tag{3.1.16}$$

где је B^i_{jmn} дато у (2.2.33).

Тако, закључујемо да важи следећа теорема.

Теорема 3.1.3. *Тензор*

$$\underset{2}{\tilde{Z}}{}^i_{jmn} = \underset{2}{R}{}^i_{jmn} + \frac{\underset{2}{R}(\delta^i_m g_{jn} - \delta^i_n g_{jm} + g^i_m g_{\underline{jn}} - g^i_n g_{\underline{jm}})}{2(N-1)N} - \frac{1}{N}(g^{\underline{ip}} g_{\underline{qj}} \Gamma^s_{ps} \Gamma^q_{mn} - T^i_{mn} \Gamma^p_{jp}),$$

је инваријанта у GR_N *с обзиром на ЕТ конциркуларну трансформацију, тј. важи*

$$\underset{2}{\bar{\tilde{Z}}}{}^i_{jmn} = \underset{2}{\tilde{Z}}{}^i_{jmn}.$$

Тензор $\underset{2}{\tilde{Z}}{}^i_{jmn}$ *је ЕТ конциркуларни тензор II врсте у* GR_N*.*

Теорема 3.1.4. *Тензор* $\underset{2}{\tilde{Z}}{}_{jm}$ *дат у* (3.1.14) *је инваријанта конциркуларне трансформације у* GR_N*.*

3.1.3 Конциркуларни тензор III врсте

Узимамо да је

$$\underset{\theta}{\rho}_{ij} = \underset{3}{\Phi} g_{ij}, \quad g_{ij} \neq g_{ji}, \quad \theta = 1, 2,$$

па из (2.2.41) следи

$$\underset{3}{\bar{R}}{}^i_{jmn} = \underset{3}{R}{}^i_{jmn} + \underset{3}{\Phi}(\delta^i_m g_{jn} - \delta^i_n g_{jm} + g^i_m g_{\underline{jn}} - g^i_n g_{\underline{jm}}) + D^i_{jmn},$$

где је D^i_{jmn} дато у (2.2.40). Контракцијом са $i = n$, се добија

$$\underset{3}{\bar{R}}{}_{jm} = \underset{3}{R}{}_{jm} + \underset{3}{\Phi}[(2-N)(g_{\underline{jm}} + g_{\underset{V}{jm}}) - g^i_i g_{\underline{jm}}] + D_{jm}. \tag{3.1.17}$$

и композицијом са $\rho^2\bar{g}^{jm} = g^{\underline{jm}}$ леве и десне стране у (3.1.17), са одговарајућом страном ове једначине, добија се

$$\rho^2 \underset{3}{\bar{R}} = \underset{3}{R} + \underset{3}{\Phi}[(2-N)N - g^i_i N], \tag{3.1.18}$$

јер је

$$\begin{aligned} D = D_{jm}g^{\underline{jm}} &= D^i_{jmi}g^{\underline{jm}} = (T^i_{jm}\rho_i + T^i_{i\ j}\rho_m + g^{\underline{ps}}g_{\underline{mi}}T^i_{jp}\rho_s)g^{\underline{jm}} \\ &= T^i_{jm}\rho_i g^{\underline{jm}} + 0 + g^{\underline{ps}}\delta^j_i T^i_{jp}\rho_s = T^i_{jm}\rho_i g^{\underline{jm}} \\ &= T_{i.jm}\rho^i g^{\underline{jm}} = -T_{j.im}\rho^i g^{\underline{jm}} = -T^m_{im}\rho^i = 0. \end{aligned} \tag{3.1.19}$$

Даљим поступком као у случају $\underset{1}{R}$, добијамо

$$\underset{3}{\Phi} = -\frac{\rho^2 \underset{3}{\bar{R}} - \underset{3}{R}}{2(N-1)N - 2g^{\underline{rs}}g_{\underset{V}{rs}}}.$$

Размотримо, даље, тензор D^i_{jmn}. Према (2.2.40) је

$$\begin{aligned} D^i_{jmn} &= T^i_{jm}\frac{1}{N}(\bar{\Gamma}^p_{np} - \Gamma^p_{np}) + T^i_{nj}\frac{1}{N}(\bar{\Gamma}^p_{mp} - \Gamma^p_{mp}) + g^{\underline{ps}}g_{\underline{mn}}T^i_{jp}\frac{1}{N}(\bar{\Gamma}^r_{sr} - \Gamma^r_{sr}) \\ &= \frac{1}{N}(\bar{T}^i_{jm}\bar{\Gamma}^p_{np} - T^i_{jm}\Gamma^p_{np} + \bar{T}^i_{nj}\bar{\Gamma}^p_{mp} - T^i_{nj}\Gamma^p_{mp} + \bar{g}^{\underline{ps}}\bar{g}_{\underline{mn}}\bar{T}^i_{jp}\bar{\Gamma}^r_{sr} - g^{\underline{ps}}g_{\underline{mn}}T^i_{jp}\Gamma^r_{sr}), \end{aligned}$$

где смо још узели у обзир да је при овој трансформацији очувана торзија.

Сменом из (3.1.15), (3.1.16) у (3.1.17), следи

$$\begin{aligned} \underset{3}{\bar{R}}{}^i_{jmn} = \underset{3}{R}{}^i_{jmn} &- \frac{\rho^2 \underset{3}{\bar{R}} - \underset{3}{R}}{2(N-1)N}(\delta^i_m g_{jn} - \delta^i_n g_{jm} + g^i_m g_{\underline{in}} - g^i_n g_{\underline{jm}}) \\ &+ \frac{1}{N}(\bar{T}^i_{jm}\bar{\Gamma}^p_{np} - T^i_{jm}\Gamma^p_{np} + \bar{T}^i_{nj}\bar{\Gamma}^p_{mp} - T^i_{nj}\Gamma^p_{mp} + \bar{g}^{\underline{ps}}\bar{g}_{\underline{mn}}\bar{T}^i_{jp}\bar{\Gamma}^r_{sr} - g^{\underline{ps}}g_{\underline{mn}}T^i_{jp}\Gamma^r_{sr}), \end{aligned}$$

одакле закључујемо да важи следећа теорема.

Теорема 3.1.5. *Тензор*

$$\begin{aligned}\underset{3}{\tilde{Z}}{}^i_{jmn} =&\underset{3}{R}{}^i_{jmn} + \frac{\underset{3}{R}(\delta^i_m g_{jn} - \delta^i_n g_{jm} + g^i_m g_{\underline{jn}} - g_{\underline{jm}} g^i_n)}{2(N-1)N}\\ &-\frac{1}{N}(T^i_{jm}\Gamma^p_{np} + T^i_{nj}\Gamma^p_{mp} + g^{\underline{ps}} g_{\underline{mn}} T^i_{jp}\Gamma^r_{sr})\end{aligned}$$

је инваријанта у GR_N у односу на ЕТ конциркуларну трансформацију, тј. важи,

$$\underset{3}{\bar{\tilde{Z}}}{}^i_{jmn} = \underset{3}{\tilde{Z}}{}^i_{jmn}. \tag{3.1.20}$$

Дефиниција 3.1.3. *Тензор $\underset{3}{\tilde{Z}}{}^i_{jmn}$ је* **ЕТ конциркуларни тензор** III **врсте** *у GR_N.*

Ако према (3.1.20) извршимо контракцију по i, n, добија се (аналогно претходним случајевима)

$$\underset{3}{\tilde{Z}}{}_{jm} = \underset{3}{R}{}_{jm} + \underset{3}{R}\frac{g_{jm}(1-N) + g_{jm} - Ng_{jm}}{2(N-1)N} + \frac{1}{N}(T^i_{jm}\Gamma^p_{ip} + g^{\underline{ps}} T_{m.pj}\Gamma^r_{sr}),$$

тј.

$$\underset{3}{\tilde{Z}}{}_{jm} = \underset{3}{R}{}_{jm} - \underset{3}{R}(\frac{g_{jm}}{N} - \frac{\underset{V}{g_{jm}}}{2(N-1)}) + \frac{1}{N}(T^i_{jm}\Gamma^p_{ip} + g^{\underline{ps}} T_{m.pj}\Gamma^r_{sr}).$$

Композицијом са $g^{\underline{jm}}$ се добија

$$\underset{3}{\tilde{Z}} = \underset{3}{R} - \underset{3}{R}(1-0) + 0 = 0,$$

па важи:

Теорема 3.1.6. *Тензор $\underset{3}{\tilde{Z}}{}_{jm} = \underset{3}{\tilde{Z}}{}^i_{jmi}$ је инваријанта конциркуларне трансформације у GR_N, док је $\underset{3}{\tilde{Z}} = \underset{3}{\tilde{Z}}{}_{jm} g^{\underline{jm}} = 0$.*

3.1.4 Конциркуларни тензор IV врсте

За тензор $\underset{4}{R}$ у GR_N имамо:

$$\underset{4}{R}{}^i_{jmn} = \Gamma^i_{jm,n} - \Gamma^i_{nj,m} + \Gamma^p_{jm}\Gamma^i_{np} - \Gamma^p_{nj}\Gamma^i_{pm} + \Gamma^p_{mn}T^i_{pj},$$

где је T^i_{pj} тензор торзије у локалним координатама. За $\underset{4}{R}{}^i_{jmn}$ на основу (2.2.71) се добија (2.2.73), тј.

$$\underset{4}{\bar{R}}{}^i_{jmn} = \underset{4}{R}{}^i_{jmn} + P^i_{jm\underset{2}{|}n} - P^i_{nj\underset{1}{|}m} + P^i_{np}P^p_{jm} - P^i_{pm}P^p_{nj} + T^i_{pj}P^p_{mn}.$$

На основу (2.2.72), (2.2.73) следи да је

$$\underset{4}{\bar{R}}{}^i_{jmn} - \underset{3}{\bar{R}}{}^i_{jmn} = \underset{4}{R}{}^i_{jmn} - \underset{3}{R}{}^i_{jmn} + 2P^p_{\underset{V}{mn}}T^i_{pj} = \underset{4}{R}{}^i_{jmn} - \underset{3}{R}{}^i_{jmn},$$

пошто је $P^p_{\underset{V}{mn}} = 0$, тако да имамо

$$\underset{4}{\bar{R}}{}^i_{jmn} - \underset{4}{R}{}^i_{jmn} = \underset{3}{\bar{R}}{}^i_{jmn} - \underset{3}{R}{}^i_{jmn} = \delta^i_m \underset{2}{\rho}{}_{jn} - \delta^i_n \underset{1}{\rho}{}_{jm} + \underset{1}{\rho}{}^i_m g_{\underline{jn}} - \underset{2}{\rho}{}^i_n g_{\underline{jm}} + D^i_{jmn},$$

где је D^i_{jmn} дато у (2.2.40). За конциркуларну трансформацију тензора $\underset{4}{R}{}^i_{jmn}$ стављамо

$$\underset{\theta}{\rho}{}_{ij} = \underset{4}{\Phi} g_{ij}, \qquad \theta = 1, 2,$$

где је $\underset{4}{\Phi}$ дифенецијабилна функција. На исти начин као у претходном случају, добија се следећа теорема.

Теорема 3.1.7. *Тензор*

$$\begin{aligned}\underset{4}{\tilde{Z}}{}^i_{jmn} =& \underset{4}{R}{}^i_{jmn} + \frac{\underset{4}{R}(\delta^i_m g_{jn} - \delta^i_n g_{jm} + g^i_m g_{\underline{jn}} - g_{\underline{jm}} g^i_n)}{2(N-1)N} \\ & - \frac{1}{N}(T^i_{jm}\Gamma^p_{np} + T^i_{nj}\Gamma^p_{mp} + g^{\underline{ps}} g_{\underline{mn}} T^i_{jp}\Gamma^r_{sr}),\end{aligned}$$

је инваријантан у GR_N с обзиром на ЕТ конциркуларну трансформацију, тј. важи

$$\underset{4}{\bar{\tilde{Z}}}{}^i_{jmn} = \underset{4}{\tilde{Z}}{}^i_{jmn}.$$

Тензор $\underset{4}{\tilde{Z}}{}^i_{jmn}$ је ЕТ конциркуларни тензор IV врсте у GR_N.

Теорема 3.1.8. *Тензор $\underset{4}{\bar{\tilde{Z}}}{}^i_{jmn} = \underset{4}{\tilde{Z}}{}^i_{jmn}$ је такође инваријанта конциркуларне трансформације у GR_N.*

3.1.5 Конциркуларни тензор V врсте

Применимо конциркуларну трансформацију на тензор $\underset{5}{R}{}^i_{jmn}$. У овом случају стављамо

$$\underset{5}{\rho}_{ij} = \underset{5}{\Phi} g_{\underline{ij}} = \underset{5}{\rho}_{ji},$$

где је $\underset{5}{\Phi}$ диференцијабилна функција и добијамо

$$\underset{5}{\bar{R}}{}^i_{jmn} = \underset{5}{R}{}^i_{jmn} + 2\underset{5}{\Phi}(\delta^i_m g_{\underline{jn}} - \delta^i_n g_{\underline{jm}}) - \rho_p \rho^p (\delta^i_m g_{\underline{jn}} - \delta^i_n g_{\underline{jm}}).$$

Ако извршимо контракцију за $i = n$, добијамо

$$\underset{5}{\bar{R}}{}^i_{jm} = \underset{5}{R}{}^i_{jm} + (1 - N) g_{\underline{jm}} (2\underset{5}{\Phi} - \rho_p \rho^p).$$

Множећи ову једначину са $\rho^2 \bar{g}^{jn} = \bar{g}^{\underline{jm}}$, следи да је

$$2\underset{5}{\Phi} = \frac{\rho^2 \underset{5}{\bar{R}} - \underset{5}{R}}{(1 - N)N} + \rho_p \rho^p.$$

Смењујући ову вредност у (3.1.5) добија се да важи следећа теорема

Теорема 3.1.9. *Тензор*

$$\underset{5}{\tilde{Z}}{}^i_{jmn} = \underset{5}{R}{}^i_{jmn} + \frac{\underset{5}{R}(\delta^i_m g_{\underline{jn}} - \delta^i_n g_{\underline{jm}})}{(N - 1)N} \tag{3.1.21}$$

је инваријанта у GR_N с обзиром на ЕТ конциркуларну трансформацију, тј. важи $\underset{5}{\tilde{\bar{Z}}}{}^i_{jmn} = \underset{5}{\tilde{Z}}{}^i_{jmn}$.

Дефиниција 3.1.4. *Тензор $\underset{5}{\tilde{Z}}{}^i_{jmn}$ је* **ЕТ конциркуларни тензор V врсте у GR_N.**

Примедба 3.1.1. У [159] је $\underset{1}{K}{}^i_{jmn} \equiv \underset{1}{R}{}^i_{jmn}$, $\underset{3}{K}{}^i_{jmn} \equiv \underset{3}{R}{}^i_{jmn}$ док је $\underset{\theta}{R}{}^i_{jmn} \notin \{\underset{2}{K}{}^i_{jmn}, \underset{4}{K}{}^i_{jmn}, \underset{5}{K}{}^i_{jmn}\}, \theta = 2, 4, 5$. Међутим због различитих поступака је $\underset{\theta}{\tilde{Z}}{}^i_{jmn} \notin \{\underset{1}{Z}{}^i_{jmn}, \ldots, \underset{5}{Z}{}^i_{jmn}\}, \theta = 1, \ldots, 5$, где је $\underset{\theta}{Z}{}^i_{jmn}$ из [159]. Дакле, $\underset{\theta}{\tilde{Z}}{}^i_{jmn}$ су нове инваријанте разматране трансформације.

3.2 Услови интеграбилности диференцијалних једначина геодезијских кругова у GR_N

У Глави *II* смо добили диференцијалне једначине геодезијских кругова и то *I* врсте (2.1.9) и *II* врсте (2.1.21). Претпоставимо да је услов (2.1.14), односно њему еквивалентан (2.1.22) испуњен, тј. да се геодезијски кругови *I* и *II* врсте поклапају, па у том случају говоримо само о геодезијским круговима.

За геодезијску трансформацију, која геодезијски круг трансформише у геодезијски круг, функција ρ задовољава диференцијалну једначину [155]

$$\underset{\theta}{\rho}_{ij} = \underset{\theta}{\Phi}(x)g_{ij}, \quad \theta \in \{1,2\}, \tag{3.2.22}$$

где је

$$\underset{\theta}{\rho}_{ij} = \rho_{i\underset{\theta}{|}j} - \rho_i\rho_j + \frac{1}{2}\rho_r\rho^r g_{\underline{ij}}, \tag{3.2.23}$$

а одавде и због (3.2.22) је

$$\rho_{i\underset{\theta}{|}j} = \rho_i\rho_j - \frac{1}{2}\rho_r\rho^r g_{\underline{ij}} + \underset{\theta}{\Phi}(x)(g_{\underline{ij}} + g_{\underset{V}{ji}}),$$

односно

$$\rho_{p\underset{\theta}{|}m} = \rho_p\rho_m + (\underset{\theta}{\Phi} - \frac{1}{2}\rho_r\rho^r)g_{\underline{pm}} + \underset{\theta}{\Phi}g_{\underset{V}{pm}}. \tag{3.2.24}$$

Ако ставимо да је

$$\underset{\theta}{\Psi} = \underset{\theta}{\Phi} - \frac{1}{2}\rho_r\rho^r, \tag{3.2.25}$$

једначина (3.2.24) гласи

$$\rho_{p\underset{\theta}{|}m} = \underset{\theta}{\Psi}g_{\underline{pm}} + \rho_p\rho_m + \underset{\theta}{\Phi}g_{\underset{V}{pm}}. \tag{3.2.26}$$

Извршимо композицију са $g^{\underline{ip}}$ једначине (3.2.26), па добијамо

$$\rho^i_{\underset{\theta}{|}m} = \underset{\theta}{\Psi}\delta^i_m + \rho^i\rho_m + \underset{\theta}{\Phi}g^{\underline{ip}}g_{\underset{V}{pm}}, \tag{3.2.27}$$

одакле поновним коваријантним диференцирањем врсте ω по x^n важи:

$$\begin{aligned}\rho^{i}_{\underset{\theta}{|}m\underset{\omega}{|}n} &= \underset{\theta}{\Psi}_{,n}\delta^{i}_{m} + \underset{\theta}{\Psi}\delta^{i}_{m\underset{\omega}{|}n} + \rho^{i}_{\underset{\omega}{|}n}\rho_m + \rho^{i}\rho_{m\underset{\omega}{|}n} + (\underset{\theta}{\Phi}_{,n}g_{\underset{V}{pm}} + \underset{\theta}{\Phi}g_{\underset{V}{pm}\underset{\omega}{|}n})g^{\underline{ip}}\\ &= \underset{\theta}{\Psi}_{,n}\delta^{i}_{m} + \underset{\theta}{\Psi}\delta^{i}_{m\underset{\omega}{|}n} + (\underset{\theta}{\Psi}\delta^{i}_{n} + \rho^{i}\rho_n + \underset{\omega}{\Phi}g^{\underline{ip}}g_{\underset{V}{pn}})\rho_m\\ &+ \rho^{i}(\underset{\omega}{\Psi}g_{\underline{mn}} + \rho_m\rho_n + \underset{\omega}{\Phi}g_{\underset{V}{mn}}) + (\underset{\theta}{\Phi}_{,n}g_{\underset{V}{pm}} + \underset{\theta}{\Phi}g_{\underset{V}{pm}\underset{\omega}{|}n})g^{\underline{ip}}.\end{aligned} \tag{3.2.28}$$

На исти начин,

$$\begin{aligned}\rho^{i}_{\underset{\omega}{|}n\underset{\theta}{|}m} &= \underset{\omega}{\Psi}_{,m}\delta^{i}_{n} + \underset{\omega}{\Psi}\delta^{i}_{n\underset{\theta}{|}m} + (\underset{\omega}{\Psi}\delta^{i}_{m} + \rho^{i}\rho_m + \underset{\theta}{\Phi}g^{\underline{ip}}g_{\underset{V}{pm}})\rho_n\\ &+ \rho^{i}(\underset{\theta}{\Psi}g_{\underline{nm}} + \rho_n\rho_m + \underset{\theta}{\Phi}g_{\underset{V}{nm}}) + (\underset{\omega}{\Phi}_{,m}g_{\underset{V}{pn}} + \underset{\omega}{\Phi}g_{\underset{V}{pn}\underset{\theta}{|}m})g^{\underline{ip}}.\end{aligned} \tag{3.2.29}$$

1. Узмимо да је $\theta = \omega = 1$ или $\theta = \omega = 2$, па одузмимо од једначине (3.2.28) једначину (3.2.29). Ако за разлику на левој страни искористимо I и II идентитет Ричијевог типа у GR_N, тј. за $\theta = \omega \in \{1, 2\}$ и узмемо у обзир да је $\delta^{i}_{m\underset{1}{|}n} = \delta^{i}_{m\underset{2}{|}n} = 0$, добијамо

$$\begin{aligned}&\underset{\theta}{R}^{i}_{pmn}\rho^{p} + (-1)^{\theta}T^{p}_{mn}\rho^{i}_{\underset{\theta}{|}p} = \delta^{i}_{m}\underset{\theta}{\Psi}_{,n} - \delta^{i}_{n}\underset{\theta}{\Psi}_{,m} + \underset{\theta}{\Psi}(\delta^{i}_{n}\rho_m - \delta^{i}_{m}\rho_n) + 2\rho\underset{\theta}{\Phi}g_{\underset{V}{mn}}\\ &+ g^{\underline{ip}}(g_{\underset{V}{pm}}\underset{\theta}{\Phi}_{,n} - g_{\underset{V}{pn}}\underset{\theta}{\Phi}_{,m}) + \underset{\theta}{\Phi}g^{\underline{ip}}(\rho_m g_{\underset{V}{pm}} - \rho_n g_{\underset{V}{pm}} + g_{\underset{V}{pm}\underset{\theta}{|}n} - g_{\underset{V}{pn}\underset{\theta}{|}m}),\\ &\theta \in \{1, 2\},\end{aligned} \tag{3.2.30}$$

где је T^{p}_{mn} тензор торзије у GR_N.

Дакле, важи:

Теорема 3.2.1. *Једначинама* (3.2.30) *дати су 1. и 2. услов интеграбилности диференцијалних једначина* (3.2.27) *где је непозната функција* $\rho(x^1, \ldots, x^N)$*,* $\underset{\theta}{\Phi}, \underset{\theta}{\Psi}$ *су изражени у [142]*

$$a)\quad \underset{\theta}{\Phi} = \frac{\underset{\theta}{R} - \rho^2\underset{\theta}{\bar{R}}}{2(N-1)N}, \qquad b)\quad \underset{\theta}{\Psi} = \underset{\theta}{\Phi} - \frac{1}{2}\rho_p\rho^p, \qquad \theta \in \{1, 2\}, \tag{3.2.31}$$

$$\underset{\theta}{R} = g^{\underline{rs}}\underset{\theta}{R}_{rs} = g^{\underline{rs}}\underset{\theta}{R}^{p}_{rsp}, \underset{\theta}{\bar{R}} = \bar{g}^{\underline{rs}}\underset{\theta}{\bar{R}}^{p}_{rsp},$$

при чему је, нпр., $\underset{\theta}{\bar{R}}$ *добијено помоћу конформне трансформације од* $\underset{\theta}{R}$*, а*

$\underset{\theta}{R}{}^i_{jmn}$ *за* $\theta = 1, 2$.

2. Сменимо $\theta = 1, \omega = 2$ у једначинама (3.2.28), (3.2.29), па их одузмимо и за разлику на левој страни искористимо одговарајући идентитет Ричијевог типа. Тако добијамо да важи:

$$\begin{aligned}\underset{3}{R}{}^i_{pmn}\rho^p &= \delta^i_m \underset{1}{\Psi}{}_{,n} - \delta^i_n \underset{2}{\Psi}{}_{,m} - (\delta^i_m \underset{1}{\Psi} + \underset{1}{\Phi} g^{\underline{ip}} g_{\underset{V}{pm}})\rho_n \\ &+ (\delta^i_n \underset{2}{\Psi} + \underset{2}{\Phi} g^{\underline{ip}} g_{\underset{V}{pn}})\rho_m + \rho^i[(\underset{2}{\Psi} - \underset{1}{\Psi}) g_{\underline{mn}} + (\underset{1}{\Phi} + \underset{2}{\Phi}) g_{\underset{V}{mn}}] \\ &+ g^{\underline{ip}}(\underset{1}{\Phi}{}_{,n} g_{\underset{V}{pm}} - \underset{2}{\Phi}{}_{,m} g_{\underset{V}{pn}} + \underset{1}{\Phi} g_{\underset{V}{pm}\underset{2}{|}n} - \underset{2}{\Phi} g_{\underset{V}{pn}\underset{1}{|}m}),\end{aligned} \tag{3.2.32}$$

а одавде следи следећа теорема:

Теорема 3.2.2. *Једначина* (3.2.32) *даје 3. услов интеграбилности једначине* (3.2.27) *у* GR_N, *где су* $\underset{\theta}{\Phi}, \underset{\theta}{\Psi}, \theta = 1, 2$ *дати у* (3.2.31), *а* $\underset{3}{R}{}^i_{jmn}$ *дат једначином* (1.0.10).

3. За добијање услова интеграбилности где се појављује $\underset{4}{R}$ у (3.2.27) ставимо $\theta = 3, 4$, па добијамо

$$\rho^i_{\underset{3}{|}m} \equiv \rho^i_{\underset{1}{|}m} = \underset{1}{\Psi}\delta^i_m + \rho^i\rho_m + \underset{1}{\Phi} g^{\underline{ip}} g_{\underset{V}{pm}}, \qquad \rho^i_{\underset{4}{|}m} = \rho^i_{\underset{2}{|}m},$$

и даље

$$\begin{aligned}\rho^i_{\underset{3}{|}m\underset{4}{|}n} &= (\underset{1}{\Psi}\delta^i_m + \rho^i\rho_m + \underset{1}{\Phi} g^{\underline{ip}} g_{\underset{V}{pm}})_{\underset{4}{|}n} \\ &= \underset{1}{\Psi}{}_{,n}\delta^i_m + \underset{1}{\Psi}\delta^i_{m\underset{4}{|}n} + \rho^i_{\underset{2}{|}n}\rho_m + \rho^i\rho_{m\underset{1}{|}n} + g^{\underline{ip}}(\underset{1}{\Phi}{}_{,n} g_{\underset{V}{pm}} + \underset{1}{\Phi} g_{\underset{V}{pm}\underset{1}{|}n}).\end{aligned}$$

Како је $\delta^i_{m\underset{3}{|}n} = T^i_{mn}$, $\delta^i_{m\underset{4}{|}n} = T^i_{nm}$, добијамо

$$\begin{aligned}\rho^i_{\underset{3}{|}m\underset{4}{|}n} &= (\underset{1}{\Psi}\delta^i_m + \rho^i\rho_m + \underset{1}{\Phi} g^{\underline{ip}} g_{\underset{V}{pm}})_{\underset{4}{|}n} \\ &= \underset{1}{\Psi}{}_{,n}\delta^i_m + \underset{1}{\Psi} T^i_{nm} + (\underset{2}{\Psi}\delta^i_n + \rho^i\rho_n + \underset{2}{\Phi} g^{\underline{ip}} g_{\underset{V}{pn}})\rho_m \\ &+ \rho^i(\underset{1}{\Psi} g_{\underline{mn}} + \rho_m\rho_n + \underset{1}{\Phi} g_{\underset{V}{mn}}) + g^{\underline{ip}}(\underset{1}{\Phi}{}_{,n} g_{\underset{V}{pm}} + \underset{1}{\Phi} g_{\underset{V}{pm}\underset{1}{|}n}).\end{aligned} \tag{3.2.33}$$

Аналогно, добијамо

$$\begin{aligned}\rho^i_{\underset{4}{|}n\underset{3}{|}m} &= (\underset{2}{\Psi}\delta^i_n + \rho^i\rho_n + \underset{2}{\Phi}g^{\underline{ip}}g_{\underset{V}{pn}})_{\underset{3}{|}m}\\ &= \underset{2}{\Psi}_{,m}\delta^i_n + \underset{2}{\Psi}T^i_{nm} + (\underset{1}{\Psi}\delta^i_m + \rho^i\rho_m + \underset{1}{\Phi}g^{\underline{ip}}g_{\underset{V}{pm}})\rho_n\\ &+ \rho^i(\underset{2}{\Psi}g_{\underline{nm}} + \rho_n\rho_m + \underset{2}{\Phi}g_{\underset{V}{nm}}) + g^{\underline{ip}}(\underset{2}{\Phi}_{,m}g_{\underset{V}{pn}} + \underset{2}{\Phi}g_{\underset{V}{pn}\underset{2}{|}m}).\end{aligned} \tag{3.2.34}$$

Ако одузмемо (3.2.34) од (3.2.33) и на разлику на левој страни применимо одговарајући идентитет Ричијевог типа, добијамо

$$\begin{aligned}\underset{4}{R}{}^i_{pmn}\rho^p &= \underset{1}{\Psi}_{,n}\delta^i_m - \underset{2}{\Psi}_{,m}\delta^i_n - T^i_{mn}(\underset{1}{\Psi} - \underset{2}{\Psi}) - (\underset{1}{\Psi}\delta^i_m + \underset{1}{\Phi}g_{\underset{V}{pm}}g^{\underline{ip}})\rho_n\\ &+ (\delta^i_n\underset{2}{\Psi} + \underset{2}{\Phi}g_{\underset{V}{pn}}g^{\underline{ip}})\rho_m + \rho^i[(\underset{1}{\Psi} - \underset{2}{\Psi})g_{\underline{mn}} + (\underset{1}{\Phi} + \underset{2}{\Phi})g_{\underset{V}{mn}}]\\ &+ g^{\underline{ip}}(\underset{1}{\Phi}_{,n}g_{\underset{V}{pm}} - \underset{2}{\Phi}_{,m}g_{\underset{V}{pn}} + \underset{1}{\Phi}g_{\underset{V}{pm}\underset{1}{|}n} - \underset{2}{\Phi}g_{\underset{V}{pn}\underset{2}{|}m}).\end{aligned} \tag{3.2.35}$$

Дакле, важи следећа теорема:

Теорема 3.2.3. *Једначина* (3.2.35) *представља 4. услов интеграбилности у* GR_N *где су* $\underset{\theta}{\Phi}, \underset{\theta}{\Psi}, \theta = 1, 2$ *дати у* (3.2.31), *а* $\underset{4}{R}{}^i_{jmn}$ *једначином* (1.0.11).

4. За тензор $\underset{5}{R}{}^i_{jmn}$ у GR_N имамо на основу (3.2.28), (3.2.29) и (2.2.69) у [88]

$$2\underset{5}{R}{}^i_{pmn}\rho^p = \rho^i_{\underset{1}{|}mn} + \rho^i_{\underset{2}{|}mn} - (\rho^i_{\underset{1}{|}n\underset{2}{|}m} + \rho^i_{\underset{2}{|}n\underset{1}{|}m}),$$

одакле је

$$\begin{aligned}2\underset{5}{R}{}^i_{pmn}\rho^p &= \delta^i_m(\underset{1}{\Psi} + \underset{2}{\Psi})_{,n} - \delta^i_n(\underset{1}{\Psi} + \underset{2}{\Psi})_{,m}\\ &+ (\underset{1}{\Psi} - \underset{2}{\Psi})(\rho_m\delta^i_n - \rho_n\delta^i_m) + (\underset{1}{\Phi} + \underset{2}{\Phi})g^{ip}(\rho_m g_{\underset{V}{pn}} - \rho_n g_{\underset{V}{pm}})\\ &+ 2\rho^i(\underset{1}{\Phi} + \underset{2}{\Phi})g_{\underset{V}{mn}} + g^{\underline{ip}}[(\underset{1}{\Phi} + \underset{2}{\Phi})_{,n}g_{\underset{V}{pm}} - (\underset{1}{\Phi} + \underset{2}{\Phi})g_{\underset{V}{pn}}]\\ &+ \underset{1}{\Phi}g_{\underset{V}{pm}\underset{1}{|}n} + \underset{2}{\Phi}g_{\underset{V}{pm}\underset{2}{|}n} - \underset{1}{\Phi}g_{\underset{V}{pn}\underset{2}{|}m} - \underset{2}{\Phi}g_{\underset{V}{pn}\underset{1}{|}m}.\end{aligned} \tag{3.2.36}$$

Тако је доказана следећа теорема:

Теорема 3.2.4. *Једначина* (3.2.36) *представља 5. услов интеграбилности у* GR_N *где су* $\underset{\theta}{\Phi}, \underset{\theta}{\Psi}, \theta = 1, 2$ *дати у* (3.2.31), *а* $\underset{5}{R}{}^i_{jmn}$ *у* (1.0.12).

3.3 О $\rho-$линијама у GR_N

Пођимо од једначине (3.2.26), тј.

$$\rho_{i\underset{\theta}{|}j} = \underset{\theta}{\Psi} g_{\underline{ij}} + \rho_i\rho_j + \underset{\theta}{\Phi} \underset{V}{g_{ij}}, \tag{3.3.37}$$

где је

$$\underset{\theta}{\Psi} = \underset{\theta}{\Phi} - \frac{1}{2}\rho_p\rho^p, \quad \theta \in \{1, 2\}. \tag{3.3.38}$$

Ако извршимо композицију (3.3.37) са $g^{\underline{ki}}\rho^j$, следи

$$\rho^k_{\underset{\theta}{|}j}\rho^j = \underset{\theta}{\Psi}\delta^k_j\rho^j + \rho^k\rho_j\rho^j + \underset{\theta}{\Phi}\underset{V}{g_{ij}}g^{\underline{ik}}\rho^j,$$

тј. (мењајући индексе)

$$\rho^i_{\underset{\theta}{|}p}\rho^p = (\underset{\theta}{\Psi} + \rho_p\rho^p)\rho^i + \underset{\theta}{\Phi}\underset{V}{g_{pq}}g^{\underline{pi}}\rho^q, \quad \theta \in \{1, 2\}. \tag{3.3.39}$$

Доказаћемо да важи:

Теорема 3.3.1. *Ако је конформна трансформација* $\bar{g}_{ij} = \rho^2 g_{ij}$ *у* GR_N *конциркуларна онда је потребан и довољан услов*

$$\underset{V}{g_{pq}}\rho^2 = 0 \tag{3.3.40}$$

да криве $x^i = x^i(t)$ *чији се тангентни правац поклапа са правцем вектора* ρ^i*, буду геодезијске линије.*

Доказ. ($\Longrightarrow$) Доказаћемо да је услов (3.3.40) довољан.
Композицијом са $g^{\underline{pl}}$ једначине (3.3.40) следи да је последњи сабирак у (3.3.39) једнак 0. Ако се тангентни правац криве $x^i = x^i(t)$ поклапа са правцем ρ^i, можемо узети $\rho^i = \frac{dx^i}{dt}$, јер је t произвољан параметар. Из (3.3.39), за $\theta = 1$, добијамо

$$(\rho^i_{,p} + \Gamma^i_{sp}\rho^s)\rho^p = \underset{1}{\lambda}(x)\rho^i, \tag{3.3.41}$$

где је

$$\underset{1}{\lambda} = \underset{1}{\Psi} + \rho_p\rho^p. \tag{3.3.42}$$

Из (3.3.41) је због $\rho^i = \frac{dx^i}{dt}$:

$$\frac{\partial \rho^i}{\partial x^p}\rho^p + \Gamma^i_{sp}\rho^s\rho^p = \lambda(x)\rho^i \Rightarrow \frac{\partial \rho^i}{\partial x^p}\frac{dx^p}{dt} + \Gamma^i_{sp}\rho^s\rho^p = \lambda(x)\rho^i$$

$$\frac{d\rho^i}{dt} + \Gamma^i_{ps}\rho^p\rho^s = \lambda(x)\rho^i,$$

односно, (сменом $\rho^i = \frac{dx^i}{dt}$):

$$\frac{d^2x^i}{dt} + \Gamma^i_{jk}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^k}{dt} = \lambda(x)\frac{dx^i}{dt}, \tag{3.3.43}$$

тј. крива $x^i = x^i(t)$ је геодезијска линија.

Исти резултат се добија и применом друге врсте коваријантних извода, тј. у случају конциркуларне трансформације II врсте. У R_N је услов (3.3.40) идентички испуњен.

($\Longleftarrow$)Докажимо да је услов (3.3.40) потребан. Из (3.3.43) стављајући $\rho^i = \frac{dx^i}{dt}$ добијамо (3.3.41), а како је $\lambda(x)$ произвољна функција, може се представити у облику (3.3.42). На тај начин добијамо једначину

$$\rho^i_{\underset{\theta}{|}p}\rho^p = (\underset{\theta}{\Psi} + \rho_p\rho^p)\rho^i = 0.$$

Одузимањем ове једначине и (3.3.39), следи

$$\underset{\theta}{\Phi}\underset{V}{g_{pq}}g^{\underline{pi}}\rho^q = 0,$$

а композицијом са $g_{\underline{ir}}$ следи $\underset{\theta}{\Phi}\underset{V}{g_{rq}}\rho^q = 0$, одакле следи једначина (3.3.40).

Дефиниција 3.3.1. *Криве у GR_N чији се тангентни правац поклапа са правцем вектора ρ^i, зову се $\rho-$***линије**.

Последица 3.3.1 Потребан и довољан услов да $\rho-$линије у GR_N буду геодезијске линије код конциркуларне трансформације је (3.3.40).

Последица 3.3.2 У R_N је услов (3.3.40) увек испуњен, па су $\rho-$линије увек геодезијске линије.

ГЛАВА 4

Представљање конформног и концcustomкуларног тензора

4.1 Представљање конформног тензора кривине помоћу одговарајућег кривинског тензора и торзије

Ако уместо несиметричног тензора g_{ij} у GR_N, узмемо симетрични део $g_{\underline{ij}}$, можемо посматрати Риманов простор R_N, који је **придружен** простору GR_N. Као што је познато, за C^i_{jmn} имамо

$$\begin{aligned} C^i_{jmn} &= R^i_{jmn} + \frac{1}{N-2}(\delta^i_m R_{\underline{jn}} - \delta^i_n R_{\underline{jm}} + R^i_m g_{\underline{jn}} - R^i_n g_{\underline{jm}}) \\ &- \frac{R}{(N-2)(N-1)}(\delta^i_m g_{\underline{jn}} - \delta^i_n g_{\underline{jm}}), \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

где је R^i_{jmn} тензор кривине придруженог $R_N, R_{\underline{jm}}$ симетричан Ричијев тензор. Према (1.0.8) имамо

$$R^i_{jmn} = \underset{1}{R}{}^i_{jmn} - \underset{V}{\Gamma}{}^i_{jm;n} + \underset{V}{\Gamma}{}^i_{jn;m} - \underset{V}{\Gamma}{}^p_{jm}\underset{V}{\Gamma}{}^i_{pn} + \underset{V}{\Gamma}{}^p_{jn}\underset{V}{\Gamma}{}^i_{pm}, \tag{4.1.2}$$

одакле контракцијом са $i = n = s$:

$$R_{\underline{jm}} = \underset{1}{R}{}_{jm} - \underset{V}{\Gamma}{}^i_{jm;s} + \underset{V}{\Gamma}{}^p_{js}\underset{V}{\Gamma}{}^s_{pm}, \tag{4.1.3}$$

где смо узели у обзир да је у GR_N $\underset{V}{\Gamma^{s}_{js}} = 0$. Композицијом са $g^{\underline{jm}}$ из (4.1.3) следи

$$R = \underset{1}{R} + g^{\underline{jm}}\underset{V}{\Gamma^{p}_{js}}\underset{V}{\Gamma^{s}_{pm}} = \underset{1}{R} + g^{\underline{rt}}\underset{V}{\Gamma^{p}_{rs}}\underset{V}{\Gamma^{s}_{pt}}, \tag{4.1.4}$$

јер је $g^{\underline{jm}}\underset{V}{\Gamma^{s}_{jm;s}} = 0$. Заменом из (4.1.2)-(4.1.4) у (4.1.1), добија се

$$\begin{aligned} C^{i}_{jmn} &= \underset{1}{R}{}^{i}_{jmn} - (\underset{V}{\Gamma^{i}_{jm;n}} + \underset{V}{\Gamma^{p}_{jm}}\underset{V}{\Gamma^{i}_{pn}})_{[mn]} + \frac{1}{N-2}[\delta^{i}_{m}(\underset{1}{R}{}_{jn} - \underset{V}{\Gamma^{s}_{jn;s}} + \underset{V}{\Gamma^{p}_{js}}\underset{V}{\Gamma^{s}_{pn}}) \\ &\quad + (\underset{1}{R}{}^{i}_{m} - g^{\underline{ri}}\underset{V}{\Gamma^{s}_{rm;s}} + g^{\underline{ri}}\underset{V}{\Gamma^{p}_{rs}}\underset{V}{\Gamma^{s}_{pm}})g_{\underline{jn}}]_{[mn]} \\ &\quad - \frac{1}{(N-2)(N-1)}(\underset{1}{R} - g^{\underline{rt}}\underset{V}{\Gamma^{p}_{rs}}\underset{V}{\Gamma^{s}_{pt}})(\delta^{i}_{m}g_{\underline{jn}} - \delta^{i}_{n}g_{\underline{jm}}). \end{aligned} \tag{4.1.5}$$

Из једначина (1.0.15), (1.0.16) имамо

$$R^{i}_{jmn} = \underset{2}{R}{}^{i}_{jmn} - \underset{V}{\Gamma^{i}_{jm;n}} - \underset{V}{\Gamma^{i}_{jn;m}} - \underset{V}{\Gamma^{p}_{jm}}\underset{V}{\Gamma^{i}_{pn}} + \underset{V}{\Gamma^{p}_{jn}}\underset{V}{\Gamma^{i}_{pm}},$$

одакле је

$$R_{jm} = \underset{2}{R}{}_{jm} + \underset{V}{\Gamma^{s}_{jm;s}} + \underset{V}{\Gamma^{p}_{js}}\underset{V}{\Gamma^{s}_{pm}},$$

$$R = \underset{2}{R} + g^{\underline{jm}}\underset{V}{\Gamma^{p}_{js}}\underset{V}{\Gamma^{s}_{pm}}.$$

Ако заменимо ове вредности у (4.1.1), добићемо

$$\begin{aligned} C^{i}_{jmn} &= \underset{2}{R}{}^{i}_{jmn} + (\underset{V}{\Gamma^{i}_{jm;n}} - \underset{V}{\Gamma^{p}_{jm}}\underset{V}{\Gamma^{i}_{pn}})_{[mn]} \\ &\quad + \frac{1}{N-2}[\delta^{i}_{m}(\underset{2}{R}{}_{jn} - \underset{V}{\Gamma^{s}_{jn;s}} + \underset{V}{\Gamma^{p}_{js}}\underset{V}{\Gamma^{s}_{pn}}) \\ &\quad + (\underset{2}{R}{}^{i}_{m} - g^{\underline{ri}}\underset{V}{\Gamma^{s}_{rm;s}} + g^{\underline{ri}}\underset{V}{\Gamma^{p}_{rs}}\underset{V}{\Gamma^{s}_{pm}})g_{\underline{jn}}]_{[mn]} \\ &\quad - \frac{1}{(N-2)(N-1)}(\underset{2}{R} - g^{\underline{rt}}\underset{V}{\Gamma^{p}_{rs}}\underset{V}{\Gamma^{s}_{pt}})(\delta^{i}_{m}g_{\underline{jn}} - \delta^{i}_{n}g_{\underline{jm}}). \end{aligned} \tag{4.1.6}$$

Како је

$$R^{i}_{jmn} = \underset{3}{R}{}^{i}_{jmn} - \underset{V}{\Gamma^{i}_{jm;n}} - \underset{V}{\Gamma^{i}_{jn;m}} + \underset{V}{\Gamma^{p}_{jm}}\underset{V}{\Gamma^{i}_{pn}} + \underset{V}{\Gamma^{p}_{jn}}\underset{V}{\Gamma^{i}_{pm}} + 2\underset{V}{\Gamma^{p}_{mn}}\underset{V}{\Gamma^{i}_{pj}}, \tag{4.1.7}$$

то следи

$$R_{jm} = \underset{3}{R}_{jm} - \underset{V}{\Gamma}^{s}_{jm;s} - \underset{V}{\Gamma}^{p}_{js}\underset{V}{\Gamma}^{s}_{pm} + 2\underset{V}{\Gamma}^{p}_{ms}\underset{V}{\Gamma}^{s}_{pj} = \underset{3}{R}_{jm} - \underset{V}{\Gamma}^{s}_{jm;s} + \underset{V}{\Gamma}^{p}_{ms}\underset{V}{\Gamma}^{s}_{pj},$$

$$R = \underset{3}{R} + g^{\underline{jm}}\underset{V}{\Gamma}^{p}_{js}\underset{V}{\Gamma}^{s}_{pm}. \tag{4.1.8}$$

На основу (4.1.1) и (4.1.7)-(4.1.8) се добија

$$\begin{aligned} C^{i}_{jmn} &= \underset{3}{R}^{i}_{jmn} - \underset{V}{\Gamma}^{i}_{jm;n} - \underset{V}{\Gamma}^{i}_{jn;m} + (\underset{V}{\Gamma}^{p}_{jm}\underset{V}{\Gamma}^{i}_{pn} + \Gamma^{p}_{mn}\underset{V}{\Gamma}^{i}_{pj})_{[mn]} \\ &+ \frac{1}{N-2}[\delta^{i}_{m}(\underset{3}{R}_{jn} - \underset{V}{\Gamma}^{s}_{jn;s} + \underset{V}{\Gamma}^{p}_{ns}\underset{V}{\Gamma}^{s}_{pj}) \\ &+ (\underset{3}{R}^{i}_{m} - g^{\underline{ri}}\underset{V}{\Gamma}^{s}_{rm;s} + g^{\underline{ri}}\underset{V}{\Gamma}^{p}_{ms}\underset{V}{\Gamma}^{s}_{pr})g_{\underline{jn}}]_{[mn]} \\ &- \frac{1}{(N-2)(N-1)}(\underset{3}{R} - g^{\underline{jm}}\underset{V}{\Gamma}^{p}_{js}\underset{V}{\Gamma}^{s}_{pm})(\delta^{i}_{m}g_{\underline{jn}} - \delta^{i}_{n}g_{\underline{jm}}). \end{aligned} \tag{4.1.9}$$

Полазећи од везе између R^{i}_{jmn} и $\underset{4}{R}^{i}_{jmn}$ имамо

$$R^{i}_{jmn} = \underset{4}{R}^{i}_{jmn} - \underset{V}{\Gamma}^{i}_{jm;n} - \underset{V}{\Gamma}^{i}_{jn;m} + \underset{V}{\Gamma}^{p}_{jm}\underset{V}{\Gamma}^{i}_{pn} - \underset{V}{\Gamma}^{p}_{jn}\underset{V}{\Gamma}^{i}_{pm} + 2\underset{V}{\Gamma}^{p}_{mn}\underset{V}{\Gamma}^{i}_{pj},$$

одакле је

$$R_{jm} = \underset{4}{R}_{jm} - \underset{V}{\Gamma}^{s}_{jm;s} - \underset{V}{\Gamma}^{p}_{js}\underset{V}{\Gamma}^{s}_{pm} - 2\underset{V}{\Gamma}^{p}_{ms}\underset{V}{\Gamma}^{s}_{pj} = \underset{4}{R}_{jm} - \underset{V}{\Gamma}^{s}_{jm;s} - 3\underset{V}{\Gamma}^{s}_{pj}\underset{V}{\Gamma}^{p}_{ms},$$

$$R = \underset{4}{R} - 3g^{\underline{jm}}\underset{V}{\Gamma}^{s}_{pj}\underset{V}{\Gamma}^{s}_{ms}.$$

На основу (4.1.1) и (4.1.7)-(4.1.8) се добија

$$\begin{aligned} C^{i}_{jmn} &= \underset{4}{R}^{i}_{jmn} - \underset{V}{\Gamma}^{i}_{jm;n} - \underset{V}{\Gamma}^{i}_{jn;m} + (\underset{V}{\Gamma}^{p}_{jm}\underset{V}{\Gamma}^{i}_{pn} + \Gamma^{p}_{mn}\underset{V}{\Gamma}^{i}_{pj})_{[mn]} \\ &+ \frac{1}{N-2}[\delta^{i}_{m}(\underset{4}{R}_{jn} - \underset{V}{\Gamma}^{s}_{jn;s} - 3\underset{V}{\Gamma}^{s}_{pj}\underset{V}{\Gamma}^{p}_{ns}) \\ &+ (\underset{4}{R}^{i}_{m} - g^{\underline{ri}}\underset{V}{\Gamma}^{s}_{rm;s} - 3g^{\underline{ri}}\underset{V}{\Gamma}^{s}_{pr}\underset{V}{\Gamma}^{p}_{ms})g_{\underline{jn}}]_{[mn]} \\ &- \frac{1}{(N-2)(N-1)}(\underset{4}{R} - 3g^{\underline{jm}}\underset{V}{\Gamma}^{s}_{pj}\underset{V}{\Gamma}^{p}_{ms})(\delta^{i}_{m}g_{\underline{jn}} - \delta^{i}_{n}g_{jm}). \end{aligned} \tag{4.1.10}$$

На крају добијамо релације за тензор кривине

$$R^i_{jmn} = \underset{5}{R}{}^i_{jmn} - \underset{V}{\Gamma}{}^p_{jm}\underset{V}{\Gamma}{}^i_{pn} - \underset{V}{\Gamma}{}^p_{jn}\underset{V}{\Gamma}{}^i_{pm},$$

везу за одговарајуће Ричијеве тензоре

$$R_{jm} = \underset{5}{R}{}_{jm} - \underset{V}{\Gamma}{}^p_{js}\underset{V}{\Gamma}{}^s_{pm}$$

и везу за одговарајућу скаларну кривину

$$R = \underset{5}{R} - g^{\underline{jm}}\underset{V}{\Gamma}{}^p_{js}\underset{V}{\Gamma}{}^s_{pm},$$

што сменом у (4.1.1) даје

$$\begin{aligned} C^i_{jmn} = {} & \underset{5}{R}{}^i_{jmn} - \underset{V}{\Gamma}{}^p_{jm}\underset{V}{\Gamma}{}^i_{pn} - \Gamma^p_{jn}\underset{V}{\Gamma}{}^i_{pm} \\ & + \frac{1}{N-2}[\delta^i_m(\underset{5}{R}{}_{jn} - \underset{V}{\Gamma}{}^p_{js}\underset{V}{\Gamma}{}^s_{pn}) \\ & + (\underset{5}{R}{}^i_m - g^{\underline{ri}}\underset{V}{\Gamma}{}^p_{rs}\underset{V}{\Gamma}{}^s_{pm})g_{\underline{jn}}]_{[mn]} \\ & - \frac{1}{(N-2)(N-1)}(\underset{5}{R} - g^{\underline{jm}}\underset{V}{\Gamma}{}^p_{js}\underset{V}{\Gamma}{}^s_{pm})(\delta^i_m g_{\underline{jn}} - \delta^i_n g_{\underline{jm}}). \end{aligned} \tag{4.1.11}$$

На основу изложеног, важи следећа теорема.

Теорема 4.1.1. *Нека је задат простор* $GR_N = (\mathcal{M}_N, g_{ij} \neq g_{ji})$. *Конформни тензор* C^i_{jmn} *придруженог простора* $R_N = (\mathcal{M}_N, g_{\underline{ij}})$ *помоћу тензора кривине* $\underset{\theta}{R}{}^i_{jmn}, \theta = 1, \ldots, 5$ *и торзије* $T^i_{jk} = 2\underset{V}{\Gamma}{}^i_{jk}$ *представља се једначинама* (4.1.5), (4.1.6), (4.1.9), (4.1.10), (4.1.11).

4.2 Представљање концикуларног тензора помоћу одговарајућег тензора кривине и торзије

Према [149], као и према једначини (3.1.12) за $T = 0$ у овом раду, концикуларни тензор кривине у R_N, који је придружен простору GR_N, гласи

$$Z^i_{jmn} = R^i_{jmn} + \frac{R(\delta^i_m g_{\underline{jn}} - \delta^i_n g_{\underline{jm}})}{(N-1)N}$$

Користећи једначине (4.1.2) и (4.1.4), добијамо

$$\begin{aligned} Z^i_{jmn} &= \underset{1}{R}{}^i_{jmn} - (\underset{V}{\Gamma}{}^i_{jm;n} + \underset{V}{\Gamma}{}^p_{jm}\Gamma^i_{pn})_{[mn]} \\ &+ (\underset{1}{R} + g^{\underline{jm}}\underset{V}{\Gamma}{}^p_{js}\underset{V}{\Gamma}{}^s_{pm})\frac{\delta^i_m g_{\underline{jn}} - \delta^i_n g_{jm}}{(N-1)N}. \end{aligned} \tag{4.2.12}$$

Аналогним поступком следи

$$\begin{aligned} Z^i_{jmn} &= \underset{2}{R}{}^i_{jmn} + (\underset{V}{\Gamma}{}^i_{jm;n} + \underset{V}{\Gamma}{}^p_{jm}\Gamma^i_{pn})_{[mn]} \\ &+ (\underset{2}{R} + g^{\underline{jm}}\underset{V}{\Gamma}{}^p_{js}\underset{V}{\Gamma}{}^s_{pm})\frac{\delta^i_m g_{\underline{jn}} - \delta^i_n g_{jm}}{(N-1)N}. \end{aligned}$$

Конциркуларни тензор можемо предствити помоћу $\underset{3}{R}{}^i_{jmn}$

$$\begin{aligned} Z^i_{jmn} &= \underset{3}{R}{}^i_{jmn} - \underset{V}{\Gamma}{}^i_{jm;n} - \underset{V}{\Gamma}{}^i_{jn;m} + (\underset{V}{\Gamma}{}^p_{jm}\underset{V}{\Gamma}{}^i_{pn} + \Gamma^p_{mn}\underset{V}{\Gamma}{}^i_{pj})_{[mn]} \\ &+ (\underset{3}{R} + g^{\underline{jm}}\underset{V}{\Gamma}{}^p_{js}\underset{V}{\Gamma}{}^s_{pm})\frac{\delta^i_m g_{\underline{jn}} - \delta^i_n g_{\underline{jm}}}{(N-1)N}, \end{aligned}$$

а аналогно и помоћу $\underset{4}{R}{}^i_{jmn}$

$$\begin{aligned} Z^i_{jmn} &= \underset{4}{R}{}^i_{jmn} - \underset{V}{\Gamma}{}^i_{jm;n} - \underset{V}{\Gamma}{}^i_{jn;m} + (\underset{V}{\Gamma}{}^p_{jm}\underset{V}{\Gamma}{}^i_{pm} - \Gamma^p_{mn}\underset{V}{\Gamma}{}^i_{pj})_{[mn]} \\ &+ (\underset{4}{R} - 3g^{\underline{jm}}\underset{V}{\Gamma}{}^s_{pj}\underset{V}{\Gamma}{}^p_{ms})\frac{\delta^i_m g_{\underline{jn}} - \delta^i_n g_{jm}}{(N-1)N}. \end{aligned}$$

На крају, представљајући конциркуларни тензор кривине преко $\underset{5}{R}$ добијамо

$$\begin{aligned} Z^i_{jmn} &= \underset{5}{R}{}^i_{jmn} - \underset{V}{\Gamma}{}^p_{jm}\underset{V}{\Gamma}{}^i_{pn} - \underset{V}{\Gamma}{}^p_{jn}\underset{V}{\Gamma}{}^i_{pm} \\ &+ (\underset{5}{R} - g^{\underline{jm}}\underset{V}{\Gamma}{}^p_{js}\underset{V}{\Gamma}{}^s_{pm})\frac{\delta^i_m g_{\underline{jn}} - \delta^i_n g_{\underline{jm}}}{(N-1)N}. \end{aligned} \tag{4.2.13}$$

Дакле, важи:

Теорема 4.2.1. *Нека је задат простор $GR_N = (\mathcal{M}_N, g_{ij} \neq g_{ji})$. Конциркуларни тензор Z^i_{jmn} придруженог простора $R_N = (\mathcal{M}_N, g_{\underline{ij}})$ помоћу тензора кривине $\underset{\theta}{R}{}^i_{jmn}$, $\theta = 1, \ldots, 5$ и торзије $T^i_{jk} = 2\underset{V}{\Gamma}{}^i_{jk}$ представља се једначинама* (4.2.12) – (4.2.13).

ГЛАВА 5

Разна представљања Вајловог тензора

У овој глави ћемо посматрати геодезијску (пројективну) трансформацију у простору GA_N несиметричне афине конексије L^i_{jk}. Вајлов тензор $W^i{}_{jmn}$ из придруженог простора A_N симетричне афине конексије $L^i_{\underline{jk}}$ може се, користећи независне тензоре кривине $\underset{\theta}{R}{}^i{}_{jmn}, \theta = 1,..,5$, представити на 5 начина.

Показаћемо да, ако је f пројективна трансформација у GR_N, Вајлов пројективни тензор $W^i{}_{jmn}$ из придуженог простора R_N, се може, помоћу независних тензора кривине $\underset{\theta}{R}_{jm}, \theta = 1, ..., 5$ из GR_N представити на 5 начина.

Показано је како се, користећи везу између тензора кривине R и $\underset{\theta}{R}$, може $W^i{}_{jmn}$ изразити преко $\underset{\theta}{R}$ и торзије.

5.1 Уводна разматрања

Посматрајмо два простора A_N и $\bar{A}_N$ афине конексије.

Дефиниција 5.1.1. Геодезијско пресликавање $f : A_N \to \bar{A}_N$ *је таква бијективна коресподенција између тачака простора* A_N *и* $\bar{A}_N$*, при којој свака геодезијска линија из* A_N *прелази у геодезијску линију простора* $\bar{A}_N$*.*

Посматраћемо ове просторе у заједничком систему координата $x^1, ..., x^N$ по пресликавању f. То значи следеће:

Ако се узме $f = \bar{\varphi}^{-1} \circ \varphi$, тада је

$$\bar{x} = \bar{\varphi}(\bar{M}) = \bar{\varphi}(f(M)) = \bar{\varphi}((\bar{\varphi}^{-1} \circ \varphi)(M)) = (\imath \circ \varphi)(M) = \varphi(M) = x,$$

тј.

$$(\bar{x}^1, .., \bar{x}^N) = (x^1, ..., x^N).$$

Означимо **коефицијенте конексије** простора A_N и $\bar{A}_N$ са L^i_{jk}, $\bar{L}^i_{jk}$ респективно. Нека је

$$\bar{L}^i_{jk}(x) = L^i_{jk}(x) + P^i_{jk}(x). \tag{5.1.1}$$

Посматрајмо у A_N криву

$$l : x^i = x^i(t) \tag{5.1.2}$$

Та крива представља **геодезијску линију** на A_N ако и само ако функција $\lambda^i = \frac{dx^i}{dt}$ задовољава диференцијалну једначину $(\frac{d\lambda^i}{dt} = \frac{d^2x^i}{dt^2})$:

$$\frac{dx^i}{dt} + L^i_{jk}(x)\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt} = \rho(t)\frac{dx^i}{dt}, \tag{5.1.3}$$

где је $\rho(t)$ нека функција. Ако су криве l и $\bar{l}$ геодезијске линије и f геодезијско пресликавање, тада у $\bar{A}_N$ важи

$$\frac{dx^i}{dt} + \bar{L}^i_{jk}(x)\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt} = \bar{\rho}(t)\frac{dx^i}{dt}, \tag{5.1.4}$$

Одузимањем (5.1.3) од (5.1.4) добијамо:

$$(\bar{L}^i_{jk} - L^i_{jk})\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt} = (\bar{\rho}(t) - \rho(t))\frac{dx^i}{dt},$$

због (5.1.1) имамо,

$$P^i_{jk}(x)\lambda^j(t)\lambda^k(t) = 2\Psi(t)\lambda^i(t) \qquad \left(\lambda^i = \frac{dx^i}{dt}\right). \tag{5.1.5}$$

Разматрањем ове једначине долазимо до закључка да је $\forall i = i_0$ лева квадратна форма по λ^i, па $\Psi(t)$ мора бити линеарна и хомогена,

$$P^i_{jk} = \delta^i_j\Psi_k(t) + \delta^i_k\Psi_j(t), \tag{5.1.6}$$

где је $\Psi_k(x)$-коваријантни вектор.

На основу тога важи:

Теорема 5.1.1. *Да би пресликавање f простора афине конексије A_N на простор афине конексије $\bar{A}_N$ било* **пројективно**, *потребно је и довољно да тензор деформације P^i_{jk} има облик* (5.1.6).

Дакле, једначина (5.1.1) добија облик:

$$\bar{L}^i_{jk}(x) = L^i_{jk}(x) + \delta^i_j \Psi_k(x) + \delta^i_k \Psi_j(x). \tag{5.1.7}$$

Ако је $\Psi_i(x) \equiv 0 \Rightarrow \bar{L}^i_{jk}(x) = L^i_{jk}(x)$ и геодезијско пресликавање f дегенерише у **афино пресликавање** (тај случај у даљем искључујемо).

Ако међу објектима (коефицијентима) конексије простора A_N и $\bar{A}_N$ постоји веза (5.1.7), кажемо да то геодезијско пресликавање одговара вектору Ψ_i. Лако се доказује да скуп геодезијских пресликавања чини групу. Простори који могу да се пресликају геодезијски на дати простор A_N, чине **геодезијску класу простора** A_N.

Простор $\bar{A}_N$ се зове **пројективно раван**, ако допушта геодезијско пресликавање на **раван простора** A_N.

Простор A_N је **(локално) раван** или **афини**, ако се у некој околини D сваке његове тачке може изабрати такав координатни систем $y_1, ..., y_n$, (афини координатни систем) у односу на који су коефицијенти конексије идентички једнаки 0, тј.

$$L^i_{jk}(y) \equiv 0, \quad i, j, k = 1, ..., N. \tag{5.1.8}$$

На основу (5.1.7) и (5.1.8), у случају равног простора A_N у афиним координатама је:

$$\bar{L}^i_{jk}(x) = \delta^i_j \Psi_k(y) + \delta^i_k \Psi_j(y). \tag{5.1.9}$$

У таквом облику се представљају коефицијенти конексије сваког пројективно равног простора $\bar{A}_N$ у специјалном систему кооордината.

За Риманове просторе R_N (пошто су они специјалан случај простора (симетричне) афине конексије A_N, важи на почетку дата дефиниција (5.1.1) геодезијског пресликавања, а такође Теорема 5.1.1.. Али у R_N

коефицијенти конексије L^i_{jk} морају бити Кристофелови симболи друге врсте и обележаваћемо их са Γ^i_{jk}. Они су изражени помоћу метричког тензора $g_{ij}(x) = g_{ji}(x)$.

Посматрамо простор несиметричне афине конексије $GA_N = (M_N, L^i_{jk} \neq L^i_{kj})$. На истој многострукости се могу посматрати придружени простори одговарајуће симетричне конексије $L^i_{\underline{jk}}$, па имамо структуру $A_N = (M_N, L^i_{\underline{jk}})$.

При геодезијском пресликавању $f : GA_N \to \bar{G}A_N$ имамо истовремено геодезијско пресликавање $f : A_N \to \bar{A}_N$. При наведеном пресликавању се могу посматрати разни геометријски објекти, који су инваријантни, тј. не мењају се. Један од инваријантних објеката (инвариjаната) је **Вајлов пројективни тензор** у A_N.

У овом раду ћемо разматрати како се Вајлов тензор из придруженог простора A_N може изразити преко одговарајућих величина из GA_N.

5.2 Вајлов тензор кривине из A_N представљен помоћу независних тензора кривине из GA_N

5.2.1. Вајлов тензор $\mathbf{W^i_{jmn}}$ у $\mathbf{A_N}$

У простору афине конексије код пројективног пресликавања постоји инваријанта $W^i{}_{jmn}$. Циљ је да прикажемо $W^i{}_{jmn}$ помоћу $\underset{\theta}{R}$ и осталих одговарајућих величина.

Имајући у виду да је

$$W^i{}_{jmn} = R^i{}_{jmn} + \frac{1}{N+1}\delta^i_j R_{[mn]} + \frac{1}{N^2-1}[\delta^i_j(NR_{jn} + R_{nj})]_{[mn]} \tag{5.2.10}$$

где $[m, n]$ значи алтернацију по m, n, и како је

$$\underset{1}{R}^i{}_{jmn} = R^i{}_{jmn} + \underset{V}{L}{}^i_{jm;n} - \underset{V}{L}{}^i_{jn;m} + \underset{V}{L}{}^p_{jm}\underset{V}{L}{}^i_{pn} - \underset{V}{L}{}^p_{jn}\underset{V}{L}{}^i_{pm}, \tag{5.2.11}$$

$$\underset{2}{R}^i{}_{jmn} = R^i{}_{jmn} - \underset{V}{L}{}^i_{jm;n} + \underset{V}{L}{}^i_{jn;m} + \underset{V}{L}{}^p_{jm}\underset{V}{L}{}^i_{pn} - \underset{V}{L}{}^p_{jn}\underset{V}{L}{}^i_{pm}, \tag{5.2.12}$$

$$\underset{3}{R}^i{}_{jmn} = R^i{}_{jmn} + \underset{V}{L}{}^i_{jm;n} + \underset{V}{L}{}^i_{jn;m} - \underset{V}{L}{}^p_{jm}\underset{V}{L}{}^i_{pn} + \underset{V}{L}{}^p_{jn}\underset{V}{L}{}^i_{pm} - 2\underset{V}{L}{}^p_{mn}\underset{V}{L}{}^i_{pj}, \tag{5.2.13}$$

$$\underset{4}{R}^{i}{}_{jmn} = R^{i}{}_{jmn} + \underset{V}{L^{i}_{jm;n}} + \underset{V}{L^{i}_{jn;m}} - \underset{V}{L^{p}_{jm}}\underset{V}{L^{i}_{pn}} + \underset{V}{L^{p}_{jn}}\underset{V}{L^{i}_{pm}} + 2\underset{V}{L^{p}_{mn}}\underset{V}{L^{i}_{pj}}, \tag{5.2.14}$$

$$\underset{5}{R}^{i}{}_{jmn} = R^{i}{}_{jmn} + \underset{V}{L^{p}_{jm}} + \underset{V}{L^{i}_{pn}} + \underset{V}{L^{p}_{jn}}\underset{V}{L^{i}_{pm}}, \tag{5.2.15}$$

где су $\underset{\theta}{R}^{i}{}_{jmn}$ независни тензори кривине у GA_N, а коваријантни изводи (;) су узети у односу на симетричну конексију $L^{i}_{\underline{jm}}$, то из (5.2.11) имамо

$$R^{i}{}_{jmn} = \underset{1}{R}^{i}{}_{jmn} - (\underset{V}{L^{i}_{jm;n}} + \underset{V}{L^{p}_{jm}}\underset{V}{L^{i}_{pn}})_{[m,n]}, \tag{5.2.16}$$

$$R_{jm} = R^{i}_{jmi} = \underset{1}{R}_{jm} - \underset{V}{L^{s}_{jm;s}} + \underset{V}{L^{s}_{js;m}} - \underset{V}{L^{p}_{jm}}\underset{V}{L^{s}_{ps}} + \underset{V}{L^{p}_{js}}\underset{V}{L^{s}_{pm}} \tag{5.2.17}$$

$$R_{[mn]} = \underset{1}{R}_{[mn]} - L^{s}_{[mn];s} + \underset{V}{L^{s}_{ms;n}} - \underset{V}{L^{s}_{ns;m}} + L^{p}_{[mn]}\underset{V}{L^{s}_{ps}}. \tag{5.2.18}$$

Ако заменимо из (5.2.16 – 5.2.18) у (5.2.10), биће

$$\begin{aligned} W^{i}{}_{jmn} = {} & \underset{1}{R}^{i}{}_{jmn} + (\underset{V}{L^{i}_{jm;n}} + \underset{V}{L^{p}_{jm}}\underset{V}{L^{i}_{pn}})_{[mn]} \\ & + \frac{1}{N+1}\delta^{i}_{j}(\underset{1}{R}_{[mn]} - L^{s}_{[mn];s} + \underset{V}{L^{s}_{ms;n}} - \underset{V}{L^{s}_{ns;m}} + L^{p}_{[mn]}\underset{V}{L^{s}_{ps}}) \\ & + \frac{1}{N^2-1}\{\delta^{i}_{m}[N(\underset{1}{R}_{jn} - \underset{V}{L^{s}_{jn;s}} + \underset{V}{L^{s}_{js;n}} - \underset{V}{L^{p}_{jn}}\underset{V}{L^{s}_{ps}} + \underset{V}{L^{p}_{js}}L^{s}_{pn}) \\ & + \underset{1}{R}_{nj} - \underset{V}{L^{s}_{nj;s}} + \underset{V}{L^{s}_{ns;j}} - \underset{V}{L^{p}_{nj}}\underset{V}{L^{s}_{ps}} + \underset{V}{L^{p}_{ns}}L^{s}_{pj}]\}_{[mn]}. \end{aligned} \tag{5.2.19}$$

Ако пођемо од (5.2.12) и применимо везу између $\underset{2}{R}$ и R, добијамо

$$R^{i}{}_{jmn} = \underset{2}{R}^{i}{}_{jmn} + \underset{V}{L^{i}_{jm;n}} - \underset{V}{L^{i}_{jn;m}} - \underset{V}{L^{p}_{jm}}\underset{V}{L^{i}_{pn}} + \underset{V}{L^{p}_{jn}}\underset{V}{L^{i}_{pm}}, \tag{5.2.20}$$

$$R_{jm} = \underset{2}{R}_{jm} + \underset{V}{L^{s}_{jm;s}} - \underset{V}{L^{s}_{js;m}} - \underset{V}{L^{p}_{jm}}\underset{V}{L^{s}_{ps}} + \underset{V}{L^{p}_{js}}\underset{V}{L^{s}_{pm}}, \tag{5.2.21}$$

$$R_{[mn]} = \underset{2}{R}_{[mn]} + L^{s}_{[mn];s} - \underset{V}{L^{s}_{ms;n}} + \underset{V}{L^{s}_{ns;m}} - L^{p}_{[mn]}\underset{V}{L^{s}_{ps}}. \tag{5.2.22}$$

Као у претходном случају, заменом у (5.2.10) закључујемо да важи

$$
\begin{aligned}
W^{i}{}_{jmn} &= \underset{2}{R}^{i}{}_{jmn} + (L^{i}_{jm;n} - \underset{V}{L}^{p}_{jm}\underset{V}{L}^{i}_{pn})_{[mn]}\\
&+ \frac{1}{N+1}\delta^{i}_{j}(\underset{2}{R}_{[mn]} + L^{s}_{[mn];s} - \underset{V}{L}^{s}_{ms;n} + \underset{V}{L}^{s}_{ns;m} - L^{p}_{[mn]}\underset{V}{L}^{s}_{ps})\\
&+ \frac{1}{(N+1)(N-1)}\{\delta^{i}_{m}[N(\underset{2}{R}_{jn} + \underset{V}{L}^{s}_{jn;s} - \underset{V}{L}^{s}_{js;n} - \underset{V}{L}^{p}_{jn}\underset{V}{L}^{s}_{ps} + \underset{V}{L}^{p}_{js}L^{s}_{pn})\\
&+ \underset{2}{R}_{nj} - \underset{V}{L}^{s}_{nj;s} + \underset{V}{L}^{s}_{ns;j} - \underset{V}{L}^{p}_{nj}\underset{V}{L}^{s}_{ps} + \underset{V}{L}^{p}_{ns}L^{s}_{pj}]\}_{[mn]}.
\end{aligned}
\tag{5.2.23}
$$

Према (5.2.13) је

$$
R^{i}{}_{jmn} = \underset{3}{R}^{i}{}_{jmn} - \underset{V}{L}^{i}_{jm;n} - \underset{V}{L}^{i}_{jn;m} + \underset{V}{L}^{p}_{jm}\underset{V}{L}^{i}_{pn} - \underset{V}{L}^{p}_{jn}\underset{V}{L}^{i}_{pm} + 2\underset{V}{L}^{p}_{mn}\underset{V}{L}^{i}_{pj}, \tag{5.2.24}
$$

$$
R_{jm} = \underset{3}{R}_{jm} - \underset{V}{L}^{s}_{jm;s} - \underset{V}{L}^{s}_{js;m} + \underset{V}{L}^{p}_{jm}\underset{V}{L}^{s}_{ps} - \underset{V}{L}^{p}_{js}\underset{V}{L}^{s}_{pm} + 2\underset{V}{L}^{p}_{ms}\underset{V}{L}^{s}_{pj} \tag{5.2.25}
$$

$$
R_{[mn]} = \underset{3}{R}_{[mn]} - L^{s}_{[mn];s} - \underset{V}{L}^{p}_{ms;n} + \underset{V}{L}^{s}_{ns;m} + L^{p}_{[mn]}\underset{V}{L}^{s}_{ps}. \tag{5.2.26}
$$

Заменом ових вредности у (5.2.10), утврђујемо да важи

$$
\begin{aligned}
W^{i}{}_{jmn} &= \underset{3}{R}^{i}{}_{jmn} - \underset{V}{L}^{i}_{jm;n} - \underset{V}{L}^{i}_{jn;m} + \underset{V}{L}^{p}_{jm}\underset{V}{L}^{i}_{pn} - \underset{V}{L}^{p}_{jn}\underset{V}{L}^{i}_{pm} + 2\underset{V}{L}^{p}_{mn}\underset{V}{L}^{i}_{pj}\\
&+ \frac{1}{N+1}\delta^{i}_{j}(\underset{3}{R}_{[mn]} - L^{s}_{[mn];s} - \underset{V}{L}^{s}_{ms;n} + \underset{V}{L}^{s}_{ns;m} + L^{p}_{[mn]}\underset{V}{L}^{s}_{ps})\\
&+ \frac{1}{(N+1)(N-1)}\{\delta^{i}_{m}[N(\underset{3}{R}_{jn} - \underset{V}{L}^{s}_{jn;s} - \underset{V}{L}^{s}_{js;n} + \underset{V}{L}^{p}_{jn}\underset{V}{L}^{s}_{ps}\\
&- \underset{V}{L}^{p}_{js}L^{s}_{pn} + 2\underset{V}{L}^{p}_{ns}\underset{V}{L}^{s}_{pj})\\
&+ \underset{3}{R}_{nj} - \underset{V}{L}^{s}_{nj;s} - \underset{V}{L}^{s}_{ns;j} + \underset{V}{L}^{p}_{nj}\underset{V}{L}^{s}_{ps} - \underset{V}{L}^{p}_{ns}L^{s}_{pj} + 2\underset{V}{L}^{p}_{js}\underset{V}{L}^{s}_{pn}]\}_{[mn]}.
\end{aligned}
\tag{5.2.27}
$$

Према (5.2.14), истим поступком као у претходном случају добијамо

$$
\begin{aligned}
W^{i}{}_{jmn} &= \underset{4}{R}^{i}{}_{jmn} - \underset{V}{L}^{i}_{jm;n} - \underset{V}{L}^{i}_{jn;m} + \underset{V}{L}^{p}_{jm}\underset{V}{L}^{i}_{pn} - \underset{V}{L}^{p}_{jn}\underset{V}{L}^{i}_{pm} - 2\underset{V}{L}^{p}_{mn}\underset{V}{L}^{i}_{pj}\\
&+ \frac{1}{N+1}\delta^{i}_{j}(\underset{4}{R}_{[mn]} - L^{s}_{[mn];s} - \underset{V}{L}^{s}_{ms;n} + \underset{V}{L}^{s}_{ns;m} + L^{p}_{[mn]}\underset{V}{L}^{s}_{ps})\\
&+ \frac{1}{(N+1)(N-1)}\{\delta^{i}_{m}[N(\underset{4}{R}_{jn} - \underset{V}{L}^{s}_{jn;s} - \underset{V}{L}^{s}_{js;n} + \underset{V}{L}^{p}_{jn}\underset{V}{L}^{s}_{ps}\\
&- \underset{V}{L}^{p}_{js}L^{s}_{pn}) - 2\underset{V}{L}^{p}_{ns}\underset{V}{L}^{s}_{pj}\\
&+ \underset{4}{R}_{nj} - \underset{V}{L}^{s}_{nj;s} - \underset{V}{L}^{s}_{ns;j} + \underset{V}{L}^{p}_{nj}\underset{V}{L}^{s}_{ps} - \underset{V}{L}^{p}_{ns}L^{s}_{pj} - 2\underset{V}{L}^{p}_{js}\underset{V}{L}^{s}_{pn}]\}_{[mn]}.
\end{aligned}
\tag{5.2.28}
$$

Користећи (5.2.15) добијамо

$$R^i{}_{jmn} = \underset{5}{R}^i{}_{jmn} - \underset{V}{L}^p_{jm}\underset{V}{L}^i_{pn} - \underset{V}{L}^p_{jn}\underset{V}{L}^i_{pm}, \tag{5.2.29}$$

$$R_{jm} = \underset{5}{R}_{jm} - \underset{V}{L}^p_{jm}\underset{V}{L}^i_{pi} - \underset{V}{L}^p_{ji}\underset{V}{L}^i_{pm}, \tag{5.2.30}$$

$$R_{[mn]} = \underset{5}{R}_{[mn]} - L^p_{[mn]}\underset{V}{L}^s_{ps} - \underset{V}{L}^p_{ms}\underset{V}{L}^s_{pn} + \underset{V}{L}^p_{ns}\underset{V}{L}^s_{pm},$$

тј. са применом немих индекса,

$$R_{[mn]} = \underset{5}{R}_{[mn]} - L^p_{[mn]}\underset{V}{L}^s_{ps}. \tag{5.2.31}$$

Ако заменимо ово у (5.2.10) закључујемо да важи

$$\begin{aligned}
W^i{}_{jmn} = {} & \underset{5}{R}^i{}_{jmn} - \underset{V}{L}^p_{jm}\underset{V}{L}^i_{pn} - \underset{V}{L}^p_{jn}\underset{V}{L}^i_{pm} \\
& + \frac{1}{(N+1)}\delta^i_j(\underset{5}{R}_{[mn]} - L^p_{[mn]}\underset{V}{L}^s_{ps}) \\
& + \frac{1}{(N+1)(N-1)}\{\delta^i_m[N(\underset{5}{R}_{jn} - \underset{V}{L}^p_{jn}\underset{V}{L}^s_{ps} - \underset{V}{L}^p_{js}\underset{V}{L}^s_{pn}) \\
& + \underset{5}{R}_{nj} - \underset{V}{L}^p_{nj}\underset{V}{L}^s_{ps} - \underset{V}{L}^p_{ns}\underset{V}{L}^s_{pj}]\}_{[mn]}.
\end{aligned} \tag{5.2.32}$$

На основу изложеног, важи:

Теорема 5.2.1. *Посматрајмо геодзијску (пројективну) трансформацију у простору GA_N несиметричне афине конексије L^i_{jk}. Вајлов тензор $W^i{}_{jmn}$ из придруженог простора A_N симетричне афине конексије $L^i_{\underline{jk}}$ може се, користећи независне тензоре кривине $\underset{\theta}{R}^i{}_{jmn}, \theta = 1,..,5$, представити на 5 начина једначинама* (5.2.19, 5.2.23, 5.2.27, 5.2.28, 5.2.32).

Сва наведена представљања нам дају једну од веза између придруженог простора A_N и GA_N.

5.3 Вајлов тензор W^i_{jmn} из R_N представљен помоћу тензора кривине $\underset{\theta}{R}^i_{jmn}$ из GR_N

Генералисан Риманов простор GR_N је специјалан случај простора несиметричне афине конексије GA_N. У GR_N несиметрични метрички тензор g_{ij} уводимо тако да су симетрични и антисиметрични део

$$g_{\underline{ij}} = \frac{1}{2}(g_{ij} + g_{ji}), \quad \underset{V}{g}_{ij} = \frac{1}{2}(g_{ij} - g_{ji}). \tag{5.3.33}$$

Коваријантни симетрични тензор $g^{\underline{ij}}$ је дефинисан

$$g_{\underline{ip}} g^{\underline{pj}} = \delta^j_i, \quad (det|g_{ij}| \neq 0). \tag{5.3.34}$$

У простору GR_N, тензори $g_{\underline{ij}}(g^{\underline{ij}})$ су коришћени за спуштање (подизање) индекса. Коефицијенти конексије су генералисани Кристофелови симболи

$$\Gamma_{i.jk} = \frac{1}{2}(g_{ji,k} - g_{jk,i} + g_{ik,j}), \quad \Gamma^i_{jk} = g^{\underline{ip}}\Gamma_{p.jk}. \tag{5.3.35}$$

Из генерализације пројективног тензора кривине у GA_N добијамо, као посебне случајеве, одговарајуће величине у GR_N.

Посматрајмо једначину (5.2.19). Како је у GR_N

$$\underset{1}{R}^i{}_{jmn} = R^i_{jmn} + \underset{V}{\Gamma}^i_{jm;n} - \underset{V}{\Gamma}^i_{jn;m} + \underset{V}{\Gamma}^p_{jm}\underset{V}{\Gamma}^i_{pn} - \underset{V}{\Gamma}^p_{jn}\underset{V}{\Gamma}^i_{pm}, \tag{5.3.36}$$

$$\underset{V}{\Gamma}^s_{js} = 0, \tag{5.3.37}$$

из (5.2.19) добијамо

$$\begin{aligned} W^i{}_{jmn} = {} & \underset{1}{R}^i_{jmn} - (\underset{V}{\Gamma}^i_{jm;n} + \underset{V}{\Gamma}^p_{jm}\underset{V}{\Gamma}^i_{pn})_{[mn]} + \frac{1}{N+1}\delta^i_j(\underset{1}{R}_{[mn]} - \Gamma^s_{[mn];s}) \\ & + \frac{1}{N^2-1}\{\delta^i_m[N(\underset{1}{R}_{jn} - \underset{V}{\Gamma}^s_{jn;s} + \underset{V}{\Gamma}^p_{js}\underset{V}{\Gamma}^s_{pn}) + \underset{1}{R}_{nj} - \underset{V}{\Gamma}^s_{nj;s} + \underset{V}{\Gamma}^p_{ns}\underset{V}{\Gamma}^s_{pj}]\}_{[mn]}. \end{aligned} \tag{5.3.38}$$

Из (5.3.36) за $i = n = s$:

$$\underset{1}{R}_{jm} = R_{jm} + \underset{V}{\Gamma}{}^s_{jm;s} - \underset{V}{\Gamma}{}^p_{js}\underset{V}{\Gamma}{}^s_{pm}, \tag{5.3.39}$$

$$\underset{1}{R}_{[mn]} - \Gamma^s_{[mn];s} = 0 + \Gamma^s_{[mn];s} + 0 - \Gamma^s_{[mn];s} = 0,$$

такође из (5.3.38) следи

$$\begin{aligned} &W^i{}_{jmn} = \underset{1}{R}{}^i_{jmn} - (\underset{V}{\Gamma}{}^i_{jm;n} + \underset{V}{\Gamma}{}^p_{jm}\underset{V}{\Gamma}{}^i_{pn})_{[mn]} \\ &+\frac{1}{N^2-1}\{\delta^i_m[N(\underset{1}{R}_{jn} - \underset{V}{\Gamma}{}^s_{jn;s} + \underset{V}{\Gamma}{}^p_{js}\underset{V}{\Gamma}{}^s_{pn}) + \underset{1}{R}_{nj} - \underset{V}{\Gamma}{}^s_{nj;s} + \underset{V}{\Gamma}{}^p_{ns}\underset{V}{\Gamma}{}^s_{pj}]\}_{[mn]}. \end{aligned} \tag{5.3.40}$$

Применом једначине (5.2.23) у GR_N, добијамо

$$\begin{aligned} &W^i{}_{jmn} = \underset{2}{R}{}^i_{jmn} + (\underset{V}{\Gamma}{}^i_{jm;n} - \underset{V}{\Gamma}{}^p_{jm}\underset{V}{\Gamma}{}^i_{pn})_{[mn]} + \frac{1}{N+1}(\underset{2}{R}_{[mn]} + \Gamma^s_{[mn];s})\delta^i_j \\ &+\frac{1}{N^2-1}\{\delta^i_m[N(\underset{2}{R}_{jn} + \underset{V}{\Gamma}{}^s_{jn;s} + \underset{V}{\Gamma}{}^p_{js}\underset{V}{\Gamma}{}^s_{pn}) + \underset{2}{R}_{nj} - \underset{V}{\Gamma}{}^s_{nj;s} + \underset{V}{\Gamma}{}^p_{ns}\underset{V}{\Gamma}{}^s_{pj}]\}_{[mn]}. \end{aligned} \tag{5.3.41}$$

Узимајући у обзир да је

$$\underset{2}{R}{}^i{}_{jmn} = R^i_{jmn} - \underset{V}{\Gamma}{}^i_{jm;n} + \underset{V}{\Gamma}{}^i_{jn;m} + \underset{V}{\Gamma}{}^p_{jm}\underset{V}{\Gamma}{}^i_{pn} - \underset{V}{\Gamma}{}^p_{jn}\underset{V}{\Gamma}{}^i_{pm}, \tag{5.3.42}$$

добијамо

$$\underset{2}{R}_{jm} = R_{jm} + \underset{V}{\Gamma}{}^s_{jm;s} - \underset{V}{\Gamma}{}^p_{js}\underset{V}{\Gamma}{}^s_{pm}, \tag{5.3.43}$$

одакле антисиметризацијом добијамо

$$\underset{2}{R}_{[mn]} + \Gamma^s_{[mn];s} = -\Gamma^s_{[mn];s} + \Gamma^s_{[mn];s} = 0. \tag{5.3.44}$$

Сада (5.3.41) постаје

$$\begin{aligned} &W^i{}_{jmn} = \underset{2}{R}{}^i_{jmn} + (\underset{V}{\Gamma}{}^i_{jm;n} + \underset{V}{\Gamma}{}^p_{jm}\underset{V}{\Gamma}{}^i_{pn})_{[mn]} \\ &+\frac{1}{N^2-1}\{\delta^i_m[N(\underset{2}{R}_{jn} + \underset{V}{\Gamma}{}^s_{jn;s} + \underset{V}{\Gamma}{}^p_{js}\underset{V}{\Gamma}{}^s_{pn}) + \underset{2}{R}_{nj} - \underset{V}{\Gamma}{}^s_{nj;s} + \underset{V}{\Gamma}{}^p_{ns}\underset{V}{\Gamma}{}^s_{pj}]\}_{[mn]}. \end{aligned} \tag{5.3.45}$$

У случају GR_N из (5.2.27) следи

$$\begin{aligned}
W^i{}_{jmn} ={}& \underset{3}{R}^i_{jmn} - \underset{V}{\Gamma}^i_{jm;n} - \underset{V}{\Gamma}^i_{jn;m} + \underset{V}{\Gamma}^p_{jm}\underset{V}{\Gamma}^i_{pn} - \underset{V}{\Gamma}^p_{jn}\underset{V}{\Gamma}^i_{pm} + 2\underset{V}{\Gamma}^p_{mn}\underset{V}{\Gamma}^i_{pj}\\
&+ \frac{1}{N+1}\delta^i_j(\underset{3}{R}_{[mn]} + \Gamma^s_{[mn];s})\\
&+ \frac{1}{N^2-1}\{\delta^i_m[N(\underset{3}{R}_{jn} - \underset{V}{\Gamma}^s_{jn;s} - \underset{V}{\Gamma}^p_{js}\underset{V}{\Gamma}^s_{pn} + 2\underset{V}{\Gamma}^p_{ns}\underset{V}{\Gamma}^s_{pj}\\
&+ \underset{3}{R}_{nj} - \underset{V}{\Gamma}^s_{nj;s} - \underset{V}{\Gamma}^p_{ns}\underset{V}{\Gamma}^s_{pj} + 2\underset{V}{\Gamma}^p_{js}\underset{V}{\Gamma}^s_{pn}]\}_{[mn]}.
\end{aligned} \tag{5.3.46}$$

На основу (2.1.13), из

$$\underset{3}{R}^i{}_{jmn} = R^i_{jmn} + \underset{V}{\Gamma}^i_{jm;n} + \underset{V}{\Gamma}^i_{jn;m} - \underset{V}{\Gamma}^p_{jm}\underset{V}{\Gamma}^i_{pn} + \underset{V}{\Gamma}^p_{jn}\underset{V}{\Gamma}^i_{pm} - 2\underset{V}{\Gamma}^p_{mn}\underset{V}{\Gamma}^i_{pj}, \tag{5.3.47}$$

следи

$$\underset{3}{R}_{jm} = R_{jm} + \underset{V}{\Gamma}^s_{jm;s} + \underset{V}{\Gamma}^p_{js}\underset{V}{\Gamma}^s_{pm} - 2\underset{V}{\Gamma}^p_{mn}\underset{V}{\Gamma}^i_{pj}, \tag{5.3.48}$$

$$\underset{3}{R}_{[mn]} + \Gamma^s_{[mn];s} = \Gamma^s_{[mn];s} + \underset{V}{\Gamma}^p_{ms}\underset{V}{\Gamma}^s_{pn} - \underset{V}{\Gamma}^p_{ns}\underset{V}{\Gamma}^s_{pm} - 2(\underset{V}{\Gamma}^p_{ns}\underset{V}{\Gamma}^s_{pm} - \underset{V}{\Gamma}^p_{ms}\underset{V}{\Gamma}^s_{pn}) + \Gamma^s_{[mn];s},$$

тј.,

$$\underset{3}{R}_{[mn]} = 2\Gamma^s_{[mn];s}. \tag{5.3.49}$$

Сада једначина (5.3.46) постаје

$$\begin{aligned}
W^i{}_{jmn} ={}& \underset{3}{R}^i_{jmn} - \underset{V}{\Gamma}^i_{jm;n} - \underset{V}{\Gamma}^i_{jn;m} + \underset{V}{\Gamma}^p_{jm}\underset{V}{\Gamma}^i_{pn} - \underset{V}{\Gamma}^p_{jn}\underset{V}{\Gamma}^i_{pm} + 2\underset{V}{\Gamma}^p_{mn}\underset{V}{\Gamma}^i_{pj}\\
&+ \frac{2}{N+1}\delta^i_j\Gamma^s_{[mn];s}\\
&+ \frac{1}{N^2-1}\{\delta^i_m[N(\underset{3}{R}_{jn} - \underset{V}{\Gamma}^s_{jn;s} - \underset{V}{\Gamma}^p_{js}\underset{V}{\Gamma}^s_{pn} + 2\underset{V}{\Gamma}^p_{ns}\underset{V}{\Gamma}^s_{pj} + \underset{3}{R}_{nj} - \underset{V}{\Gamma}^s_{nj;s}\\
&- \underset{V}{\Gamma}^p_{ns}\underset{V}{\Gamma}^s_{pj} + 2\underset{V}{\Gamma}^p_{js}\underset{V}{\Gamma}^s_{pn}]\}_{[mn]}.
\end{aligned} \tag{5.3.50}$$

У случају GR_N из (5.2.28) следи

$$\begin{aligned}W^i{}_{jmn} &= \underset{4}{R}^i_{jmn} - \underset{V}{\Gamma}^i_{jm;n} - \underset{V}{\Gamma}^i_{jn;m} + \underset{V}{\Gamma}^p_{jm}\underset{V}{\Gamma}^i_{pn} - \underset{V}{\Gamma}^p_{jn}\underset{V}{\Gamma}^i_{pm} - 2\underset{V}{\Gamma}^p_{mn}\underset{V}{\Gamma}^i_{pj}\\ &+ \frac{1}{N+1}\delta^i_j(\underset{4}{R}_{[mn]} - \Gamma^s_{[mn];s})\\ &+ \frac{1}{N^2-1}\{[N(\underset{4}{R}_{jn} - \underset{V}{\Gamma}^s_{jn;s} - \underset{V}{\Gamma}^p_{js}\underset{V}{\Gamma}^s_{pn} + 2\underset{V}{\Gamma}^p_{ns}\underset{V}{\Gamma}^s_{pj}\\ &+ \underset{4}{R}_{nj} - \underset{V}{\Gamma}^s_{nj;s} - \underset{V}{\Gamma}^p_{ns}\underset{V}{\Gamma}^s_{pj} + 2\underset{V}{\Gamma}^p_{js}\underset{V}{\Gamma}^s_{pn}]\}_{[mn]}.\end{aligned} \tag{5.3.51}$$

На основу (5.2.14) је

$$\underset{4}{R}^i{}_{jmn} = R^i_{jmn} + \underset{V}{\Gamma}^i_{jm;n} + \underset{V}{\Gamma}^i_{jn;m} - \underset{V}{\Gamma}^p_{jm}\underset{V}{\Gamma}^i_{pn} + \underset{V}{\Gamma}^p_{jn}\underset{V}{\Gamma}^i_{pm} + 2\underset{V}{\Gamma}^p_{mn}\underset{V}{\Gamma}^i_{pj}, \tag{5.3.52}$$

и добијамо

$$\underset{4}{R}_{jm} = R_{jm} + \underset{V}{\Gamma}^s_{jm;s} + \underset{V}{\Gamma}^p_{js}\underset{V}{\Gamma}^s_{pm} + 2\underset{V}{\Gamma}^p_{mn}\underset{V}{\Gamma}^i_{pj}, \tag{5.3.53}$$

$$\underset{4}{R}_{[mn]} - \Gamma^s_{[mn];s} = \Gamma^s_{[mn];s} + \underset{V}{\Gamma}^p_{ms}\underset{V}{\Gamma}^s_{pn} - \underset{V}{\Gamma}^p_{ns}\underset{V}{\Gamma}^s_{pm} + 2(\underset{V}{\Gamma}^p_{ns}\underset{V}{\Gamma}^s_{pm} - \underset{V}{\Gamma}^p_{ms}\underset{V}{\Gamma}^s_{pn}) - \Gamma^s_{[mn];s},$$

тј.,

$$\underset{4}{R}_{[mn]} - \Gamma^s_{[mn];s} = 0. \tag{5.3.54}$$

Заменом из (5.3.54) у (5.3.51) добијамо

$$\begin{aligned}W^i{}_{jmn} &= \underset{4}{R}^i_{jmn} - \underset{V}{\Gamma}^i_{jm;n} - \underset{V}{\Gamma}^i_{jn;m} + \underset{V}{\Gamma}^p_{jm}\underset{V}{\Gamma}^i_{pn} - \underset{V}{\Gamma}^p_{jn}\underset{V}{\Gamma}^i_{pm} + 2\underset{V}{\Gamma}^p_{mn}\underset{V}{\Gamma}^i_{pj}\\ &+ \frac{1}{N^2-1}\{[N(\underset{4}{R}_{jn} - \underset{V}{\Gamma}^s_{jn;s} - \underset{V}{\Gamma}^p_{js}\underset{V}{\Gamma}^s_{pn} + 2\underset{V}{\Gamma}^p_{ns}\underset{V}{\Gamma}^s_{pj} + \underset{4}{R}_{nj} - \underset{V}{\Gamma}^s_{nj;s}\\ &- \underset{V}{\Gamma}^p_{ns}\underset{V}{\Gamma}^s_{pj} + 2\underset{V}{\Gamma}^p_{js}\underset{V}{\Gamma}^s_{pn}]\}_{[mn]}.\end{aligned} \tag{5.3.55}$$

На основу (5.2.32) у GR_N добијамо

$$\begin{aligned}W^i{}_{jmn} &= \underset{5}{R}^i_{jmn} + \underset{V}{\Gamma}^p_{jm}\underset{V}{\Gamma}^i_{pn} - \underset{V}{\Gamma}^p_{jn}\underset{V}{\Gamma}^i_{pm} + \frac{1}{N+1}\delta^i_j\underset{5}{R}_{[mn]}\\ &+ \frac{1}{N^2-1}\{\delta^i_m[N(\underset{5}{R}_{jn} - \underset{V}{\Gamma}^p_{js}\underset{V}{\Gamma}^s_{pn}) + \underset{5\ V}{R}_{nj} - \underset{V}{\Gamma}^p_{ns}\underset{V}{\Gamma}^s_{pj}]\}_{[mn]}.\end{aligned} \tag{5.3.56}$$

На основу (5.2.15) је

$$\underset{5}{R}^i{}_{jmn} = R^i_{jmn} + \underset{V}{\Gamma}^p_{jm}\underset{V}{\Gamma}^i_{pn} + \underset{V}{\Gamma}^p_{jn}\underset{V}{\Gamma}^i_{pm}, \tag{5.3.57}$$

одакле, за $i = n = s$

$$\underset{5}{R}_{jm} = R_{jm} + \underset{V}{\Gamma}^{p}_{js}\underset{V}{\Gamma}^{s}_{pm}. \tag{5.3.58}$$

Ако заменимо (5.3.58) у (5.3.56), следи

$$\begin{aligned} W^{i}{}_{jmn} = {} & \underset{5}{R}^{i}_{jmn} - \underset{V}{\Gamma}^{p}_{jm}\underset{V}{\Gamma}^{i}_{pn} - \underset{V}{\Gamma}^{p}_{jn}\underset{V}{\Gamma}^{i}_{pm} + \frac{1}{N+1}\delta^{i}_{j}\underset{V}{\Gamma}^{p}_{ms}\Gamma^{s}_{pn[mn]} \\ & + \frac{1}{N^2-1}\{\delta^{i}_{m}[N(\underset{5}{R}_{jn} - \underset{V}{\Gamma}^{p}_{js}\underset{V}{\Gamma}^{s}_{pn}) + +\underset{5}{R}_{nj} - \underset{V}{\Gamma}^{p}_{ns}\underset{V}{\Gamma}^{s}_{pj}]\}_{[mn]}. \end{aligned} \tag{5.3.59}$$

На основу изложеног, добијамо следећу теорему:

Теорема 5.3.1. *Нека је f пројективна трансформација у GR_N. Вајлов пројективни тензор $W^{i}{}_{jmn}$ из придуженог R_N, може се, помоћу независних тензора кривине $\underset{\theta}{R}_{jm}, \theta = 1, ..., 5$ из GR_N представити на 5 начина једначинама* (5.3.40, 5.3.45, 5.3.50, 5.3.55, 5.3.59).

Закључак. Показано је како се, користећи везу између тензора кривине R и $\underset{\theta}{R}$, може $W^{i}{}_{jmn}$ изразити преко $\underset{\theta}{R}$ и торзије. На основу тога се виде везе које у неким случајевима могу бити корисне при изградњи одговарајуће теорије.

ГЛАВА 6

ЕТ конформне трансформације псеудотензора кривине у GR_N и ЕТ конформни псеудотензори кривине

У овој глави ћемо прво разматрати независне псеудотензоре кривине у GR_N. Затим, разматрамо ЕТ конформне трансформације псеудотензора I, II, III, VI и VII врсте. Добијене величине су назване ЕТ конформни псеудотензори I, II, III, VI и VII врсте.

6.1 Независни псеудотензори кривине у GR_N

У првој глави смо видели да се у идентитетима Ричијевог типа у $GR_N(GA_N)$, осим тензора кривине, појављују и величине које нису тензори, али се у случају симетричне конексије своде на Риманов тензор кривине. Овакве величине су назване (Минчић [58, 65, 67]) псеудотензорима кривине. Има их укупно 15, са ознакама $\underset{\theta}{A}{}^i_{jmn}, \theta = 1, \ldots, 15$.

Помоћу претходно уведених величина имамо тензоре

$$\begin{aligned}
&\mathcal{A} = L^i_{\underset{\vee}{jm};n},\ \mathcal{B} = L^p_{\underset{\vee}{jm}} L^i_{\underset{\vee}{pn}},\ \mathcal{C} = L^p_{\underset{\vee}{mn}} L^i_{\underset{\vee}{pj}},\\
&\mathcal{A}' = L^i_{\underset{\vee}{jn};m},\ \mathcal{B}' = L^p_{\underset{\vee}{jn}} L^i_{\underset{\vee}{pm}},
\end{aligned} \tag{6.1.1}$$

и величине

$$\mathcal{D}=\underset{V}{L}^{i}_{pj}L^{p}_{\underline{mn}},\mathcal{E}=\underset{V}{L}^{i}_{pn}L^{p}_{\underline{jm}},\mathcal{F}=L^{i}_{\underline{pn}}\underset{V}{L}^{p}_{jm},\tag{6.1.2}$$

$$\mathcal{E}'=\underset{V}{L}^{i}_{pm}L^{p}_{\underline{jn}},\mathcal{F}'=L^{i}_{\underline{pm}}\underset{V}{L}^{p}_{jn},\tag{6.1.3}$$

које нису тензори (јер, нпр., $L^{p}_{\underline{mn}}$ није тензор). Добијамо величине које су псеудотензори

$$\underset{1}{A}^{i}_{jmn}=R^{i}_{jmn}+\underset{\vee}{L}^{i}_{jm;n}-\underset{\vee}{L}^{i}_{jn;m}+\underset{\vee}{L}^{p}_{jm}\underset{\vee}{L}^{i}_{np}-\underset{\vee}{L}^{p}_{jn}\underset{\vee}{L}^{i}_{mp}+2L^{p}_{\underline{jm}}\underset{\vee}{L}^{i}_{np}-2L^{p}_{\underline{jn}}\underset{\vee}{L}^{i}_{mp},\tag{6.1.4}$$

$$\underset{2}{A}^{i}_{jmn}=R^{i}_{jmn}+\underset{\vee}{L}^{i}_{jm;n}-\underset{\vee}{L}^{i}_{jn;m}+\underset{\vee}{L}^{p}_{mj}\underset{\vee}{L}^{i}_{pn}-\underset{\vee}{L}^{p}_{nj}\underset{\vee}{L}^{i}_{pm}+2\underset{\vee}{L}^{p}_{mj}L^{i}_{\underline{pn}}-2\underset{\vee}{L}^{p}_{nj}L^{i}_{\underline{pm}},\tag{6.1.5}$$

$$\underset{3}{A}^{i}_{jmn}=R^{i}_{jmn}+\underset{\vee}{L}^{i}_{mj;n}-\underset{\vee}{L}^{i}_{nj;m}+\underset{\vee}{L}^{p}_{mj}\underset{\vee}{L}^{i}_{pn}-\underset{\vee}{L}^{p}_{nj}\underset{\vee}{L}^{i}_{pm}-2L^{p}_{\underline{nj}}\underset{\vee}{L}^{i}_{pm},\tag{6.1.6}$$

$$\underset{4}{A}^{i}_{jmn}=R^{i}_{jmn}+\underset{\vee}{L}^{i}_{mj;n}-\underset{\vee}{L}^{i}_{nj;m}+\underset{\vee}{L}^{p}_{jm}\underset{\vee}{L}^{i}_{np}-\underset{\vee}{L}^{p}_{jn}\underset{\vee}{L}^{i}_{mp}+2\underset{\vee}{L}^{p}_{jm}L^{i}_{\underline{np}}-2\underset{\vee}{L}^{p}_{jn}L^{i}_{\underline{mp}},\tag{6.1.7}$$

$$\underset{5}{A}^{i}_{jmn}=R^{i}_{jmn}+\underset{\vee}{L}^{i}_{jm;n}-\underset{\vee}{L}^{i}_{nj;m}+\underset{\vee}{L}^{p}_{jm}\underset{\vee}{L}^{i}_{pn}-\underset{\vee}{L}^{p}_{nj}\underset{\vee}{L}^{i}_{mp}+2L^{p}_{\underline{jm}}L^{i}_{pn}-2L^{p}_{\underline{nj}}\underset{\vee}{L}^{i}_{mp}+2L^{p}_{\underline{mn}}\underset{\vee}{L}^{i}_{jp},\tag{6.1.8}$$

$$\underset{6}{A}^{i}_{jmn}=R^{i}_{jmn}+\underset{\vee}{L}^{i}_{jm;n}-\underset{\vee}{L}^{i}_{nj;m}+\underset{\vee}{L}^{p}_{mj}\underset{\vee}{L}^{i}_{np}-\underset{\vee}{L}^{p}_{jn}\underset{\vee}{L}^{i}_{pm}+2\underset{\vee}{L}^{p}_{mj}L^{i}_{\underline{np}}-2\underset{\vee}{L}^{p}_{jn}L^{i}_{\underline{pm}}+2L^{p}_{\underline{mn}}\underset{\vee}{L}^{i}_{jp},\tag{6.1.9}$$

$$\underset{7}{A}^{i}_{jmn}=R^{i}_{jmn}+\underset{\vee}{L}^{i}_{jm;n}-\underset{\vee}{L}^{i}_{jn;m}+\underset{\vee}{L}^{p}_{jm}\underset{\vee}{L}^{i}_{pn}-\underset{\vee}{L}^{p}_{jn}\underset{\vee}{L}^{i}_{mp}-2L^{p}_{\underline{jn}}\underset{\vee}{L}^{i}_{mp},\tag{6.1.10}$$

$$\underset{8}{A}^{i}_{jmn}=R^{i}_{jmn}+\underset{\vee}{L}^{i}_{jm;n}-\underset{\vee}{L}^{i}_{jn;m}+\underset{\vee}{L}^{p}_{mj}\underset{\vee}{L}^{i}_{pn}-\underset{\vee}{L}^{p}_{jn}\underset{\vee}{L}^{i}_{pm}+2\underset{\vee}{L}^{p}_{mj}L^{i}_{\underline{pn}},\tag{6.1.11}$$

$$\underset{9}{A}^{i}_{jmn}=R^{i}_{jmn}+\underset{\vee}{L}^{i}_{jm;n}-\underset{\vee}{L}^{i}_{nj;m}+\underset{\vee}{L}^{p}_{jm}\underset{\vee}{L}^{i}_{pn}-\underset{\vee}{L}^{p}_{nj}\underset{\vee}{L}^{i}_{pm}+2L^{p}_{\underline{jm}}\underset{\vee}{L}^{i}_{pn}+2L^{p}_{\underline{mn}}L^{i}_{\underline{jp}},\tag{6.1.12}$$

$$\underset{10}{A}^{i}_{jmn}=R^{i}_{jmn}+\underset{\vee}{L}^{i}_{jm;n}-\underset{\vee}{L}^{i}_{nj;m}+\underset{\vee}{L}^{p}_{jm}\underset{\vee}{L}^{i}_{np}-\underset{\vee}{L}^{p}_{jn}\underset{\vee}{L}^{i}_{pm}-2\underset{\vee}{L}^{p}_{jn}L^{i}_{\underline{pm}}+2L^{p}_{\underline{mn}}\underset{\vee}{L}^{i}_{jp},\tag{6.1.13}$$

$$\underset{11}{A}^{i}_{jmn}=R^{i}_{jmn}+\underset{\vee}{L}^{i}_{mj;n}-\underset{\vee}{L}^{i}_{nj;m}+\underset{\vee}{L}^{p}_{mj}\underset{\vee}{L}^{i}_{np}-\underset{\vee}{L}^{p}_{jn}\underset{\vee}{L}^{i}_{mp}+2L^{p}_{\underline{jm}}\underset{\vee}{L}^{i}_{np}-2\underset{\vee}{L}^{p}_{mn}L^{i}_{\underline{jp}},\tag{6.1.14}$$

$$\underset{12}{A}^{i}_{jmn}=R^{i}_{jmn}+\underset{\vee}{L}^{i}_{mj;n}+\underset{\vee}{L}^{i}_{nj;m}+\underset{\vee}{L}^{p}_{mj}\underset{\vee}{L}^{i}_{pn}-\underset{\vee}{L}^{p}_{nj}\underset{\vee}{L}^{i}_{mp}+2L^{p}_{\underline{mn}}\underset{\vee}{L}^{i}_{pj}+2\underset{\vee}{L}^{p}_{jn}L^{i}_{\underline{mp}},\tag{6.1.15}$$

$$\underset{13}{A}^{i}_{jmn}=R^{i}_{jmn}+\underset{\vee}{L}^{i}_{mj;n}-\underset{\vee}{L}^{i}_{nj;m}+\underset{\vee}{L}^{p}_{mj}\underset{\vee}{L}^{i}_{np}-\underset{\vee}{L}^{p}_{nj}\underset{\vee}{L}^{i}_{pm}-2L^{p}_{\underline{jn}}\underset{\vee}{L}^{i}_{pm},\tag{6.1.16}$$

$$\underset{14}{A}^{i}_{jmn}=R^{i}_{jmn}+\underset{\vee}{L}^{i}_{mj;n}-\underset{\vee}{L}^{i}_{nj;m}+\underset{\vee}{L}^{p}_{jm}\underset{\vee}{L}^{i}_{np}-\underset{\vee}{L}^{p}_{nj}\underset{\vee}{L}^{i}_{mp}+2\underset{\vee}{L}^{p}_{jm}L^{i}_{\underline{np}},\tag{6.1.17}$$

$$\underset{15}{A}^{i}_{jmn}=R^{i}_{jmn}+\underset{\vee}{L}^{i}_{jm;n}-\underset{\vee}{L}^{i}_{nj;m}+\underset{\vee}{L}^{p}_{jm}\underset{\vee}{L}^{i}_{np}-\underset{\vee}{L}^{p}_{nj}\underset{\vee}{L}^{i}_{pm}+2L^{p}_{\underline{mn}}\underset{\vee}{L}^{i}_{jp},\tag{6.1.18}$$

Тиме су ове величине приказане у другом облику у коме ћемо их у даљем тексту посматрати. На основу 5 тензора $\mathcal{A},\ldots,\mathcal{C}$ је одређено 5 независних тензора кривине у $GR_N(GA_N)$. Ако заједно посматрамо тензоре и псеудотензоре кривине, имамо 10 величина $\mathcal{A}, \mathcal{A}', \ldots, \mathcal{F}', \mathcal{D}$ и како је то показано у [68] могуће је одредити 10 независних величина од 12 тензора кривине и 15 псеудотензора кривине. Ако рачунамо 5 независних тензора кривине $\underset{1}{R}, \ldots, \underset{4}{R}, \underset{2}{\tilde{R}} \equiv \underset{5}{R}$ одређујемо 5 независних псеудотензора кривине у [68]. Овде ћемо као независне псеудотензоре кривине узети $\underset{1}{A}, \underset{2}{A}, \underset{3}{A}, \underset{6}{A}, \underset{7}{A}$, за које се може доказати да су независни истим поступком као у [68].

6.2 ЕТ конформне трансформације псеудотензора кривине у GR_N

6.2.1 Псеудотензор I врсте и ЕТ-и конформни псеудотензор I врсте

Псеудотензор прве врсте је

$$\underset{1}{A}{}^i_{jmn} = \Gamma^i_{jm,n} - \Gamma^i_{jn,m} + \Gamma^p_{jm}\Gamma^i_{np} - \Gamma^p_{jn}\Gamma^i_{mp}, \tag{6.2.19}$$

а трансформисана величина, на основу ЕТ-е конформне трансформације је

$$\underset{1}{\bar{A}}{}^i_{jmn} = \bar{\Gamma}^i_{jm,n} - \bar{\Gamma}^i_{jn,m} + \bar{\Gamma}^p_{jm}\bar{\Gamma}^i_{np} - \bar{\Gamma}^p_{jn}\bar{\Gamma}^i_{mp}, \tag{6.2.20}$$

$$a) \quad \bar{\Gamma}^i_{jm} = \Gamma^i_{jm} + P^i_{jm}, \quad b) P^i_{jm} = \delta^i_j \rho_m + \delta^i_m \rho_j - \rho^i g_{\underline{jm}}. \tag{6.2.21}$$

Заменом у (6.2.20) према (6.2.21) следи

$$\begin{aligned} \underset{1}{\bar{A}}{}^i_{jmn} = \underset{1}{A}{}^i_{jmn} &+ P^i_{jm,n} - P^i_{jn,m} + \Gamma^p_{jm}P^i_{np} + P^p_{jm}\Gamma^i_{np} + P^p_{jm}P^i_{np} \\ &- \Gamma^p_{mn}P^i_{jp} + \Gamma^p_{mn}P^i_{jp} - \Gamma^p_{jn}P^i_{mp} - P^p_{jn}\Gamma^i_{mp} - P^p_{jn}P^i_{mp}. \end{aligned} \tag{6.2.22}$$

Према (6.2.21) имамо

$$\Gamma^p_{jm}P^i_{np} = \Gamma^p_{jm}\delta^i_n\rho_p + \Gamma^i_{jm}\rho_n - \rho^i\Gamma_{n.jm}, \tag{6.2.23}$$

$$\Gamma^p_{jm}P^i_{np} = \Gamma^i_{nj}\rho_m + \Gamma^i_{nm}\rho_j - \rho^p g_{\underline{jm}}\Gamma i_{np}, \tag{6.2.24}$$

$$\begin{aligned} P^p_{jn}P^i_{mp} &= \rho_j\rho_n\delta^i_m + \delta^i_j\rho_m\rho_n - \rho^i\rho_n g_{\underline{jm}} + \rho_n\rho_j\delta^i_m + \delta^i_n\rho_m\rho_j \\ &- \rho^i\rho_j g_{\underline{mn}} - \rho^p\rho_p g_{\underline{jn}}\delta^i_m - \rho^i\rho_m g_{\underline{jn}} + \rho_m\rho^i g_{\underline{jn}}. \end{aligned} \tag{6.2.25}$$

На основу рада К. Јана [155] је:

$$\rho_{jm} = \rho_{j;m} - \rho_j\rho_m + \frac{1}{2}\rho_p\rho^p g_{\underline{jm}} = \rho_{mj}, \tag{6.2.26}$$

$$\underset{1}{\rho}_{jm} = \rho_{jm} - \frac{1}{2}T^p_{jm}\rho_p \quad \text{и} \quad \underset{2}{\rho}_{jm} = \rho_{jm} + \frac{1}{2}T^p_{jm}\rho_p. \tag{6.2.27}$$

Сменом у (6.2.27) према (6.2.23) – (6.2.25) и сређивањем добијамо

$$\begin{aligned} \underset{1}{\bar{A}}{}^i_{jmn} &= \underset{1}{A}{}^i_{jmn} + \delta^i_m(\rho_{j,n} - \Gamma^p_{jn}\rho_p - \rho_j\rho_n + \rho_p\rho^p g_{\underline{jn}}) - \delta^i_n(\rho_{j,m} - \Gamma^p_{jm}\rho_p - \rho_j\rho_m + \rho_p\rho^p g_{\underline{jm}}) \\ &- g_{\underline{jm}}(\rho^i_{,n} + \Gamma^i_{np}\rho_p - \rho^i\rho_n) + g_{\underline{jn}}(\rho^i_{,m} + \Gamma^i_{mp}\rho_p - \rho^i\rho_m) \\ &- \rho^i(g_{\underline{jm},n} - g_{\underline{jn},m} - \Gamma_{m.jn} + \Gamma_{n.jm}) + \rho_n T^i_{jm} - \rho_m T^i_{jn} + \rho_j T^i_{nm}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underset{1}{\bar{A}}{}^i_{jmn} &= \underset{1}{A}{}^i_{jmn} + \delta^i_m(\rho_{j\underset{1}{|}n} - \rho_j\rho_m + \frac{1}{2}\rho_p\rho^p g_{\underline{jn}}) + \frac{1}{2}\delta^i_m\rho_p\rho^p g_{\underline{jn}} \\ &- \delta^i_n(\rho_{j\underset{1}{|}m} - \rho_j\rho_m + \frac{1}{2}\rho_p\rho^p g_{\underline{jm}}) - \frac{1}{2}\delta^i_n\rho_p\rho^p g_{\underline{jm}} \\ &+ g_{\underline{jn}}(\rho^i_{\underset{2}{|}m} - \rho^i\rho_m) - g_{\underline{jm}}(\rho^i_{\underset{2}{|}n} - \rho^i\rho_n) + \rho^i(2g_{jm,n} - 2g_{jn,m} + g_{\underset{V}{mn},j}) + B^i_{jmn}, \end{aligned}$$

тј.

$$\begin{aligned} \underset{1}{\bar{A}}{}^i_{jmn} &= \underset{1}{A}{}^i_{jmn} + \delta^i_m\underset{1}{\rho}_{jn} - \delta^i_n\underset{1}{\rho}_{jm} + \frac{1}{2}\rho^p\rho_p(\delta^i_m g_{\underline{jn}} - \delta^i_n g_{\underline{jm}}) \\ &+ g_{\underline{jn}}(\underset{2}{\rho}{}^i_m) - \frac{1}{2}\rho^p\rho_p\delta^i_m g_{\underline{jn}} - g_{\underline{jm}}\underset{2}{\rho}{}^i_n + \frac{1}{2}\rho^p\rho_p\delta^i_n g_{\underline{jm}} - \rho^i T_{j.mn} + B^i_{jmn}. \end{aligned} \tag{6.2.28}$$

Дакле, ако узмемо у обзир (6.2.27), следи

$$\begin{aligned} \underset{1}{\bar{A}}{}^i_{jmn} &= \underset{1}{A}{}^i_{jmn} + \delta^i_m(\rho_{jn} + \frac{1}{2}T^p_{jn}\rho_p) - \delta^i_n(\rho_{jm} - \frac{1}{2}T^p_{jm}\rho_p) \\ &+ g_{\underline{jn}}(\rho^i_m + \frac{1}{2}g^{\underline{is}}T^p_{sm}\rho_p) - g_{\underline{jm}}(\rho^i_n + \frac{1}{2}g^{\underline{is}}T^p_{sn}\rho_p) \\ &- \rho^i T_{j.mn} + K^i_{jmn}, \end{aligned} \tag{6.2.29}$$

где је

$$K^i_{jmn}=T^i_{jm}\rho_n-T^i_{jn}\rho_m-T^i_{mn}\rho_j. \tag{6.2.30}$$

Дакле, важи:

Теорема 6.2.1. *При ЕТ конформној трансформацији* $\bar g_{ij}=\rho^2 g_{ij}$ *у* GR_N*, псеудотензор* $\underset{1}{A}{}^i_{jmn}$*, дат у* (6.2.19)*, добија облик* (6.2.29)*, где је* ρ_{jm} *дато у* (6.2.26)*, а* K^i_{jmn} *у* (6.2.30)*.*

Контракција са $i=n$ из (6.2.29) даје

$$\underset{1}{\bar A}_{jm}=\underset{1}{A}{}^i_{jm}+\rho_{jm}(2-N)+\frac{1}{2}NT^p_{jm}\rho_p-\rho^p_p g^{\underline{jm}}-\rho^i T_{j.mi}+T^i_{jm}\rho^i, \tag{6.2.31}$$

јер је

$$g^{\underline{is}}T^p_{si}\rho_p=g^{\underline{is}}T_{p.si}\rho_p=-g^{\underline{is}}T_{i.sp}\rho^p=T^s_{sp}\rho^p=0. \tag{6.2.32}$$

Композицијом са $\rho^2\bar g^{\underline{jm}}=g^{\underline{jm}}$ из (6.2.31) добијамо

$$\rho^2\underset{1}{\bar A}=\underset{1}{A}+\rho^p_p(2-N)+0-\rho^p_pN,$$

тј.

$$\rho^2\underset{1}{\bar A}=\underset{1}{A}+2\rho^p_p(1-N)-\rho^p_pN, \tag{6.2.33}$$

одакле је

$$\rho^p_p=\frac{1}{2(N-1)}(\underset{1}{A}-\rho^2\underset{1}{\bar A}) \tag{6.2.34}$$

што сменом у (6.2.31) даје

$$\underset{1}{\bar A}_{jm}=\underset{1}{A}_{jm}+\rho_{jm}(2-N)+\frac{N}{2}T^p_{jm}\rho_p-\frac{1}{2(N-1)}(\underset{1}{A}-\rho^2\underset{1}{\bar A})g^{\underline{jm}}-\rho^iT_{j.mi}+T^i_{jm}\rho^i,$$

а одавде

$$\begin{aligned}\rho_{jm}=&\frac{1}{N-2}[\underset{1}{A}_{jm}-\underset{1}{\bar A}_{jm}+\frac{N}{2}T^p_{jm}\rho_p-\frac{1}{2(N-1)}(\underset{1}{A}-\rho^2\underset{1}{\bar A})g^{\underline{jm}}]\\&-\rho^iT_{j.mi}+T^i_{jm}\rho^i.\end{aligned} \tag{6.2.35}$$

На основу (6.2.35), из (6.2.29) следи

$$\begin{aligned}\underset{1}{\bar{A}}{}^{i}_{jmn}=&\underset{1}{A}{}^{i}_{jmn}+\delta^{i}_{m}\frac{1}{N-2}[\underset{1}{A}{}_{jn}-\underset{1}{\bar{A}}{}_{jn}+\frac{N}{2}T^{p}_{jn}\rho_{p}-\frac{1}{2(N-1)}(\underset{1}{A}-\rho^{2}\underset{1}{\bar{A}})g_{\underline{jn}}]\\&-\delta^{i}_{n}\frac{1}{N-2}[\underset{1}{A}{}_{jm}-\underset{1}{\bar{A}}{}_{jm}+\frac{N}{2}T^{p}_{jm}\rho_{p}-\frac{1}{2(N-1)}(\underset{1}{A}-\rho^{2}\underset{1}{\bar{A}})g_{\underline{jm}}]\\&-\frac{1}{2}\delta^{i}_{m}T^{p}_{jn}\rho_{p}+\frac{1}{2}\delta^{i}_{n}T^{p}_{jm}\rho_{p}\\&+g_{\underline{jn}}\frac{1}{N-2}[\underset{1}{A}{}^{i}_{m}-\rho^{2}\underset{1}{\bar{A}}{}^{i}_{m}+\frac{N}{2}g^{\underline{is}}T^{p}_{sm}\rho_{p}-\frac{1}{2(N-1)}(\underset{1}{A}-\rho^{2}\underset{1}{\bar{A}})\delta^{i}_{m}]\\&-g_{\underline{jm}}\frac{1}{N-2}[\underset{1}{A}{}^{i}_{n}-\rho^{2}\underset{1}{\bar{A}}{}^{i}_{n}+\frac{N}{2}g^{\underline{is}}T^{p}_{sn}\rho_{p}-\frac{1}{2(N-1)}(\underset{1}{A}-\rho^{2}\underset{1}{\bar{A}})\delta^{i}_{n}]\\&+\frac{1}{2}g_{\underline{jn}}g^{\underline{is}}T^{p}_{sm}\rho_{p}-\frac{1}{2}g_{\underline{jm}}g^{\underline{is}}T^{p}_{sn}\rho_{p}\\&-\rho^{i}T_{j.mn}+T^{i}_{jm}\rho_{n}-T^{i}_{jn}\rho_{m}-T^{i}_{mn}\rho_{j}.\end{aligned}\tag{6.2.36}$$

За сабирке који садрже $\rho^{i},\rho_{p},\rho_{j},\rho_{m},\rho_{n}$,

$$\begin{aligned}Q^{i}_{jmn}=&\{\frac{N}{2(N-1)}[\delta^{i}_{m}T^{p}_{jn}-\delta^{i}_{n}T^{p}_{jm}+g^{\underline{is}}(T^{p}_{sm}g_{\underline{jn}}-T^{p}_{sn}g_{\underline{jm}})]\\&+\frac{1}{2}(\delta^{i}_{n}T^{p}_{jm}-\delta^{i}_{m}T^{p}_{jn})+\frac{1}{2}g^{\underline{is}}(T^{p}_{sm}g_{\underline{jn}}-T^{p}_{sn}g_{\underline{jm}})\\&-g^{\underline{ip}}T_{j.mn}\}\frac{1}{N}(\bar{\Gamma}^{t}_{pt}-\Gamma^{t}_{pt})\\&+\frac{1}{N}T^{i}_{jm}(\bar{\Gamma}^{t}_{nt}-\Gamma^{t}_{nt})-\frac{1}{N}T^{i}_{jn}(\bar{\Gamma}^{t}_{nt}-\Gamma^{t}_{nt})-\frac{1}{N}T^{i}_{mn}(\bar{\Gamma}^{t}_{jt}-\Gamma^{t}_{jt}).\end{aligned}\tag{6.2.37}$$

Ако узмемо у обзир да је $T^{s}_{mn}=\bar{T}^{s}_{mn}$ и

$$g^{\underline{ip}}T_{j.mn}=g^{\underline{ip}}g_{\underline{js}}T^{s}_{mn}=\bar{g}^{\underline{ip}}\bar{g}_{\underline{js}}\bar{T}^{s}_{mn}=\bar{g}^{\underline{ip}}\bar{T}_{j.mn}$$

и узимајући у обзир (6.2.36) и (6.2.37), закључујемо да важи следећа теорема.

Теорема 6.2.2. *Величина*

$$\begin{aligned}{}^P\underset{1}{C}{}^i_{jmn} &= \underset{1}{A}{}^i_{jmn} + \frac{1}{N-2}[\delta^i_m \underset{1}{A}{}_{jn} - \delta^i_n \underset{1}{A}{}_{jm} + \underset{1}{A}{}^i_m g_{\underline{jn}} - \underset{1}{A}{}^i_n g_{\underline{jm}} \\ &- \frac{1}{2}\Gamma^t_{pt}(\delta^i_m T^p_{jn} - \delta^i_n T^p_{jm}) + g^{\underline{is}} g_{\underline{jn}}(T^p_{sm} - g^{\underline{is}} g_{\underline{jm}} T^p_{sn})] \\ &+ \frac{1}{(N-1)(N-2)} \underset{1}{A}{}^i_{jmn}(\delta^i_m g_{\underline{jn}} - \delta^i_n g_{\underline{jm}}) \\ &+ \frac{1}{N}\{\Gamma^t_{pt}[\frac{1}{2}(\delta^i_m T^p_{jn} - \delta^i_n T^p_{jm}) + \frac{1}{2} g^{\underline{is}}(g_{\underline{jm}}(T^p_{sn} - g_{\underline{jn}} T^p_{sm}) + g^{\underline{ip}} T_{j.mn}] \\ &- \Gamma^t_{nt} T^i_{jm} + \Gamma^t_{mt} T^i_{jn} + \Gamma^t_{jt} T^i_{mn}\}\end{aligned} \tag{6.2.38}$$

је инваријанта ЕТ конформне трансформације у GR_N*, тј. важи*

$$\overline{{}^P\underset{1}{C}{}^i_{jmn}} = {}^P\underset{1}{C}{}^i_{jmn}. \tag{6.2.39}$$

Дефиниција 6.2.1. *Величину* ${}^P\underset{1}{C}{}^i_{jmn}$ *зовемо* **ЕТ конформни псеудотензор** I **врсте** *у* GR_N*.*

6.2.2 Псеудотензор II врсте и ЕТ конформни псеудотензор II врсте

Како је

$$\underset{2}{A}{}^i_{jmn} = \Gamma^i_{jm,n} - \Gamma^i_{jn,m} + \Gamma^p_{jm}\Gamma^i_{pn} - \Gamma^p_{nj}\Gamma^i_{pm}, \tag{6.2.40}$$

то следи

$$\begin{aligned}\bar{\underset{2}{A}}{}^i_{jmn} &= \underset{2}{A}{}^i_{jmn} + P^i_{jm,n} - P^i_{jn,m} + \Gamma^p_{mj} P^i_{pn} + P^p_{mj}\Gamma^i_{pn} + P^p_{mj} P^i_{pn} \\ &- \Gamma^p_{mn} P^i_{jp} + \Gamma^p_{mn} P^i_{jp} - \Gamma^p_{nj} P^i_{pm} - P^p_{nj}\Gamma^i_{pm} - P^p_{nj} P^i_{pm}.\end{aligned} \tag{6.2.41}$$

Даље налазимо

$$\Gamma^p_{mj} P^i_{pn} = \Gamma^p_{mj}(\delta^i_p \rho_n + \delta^i_n \rho_p - \rho^i g_{\underline{np}}) = \Gamma^i_{mj}\rho_n + \delta^i_n \Gamma^p_{mj}\rho_p - \rho^i \Gamma_{n.mj},$$

$$P^p_{mj}\Gamma^i_{pn} = \Gamma^i_{pn}(\delta^p_m \rho_j + \delta^p_j \rho_m - \rho^p g_{\underline{jm}}) = \Gamma^i_{mn}\rho_j + \Gamma^i_{jn}\rho_m - \rho^p g_{\underline{jm}} \Gamma i_{pn},$$

$$\begin{aligned} P^p_{mj}P^i_{pn} &= (\delta^p_m\rho_j + \delta^p_j\rho_m - \rho^p g_{\underline{jm}})(\delta^i_p\rho_n + \delta^i_n\rho_p - \rho^i g_{\underline{pn}}) \\ &= \rho_j\rho_n\delta^i_m + \delta^i_n\rho_m\rho_j - \rho^i\rho_j g_{\underline{mn}} \\ &+ \rho_n\rho_n\delta^i_j + \delta^i_n\rho_m\rho_j - \rho^i\rho_{mj} g_{\underline{jn}} \\ &- \rho^p\rho_p g_{\underline{jn}}\delta^i_n - \rho^i\rho_n g_{\underline{jm}} + \rho_n\rho^i g_{\underline{jm}}, \end{aligned}$$

па сменом у (6.2.41) и даљим поступком као за $\underset{1}{A}$, добијамо

$$\begin{aligned} \underset{2}{\bar{A}}{}^i_{jmn} &= \underset{2}{A}{}^i_{jmn} + \delta^i_m(\rho_{j,n} - \Gamma^p_{nj}\rho_p - \rho_j\rho_n + \rho_p\rho^p g_{\underline{jn}}) \\ &- \delta^i_n(\rho_{j,m} - \Gamma^p_{mj}\rho_p - \rho_j\rho_m + \rho_p\rho^p g_{\underline{jn}}) \\ &- g_{\underline{jm}}(\rho^i_{,n} + \Gamma^i_{pn}\rho_p - \rho^i\rho_n) + g_{\underline{jn}}(\rho^i_{,m} + \Gamma^i_{pm}\rho_p - \rho^i\rho_m) \\ &+ \rho^i T_{j.mn} - K^i_{jmn}, \end{aligned} \tag{6.2.42}$$

где је K^i_{jmn} дато у (6.2.30) $K^i_{jmn} = T^i_{jm}\rho_n - T^i_{jn}\rho_m - T^i_{mn}\rho_j$.

Даљим сређивањем добијамо

$$\begin{aligned} \underset{2}{\bar{A}}{}^i_{jmn} &= \underset{2}{A}{}^i_{jmn} + \delta^i_m(\rho_{jn} + \frac{1}{2}T^p_{jn}\rho_p) - \delta^i_n(\rho_{jm} - \frac{1}{2}T^p_{jm}\rho_p) \\ &+ g_{\underline{jn}}(\rho^i_m + \frac{1}{2}g^{\underline{is}}T^p_{sm}\rho_p) - g_{\underline{jm}}(\rho^i_n + \frac{1}{2}g^{\underline{is}}T^p_{sn}\rho_p) \\ &+ \rho^i T_{j.mn} - K^i_{jmn}. \end{aligned} \tag{6.2.43}$$

Дакле, важи:

Теорема 6.2.3. *При ЕТ конформној трансформацији* $g_{ij} = \rho^2 g_{ij}$ *у* GR_N*, псеудотензор* $\underset{2}{A}{}^i_{jmn}$*, дат у* (6.2.40)*, добија облик* (6.2.43)*, где* ρ_{jm} *дато у* (6.2.26)*, а* K^i_{jmn} *у* (6.2.30).

Ако извршимо у (6.2.43) контракцију са $i = n$, добија се

$$\underset{2}{\bar{A}}{}_{jm} = \underset{2}{A}{}^i_{jm} + \rho_{jm}(2 - N) - \frac{N}{2}T^p_{jm}\rho_p - \rho^p_p g_{\underline{jm}} - \rho^i T_{j.mi} + T_{i.jm}\rho^i, \tag{6.2.44}$$

а одавде композицијом одговарајућих страна са $\rho^2\bar{g}^{\underline{jm}} = g^{\underline{jm}}$, следи

$$\rho^p_p = \frac{1}{2(N-1)}(\underset{2}{A} - \rho^2\underset{2}{\bar{A}}). \tag{6.2.45}$$

Ако (6.2.45) заменимо у (6.2.44), добијамо

$$\rho_{jm} = \frac{1}{N-2}[\underset{2}{A}_{jm} - \underset{2}{\bar{A}}_{jm} - \frac{N}{2}T^{p}_{jm}\rho_p - \frac{1}{2(N-1)}(\underset{2}{A} - \rho^2\underset{2}{\bar{A}})g_{\underline{jm}}]. \tag{6.2.46}$$

Сменом (6.2.46) у (6.2.43), следи

$$\begin{aligned}
\underset{2}{\bar{A}}{}^{i}_{jmn} = {}& \underset{2}{A}{}^{i}_{jmn} + \delta^{i}_{m}\frac{1}{N-2}[\underset{2}{A}_{jn} - \underset{2}{\bar{A}}_{jn} + \frac{N}{2}T^{p}_{jn}\rho_p - \frac{1}{2(N-1)}(\underset{2}{A} - \rho^2\underset{2}{\bar{A}})g_{\underline{jn}}] \\
& - \delta^{i}_{n}\frac{1}{N-2}[\underset{2}{A}_{jm} - \underset{2}{\bar{A}}_{jm} - \frac{N}{2}T^{p}_{jm}\rho_p - \frac{1}{2(N-1)}(\underset{2}{A} - \rho^2\underset{2}{\bar{A}})g_{\underline{jm}}] \\
& - \frac{1}{2}\delta^{i}_{m}T^{p}_{jn}\rho_p - \frac{1}{2}\delta^{i}_{n}T^{p}_{jm}\rho_p \\
& + g_{\underline{jn}}\frac{1}{N-2}[\underset{2}{A}{}^{i}_{m} - \rho^2\underset{2}{\bar{A}}{}^{i}_{m} + \frac{N}{2}g^{\underline{is}}T^{p}_{sm}\rho_p - \frac{1}{2(N-1)}(\underset{2}{A} - \rho^2\underset{2}{\bar{A}})\delta^{i}_{m}] \\
& - g_{\underline{jm}}\frac{1}{N-2}[\underset{2}{A}{}^{i}_{n} - \rho^2\underset{2}{\bar{A}}{}^{i}_{n} + \frac{N}{2}g^{\underline{is}}T^{p}_{sn}\rho_p - \frac{1}{2(N-1)}(\underset{2}{A} - \rho^2\underset{2}{\bar{A}})\delta^{i}_{n}] \\
& + \frac{1}{2}g^{\underline{is}}(g_{\underline{jm}}T^{p}_{sn} - g_{\underline{jn}}T^{p}_{sn})\rho_p + \rho_p g^{\underline{ip}}T_{j.mn} - K^{i}_{jmn}.
\end{aligned} \tag{6.2.47}$$

где је K^{i}_{jmn} дато у (6.2.30).

За сабирке који садрже $\rho_k, k \in \{p, j, m, n\}$ имамо

$$\begin{aligned}
Q^{i}_{jmn} = {}& \{\frac{N}{2(N-2)}[\delta^{i}_{n}T^{p}_{jm} - \delta^{i}_{m}T^{p}_{jn} + g^{\underline{is}}(T^{p}_{sn}g_{\underline{jn}} - T^{p}_{sm}g_{\underline{jn}})] \\
& + \frac{1}{2}(\delta^{i}_{n}T^{p}_{jm} - \delta^{i}_{m}T^{p}_{jn}) + \frac{1}{2}g^{\underline{is}}(T^{p}_{sn}g_{\underline{jm}} - T^{p}_{sm}g_{\underline{jn}}) \\
& + g^{\underline{ip}}T_{j.mn}\}\frac{1}{N}(\bar{\Gamma}^{t}_{pt} - \Gamma^{t}_{pt}) \\
& + \frac{1}{N}T^{i}_{jn}(\bar{\Gamma}^{t}_{mt} - \Gamma^{t}_{mt}) - \frac{1}{N}T^{i}_{jm}(\bar{\Gamma}^{t}_{nt} - \Gamma^{t}_{nt}) + \frac{1}{N}T^{i}_{mn}(\bar{\Gamma}^{t}_{jt} - \Gamma^{t}_{jt}).
\end{aligned} \tag{6.2.48}$$

Дакле, важи:

Теорема 6.2.4. *Величина*

$$\begin{aligned}
{}^P\underset{2}{C}{}^i_{jmn} &= \underset{2}{A}{}^i_{jmn} + \frac{1}{N-2}[\delta^i_m \underset{2}{A}{}_{jn} - \delta^i_n \underset{2}{A}{}_{jm} + \underset{2}{A}{}^i_m g_{\underline{jn}} - \underset{2}{A}{}^i_n g_{\underline{jm}} \\
&- \frac{1}{2}\Gamma^t_{pt}(\delta^i_m T^p_{jn} - \delta^i_n T^p_{jm}) + g^{\underline{is}} g_{\underline{jn}}(T^p_{sm} - g^{\underline{is}} g_{\underline{jm}} T^p_{sn})] \\
&- \frac{1}{(N-1)(N-2)} \underset{2}{A}{}^i_{jmn}(\delta^i_m g_{\underline{jn}} - \delta^i_n g_{\underline{jm}}) \\
&+ \frac{1}{N}\{\Gamma^t_{pt}[\frac{1}{2}(\delta^i_m T^p_{jn} - \delta^i_n T^p_{jm}) - \frac{1}{2} g^{\underline{is}}(g_{\underline{jm}}(T^p_{sn} - g_{\underline{jn}} T^p_{sm}) - g^{\underline{ip}} T_{j.mn}] \\
&+ \Gamma^t_{nt} T^i_{jm} - \Gamma^t_{mt} T^i_{jn} - \Gamma^t_{jt} T^i_{mn}\}
\end{aligned} \tag{6.2.49}$$

је инваријанта ЕТ конформне трансформације у GR_N, тј. важи

$$\overline{{}^P\underset{2}{C}}{}^i_{jmn} = {}^P\underset{2}{C}{}^i_{jmn}. \tag{6.2.50}$$

Дефиниција 6.2.2. *Величину* ${}^P\underset{2}{C}{}^i_{jmn}$ *зовемо* **ЕТ конформни псеудотензор** *II* **врсте** *у GR_N.*

6.2.3 Псеудотензор *III* врсте и ЕТ конформни псеудотензор *III* врсте

Према (6.1.6) је

$$\underset{3}{A} - R - 2\mathcal{E} + 2\mathcal{E}' = -A + A' - B + B' = -\underset{1}{R} + R, \tag{6.2.51}$$

одакле је

$$\underset{3}{A} = 2R - \underset{1}{R} + 2\mathcal{E} - 2\mathcal{E}', \tag{6.2.52}$$

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\Gamma^p_{\underline{jm}} T^i_{pn}, \qquad \mathcal{E}' = \frac{1}{2}\Gamma^p_{\underline{jn}} T^i_{pm}, \tag{6.2.53}$$

а такође имамо

$$\bar{\Gamma}^i_{\underline{jm}} = \Gamma^i_{\underline{jm}} + \delta^i_j \rho_m + \delta^i_m \rho_j - \rho^i g_{\underline{jm}}. \tag{6.2.54}$$

Дакле, из (6.2.52) следи, користећи трансформисане сабирке на десној страни

$$\begin{aligned}
\underset{3}{\bar{A}}{}^{i}_{jmn} &= 2\bar{R}^{i}_{jmn} - \underset{1}{\bar{R}}{}^{i}_{jmn} + 2\bar{\mathcal{E}}^{i}_{jmn} - 2\bar{\mathcal{E}}'^{i}_{jmn} \\
&= 2(R^{i}_{jmn} + \delta^{i}_{m}\rho_{jn} - \delta^{i}_{n}\rho_{jm} + \rho^{i}_{m}g_{\underline{jn}} - \rho^{i}_{n}g_{\underline{jm}}) \\
&- (\underset{1}{R}{}^{i}_{jmn} + \delta^{i}_{m}\underset{1}{\rho}_{jn} - \delta^{i}_{n}\underset{1}{\rho}_{jm} + \underset{1}{\rho}{}^{i}_{m}g_{\underline{jn}} - \underset{1}{\rho}{}^{i}_{n}\, g_{\underline{jm}} + K^{i}_{jmn}) \qquad (6.2.55)\\
&+ (\Gamma^{p}_{\underline{jm}} + \delta^{p}_{j}\rho_{m} + \delta^{p}_{m}\rho_{j} - \rho^{p}g_{\underline{jm}})T^{i}_{pn} \\
&- (\Gamma^{p}_{\underline{jn}} + \delta^{p}_{j}\rho_{n} + \delta^{p}_{n}\rho_{j} - \rho^{p}g_{\underline{jn}})T^{i}_{pm},
\end{aligned}$$

где је K^{i}_{jmn} дато у (6.2.30). Ако средимо по $\rho_p, \rho_m, \rho_n, \rho_j$ добијамо

$$\begin{aligned}
\underset{3}{\bar{A}}{}^{i}_{jmn} &= \underset{3}{A}{}^{i}_{jmn} + \delta^{i}_{m}\rho_{jn} - \delta^{i}_{n}\rho_{jm} + \rho^{i}_{m}g_{\underline{jn}} - \rho^{i}_{n}g_{\underline{jm}} \\
&+ \rho_p[\frac{1}{2}(\delta^{i}_{m}T^{p}_{jn} - \delta^{i}_{n}T^{p}_{jm}) + \frac{1}{2}g^{\underline{is}}(T^{p}_{sm}g_{\underline{jn}} - T^{p}_{sn}g_{\underline{jm}}) + g^{\underline{ip}}T_{j.mnsm} \qquad (6.2.56)\\
&+ g^{\underline{ps}}(g_{\underline{jn}}T^{i}_{jn} - g_{\underline{jm}}T^{i}_{sn})] + T^{i}_{jn}\rho_m - T^{i}_{jm}\rho_n + T^{i}_{mn}\rho_j.
\end{aligned}$$

Теорема 6.2.5. *При ЕТ конформној трансформацији* $\bar{g}_{ij} = \rho^2 g_{ij}$ *у* GR_N*, псеудотензор* $\underset{3}{A}{}^{i}_{jmn}$*, добија облик* (6.2.56).

Контракција $i = m$ даје

$$\begin{aligned}
\underset{3}{\bar{A}}{}^{i}_{jmn} &= \underset{3}{A}{}^{i}_{jmn} + \rho_{jm} - N\rho_{jm} + \rho_{jm} - \rho^{i}_{i}g_{\underline{jm}} \\
&+ \rho_p[\frac{1}{2}(T^{p}_{jm} - NT^{p}_{jm}) + \frac{1}{2}(T^{p}_{jm} - g^{\underline{is}}T^{p}_{si}g_{\underline{jm}}) + g^{\underline{ip}}T_{j.mi} \\
&+ g^{\underline{ps}}T_{j.sm}] - T^{i}_{jm}\rho_i,
\end{aligned}$$

одакле

$$\underset{3}{\bar{A}}_{jm} = \underset{3}{A}{}^{i}_{jm} + \rho_{jm}(2 - N) - \frac{N}{2}T^{p}_{jm}\rho_p - \rho^{p}_{p}g_{\underline{jm}}, \qquad (6.2.57)$$

а одавде композицијом одговарајућих страна са $\rho^2\bar{g}^{\underline{jm}} = g^{\underline{jm}}$, следи из (6.2.57),

$$\rho^{p}_{p} = \frac{1}{2(N-1)}(\underset{3}{A} - \rho^2\underset{3}{\bar{A}}). \qquad (6.2.58)$$

Ако ово заменимо из (6.2.58) у (6.2.57), добијамо

$$\rho_{jm} = \frac{1}{N-2}[\underset{3}{A}_{jm} - \underset{3}{\bar{A}}_{jm} - \frac{N}{2}T^{p}_{jm}\rho_p - \frac{1}{2(N-1)}(\underset{3}{A} - \rho^2\underset{3}{\bar{A}})g_{\underline{jm}}]. \qquad (6.2.59)$$

Сменом ρ_{jm} у (6.2.56) следи

$$\begin{aligned}\underset{3}{\bar{A}}{}^i_{jmn} =& \underset{3}{A}{}^i_{jmn} + \delta^i_m \frac{1}{N-2}[\underset{3}{A}{}_{jn} - \underset{2}{\bar{A}}{}_{jn} + \frac{N}{2} T^p_{jn}\rho_p - \frac{1}{2(N-1)}(\underset{3}{A} - \rho^2 \underset{3}{\bar{A}}) g_{\underline{jn}}]\\ &- \delta^i_n \frac{1}{N-2}[\underset{3}{A}{}_{jm} - \underset{3}{\bar{A}}{}_{jm} - \frac{N}{2} T^p_{jm}\rho_p - \frac{1}{2(N-1)}(\underset{3}{A} - \rho^2 \underset{3}{\bar{A}}) g_{\underline{jm}}]\\ &+ g_{\underline{jn}} \frac{1}{N-2}[\underset{3}{A}{}^i_m - \rho^2 \underset{3}{\bar{A}}{}^i_m + \frac{N}{2} g^{\underline{is}} T^p_{sm}\rho_p - \frac{1}{2(N-1)}(\underset{3}{A} - \rho^2 \underset{3}{\bar{A}}) \delta^i_m]\\ &- g_{\underline{jm}} \frac{1}{N-2}[\underset{3}{A}{}^i_n - \rho^2 \underset{3}{\bar{A}}{}^i_n + \frac{N}{2} g^{\underline{is}} T^p_{sn}\rho_p - \frac{1}{2(N-1)}(\underset{2}{A} - \rho^2 \underset{2}{\bar{A}}) \delta^i_n]\\ &+ \rho_p[\frac{1}{2}(\delta^i_m T^p_{jn} - \delta^i_n T^p_{jm}) + \frac{1}{2} g^{\underline{is}}(T^p_{sm} g_{\underline{jn}} - T^p_{sn} g_{\underline{jm}}) + g^{\underline{ip}} T_{j.mn}\\ &+ g^{\underline{ps}}(g_{\underline{jn}} T^i_{jn} - g_{\underline{jm}} T^i_{sn})] + T^i_{jn}\rho_m - T^i_{jm}\rho_n + T^i_{mn}\rho_j.\end{aligned}$$

На основу изложеног, користећи одговарајуће вредности за $\rho_p, \rho_m, \rho_n, \rho_j$ закључујемо да важи следећа теорема:

Теорема 6.2.6. *Величина*

$$\begin{aligned}{}^P\underset{3}{C}{}^i_{jmn} =& \underset{3}{A}{}^i_{jmn} + \frac{1}{N-2}[\delta^i_m \underset{3}{A}{}_{jn} - \delta^i_n \underset{3}{A}{}_{jm} + \underset{3}{A}{}^i_m g_{\underline{jn}} - \underset{3}{A}{}^i_n g_{\underline{jm}}\\ &+ \frac{1}{2}\Gamma^t_{pt}(\delta^i_m T^p_{jn} - \delta^i_n T^p_{jm} + g^{\underline{is}} g_{\underline{jn}} T^p_{sm} - g^{\underline{is}} g_{\underline{jm}} T^p_{sn})]\\ &- \frac{1}{(N-1)(N-2)} \underset{3}{A}{}^i_{jmn}(\delta^i_m g_{\underline{jn}} - \delta^i_n g_{\underline{jm}})\\ &- \frac{1}{N}\{\Gamma^t_{pt}[\frac{1}{2}(\delta^i_m T^p_{jn} - \delta^i_n T^p_{jm}) + \frac{1}{2} g^{\underline{is}}(g_{\underline{jm}} T^p_{sn} - g_{\underline{jn}} T^p_{sm}) + g^{\underline{ip}} T_{j.mn}\\ &+ g^{\underline{ps}}(g_{\underline{jn}} T^i_{sm} - g_{\underline{jm}} T^i_{sn})] + \Gamma^t_{nt} T^i_{jm} - \Gamma^t_{mt} T^i_{jn} - \Gamma^t_{jt} T^i_{mn}\}\end{aligned} \tag{6.2.60}$$

је инваријанта ЕТ конформне трансформације у GR_N, *тј. важи*

$$\overline{{}^P\underset{3}{C}}{}^i_{jmn} = {}^P\underset{3}{C}{}^i_{jmn}. \tag{6.2.61}$$

Дефиниција 6.2.3. *Величину* ${}^P\underset{3}{C}{}^i_{jmn}$ *зовемо* **ЕТ конформни псеудотензор** *III* **врсте** *у* GR_N.

6.2.4 Псеудотензор VI врсте и ЕТ конформни псеудотензори VI врсте

Аналогно претходном случају имамо

$$\underset{6}{A} - R + 2\mathcal{D} + 2\mathcal{F} + 2\mathcal{F}' = A + A' + B - B', \tag{6.2.62}$$

$$\begin{aligned}\underset{6}{\bar{A}}{}^i_{jmn} &= \underset{6}{A}{}^i_{jmn} + S^i_{jmn} + (\bar{\Gamma}^p_{\underline{mn}} - \Gamma^p_{\underline{mn}})\bar{T}^i_{jp} + (\bar{\Gamma}^i_{\underline{pn}} - \Gamma^p_{\underline{pn}})\bar{T}^p_{mj} + (\bar{\Gamma}^i_{\underline{pm}} - \Gamma^i_{\underline{pm}})\bar{T}^p_{nj}\\ &= \underset{6}{A}{}^i_{jmn} + S^i_{jmn} + (\delta^p_m\rho_n + \delta^p_n\rho_m - \rho^p g_{\underline{mn}})\bar{T}^i_{jp}\\ &+ (\delta^i_p\rho_n + \delta^i_n\rho_p - \rho^i g_{\underline{pn}})\bar{T}^p_{mj} + (\delta^i_p\rho_m + \delta^i_m\rho_p - \rho^i g_{\underline{pm}})\bar{T}^p_{nj},\end{aligned} \tag{6.2.63}$$

где је

$$S^i_{jmn} = \bar{R}^i_{jmn} - R^i_{jmn} = \delta^i_m\rho_{jn} - \delta^i_n\rho_{jm} - \rho^i_m g_{\underline{jn}} - \rho^i_n g_{\underline{jm}}. \tag{6.2.64}$$

Сређивањем по ρ_m, ρ_n, ρ_p добијамо

$$\begin{aligned}\underset{6}{\bar{A}}{}^i_{jmn} = \underset{6}{A}{}^i_{jmn} + S^i_{jmn} + \rho_p[\delta^i_n T^p_{mj} + \delta^i_m T^p_{nj}\\ + g^{\underline{ps}} g_{\underline{mn}} T^i_{sj} + g^{\underline{ps}}(g_{\underline{sm}} T^p_{nj} + g_{\underline{sm}} T^p_{nj})].\end{aligned} \tag{6.2.65}$$

Дакле, важи:

Теорема 6.2.7. *При ЕТ конформној трансформацији у* GR_N *псеудотензор* $\underset{6}{A}{}^i_{jmn}$ *добија облик* (6.2.65), *где је тензор* S^i_{jmn} *дат у* (6.2.64).

Ако узмемо у обзир (6.2.65) и ставимо $i = n$, следи

$$\underset{6}{\bar{A}}{}_{jm} = \underset{6}{A}{}_{jm} + (2 - N)\rho_{jm} - \rho^p_p g_{\underline{jm}} + \rho_p T^p_{mj}(N - 2). \tag{6.2.66}$$

Композицијом претходне једначине са $\rho^2 \bar{g}^{\underline{jm}} = g^{\underline{jm}}$, следи

$$\rho^p_p = \frac{1}{2(N-1)}(\underset{6}{A} - \rho^2 \underset{6}{\bar{A}}). \tag{6.2.67}$$

Ако ово заменимо у (6.2.66), добијамо

$$\rho_{jm} = \frac{1}{N-2}[\underset{6}{A}_{jm} - \underset{6}{\bar{A}}_{jm} + 2\rho_p T^p_{mj} - \frac{1}{2(N-1)}(\underset{6}{A} - \rho^2 \underset{6}{\bar{A}}) g_{\underline{jm}}], \tag{6.2.68}$$

а заменом из (6.2.68) у (6.2.66) следи да важи:

Теорема 6.2.8. *Величина*

$$\begin{aligned} {}^P\underset{6}{C}{}^i_{jmn} = \underset{6}{A}{}^i_{jmn} &+ \frac{1}{N-2}[\delta^i_m \underset{6}{A}_{jn} - \delta^i_n \underset{6}{A}_{jm} + \underset{6}{A}{}^i_m g_{\underline{jn}} - \underset{6}{A}{}^i_n g_{\underline{jm}} \\ &- \frac{1}{(N-1)(N-2)}\underset{6}{A}(\delta^i_m g_{\underline{jn}} - \delta^i_n g_{\underline{jm}}) \\ &- \frac{2}{N(N-2)}\Gamma^t_{pt}(\delta^i_m T^p_{jn} - \delta^i_n T^p_{jm}) + g^{\underline{is}} g_{\underline{jn}} T^p_{sm} - g^{\underline{is}} g_{\underline{jm}} T^p_{sn}) \\ &+ \frac{1}{N}\Gamma^t_{pt}[\delta^i_n T^p_{mj} + \delta^i_m T^p_{nj} + g^{\underline{is}}(g_{\underline{sm}} T^s_{jn} - g_{\underline{sn}} T^s_{mj})] \end{aligned} \tag{6.2.69}$$

је инваријанта ЕТ конформне трансформације у GR_N, тј. важи

$$\overline{{}^P\underset{6}{C}}{}^i_{jmn} = {}^P\underset{6}{C}{}^i_{jmn}. \tag{6.2.70}$$

Дефиниција 6.2.4. *Величину* ${}^P\underset{6}{C}{}^i_{jmn}$ *зовемо* **ЕТ конформни тензор** VI **врсте** *у* GR_N.

6.2.5 Псеудотензор VII врсте и ЕТ конформни псеудотензори VII врсте

У овом случају имамо

$$\underset{7}{A} - R + 2\mathcal{E}' = A + A' + B + B', \tag{6.2.71}$$

Одакле добијамо

$$\underset{7}{\bar{A}}{}^i_{jmn} = \underset{7}{A}{}^i_{jmn} + S^i_{jmn} + T^i_{jm}\rho_n + T^i_{nm}\rho_j - g_{\underline{jn}} g^{\underline{ps}} T^i_{sm}\rho_p. \tag{6.2.72}$$

Дакле, важи:

Теорема 6.2.9. *При ЕТ конформној трансформацији у* GR_N *псеудотензор* $\underset{7}{A}{}^i_{jmn}$ *добија облик* (6.2.72), *где је тензор* S^i_{jmn} *дат у* (6.2.64).

Композицијом једначине

$$\underset{7}{\bar{A}}_{jm} = \underset{7}{A}_{jm} + (2-N)\rho_{jm} - \rho^p_p g_{\underline{jm}} + T^p_{jm}\rho_p$$

са $\rho^2 \bar{g}^{\underline{jm}} = g^{\underline{jm}}$, долазимо до

$$\rho^p_p = \frac{1}{2(N-1)}(\underset{7}{A} - \rho^2 \underset{7}{\bar{A}}) \tag{6.2.73}$$

и даље, аналогно претходном случају, добијамо

$$\rho_{jm} = \frac{1}{N-2}[\underset{7}{A}_{jm} - \underset{7}{\bar{A}}_{jm} + 2\rho_p T^p_{mj} - \frac{1}{2(N-1)}(\underset{7}{A} - \rho^2 \underset{7}{\bar{A}}) g_{\underline{jm}}]. \tag{6.2.74}$$

Као у претходним случајевима, заменом (6.2.74) у (6.2.72) закључујемо да важи:

Теорема 6.2.10. *Величина*

$$\begin{aligned}
{}^{P}\underset{7}{C}{}^{i}_{jmn} = \underset{7}{A}{}^{i}_{jmn} &+ \frac{1}{N-2}[\delta^i_m \underset{7}{A}_{jn} - \delta^i_n \underset{7}{A}_{jm} + \underset{7}{A}{}^{i}_{m} g_{\underline{jn}} - \underset{7}{A}{}^{i}_{n} g_{\underline{jm}} \\
&- \frac{1}{(N-1)(N-2)}\underset{7}{A}(\delta^i_m g_{\underline{jn}} - \delta^i_n g_{\underline{jm}}) \\
&- \frac{2}{N(N-2)}\Gamma^t_{pt}(\delta^i_m T^p_{jn} - \delta^i_n T^p_{jm}) + g^{\underline{is}} g_{\underline{jn}} T^p_{sm} - g^{\underline{is}} g_{\underline{jm}} T^p_{sn}) \\
&+ \frac{1}{N}(\Gamma^t_{jt} T^i_{mn} - \Gamma^t_{nt} T^i_{jm} + \Gamma^t_{pt} g_{\underline{jn}} g^{\underline{ps}} T^i_{jm})
\end{aligned} \tag{6.2.75}$$

је инваријанта ЕТ конформне трансформације у GR_N, тј. важи

$$\overline{{}^{P}\underset{7}{C}}{}^{i}_{jmn} = {}^{P}\underset{7}{C}{}^{i}_{jmn}. \tag{6.2.76}$$

Дефиниција 6.2.5. *Величину* ${}^{P}\underset{7}{C}{}^{i}_{jmn}$ *зовемо* **ЕТ конформни псеудотензор** *VII* **врсте** *у GR_N.*

Напомена: Као што знамо, у случају Римановог простора R_N сви псеудотензори кривине $\underset{\theta}{A}{}^{i}_{jmn}$ своде се на Риманов тензор кривине R^i_{jmn}. Ако погледамо једначине за ${}^{P}\underset{\theta}{C}{}^{i}_{jmn}$, видимо да се за $T=0$, тј. у R_N из тих једначина добија вредност C^i_{jmn} .

ГЛАВА 7

ЕТ конциркуларна трансформација псеудотензора кривине

У овој глави се разматрају ЕТ конциркуларне трансформације псеудотензора кривине и одређују инваријанте такве трансформације, ЕТ конциркуларни псеудотензори I, II, III, VI, VII врсте.

7.1 ЕТ конциркуларни псеудотензори I врсте

Као што смо видели у (6.2.19) псеудотензор кривине у GR_N гласи

$$\underset{1}{A}{}^i_{jmn} = \Gamma^i_{jm,n} - \Gamma^i_{jn,m} + \Gamma^p_{jm}\Gamma^i_{np} - \Gamma^p_{jn}\Gamma^i_{mp}, \tag{7.1.1}$$

а њихова конформна трансформација је дата у (6.2.29). Да би поменута трансформација била конциркуларна, као и до сада, узимамо

$$\rho_{jm} \equiv \rho_{j;m} - \rho_j\rho_m + \frac{1}{2}\rho_p\rho^p g_{\underline{jm}} = \underset{1}{\Phi} g_{\underline{jm}}, \tag{7.1.2}$$

па из (6.2.29) добијамо

$$\begin{aligned}\underset{1}{\bar{A}}{}^i_{jmn} = {}& \underset{1}{A}{}^i_{jmn} + 2\underset{1}{\Phi}(\delta^i_m g_{\underline{jn}} - \delta^i_n g_{\underline{jm}})\\ & - \frac{1}{2}(\delta^i_m T^p_{jn} - \delta^i_n T^p_{jm} - g_{\underline{jn}} g^{\underline{is}} T^p_{sm} + g_{\underline{jm}} g^{\underline{is}} T^p_{sn})\rho_p\\ & - \rho^i T_{j.mn} + K^i_{jmn},\end{aligned} \tag{7.1.3}$$

где је K^i_{jmn} дато у (6.2.30).

Контракција са $i = n$ даје

$$\begin{aligned}\underset{1}{\bar{A}}_{jm} &= \underset{1}{A}_{jm} + 2\underset{1}{\Phi}(g_{\underline{jm}} - N g_{\underline{jm}})\\ &\quad - \frac{1}{2}(T^p_{jm} - NT^p_{jm} - \delta^s_j T^p_{sm} + g_{\underline{jm}} g^{\underline{is}} T^p_{si})\rho_p\\ &\quad - g^{\underline{ip}}\rho_p T_{j.mi} + T^i_{jm}\rho_i - T^i_{ji}\rho_m - T^i_{mi}\rho_j,\end{aligned}$$

тј.

$$\underset{1}{\bar{A}}_{jm} = \underset{1}{A}_{jm} + 2(1-N) g_{\underline{jm}} \underset{1}{\Phi} + \frac{1}{2}(NT^p_{jm} - g_{\underline{jm}} g^{\underline{is}} T^p_{si} - 2g^{\underline{ip}} T_{j.mi})\rho_p + T^i_{jm}\rho_i \tag{7.1.4}$$

Множењем одговарајућих страна у (7.1.4) са

$$\rho^2 \bar{g}^{\underline{jm}} = g^{\underline{jm}} \tag{7.1.5}$$

и узимајући у обзир (6.2.32), добијамо

$$\rho^2 \underset{1}{\bar{A}} = \underset{1}{A} + 2(1-N)N\underset{1}{\Phi},$$

одакле је

$$2\underset{1}{\Phi} = \frac{\underset{1}{A} - \rho^2 \underset{1}{\bar{A}}}{(N-1)N}. \tag{7.1.6}$$

Ако вредност $2\underset{1}{\Phi}$ из (7.1.6) заменимо у (7.1.3), средимо по $\rho_p, \rho_n, \rho_m, \rho_j$, користећи (6.2.30), добија се

$$\begin{aligned}\underset{1}{\bar{A}}^i_{jmn} &= \underset{1}{A}^i_{jmn} + \frac{\underset{1}{A} - \rho^2 \underset{1}{\bar{A}}}{(N-1)N}(\delta^i_m g_{\underline{jn}} - \delta^i_n g_{\underline{jm}})\\ &\quad - \frac{1}{2}(\delta^i_m T^p_{jn} - \delta^i_n T^p_{jm} - g_{\underline{jn}} g^{\underline{is}} T^p_{sm} + g_{\underline{jm}} g^{\underline{is}} T^p_{sn} + 2g^{\underline{ip}} T_{j.mn})\rho_p\\ &\quad + T^i_{jm}\rho_n - T^i_{jn}\rho_m - T^i_{mn}\rho_j.\end{aligned} \tag{7.1.7}$$

Користећи вредности за $\rho_j, \rho_m, \rho_n, \rho_p$, према (3.1.9), из (7.1.7) долазимо до закључка да важи следећа теорема.

Теорема 7.1.1. *Величина*

$$\begin{aligned}{}^{P}\underset{1}{Z}{}^{i}_{jmn} &= \underset{1}{A}{}^{i}_{jmn} + \underset{1}{A}\frac{\delta^{i}_{m}g_{\underline{jn}} - \delta^{i}_{n}g_{\underline{jm}}}{(N-1)N}\\ &+ \frac{\Gamma^{t}_{pt}}{2N}[\delta^{i}_{m}T^{p}_{jn} - \delta^{i}_{n}T^{p}_{jm} + (g_{\underline{jm}}(T^{p}_{sn} - g_{\underline{jn}}(T^{p}_{sm})g^{\underline{is}} + 2g^{\underline{ip}}T_{j.mn}]\\ &+ \frac{1}{N}(\Gamma^{t}_{jt}T^{i}_{mn} + \Gamma^{t}_{mt}T^{i}_{jn} - \Gamma^{t}_{mn}T^{i}_{jm})\end{aligned} \tag{7.1.8}$$

је **инваријанта ЕТ конциркуларне трансформације** *у* GR_N, *тј. важи*

$$\overline{{}^{P}\underset{1}{Z}}{}^{i}_{jmn} = {}^{P}\underset{1}{Z}{}^{i}_{jmn}. \tag{7.1.9}$$

Дефиниција 7.1.1. *Величину* ${}^{P}\underset{1}{Z}{}^{i}_{jmn}$ *зовемо* **ЕТ конциркуларни псеудотензор** I **врсте** *у* GR_N.

7.2 ЕТ конциркуларни псеудотензори II врсте

Посматрајмо псеудотензор $\underset{2}{A}{}^{i}_{jmn}$ за који желимо да вршимо конциркуларну трансформацију

$$\underset{2}{A}{}^{i}_{jmn} = \Gamma^{i}_{jm,n} - \Gamma^{i}_{jn,m} + \Gamma^{p}_{jm}\Gamma^{i}_{np} - \Gamma^{p}_{jn}\Gamma^{i}_{mp}. \tag{7.2.10}$$

Конформна трансформација је дата у (6.2.43). Аналогно (7.1.2), за конциркуларну трансформацију стављамо

$$\rho_{jm} = \underset{2}{\Phi}g_{\underline{jm}}, \tag{7.2.11}$$

па из (6.2.43) следи

$$\begin{aligned}\underset{2}{\bar{A}}{}^{i}_{jmn} &= \underset{2}{A}{}^{i}_{jmn} + 2\underset{2}{\Phi}(\delta^{i}_{m}g_{\underline{jn}} - \delta^{i}_{n}g_{\underline{jm}})\\ &+ \frac{1}{2}(\delta^{i}_{m}T^{p}_{jn} - \delta^{i}_{n}T^{p}_{jm} - g_{\underline{jn}}g^{\underline{is}}T^{p}_{sm} + g_{\underline{jm}}g^{\underline{is}}T^{p}_{sn})\rho_{p}\\ &+ \rho^{i}T_{j.mn} - K^{i}_{jmn},\end{aligned} \tag{7.2.12}$$

где је K^{i}_{jmn} дато у (6.2.30).

Контракција са $i = n$ даје

$$\begin{aligned}\underset{2}{\bar{A}}_{jm} &= \underset{2}{A}_{jm} + 2\underset{2}{\Phi}(1-N)g_{\underline{jm}}\\ &+ \frac{1}{2}(-NT^p_{jm} + g_{\underline{jm}}g^{\underline{is}}T^p_{si} + 2g^{\underline{ip}}T_{j.mi})\rho_p - T^i_{jm}\rho_i,\end{aligned}$$

а настављајући као у претходном случају, следи

$$2\underset{2}{\Phi} = \frac{\underset{2}{A} - \rho^2\underset{2}{\bar{A}}}{(N-1)N}. \tag{7.2.13}$$

Заменом вредности (7.2.13 у (7.2.12), добијамо

$$\begin{aligned}\underset{2}{\bar{A}}{}^i_{jmn} &= \underset{2}{A}{}^i_{jmn} + \frac{\underset{2}{A} - \rho^2\underset{2}{\bar{A}}}{(N-1)N}(\delta^i_m g_{\underline{jn}} - \delta^i_n g_{jm})\\ &+ \frac{1}{2}(\delta^i_m T^p_{jn} - \delta^i_n T^p_{jm} - g_{\underline{jn}}g^{\underline{is}}T^p_{sm} + g_{\underline{jm}}g^{\underline{is}}T^p_{sn})\rho_p\\ &+ g^{\underline{ip}}T_{j.mn}\rho_p - T^i_{jm}\rho_n - T^i_{jn}\rho_m + T^i_{mn}\rho_j.\end{aligned} \tag{7.2.14}$$

па као у претходном случају закључујемо да важи

Теорема 7.2.1. *Величина*

$$\begin{aligned}{}^{P}\underset{2}{Z}{}^i_{jmn} &= \underset{2}{A}{}^i_{jmn} + \underset{2}{A}\frac{\delta^i_m g_{\underline{jn}} - \delta^i_n g_{\underline{\underline{jm}}}}{(N-1)N}\\ &+ \frac{\Gamma^t_{pt}}{2N}[\delta^i_m T^p_{jn} - \delta^i_n T^p_{jm} + g^{\underline{is}}(g_{\underline{jm}}(T^p_{sn} - g_{\underline{jn}}(T^p_{sm})) + 2g^{\underline{ip}}T_{j.mn}]\\ &- \frac{1}{N}(\Gamma^t_{jt}T^i_{mn} + \Gamma^t_{mt}T^i_{jn} - \Gamma^t_{nt}T^i_{jm})\end{aligned} \tag{7.2.15}$$

је **инваријанта ЕТ конциркуларне трансформације** *у GR_N, тј. важи*

$$\overline{{}^{P}\underset{2}{Z}}{}^i_{jmn} = {}^{P}\underset{2}{Z}{}^i_{jmn} \tag{7.2.16}$$

Дефиниција 7.2.1. *Величину* ${}^{P}\underset{2}{Z}{}^i_{jmn}$ *зовемо* **ЕТ конциркуларни псеудотензор** *II* **врсте** *у GR_N.*

7.3 ЕТ конциркуларни псеудотензори *III* врсте

Конформна трансформација псеудотензора

$$\underset{3}{A}{}^i_{jmn} = \Gamma^i_{mj,n} - \Gamma^i_{nj,m} + \Gamma^p_{mj}\Gamma^i_{pn} - \Gamma^p_{nj}\Gamma^i_{pm}, \tag{7.3.17}$$

је дата у (6.2.55). Сада вршимо конциркуларну трансформацију стављајући у (6.2.55)

$$\rho_{jm} = \underset{3}{\Phi} g_{\underline{jm}}, \tag{7.3.18}$$

па добијамо

$$\begin{aligned}\underset{3}{\bar{A}}{}^i_{jmn} &= \underset{3}{A}{}^i_{jmn} + 2\underset{3}{\Phi}(\delta^i_m g_{\underline{jn}} - \delta^i_n g_{\underline{jm}})\\ &+ \rho_p[\frac{1}{2}(\delta^i_m T^p_{jn} - \delta^i_n T^p_{jm} - g_{\underline{jn}} g^{\underline{is}} T^p_{sm}) + g^{\underline{ip}} T_{j.mn} + g^{\underline{ps}}(T^i_{sm} g_{\underline{jn}} - T^i_{sn} g_{\underline{jm}})]\\ &+ T^i_{jn}\rho_m - T^i_{jm}\rho_n + T^i_{mn}\rho_j.\end{aligned} \tag{7.3.19}$$

Контракцијом са $i = n$ (7.3.19) даје

$$\begin{aligned}\underset{3}{\bar{A}}{}_{jm} &= \underset{3}{A}{}_{jm} + 2\underset{3}{\Phi}(1-N) g_{\underline{jm}} + \rho_p[\frac{1}{2}(T^p_{jm} - NT^p_{jm} + \delta^s_j T^p_{sm}\\ &- g_{\underline{jm}} g^{\underline{is}} T^p_{si}) + g^{\underline{ip}} T_{j.mi} + g^{\underline{ps}}(T_{j.sm} - T^i_{si} g_{\underline{jm}})] - T^i_{jm}\rho_i,\end{aligned} \tag{7.3.20}$$

Узмимо у обзир (6.2.32), тј. да је $g^{\underline{is}} T^p_{si}\rho_p = g^{\underline{is}} T_{p.si}\rho_p = -g^{\underline{is}} T_{i.sp}\rho^p = 0$, па извршимо композицију ј-не (7.3.20) са $\rho^2 \bar{g}^{\underline{jm}} g^{\underline{im}}$, одакле

$$2\underset{3}{\Phi} = \frac{\underset{3}{A} - \rho^2 \underset{3}{\bar{A}}}{(N-1)N}. \tag{7.3.21}$$

Заменимо ове вредности у (7.3.19), а такође заменимо и вредности за $\rho_j, \rho_m, \rho_n, \rho_p$, па као у претходном случају закључујемо да важи

Теорема 7.3.1. *Величина*

$$\begin{aligned}{}^P\underset{3}{Z}{}^i_{jmn} &= \underset{3}{A}{}^i_{jmn} + \underset{2}{A}\frac{\delta^i_m g_{\underline{jn}} - \delta^i_n g_{\underline{jm}}}{(N-1)N}\\ &+ \frac{\Gamma^t_{pt}}{2N}[\delta^i_m T^p_{jn} - \delta^i_n T^p_{jm} + g^{\underline{is}}(g_{\underline{jm}}(T^p_{sn} - g_{\underline{jn}}(T^p_{sm})) + 2g^{\underline{ip}} T_{j.mn}]\\ &- \frac{1}{N}(\Gamma^t_{jt} T^i_{mn} + \Gamma^t_{mt} T^i_{jn} - \Gamma^t_{nt} T^i_{jm})\end{aligned} \tag{7.3.22}$$

је **инваријанта ЕТ конциркуларне трансформације** *у* GR_N, *тј. важи*

$$\overline{{}^P\underset{3}{Z}{}^i_{jmn}} = {}^P\underset{3}{Z}{}^i_{jmn}. \tag{7.3.23}$$

Дефиниција 7.3.1. *Величину* ${}^P\underset{3}{Z}{}^i_{jmn}$ *зовемо* **ЕТ конциркуларни псеудотензор** III **врсте** *у* GR_N.

Како је речено на крају секције 6.1 , за независне псеудотензоре кривине у GR_N се могу узети $\underset{1}{A}, \underset{2}{A}, \underset{3}{A}, \underset{6}{A}, \underset{7}{A}$. Сада је на реду разматрање ЕТ конциркуларне трансформације псеудотензора $\underset{6}{A}$.

7.4 ЕТ конциркуларни псеудотензори VI врсте

Према Теореми 6.1.11, при ЕТ конформној трансформацији у GR_N, псеудотензор $\underset{6}{A}{}^i_{jmn}$ добија облик

$$\begin{aligned}\underset{6}{\bar{A}}{}^i_{jmn} &= \underset{6}{A}{}^i_{jmn} + \delta^i_m \rho_{jn} - \delta^i_n \rho_{jm} + \rho^i_m g_{\underline{jn}} - \rho^i_n g_{\underline{jm}} \\ &+ \rho_p(\delta^i_m T^p_{nj} + \delta^i_n T^p_{mj} + g^{\underline{ps}} T^i_{sj} g_{\underline{mn}} + 2g^{\underline{ip}} T_{m.jn}).\end{aligned} \tag{7.4.24}$$

Да бисмо извршили конциркуларну трансформацију у (7.4.24) смењујемо

$$\rho_{jm} = \underset{6}{\Phi} g_{\underline{jm}}, \tag{7.4.25}$$

па добијамо

$$\begin{aligned}\underset{6}{\bar{A}}{}^i_{jmn} &= \underset{6}{A}{}^i_{jmn} + 2\underset{6}{\Phi}(\delta^i_m g_{\underline{jn}} - \delta^i_n g_{\underline{jm}}) \\ &+ \rho_p(\delta^i_m T^p_{nj} + \delta^i_n T^p_{mj} + g^{\underline{ps}} T^i_{sj} g_{\underline{mn}} + 2g^{\underline{ip}} T_{m.jn}).\end{aligned} \tag{7.4.26}$$

Контракцијом са $i = n$ следи

$$\underset{6}{\bar{A}}_{jm} = \underset{6}{A}_{jm} + 2\underset{6}{\Phi}(1-N)g_{\underline{jm}} + \rho_p(T^p_{jm} + NT^p_{mj} + g^{\underline{ps}} T_{n.sj} + g^{\underline{ps}} T_{m.sj}).$$

Композицијом са $\rho^2 \bar{g}^{\underline{jm}} = g^{\underline{jm}}$, одавде се добија

$$2\underset{6}{\Phi} = \frac{\underset{6}{A} - \rho^2 \underset{6}{\bar{A}}}{(N-1)N}. \tag{7.4.27}$$

Заменимо (7.4.27) у (7.4.26) добијамо

$$\begin{aligned}\underset{6}{\bar{A}}{}^i_{jmn} &= \underset{6}{A}{}^i_{jmn} + \frac{\underset{6}{A} - \rho^2 \underset{6}{\bar{A}}}{(N-1)N}(\delta^i_m g_{\underline{jn}} - \delta^i_n g_{\underline{jm}}) \\ &+ \rho_p(\delta^i_m T^p_{nj} + \delta^i_n T^p_{mj} + g^{\underline{ps}} T^i_{sj} g_{\underline{mn}} + 2g^{\underline{ip}} T_{m.jn})\end{aligned} \tag{7.4.28}$$

Ако вредност за ρ_p заменимо према (3.1.9) закључујемо да важи следећа теорема

Теорема 7.4.1. *Величина*

$$\begin{aligned}{}^P\underset{6}{Z}{}^i_{jmn} &= \underset{6}{A}{}^i_{jmn} + \underset{6}{A}\frac{\delta^i_m g_{\underline{jn}} - \delta^i_n g_{\underline{jm}}}{(N-1)N} \\ &+ \frac{\Gamma^t_{pt}}{N}(\delta^i_m T^p_{jn} + \delta^i_n T^p_{jm} + g^{\underline{ps}} T^i_{js} g_{\underline{mn}} + 2g^{\underline{ip}} T_{j.mn})\end{aligned} \tag{7.4.29}$$

је **инваријанта ЕТ конциркуларне трансформације** *у* GR_N, *тј. важи*

$$\overline{{}^P\underset{6}{Z}}{}^i_{jmn} = {}^P\underset{6}{Z}{}^i_{jmn}. \tag{7.4.30}$$

Дефиниција 7.4.1. *Величину* ${}^P\underset{6}{Z}{}^i_{jmn}$ *зовемо* **ЕТ конциркуларни псеудотензор** VI **врсте** *у* GR_N.

7.5 ЕТ конциркуларни псеудотензори VII врсте

Пођимо од Теореме 6.1.13, према којој псеудотензор $\underset{7}{A}{}^i_{jmn}$ при ЕТ конформној трансформацији у GR_N, добија облик

$$\begin{aligned}\underset{7}{\bar{A}}{}^i_{jmn} &= \underset{7}{A}{}^i_{jmn} + \delta^i_m \rho_{jn} - \delta^i_n \rho_{jm} + \rho^i_m g_{\underline{jn}} - \rho^i_n g_{\underline{jm}} \\ &+ T^i_{jm}\rho_n + T^i_{nm}\rho_j + g_{\underline{jn}} g^{\underline{ps}} T^i_{ms}\rho_p.\end{aligned} \tag{7.5.31}$$

Да бисмо извршили конциркуларну трансформацију у (7.5.31) сменјујемо

$$\rho_{jm} = \underset{7}{\Phi} g_{\underline{jm}}, \tag{7.5.32}$$

па добијамо

$$\begin{aligned}\bar{\underset{7}{A}}{}^i_{jmn} &= \underset{7}{A}{}^i_{jmn} + 2\underset{7}{\Phi}(\delta^i_m g_{\underline{jn}} - \delta^i_n g_{\underline{jm}})\\ &\quad + T^i_{jm}\rho_n + T^i_{nm}\rho_j + g_{\underline{jn}} g^{\underline{ps}} T^i_{ms}\rho_p.\end{aligned}\tag{7.5.33}$$

Да бисмо одредили $\underset{7}{\Phi}$, ставимо $i = n$ у (7.5.33)

$$\bar{\underset{7}{A}}_{jm} = \underset{7}{A}_{jm} + 2\underset{7}{\Phi}(1-N)g_{\underline{jm}} + T^i_{jm}\rho_i + g^{\underline{ps}}T_{j.ms}\rho_i.\tag{7.5.34}$$

Композицијом са $\rho^2\bar{g}^{\underline{jm}} = g^{\underline{jm}}$,добијамо

$$2\underset{7}{\Phi} = \frac{\underset{7}{A} - \rho^2\bar{\underset{7}{A}}}{(N-1)N}.\tag{7.5.35}$$

Ако ову вредност за $2\underset{7}{\Phi}$, а такође и ρ_j, ρ_n, ρ_p заменимо према (7.5.33), као у претходним случајевима, добијамо инваријанту ЕТ конциркуларне трансформације

Теорема 7.5.1. *Величина*

$$\begin{aligned}{}^P\underset{7}{Z}{}^i_{jmn} &= \underset{7}{A}{}^i_{jmn} + \underset{7}{A}\frac{\delta^i_m g_{\underline{jn}} - \delta^i_n g_{\underline{jm}}}{(N-1)N}\\ &\quad + \frac{1}{N}(\Gamma^t_{jt}T^i_{mn} - \Gamma^t_{nt}T^i_{jm} + \Gamma^t_{pt}g^{\underline{jn}}g^{\underline{ps}}T^i_{sm})\end{aligned}\tag{7.5.36}$$

је **инваријанта ЕТ конциркуларне трансформације** *у* GR_N, *тј. важи*

$$\overline{{}^P\underset{7}{Z}}{}^i_{jmn} = {}^P\underset{7}{Z}{}^i_{jmn}.\tag{7.5.37}$$

Дефиниција 7.5.1. *Величину* ${}^P\underset{7}{Z}{}^i_{jmn}$ *зовемо* **ЕТ конциркуларни псеудотензор** VII **врсте** *у* GR_N.

У наредном делу ћемо за дати простор $GR_N = (\mathcal{M}_N, g_{ij} \neq g_{ji})$ конформни тензор C^i_{jmn} и конциркуларни тензор Z^i_{jmn} из придруженог простора $R_N = (\mathcal{M}_N, g_{\underline{jm}})$ представити помоћу независног псеудотензора $\underset{\theta}{A}{}^i_{jmn}, \theta = 1, 2, 3, 6, 7$ и торзије $T^i_{jk} = 2\Gamma^i_{\underset{\vee}{jk}}$.

7.6 Представљање конформног тензора C^i_{jmn} помоћу псеудотензора кривине и тензора торзије

Пођимо опет од израза за C^i_{jmn} у придруженом простору R_N, датог у делу 4.1.1. Користићемо независне псеудотензоре кривине $\underset{\theta}{A}$ из Главе 6. Према једначини (6.1.4), имамо

$$\begin{aligned}R^i_{jmn} = \underset{1}{A}{}^i_{jmn} - \Gamma^i_{\underset{\vee}{jm};n} + \Gamma^i_{\underset{\vee}{jn};m} + \Gamma^p_{\underset{\vee}{jm}}\Gamma^i_{\underset{\vee}{pn}} - \Gamma^p_{\underset{\vee}{jn}}\Gamma^i_{\underset{\vee}{pm}}\\ + 2\Gamma^p_{\underline{jm}}\Gamma^i_{\underset{\vee}{pn}} - 2\Gamma^p_{\underline{jn}}\Gamma^i_{\underset{\vee}{pm}},\end{aligned}\tag{7.6.38}$$

одакле контракцијом $i = n = s$, добијамо:

$$R_{jm} = \underset{1}{A}{}_{jm} - \Gamma^s_{jm;s} - \Gamma^p_{\underset{\vee}{js}}\Gamma^s_{\underset{\vee}{pm}} - 2\Gamma^p_{\underline{js}}\Gamma^s_{\underset{\vee}{pm}}.\tag{7.6.39}$$

Композицијом са $g^{\underline{jm}}$, одавде добијамо

$$R = \underset{1}{A} - g^{\underline{jm}}(\Gamma^p_{\underset{\vee}{js}} + 2\Gamma^p_{\underline{js}})\Gamma^s_{\underset{\vee}{pm}}.\tag{7.6.40}$$

Сменом из (7.6.38) – (7.6.40) у (4.1.1) добијамо

$$\begin{aligned}C^i_{jmn} &= \underset{1}{A}{}^i_{jmn} - (\Gamma^i_{\underset{\vee}{jm};n} - \Gamma^p_{\underset{\vee}{jm}}\Gamma^i_{\underset{\vee}{pn}} - 2\Gamma^p_{\underline{jm}}\Gamma^i_{\underset{\vee}{pn}})_{[mn]}\\ &+ \frac{1}{N-2}[\delta^i_m(\underset{1}{A}{}_{jm} - \Gamma^s_{jm;s} - \Gamma^p_{\underset{\vee}{js}}\Gamma^s_{\underset{\vee}{pm}} - 2\Gamma^p_{\underline{js}}\Gamma^s_{\underset{\vee}{pm}})\\ &+ (\underset{1}{A}{}^i_m - g^{\underline{ri}}\Gamma^s_{\underset{\vee}{rm};s} - g^{\underline{ri}}\Gamma^p_{\underset{\vee}{rs}}\Gamma^s_{\underset{\vee}{pm}} - 2g^{\underline{ri}}\Gamma^p_{\underline{rs}}\Gamma^s_{\underset{\vee}{pm}})g_{\underline{jn}}]_{[mn]}\\ &- \frac{1}{(N-2)(N-1)}(\underset{1}{A} - g^{\underline{jm}}\Gamma^p_{\underset{\vee}{js}}\Gamma^s_{\underset{\vee}{pm}} - 2\Gamma^p_{\underset{\vee}{js}}\Gamma^s_{\underset{\vee}{pm}}g^{\underline{jm}})(\delta^i_m g_{\underline{jn}} - \delta^i_n g_{\underline{jm}}).\end{aligned}\tag{7.6.41}$$

Према (6.1.5), имамо

$$\begin{aligned}R^i_{jmn} = \underset{2}{A}{}^i_{jmn} - \Gamma^i_{\underset{\vee}{jm};n} + \Gamma^i_{\underset{\vee}{jn};m} + \Gamma^p_{\underset{\vee}{jm}}\Gamma^i_{\underset{\vee}{pn}} - \Gamma^p_{\underset{\vee}{jn}}\Gamma^i_{\underset{\vee}{pm}}\\ + 2\Gamma^p_{\underset{\vee}{jm}}\Gamma^i_{\underline{pn}} - 2\Gamma^p_{\underset{\vee}{jn}}\Gamma^i_{\underline{pm}},\end{aligned}\tag{7.6.42}$$

$$R_{jm} = \underset{2}{A}{}_{jm} - \Gamma^s_{\underset{\vee}{jm};s} - \Gamma^p_{\underset{\vee}{js}}\Gamma^s_{\underset{\vee}{pm}} - 2\Gamma^p_{\underset{\vee}{js}}\Gamma^s_{\underline{pm}},\tag{7.6.43}$$

$$R = \underset{2}{A} - g^{\underline{jm}}(\underset{\vee}{\Gamma}^p_{js}\underset{\vee}{\Gamma}^s_{pm} + 2\underset{\vee}{\Gamma}^p_{js}\Gamma^s_{\underline{pm}}), \tag{7.6.44}$$

$$\begin{aligned} C^i_{jmn} &= \underset{2}{A}^i_{jmn} - (\underset{\vee}{\Gamma}^i_{jm;n} - \underset{\vee}{\Gamma}^p_{jm}\underset{\vee}{\Gamma}^i_{pn} - 2\Gamma^p_{\underline{jm}}\underset{\vee}{\Gamma}^i_{pn})_{[mn]} \\ &+ \frac{1}{N-2}[\delta^i_m(\underset{2}{A}_{jn} - \Gamma^s_{jn;s} - \underset{\vee}{\Gamma}^p_{js}\underset{\vee}{\Gamma}^s_{pn} - 2\Gamma^p_{\underline{js}}\underset{\vee}{\Gamma}^s_{pn}) \\ &+ (\underset{2}{A}^i_m - g^{\underline{ri}}\underset{\vee}{\Gamma}^s_{rm;s} - g^{\underline{ri}}\underset{\vee}{\Gamma}^p_{rs}\underset{\vee}{\Gamma}^s_{pm} - 2g^{\underline{ri}}\Gamma^p_{\vee rs}\Gamma^s_{\underline{pm}})g_{\underline{jn}}]_{[mn]} \\ &- \frac{1}{(N-2)(N-1)}(\underset{2}{A} - g^{\underline{jm}}\underset{\vee}{\Gamma}^p_{js}\underset{\vee}{\Gamma}^s_{pm} - 2\underset{\vee}{\Gamma}^p_{js}\underset{\vee}{\Gamma}^s_{pm}g^{\underline{jm}})(\delta^i_m g_{\underline{jn}} - \delta^i_n g_{\underline{jm}}). \end{aligned} \tag{7.6.45}$$

На основу израза за $\underset{3}{A}$, из (6.1.6) је

$$\begin{aligned} R^i_{jmn} &= \underset{3}{A}^i_{jmn} + \underset{\vee}{\Gamma}^i_{jm;n} - \underset{\vee}{\Gamma}^i_{jn;m} + \underset{\vee}{\Gamma}^p_{jm}\underset{\vee}{\Gamma}^i_{pn} - \underset{\vee}{\Gamma}^p_{jn}\underset{\vee}{\Gamma}^i_{pm} \\ &- 2\Gamma^p_{\underline{jm}}\Gamma^i_{\underline{pn}} + 2\Gamma^p_{\underline{jn}}\underset{\vee}{\Gamma}^i_{pm}, \end{aligned} \tag{7.6.46}$$

$$R_{jm} = \underset{3}{A}_{jm} - \underset{\vee}{\Gamma}^s_{jm;s} - \underset{\vee}{\Gamma}^p_{js}\underset{\vee}{\Gamma}^s_{pm} - 2\Gamma^p_{\underline{js}}\underset{\vee}{\Gamma}^s_{pm}, \tag{7.6.47}$$

$$R = \underset{3}{A} - g^{\underline{jm}}(\underset{\vee}{\Gamma}^p_{js}\underset{\vee}{\Gamma}^s_{pm} + 2\Gamma^p_{\underline{js}}\underset{\vee}{\Gamma}^s_{pm}), \tag{7.6.48}$$

$$\begin{aligned} C^i_{jmn} &= \underset{3}{A}^i_{jmn} + (\underset{\vee}{\Gamma}^p_{jm;n} - \underset{\vee}{\Gamma}^p_{jm}\underset{\vee}{\Gamma}^i_{pn} - 2\Gamma^p_{\underline{jm}}\underset{\vee}{\Gamma}^i_{pn})_{[mn]} \\ &+ \frac{1}{N-2}[\delta^i_m(\underset{3}{A}_{jn} + \Gamma^s_{jn;s} - \underset{\vee}{\Gamma}^p_{js}\underset{\vee}{\Gamma}^s_{pn} - 2\Gamma^p_{\underline{js}}\underset{\vee}{\Gamma}^s_{pn}) \\ &+ (\underset{3}{A}^i_m - g^{\underline{ri}}\underset{\vee}{\Gamma}^s_{rm;s} - g^{\underline{ri}}\underset{\vee}{\Gamma}^p_{rs}\underset{\vee}{\Gamma}^s_{pm} - 2g^{\underline{ri}}\Gamma^p_{\underline{rs}}\Gamma^s_{\underline{pm}})g_{\underline{jn}}]_{[mn]} \\ &- \frac{1}{(N-2)(N-1)}(\underset{3}{A} - g^{\underline{jm}}\underset{\vee}{\Gamma}^p_{js}\underset{\vee}{\Gamma}^s_{pm} - 2\underset{\vee}{\Gamma}^p_{js}\underset{\vee}{\Gamma}^s_{pm})(\delta^i_m g_{\underline{jn}} - \delta^i_n g_{\underline{jm}}), \end{aligned} \tag{7.6.49}$$

где $[mn]$ значи симетризацију по m, n (без дељења).

Следећи од независних псеудотензора кривине је $\underset{6}{A}^i_{jmn}$. Према (6.1.9) је

$$\begin{aligned} R^i_{jmn} &= \underset{6}{A}^i_{jmn} - \underset{\vee}{\Gamma}^i_{jm;n} - \underset{\vee}{\Gamma}^i_{jn;m} - \underset{\vee}{\Gamma}^p_{jm}\underset{\vee}{\Gamma}^i_{pn} + \underset{\vee}{\Gamma}^p_{jn}\underset{\vee}{\Gamma}^i_{pm} \\ &+ 2\Gamma^p_{\underline{mn}}\Gamma^i_{\underline{pj}} + 2\underset{\vee}{\Gamma}^p_{jm}\Gamma^i_{\underline{pn}} + 2\underset{\vee}{\Gamma}^p_{jn}\Gamma^i_{\underline{pm}}, \end{aligned} \tag{7.6.50}$$

$$R_{jm} = \underset{6}{A}_{jm} - \underset{\vee}{\Gamma}^s_{jm;s} + \underset{\vee}{\Gamma}^p_{js}\underset{\vee}{\Gamma}^s_{pm}, \tag{7.6.51}$$

$$R = \underset{6}{A} - g^{\underline{jm}}\Gamma^{p}_{\underset{\vee}{js}}\Gamma^{s}_{\underset{\vee}{pm}}. \tag{7.6.52}$$

Заменом (7.6.50) – (7.6.52) у (4.1.1), следи

$$\begin{aligned} C^{i}_{jmn} = {} & \underset{6}{A}{}^{i}_{jmn} - \Gamma^{p}_{\underset{\vee}{jm}}\Gamma^{i}_{\underset{\vee}{pn}[mn]} - (\Gamma^{p}_{\underset{\vee}{jm;n}} - \Gamma^{p}_{\underline{mn}}\Gamma^{i}_{\underset{\vee}{pj}} - 2\Gamma^{p}_{\underset{\vee}{jm}}\Gamma^{i}_{\underset{\vee}{pn}})_{[mn]} \\ & + \frac{1}{N-2}[\delta^{i}_{m}(\underset{6}{A}{}_{jn} - \Gamma^{s}_{jn;s} + \Gamma^{p}_{\underset{\vee}{js}}\Gamma^{s}_{\underset{\vee}{pn}}) \\ & + (\underset{6}{A}{}^{i}_{m} - g^{\underline{ri}}\Gamma^{s}_{\underset{\vee}{rm};s} + g^{\underline{ri}}\Gamma^{p}_{\underset{\vee}{rs}}\Gamma^{s}_{\underset{\vee}{pm}})g_{\underline{jn}}]_{[mn]} \\ & - \frac{1}{(N-2)(N-1)}(\underset{6}{A} - g^{\underline{jm}}\Gamma^{p}_{\underset{\vee}{js}}\Gamma^{s}_{\underset{\vee}{pm}}) - (\delta^{i}_{m}g_{\underline{jn}} - \delta^{i}_{n}g_{\underline{jm}}), \end{aligned} \tag{7.6.53}$$

где $[mn]$ значи симетризацију по m, n (без дељења).

Последњи од наведених 5 независних псеудотензора је $\underset{7}{A}{}^{i}_{jmn}$. Према (6.1.10) је

$$R^{i}_{jmn} = \underset{7}{A}{}^{i}_{jmn} - \Gamma^{i}_{\underset{\vee}{jm};n} + \Gamma^{i}_{\underset{\vee}{jn};m} - \Gamma^{p}_{\underset{\vee}{jm}}\Gamma^{i}_{\underset{\vee}{pn}} - \Gamma^{p}_{\underset{\vee}{jn}}\Gamma^{i}_{\underset{\vee}{pm}} - 2\Gamma^{p}_{\underline{jn}}\Gamma^{i}_{\underline{pm}}, \tag{7.6.54}$$

$$R_{jm} = \underset{7}{A}{}_{jm} - \Gamma^{s}_{\underset{\vee}{jm};s} - \Gamma^{p}_{\underset{\vee}{js}}\Gamma^{s}_{\underset{\vee}{pm}} - 2\Gamma^{p}_{\underline{js}}\Gamma^{s}_{\underline{pm}}, \tag{7.6.55}$$

$$R = \underset{7}{A} - g^{\underline{jm}}(\Gamma^{p}_{\underset{\vee}{js}}\Gamma^{s}_{\underset{\vee}{pm}} + 2\Gamma^{p}_{\underline{js}}\Gamma^{s}_{\underline{pm}}). \tag{7.6.56}$$

Заменом (7.6.54) – (7.6.56) у (4.1.1), следи

$$\begin{aligned} C^{i}_{jmn} = {} & \underset{7}{A}{}^{i}_{jmn} - \Gamma^{i}_{\underset{\vee}{jm};n[mn]} - \Gamma^{p}_{\underset{\vee}{jm}}\Gamma^{i}_{\underset{\vee}{pn}[mn]} - 2\Gamma^{p}_{\underset{\vee}{jn}}\Gamma^{i}_{\underset{\vee}{pm}} \\ & + \frac{1}{N-2}[\delta^{i}_{m}(\underset{7}{A}{}_{jn} - \Gamma^{s}_{jn;s} - \Gamma^{p}_{\underset{\vee}{js}}\Gamma^{s}_{\underset{\vee}{pn}} - 2\Gamma^{p}_{\underline{js}}\Gamma^{s}_{\underset{\vee}{pm}}) \\ & + (\underset{7}{A}{}^{i}_{m} - g^{\underline{ri}}\Gamma^{s}_{\underset{\vee}{rm};s} - g^{\underline{ri}}\Gamma^{p}_{\underset{\vee}{rs}}\Gamma^{s}_{\underset{\vee}{pm}}) - 2g^{\underline{ri}}\Gamma^{p}_{\underline{rs}}\Gamma^{s}_{\underset{\vee}{pm}})g_{\underline{jn}}]_{[mn]} \\ & - \frac{1}{(N-2)(N-1)}(\underset{7}{A} - g^{\underline{jm}}\Gamma^{p}_{\underset{\vee}{js}}\Gamma^{s}_{\underset{\vee}{pm}} + 2\Gamma^{p}_{\underline{js}}\Gamma^{s}_{\underset{\vee}{pm}})](\delta^{i}_{m}g_{\underline{jn}} - \delta^{i}_{n}g_{\underline{jm}}), \end{aligned} \tag{7.6.57}$$

где $[mn]$ значи симетризацију по m, n (без дељења). На основу изложеног, важи:

Теорема 7.6.1. *Нека је задат простор* $GR_N = (\mathcal{M}_N, g_{ij} \neq g_{ji})$. *Конформни тензор* C^{i}_{jmn} *из придруженог простора* $R_N = (\mathcal{M}_N, g_{\underline{ij}})$ *представља се помоћу независних псеудотензора кривине* $\underset{\theta}{A}{}^{i}_{jmn}, \theta = 1, 2, 3, 6, 7$ *и торзије* $T^{i}_{jk} = 2\Gamma^{i}_{\underset{\vee}{jk}}$

једначинама (7.6.41), (7.6.45), (7.6.49), (7.6.53), (7.6.57).

7.7 Представљање конциркуларног тензора Z^i_{jmn} помоћу $\underset{\theta}{A}{}^i_{jmn}$ и T^i_{jk}

1.Конциркуларни тензор кривине у R_N, који је придружен за GR_N, дат је на основу [149] са

$$Z^i_{jmn} = R^i_{jmn} + \frac{R(\delta^i_m g_{\underline{jn}} - \delta^i_n g_{\underline{\underline{jm}}})}{(N-1)N}. \tag{7.7.58}$$

Овај тензор ћемо изразити помоћу независних псеудотензора $\underset{1}{A}, \underset{2}{A}, \underset{3}{A}, \underset{6}{A}, \underset{7}{A}$ и торзије T.

Ако према (7.6.38), (7.6.40) извршимо замену у (7.7.58), добијамо

$$\begin{aligned} Z^i_{jmn} &= \underset{1}{A}{}^i_{jmn} - (\Gamma^i_{\underset{\vee}{jm};n} - \Gamma^p_{\underset{\vee}{jm}}\Gamma^i_{\underset{\vee}{pn}} - 2\Gamma^p_{\underline{jm}}\Gamma^i_{\underset{\vee}{pn}})_{[mn]} \\ &+ [\underset{1}{A} - g^{\underline{jm}}\Gamma^s_{\underset{\vee}{pm}}(\Gamma^p_{\underset{\vee}{js}} + 2\Gamma^p_{\underset{\vee}{js}})]\frac{\delta^i_m g_{\underline{jn}} - \delta^i_n g_{\underline{\underline{jm}}}}{(N-1)N}. \end{aligned} \tag{7.7.59}$$

2. Извршимо смену у (7.7.58), према (7.6.42), (7.6.44), добијамо:

$$\begin{aligned} Z^i_{jmn} &= \underset{2}{A}{}^i_{jmn} - (\Gamma^i_{\underset{\vee}{jm};n} - \Gamma^p_{\underset{\vee}{jm}}\Gamma^i_{\underset{\vee}{pn}} - 2\Gamma^p_{\underline{jm}}\Gamma^i_{\underset{\vee}{pn}})_{[mn]} \\ &+ [\underset{2}{A} - g^{\underline{jm}}(\Gamma^p_{\underset{\vee}{js}}\Gamma^s_{\underset{\vee}{pm}} - 2\Gamma^p_{\underset{\vee}{js}}\Gamma^s_{\underset{\vee}{pm}})]\frac{\delta^i_m g_{\underline{jn}} - \delta^i_n g_{\underline{\underline{jm}}}}{(N-1)N}. \end{aligned} \tag{7.7.60}$$

3. На основу (7.7.58), (7.6.46), (7.6.48), добијамо:

$$\begin{aligned} Z^i_{jmn} &= \underset{3}{A}{}^i_{jmn} - (\Gamma^i_{\underset{\vee}{jm};n} + \Gamma^p_{\underset{\vee}{jm}}\Gamma^i_{\underset{\vee}{pn}} - 2\Gamma^p_{\underline{jm}}\Gamma^i_{\underset{\vee}{pn}})_{[mn]} \\ &+ [\underset{3}{A} - g^{\underline{jm}}(\Gamma^p_{\underset{\vee}{js}}\Gamma^s_{\underset{\vee}{pm}} + 2\Gamma^p_{\underset{\vee}{js}}\Gamma^s_{\underset{\vee}{pm}})]\frac{\delta^i_m g_{\underline{jn}} - \delta^i_n g_{\underline{\underline{jm}}}}{(N-1)N}. \end{aligned} \tag{7.7.61}$$

4. Ако сменимо у (7.7.58), на основу (7.6.50), (7.6.52), следи:

$$\begin{aligned} Z^i_{jmn} &= \underset{6}{A}{}^i_{jmn} - (\Gamma^i_{\underset{\vee}{jm};n} - \Gamma^i_{\underset{\vee}{jn};m} - \Gamma^p_{\underset{\vee}{jm}}\Gamma^i_{\underset{\vee}{pn}} + \Gamma^p_{\underline{jn}}\Gamma^i_{\underset{\vee}{pm}} \\ &+ 2\Gamma^p_{\underline{mn}}\Gamma^i_{\underset{\vee}{pj}} + \Gamma^p_{\underset{\vee}{jm}}\Gamma^i_{\underline{pn}} + \Gamma^p_{\underset{\vee}{jn}}\Gamma^i_{\underline{pm}} \\ &+ [\underset{6}{A} - g^{\underline{jm}}(\Gamma^p_{\underset{\vee}{js}}\Gamma^s_{\underset{\vee}{pm}})\frac{\delta^i_m g_{\underline{jn}} - \delta^i_n g_{\underline{jm}}}{(N-1)N}. \end{aligned} \tag{7.7.62}$$

5. На основу (7.7.58), (7.6.46), (7.6.48), добијамо:

$$\begin{aligned} Z^i_{jmn} &= \underset{7}{A}{}^i_{jmn} - (\Gamma^i_{\underset{\vee}{jm};n[mn]} - \Gamma^p_{\underset{\vee}{jm}}\Gamma^i_{\underset{\vee}{pn}[mn]} - 2\Gamma^p_{\underline{jn}}\Gamma^i_{\underset{\vee}{pm}})_{[mn]} \\ &+ [\underset{7}{A} - g^{\underline{jm}}(\Gamma^p_{\underset{\vee}{js}}\Gamma^s_{\underset{\vee}{pm}} + 2\Gamma^p_{\underline{js}}\Gamma^s_{\underset{\vee}{pm}})]\frac{\delta^i_m g_{\underline{jn}} - \delta^i_n g_{\underline{jm}}}{(N-1)N}. \end{aligned} \tag{7.7.63}$$

Према изложеном, важи

Теорема 7.7.1. *Нека је дат простор* $GR_N = (\mathcal{M}_\mathcal{N}, g_{ij} \neq g_{ji})$. *Конциркуларни тензор* Z^i_{jmn} *из придруженог простора* $R_N = (\mathcal{M}_\mathcal{N}, g_{\underline{jm}})$ *представља се помоћу независног псеудотензора* $\underset{\theta}{A}{}^i_{jmn}, \theta = 1, 2, 3, 6, 7$ *и торзије* $T^i_{jk} = 2\Gamma^i_{\underset{\vee}{jk}}$ *једначинама* (7.7.59) – (7.7.63).

ГЛАВА 8

Линеарне конексије са и без торзије, паралелне са интеграбилним ендоморфизмом на многострукости

Наше проучавање је развијено у општем оквиру, а то је многострукост M са $(1,1)$-тензорским пољем φ, које је интеграбилно. Ова глава решава следећи проблем: колико линеарних конексија са торзијом и без торзије, које имају својство да буду паралелне у односу на φ, постоји. За пребројавање свих ових конексија са датим својствима се користе одређене алгебарске технике и резултати.

8.1 Уводна разматрања

З. Душек и О. Ковалски су 2014. године имали идеју да одреде број свих реалних аналитичких афиних конексија са торзијом које постоје локално на глаткој многострукости M димензије n. У њиховом раду [13] фамилије генералних афиних конексија са торзијом и са косо-симетричним Ричијевим тензором, односно симетричним Ричијевим тензором, описане су у терминима броја произвољних функција од n променљивих. Ово истраживање је настављено сличном темом у њиховом раду [14], где су одредили број свих реалних аналитичких еквиафиних конексија са произвољном торзијом које постоје локално на глаткој многострукости M димензије n. Фамилије генералних еквиафиних конексија са косо-симетричним Ричијевим тензором, односно са симетричним Ричијевим тензором, су описане у терминима броја произвољних функција од n променљивих. Касније су се исти аутори бавили тиме колико афиних конексија без торзије постоји у општој димензији, (видети [15]). Још једно интересантно питање је покренуто у раду [16], у вези са питањем колико има Ричијевих равних афиних конексија са произвољном торзијом.

Такође, Припое је у [101] одредио колико лево инваријантних и би-инваријантних конексија постоји на Лијевим групама које задовољавају додатна геометријска својства (као што су без торзије, равност, Ричи-равност и тако даље). Оквир ове студије је инваријантна геометрија на Лијевим групама у којој аутор истражује постојање и непостојање ових геометрија у циљу добијања резултата класификације.

У математичкој литератури постоје многе студије о броју геометријских објеката који имају одређена својства на многострукости. Ми се овде бавимо истом темом, али технике које користимо су потпуно различите. Засновали смо нашу студију на неким алгебарским методама и посебно на Фробенијусовој теореми. Главни објекти којима се бавимо су линеарне конексије које су паралелне са датим интеграбилним $(1,1)$-тензорским пољем. Таква $(1,1)$-тензорска поља могу бити скоро сложене структуре, скоро структуре производа, ф-структуре типа Кентаро Јано, скоро контактне структуре и тако даље. Линеарне конексије које су паралелне са таквим $(1,1)$-тензорским пољем су такође од великог интереса у диференцијалној геометрији, пошто постоје многи добро познати примери, као што је Леви-Чивита конексија на Келеровој многострукости, на пара-Келеровој многострукост и тако даље. Овде разматрамо и конексије са торзијом и без торзије.

Почињемо ову главу са алгебарским приступом, након чега следе примене на Фробенијусову теорему. Даље се говори о структурама на многострукостима датим $(1,1)$-тензорским пољима и о конексијама у односу на које су ове структуре паралелне. Овде излажемо главни проблем, који ће бити решен у одељку 4. Последњи део садржи главни резултат рада. Сви геометријски објекти се узимају као глатки и претпоставља се Ајнштајнова конвенција о сумирању преко поновљених индекса.

8.2 Алгебарски приступ

Да бисмо решили главни проблем наведен у следећем одељку, потребне су нам неке алгебарске припреме. Нека је $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ реална матрица реда n. Затим, централизатор од A, је означен са

$$C(A) = \{X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / XA = AX\}$$

у линеарном простору.

Редуцираћемо главни проблем 3. секције на следеће:

Алгебарски проблем: Израчунај димензију $C(A)$.

Одговор се добија следећим корацима:

Корак 1: Налазимо карактеристични полином $P_A(\lambda)$ од A.

Позивамо се на следеће:

Дефиниција 8.2.1. *Полином једне варијабле чији је коефицијент уз највећи степен један назива се* **монични***.*

Тада $P_A(\lambda)$ има јединствену декомпозицију (до сређивања) у неке несводљиве факторе:

$$P_A(\lambda) = p_1^{s_1}(\lambda) \cdots p_r^{s_r}(\lambda),$$

који су степени неког моничног полинома степена 1 или 2 са реалним коефицијентима.

Корак 2: Придружити матрицу пратећег блока.

С обзиром на, горе поменути, полиномски фактор $p^s(\lambda)$ њему је придружена пратећа блок матрица B чији је карактеристични полином $p^s(\lambda)$.

1. Ако је $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ корен од $P_A(\lambda)$, тада је λ представљен преко блок матрице B заједно са коњугованим $\overline{\lambda}$.

На пример, за монични полином $\lambda^2 + a\lambda + b$ са реалним коефицијентима, али са нереалним коренима, одговарајућа, придружена блок матрица је

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ 1 & -a \end{pmatrix}.$$

2. Ако је $\lambda \in \mathbb{R}$ сопствена вредност за A, чији је ред вишеструкости s једнак димензији властитог простора $V(\lambda)$, тада матрица има облик A који садржи s блокова реда 1, односно (λ). Стога је придружена блок матрица

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}.$$

3. Ако је λ сопствена вредност A чији је ред различит од $dimV(\lambda)$, тада имамо такозвани флаг простор, пошто сопствене вредности генеришу главне векторе.

Из напред датог 1., 2. и 3., закључујемо следеће:

Заључак. *Ако означимо са B придружену блок матрицу од* λ, *тада из Фробенијусове теореме, димензија фактора B* је:

$$\sum_{i=1}^{k} (2i-1) deg f_i, \tag{8.2.1}$$

где су $f_1, \dots, f_k$ инваријанте моничних фактора придружених B тако да f_i дели f_{i-1}, $i = \overline{2,k}$.

Корак 3: $dimC(A)$ је сума фактор датих преко сваког корена λ од $P_A(\lambda)$. Приметимо да када $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, тада је његова фактор узета заједно са коњугованим фактором $\overline{\lambda}$.

8.3 Примена Фробенијусове теореме

У овом одељку користимо формулу (8.2.1) како бисмо израчунали димензију централизатора $C(A)$ за било коју матрицу A реда 2 или 3, како бисмо детаљно показали како овај поступак ради.

Пример 8.3.1. Нека је $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ и нека корени $P_A(\lambda)$ буду $\lambda_{1,2} \in \mathbb{C}$.

Случај *I.* $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$

1) Ако $\lambda_1 \neq \lambda_2$, тада $P_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$. Пошто за сваки $i = 1, 2$, имамо $(\lambda - \lambda_i) = 1$, тада из (8.2.1), фактор λ_i је $(2 \cdot 1 - 1) \cdot 1$ и из секције 8.2., Корак 3, добијамо

$$dimC(A) = 2.$$

2) Ако $\lambda_1 = \lambda_2$, тада је степен λ_1 једнак 2.

а) Ако је $dimV(\lambda_1) \neq 2$, тада је придружена блок мартица по λ_1

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

и његов карактеристични полином $(\lambda - \lambda_1)^2$ је степена 2. Преко (8.2.1), добијамо $dimC(A) = (2 \cdot 1 - 1) \cdot 2 = 2$.

б) Ако је $dimV(\lambda_1) = 2$, тада придружена блок матрица од λ_1 је

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix},$$

која се декомпонизира у 2 блока, која су једнака (λ_1) а њихов карактеристични полином је $f_1 f_2$, где је $f_1 = f_2 = \lambda - \lambda_1$. Приметимо да f_2 дели f_1 и $degf_1 = degf_2 = 1$. Из (8.2.1), добијамо $dimC(A) = (2{\cdot}1{-}1){\cdot}1{+}(2{\cdot}2{-}1){\cdot}1 = 4$.

Случај *II.* Ако $\lambda_{1,2} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$,

тада је $P_A(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b$ полином степена 2, нередуцибилан у $\mathbb{R}$ (где је $a = \lambda_1 + \lambda_2$ и $b = \lambda_1 \lambda_2 \in \mathbb{R}$). Из (8.2.1), имамо $dimC(A) = (2 \cdot 1 - 1) \cdot 2 = 2$.

Пример 8.3.2. Нека је $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ и нека корени $P_A(\lambda)$ буду $\lambda_{1,2,3} \in \mathbb{C}$.

Случај *I.* $\lambda_{1,2,3} \in \mathbb{R}$

1) Ако су сви $\lambda_{1,2,3}$ различити, тада $P_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)((\lambda - \lambda_2)\lambda - \lambda_3)$. Пошто за свако $i = \overline{1,3}$, имамо $deg(\lambda - \lambda_i) = 1$, тада из (8.2.1), фактор λ_i је $(2 \cdot 1 - 1) \cdot 1$ и из секције 8.1., Корак 3, добијамо $dimC(A) = 3$.

2) Ако је $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$, тада је ред вишеструкости λ_1 је 2.

а) Ако је $dimV(\lambda_1) \neq 2$, тада је фактор λ_1 је 4 (као у Примеру 1, Случај I, 2а). Пошто из (8.2.1), фактор λ_3 је $(2 \cdot 1 - 1) \cdot 1 = 1$, тада из секције 8.1, Корак 3, имамо $dimC(A) = 4 + 1 = 5$.

б) Ако је $dimV(\lambda_1) = 2$, тада фактор λ_1 је 2 (као у Примеру 1 , Случај I, 2б). Пошто из (8.2.1), фактор λ_3 је $(2 \cdot 1 - 1) \cdot 1 = 1$, тада из секције 8.1, Корак 3, имамо $dimC(A) = 2 + 1 = 3$.

3) Ако је $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, тада ред вишеструкости λ_1 је 3.

а) Ако $dimV(\lambda_1) = 3$, тада придружена блок матрица од λ_1 је

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix},$$

која садржи 3 блока једнака (λ_1) и $P_A(\lambda) = f_1 f_2 f_3$, где је $f_1 = f_2 = f_3 = \lambda - \lambda_1$. Приметимо да f_3 дели f_2, који дели f_1 и $degf_1 = degf_2 = degf_3$. Из (8.2.1), добијамо $dimC(A) = (2 \cdot 1 - 1) \cdot 1 + (2 \cdot 2 - 1) \cdot 1 + (2 \cdot 3 - 1) \cdot 1 = 9$.

б) Ако је $dimV(\lambda_1) = 2$, тада је придружена блок матрица од λ_1

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

и $P_A(\lambda) = f_1 f_2$, где је $f_1 = (\lambda - \lambda_1)^2$ и $f_2 = \lambda - \lambda_1$. Приметимо да f_2 дели f_1, $degf_1 = 2$ и $degf_2 = 1$. Из (8.2.1), имамо $dimC(A) = (2 \cdot 1 - 1) \cdot 2 + (2 \cdot 2 - 1) \cdot 1 = 2 + 3 = 5$.

в)Ако је $dimV(\lambda_1) = 1$, тада придружена блок матрица од λ_1 је

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

и $P_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^3$ је реда 3. Из (8.2.1), имамо $dimC(A) = (2 \cdot 1 - 1) \cdot 3 = 3$.

Случај II**.** Ако $\lambda_{1,2} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ и $\lambda_3 \in \mathbb{R}$,

тада $P_A(\lambda) = (\lambda^2 + a\lambda + b)(\lambda - 3)$ и (као у Примеру 1., Случај II) фактор λ_1 заједно са $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$, је 2. Из (8.2.1), фактор λ_3 је $(2 \cdot 1 - 1) \cdot 1 = 1$. Из секције 8.1, Корак 3, добијамо $dimC(A) = 2 + 1 = 3$.

8.4 Структуре на многострукостима

На многострукости M, нека је $\mathcal{F}(M)$ прстен свих глатких реалних функција на M и нека је $\chi(M)$ $\mathcal{F}(M)$ - модул свих векторских поља на M. Тада се било које (1,1)-тензорско поље φ на M може посматрати као $\mathcal{F}(M)$-ендоморфизам $\varphi : \chi(M) \to \chi(M)$. У поставци Γ-структура, овде се присећамо следећег појма (види пример 1.6, страница 17 из [8] и такође страницу 77 из [5]):

Дефиниција 8.4.1. *Нека је M n-димензионална многострукост са (1,1)-тензорским пољем φ. Тада се φ назива интеграбилним ако око било које тачке од M постоји локални график $(x^1, \dots, x^n)$ у односу на који φ има константне коефицијенте φ_j^h, $j, h = \overline{1,n}$, дате са:*

$$\varphi(\frac{\partial}{\partial x^j}) = \varphi_j^h(\frac{\partial}{\partial x^h}). \tag{8.4.2}$$

Примедба 8.4.1.

(i) Ако је φ интеграбилан, тада постоји атлас локалних карата $(x^1, \dots, x^n)$ и реална матрица

$$F = \left[\varphi_j^h\right]_{j,h=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

чији су елементи дати релацијом (8.4.2). Другим речима, из дефиниције 8.4.1. следи да је матрица F од φ иста у било којој локалној карти атласа.

(ii) Конкретно, нека је J (односно P) скоро комплексан (односно скоро производ) структура на M, то јест $J^2 = -Id$ (односно $P^2 = Id$ и $P \neq \pm Id$). Тада је J (односно P) комплексна структура на M ако и само ако је задовољен један од следећих еквивалентних услова:

(а) J (респективно P) је интеграбилан;

(б) Нијенхаусово тензорско поље повезано са J (респективно P) нестаје идентично;

(в) Постоји атлас локалних карата на M, у односу на матрицу

$$\left[J_j^h\right]_{j,h=\overline{1,n}}$$

од J (односно

$$\left[P_j^h\right]_{j,h=\overline{1,n}}$$

од P), придружено из релације (8.4.2), задат је

$$\begin{pmatrix} 0 & I_k \\ I_k & 0 \end{pmatrix},$$

односно

$$\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & I_{n-p} \end{pmatrix},$$

где је $2k = n$ (односно p димензија својственог простора која одговара својственој вриједности 1 од P).

Овде се присећамо следећег:

Дефиниција 8.4.2. *Нека је (M, φ) многострукост са $(1,1)$-тензорским пољем. Линеарна конексија ∇ на M је φ-конексија ако је φ паралелна с обзиром на ∇, тј.*

$$\nabla\varphi = 0. \tag{8.4.3}$$

Примедба 8.4.2.

(i) Релација (8.4.3) може се написати као:

$$(\nabla_X\varphi)Y \neq \nabla_X(\varphi Y) - \varphi(\nabla_X Y) = 0, \forall X, Y \in \chi(M) \tag{8.4.4}$$

(*ii*) У локалним координатама, релација (8.4.4) може се написати на следећи начин:

$$\begin{aligned}&(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\varphi)\frac{\partial}{\partial x^j}=0\Leftrightarrow \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}(\varphi\frac{\partial}{\partial x^j})=\varphi\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j}\\ &\Leftrightarrow \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}(\varphi_j^h\frac{\partial}{\partial x^h})=\varphi(\Gamma_{ij}^h\frac{\partial}{\partial x^h})\Leftrightarrow\\ &\Leftrightarrow \frac{\partial\varphi_j^k}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^k}+\varphi_j^h\Gamma_{ih}^k\frac{\partial}{\partial x^k}=\Gamma_{ij}^h\varphi_h^k\frac{\partial}{\partial x^k}\\ &\Leftrightarrow \frac{\partial\varphi_j^k}{\partial x^i}+\varphi_j^h\Gamma_{ih}^k=\Gamma_{ij}^h\varphi_h^k, i,j=\overline{1,n},\end{aligned}\tag{8.4.5}$$

где $(\Gamma_{ij}^k)_{i,j,k=\overline{1,n}}$ означавају Кристофелове коефицијенте за ∇.

(*iii*) Постојање φ-конексије проучава се у математичкој литератури у неколико контекста. На пример, Леви-Чивита конексија метрике g на Келеровој многострукости (M,g,J) (односно пара-Келеровој многострукости (M,g,P)) је $J-$конексија (респективно $P-$конексија).

За разлику од проблема постојања, сада наводимо следеће:

Општи проблем. Колико φ-конексија постоји на многострукости (M,φ) са $(1,1)$-тензорским пољем?

У овом раду решавамо сљедеће:

Главни проблем. Ако је (M,φ) многострукост са интеграбилним (1,1)-тензорским пољем, колико φ-конексија постоји?

8.5 $F-$конексија

У овом одељку, (M,φ) означава n-димензионалну многострукост с интеграбилним (1,1)-тензорским пољем. Из Дефиниције 8.4.1. постоји матрица $F\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ и атлас на M са локалним координатама $(x^1,\ldots,x^n)$ тако да:

$$F=\left[\varphi_j^h\right]_{j,h=\overline{1,n}},\tag{8.5.6}$$

где су $\varphi_j^h,\ j,h=\overline{1,n}$ дати са (8.4.2). Релација (8.5.6) показује да су коефицијенти $\varphi_j^h,\ j,h=\overline{1,n}$ константни.

Према горњим ознакама, из (8.4.5) следи да је линеарна конексија ∇ φ-конексија ако и само ако њени Кристофелови коефицијенти $(\Gamma_{ij}^h)_{i,j,h=\overline{1,n}}$

задовољавају:

$$\varphi_j^h\Gamma_{ih}^k = \Gamma_{ij}^h\varphi_h^k, i, j, k = \overline{1, n} \tag{8.5.7}$$

у горњим локалним координатама. За било који фиксни $i \in \{1, \ldots, n\}$, са G_i означавамо матрицу $(\Gamma_{ij}^h)_{j,h=\overline{1,n}}$.

Будући да је $F \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, нека је $C(F)$ његов централизатор. Дакле, (8.5.7) постаје:

$$FG_i = G_iF, i = \overline{1, n}, \tag{8.5.8}$$

или еквивалентно, $G_i \in C(F)$, $i = \overline{1, n}$.

Нека је $q(F) = dimC(F)$, као што је израчунато у секцији 8.1.

Закључујемо са следећим решењем главног проблема:

Теорема 8.5.1. *Нека је (M, φ) многострукост са интеграбилним $(1, 1)-$тензорским пољем, чија је придружена матрица F. Затим све φ-везе*

(i) са торзијом у димензији n зависе локално о $nq(F)$ произвољним функцијама n варијабли;

(ii) без торзије у димензији $n > q(F)$ зависи локално од највише $nq(F)$ произвољним функцијама од n варијабли;

(iii) без торзије у димензији $n \leq q(F)$ зависи локално од највише $n(q(F)+n)/2$ произвољним функцијама од n варијабли.

Доказ. Нека су $(\Gamma_{ij}^h)_{i,j,h=\overline{1,n}}$ Кристофелови символи φ-конексије. Било који $(\Gamma_{ij}^h)_{i,j,h=\overline{1,n}}$ може се видети као кубна матрица или иначе, као nобичне матрице $G_i = (\Gamma_{ij}^h)_{j,h=\overline{1,n}}$, индексирано с $i = \overline{1, n}$. Горе смо видели да се G_i изводи у $q(F)$-димензионалном простору за било који $i = \overline{1, n}$. Стога је приказано (i). За везе без торзије, једна има симетрију Γ_{ij}^h у односу на i и j. Тада је (ii) доказано. Када је $q(F) \geq n$, тражимо максималну димензију симетричних φ-конексија. У ту сврху, на n^2 уносе с дијагонале $i = j \in \{1, \ldots, n\}$ матрице $(\Gamma_{ii}^h)_{i,h=\overline{1,n}}$, додајемо $(q(F) - n)n/2$ уносе изван ове дијагонале (где смо поделили с 2, на темељу симетрије Γ_{ij}^h с обзиром на i и j). Стога добијамо $n^2 + (q(F) - n)n/2 = n(q(F) + n)/2$, што показује (iii) и довршава доказ.

У следећем примеру показујемо да је постигнут максимум.

Пример 8.5.1. Ако је $n = 2$ и φ идентитет, онда је $q(I) = n^2 = 4 > n$. Може се видети да све φ-везе без торзије локално зависе о $(1 + 2)2 = 6$

произвољним функцијама, док је $n(q(I)+n)/2 = 6$. За φ-конексије с торзијом добијамо $n^3 = nq(I) = 8$.

Овај се пример може генерализовати за било коју димензију. У следећем примеру максимум није постигнут.

Пример 8.5.2. У димензији $n = 2$, свака готово сложена структура је интеграбилна и њен канонски облик је:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Једноставно израчунавање даје:

$C(J) = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}); A = A(a,b) \in \mathbb{R}, a, b \in \mathbb{R}\}$, где $A(a,b)$ означава

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Стога је $q(J) = 2$, што је управо 2-димензионални случај II из Примера. Један има $G_i = A(a_i, b_i), i = 1, 2$, што даје:

(i) било која општа комплексна линеарна конексија зависи од $2 \cdot 2 = 4$ коефицијената (горе означено с $a_i, b_i, i = 1, 2$);

(ii) било која комплексна линеарна конексија без торзије зависи о 2 коефицијента (горе означена с a_1, b_1, будући да из услова симетрије у односу на i и j добијамо $a_2 = -b_1$ и $b_2 = a_1$).

Примедба 8.5.1. Горња студија о J и његовом централизатору $C(J)$ слична је расправи за готово тангентне структуре из [7].

Ово истраживање ће се наставити, где ћемо побројати све линеарне конексије према којима је одређена полуриманова метрика паралелна. Улога коју овде игра $(1,1)-$тензорско поље биће ту замењена полуримановом метриком.

Литература

[1] Andjelić, T. P., *Tenzorski račun*, "Naučna knjiga" Beograd, 1973.

[2] Berezovski, V., Mikeš, J., *On the classification of almost geodesic mappings of affine connected spaces*, Dif. Geom. and Apl., Proc. of the Conf. Dubrovnik, 3, (1988), 41–48.

[3] Bochner, S., Yano, K., *Tensor-fields in non-symmetric connections*, Annals of Math., Vol.56, 3, (1952), 504–519.

[4] Bompiani, E., *Signifacato del tensore di torsione di una connessione affine*, Boll.dell Unione math. Italiana (3), 6, (1973), 273–76.

[5] Borowiec, A., *G-structure for hypermanifold*, In Z. Oziewicz, B. Jancewicz, A. Borowiec (Eds), Spinors, Twistors, Clifford Algebras and Quantum Deformations, Springer, 1993, 75-80.

[6] Brinis, E., *Qualche illustrzione geometrica dello spazio unitario di Einstein*, Rendiconti Ist. lombardo sci.e lett., cl. sci. mat. e natur., Milano, (1955), 88, No 2, 531–538.

[7] Crasmareanu, M., *Nonlinear connections and semisprays on tangent manyfolds*, Novi Sad J. of Math., vol. 33 (2003), no. 2, 11-22.

[8] Crasmareanu, M., *Conjugate covariant derivatives on vector bundles and duality*, Libertas Mathematica, vol. 37 (2017), no. 2, 13-27.

[9] Chakrabarti, P., *On a type of infinitesimal transformation in an affinely connected recurent space with non-vanishing torsion tensor*, Tensor, NS, t.48(1989), 25–29.

[10] Chen, B., Yano, K., *On the theory of normal variations*, J. Differential geometry, 13(1978), 1–10.

[11] Ćirić, M. S., Zlatanović, M. Lj., Stanković, M. S., Velimirović, Lj. S., *On geodesic mappings of equidistant generalized Riemannian spaces*, Applied Mathematics and Computation, 218(12), (2012), 6648–6655.

[12] Domašev, V. V., Mikeš, J., *On the theory of holomorphically projective mappings of Kählerian spaces* (in Russian), Mat. zametki, 23, 2, (1978), 297–304.

[13] Dušek, Z., Kowalski,O., *How many are affine connections with torsion*, Archivum Mathematicum (Brno), Tom 50 (2014) 257-264.

[14] Dušek, Z., Kowalski,O., *How many are equiaffine connections with torsion*, Archivum Mathematicum (Brno), Tom 51 (2015) 265-271.

[15] Dušek, Z., Kowalski,O., *How many torsionless affine connections exist in general dimension*, Advances in Geometry, Vol. 16, no.1, (2016).

[16] Dušek, Z., Kowalski,O., *How many Ricci flat affine connections are there with arbitrary torsion*, Publ. Math. Debrecen vol. 88, no. 3-4, (2016) 511-516.

[17] Efimov N. V., *Kachestvennye voprosy teorii deformacii poverhnostei*, UMN 3,2, (1948), 47–158.

[18] Einstein, A., *Zur Elektrodynamik bewegter Korper*, Annalen der Physik, 17, 891, 1905.

[19] Einstein, A., *Die Grundlagen der allgemeinen Relativitätstheorie*, Annalen der Physik, 49, 769, 1916.

[20] Einstein, A., *Generalization of the relativistic theory of gravitation*, Ann. math., 46, (1945) 576–84.

[21] Einstein, A., Straus, E., *Generalization of the relativistic theory of gravitation II*, Ann. math., 47, (1946) 731–741.

[22] Einstein, A., Appendix II in the book: *The meaning of relativity*, Third edit., Princeton, 1950.

[23] Einstein, A., Generalization of theory of gravitation, Appendix II in the book: *The meaning of relativity*, Fourth edit., Princeton, 1953.

[24] Einstein, A., Relatvitic theory of the non-symmetric field, Appendix II in the book: *The meaning of relativity, Fifth edit., Princeton,* 1955.

[25] Einstein, A., *Bianchi identities in the generalized theory of gravitation*, (Canada,) J.Math (1950), 2, 120–128.

[26] Eisenhart, L. P., *Generalized Riemannian spaces*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 37, (1951), 311–315.

[27] Eisenhart, L. P., *Generalized Riemannian spaces*, Part II, vol. 38 (1952), 505–508.

[28] Eisenhart, L. P., *Generalized Riemannian spaces and general relativity*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 39, No 6, (1953), 311–315.

[29] Eisenhart, L. P., *Generalized Riemannian spaces and general relativity II*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 48, No 9, (1962), 1529–31.

[30] Eisenhart, L. P., *Generalized Riemannian geometry*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 48, No 9, (1962), 1529–31.

[31] Eisenhart, L. P., *Generalized Riemannian geometry II*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 49, No 9, (1963), 18–19.

[32] Eisenhart, L. P., *Riemannian geometry*, Princeton U.P., 1949.

[33] Eisenhart, L. P., *Non-Riemannian geometry*, New York, 1927.

[34] Golab, S., *Tensor calculus*, PWN, Warzawa, 1974.

[35] Graif, F., *Sulla posibilita di construire paralelogrami chiusi in alcune varieta a torsione*, Boll. d. Un. math. Ital., Ser. III, 7, (1952), 132–135.

[36] Graif, F., *Formule di comutazione e trasporto ciclico nei rezenti spazi di Einsein*, Rendiconti Ist. lombardo sci. e lettere, cl. sci. mat.e. natur., Milano, 87, No 1, (1954), 105–10.

[37] Hayden, H., *Subspaces of a space with torsion*, Proc. London Math. Soc (2), 34, (1932), 27–50.

[38] Hall, G. S., Lonie, D. P., *The principle of equivalence and projective structure in spacetimes*, Class. Quantum Grav. 24 (2007), 3617-3636.

[39] Hall, G. S., Lonie, D. P., *The principle of equivalence and cosmological metrics*, J. Math. Phys. 49, 022502 (2008).

[40] Hall, G. S., Lonie, D. P., *Projective equivalence of Einstein spaces in general relativity*, Class. Quantum Grav. 26 (2009) 125009.

[41] Hineva, S. T., *On infinitesimal deformations of submanifolds of a Riemannian manifold*, Differ. Geom., Banach center publications, v. 12, PWN, Warshaw, (1984), 75–81.

[42] Ivanova-Karatopraklieva, I., Sabitov, I. Kh., *Surface deformation.*, J. Math. Sci., New York 70 $\mathrm{N}^0 2$, (1994), 1685–1716.

[43] Ivanova-Karatopraklieva, I.; Sabitov, I. Kh., *Bending of surfaces II* , J. Math. Sci., New York 74 $\mathrm{N}^0 3$, (1995), 997–1043.

[44] Kon-Fossen S. E., *Nekotorye voprosy differ. geometrii v celom*, Fizmatgiz, Moskva, 1959.

[45] Lizunova, L. Yu., *O beskonechno malyh izgibaniyah giperpoverhnostei v rimanovom prostranstve*, Izvestiya VUZ, Matematika, $\mathrm{N}^0 3$ (94), (1970), 36–42.

[46] Markov, P. E., *Beskonechno malye izgibanya nekotoryh mnogomernyh poverhnostei*, Matemat. zametki, T. 27, $N^0 3$, (1980), 469–479.

[47] Mikeš, J., *On holomorphicaly projective mappings of Kählerian spaces*, Ukr. Geom. Sb., 23, (1980), 90–98.

[48] Mikeš, J., *On geodesic mappings of Einstein spaces* (In Russian), Mat. zametki, 28, (1980), 313–317.

[49] Mikeš, J., *Geodesic mappings of special Riemannian spaces*, Coll. Math. Soc. J. Bolyai, 46. Topics in Diff. Geom., Debrecen (Hungary), (1984), 793–813.

[50] Mikeš, J., *On an order of special transformartion of Riemannian spaces*, Dif. Geom. and Apl., Proc. of the Conf. Dubrovnik, 3, (1988), 199–208.

[51] Mikeš, J., *Holomorphically projective mappings and their generalizations*, Itogi Nauki i Tekhniky, Ser. Probl. Geom. VINITI, 1988.

[52] Mikeš, J., *Geodesic mappings of affine-connected and Riemannian spaces*, J. Math. Sci. New York, (1996), 311–333.

[53] Mikeš, J., Starko, G. A., *K-koncircular vector fields and holomorphically projective mappings on Kählerian spaces*, Rend. del Circolo di Palermo, 46, (1997), 123–127.

[54] Mikeš, J., Kiosak, V., Vanžurová, A., *Geodesic mappings of manifolds with affine connection*, Palacký University, Olomouc, 2008.

[55] Mikeš, J., Vanŭrova, A., Hinterleitner, I., *Geodesic Mappings and Some Generalisations* Palackï University, 2009 - Geometry, Differential - 304 pages

[56] Minčić, S. M., *A Generalization of the Codazzi and Gauss Equations of a Subspace of a Riemannian Space*, Mathematica balkanica, Beograd 2 (1972), 151–155.

[57] Minčić, S. M., *A On curvature tensors and pseudotensors of the space with non-symmetric affine connection (in Russian)*, Mathematica Balkanica, (1974), 427–430.

[58] Minčić, S. M., *Ricci identities in the space of non-symmetric affine connexion*, Matematički vesnik, 10(25)Sv. 2, (1973), 161–172

[59] Minčić, S. M., *A Generalization of the Codazzi and Gauss Equatoons of a Subspace of a Generalized Riemannian Space*, Boll. del'. Un. Mat. Italiana, (4), 10, (1974), 375–379.

[60] Minčič, S. M., Velimirović, Lj.S.,Stanković, M. S. *On spaces with non-symmetric affine connection, containing subspaces without torsion* Applied Mathematics and Computation, Volume 219, Issue 9, 1 January 2013, Pages 4346-4353.

[61] Minčič, S. M., *Connection of parallelism of a vector field in a generalized Riemannian space and its subspace (in Serbian)*, Zbornik radova Pedagoške akademije u Pirotu, (1974), 123–127.

[62] Minčič, S. M., *Generalized Riemannian spaces (in Serbian)*, Ph.D. Thesis, Univ. of Novi Sad, 1975.

[63] Minčić, S. M., *Ricci type identities in a subspace of a space of non-summetric affine connexion*, Publ. Inst. Math. (Beograd), N.S. 18(32), (1975), 137–148.

[64] Minčić, S. M., *Curvature tensors of the space of non-symmetric affine connexion, obtained from the curvature pseudotensors*, Matematički vesnik, 13(28), (1976), 421–435.

[65] Minčić, S. M., *Two kinds of parallelism of a vector field in a generalized Riemannian and its subspace (in Serbian)*, Zbornik radova Građevinskog fakulteta u Nišu, sv.5, (1976) br4, 1–11.

[66] Minčić, S. M., *New commutation formulas in the non-symetric affine connexion space*, Publ. Inst. Math. (Beograd)(N.S), 22(36), (1977), 189–199.

[67] Minčič, S. M., *New Ricci type identities in a subspace of non-symmetric affine connection spaces (in Russian)*, Izvestija VUZ Mathematica, 4(203), (1979), 17–27.

[68] Minčić, S. M., *Independent curvature tensors and pseudotensors of spaces with non-symmetric affine connexion*, Coll. math. soc. János Bolayai, 31 Dif. geom., Budapest (Hungary), (1979), 445–460.

[69] Minčić, S. M., *Derivational formulas of a subspace of a generalized Riemannian space*, Publ. Inst. Math. (Beograd), 34(48), (1983), 125–135.

[70] Minčić, S. M., *Integrability conditions of derivational formulas of subspace of a generalized Riemannian space*, Publ. Inst. Math. (Beograd), NS, 31(45), (1980), 141–157.

[71] Minčič, S. M., *On curvature vector of curve in subspace of generalized Riemannian spaces (in Russian)*, Facta Universitatis, Ser. Math. Inform, 2, (1987), 75–89.

[72] Minčič, S. M., *Symmetry properties of curvature tensors of the space with non-symmetric affine connexion and generalized Riemannian space,* , Zbornik radova Filozof. fak. u Nišu, Ser. Mat., 1(11), (1987), 69–75.

[73] Minčić, S. M., *Frenet formulas for curves in a generalized Riemannian space*, Zbor. rad. Fil. Fak (Niš) Ser. Mat., 3, (1989), 73–82.

[74] Minčič, S. M., *Geometric interpretations of curvature tensors and pseudotensors of the spaces with non symmetric affine connection* (in Russian), Publ. Inst. Math., 47(61), (1990), 113–120.

[75] Minčić, S. M., *Ricci coefficients of rotation in a generalized Riemannian space*, Publ. Math., Debrecen, T. 41 FASC. 3-4, (1992), 173–180.

[76] Minčić, S. M., *Bianchi type identities in the space of nonsymmetric affine connexion*, Collection of sci ont papers of the Faculty of science (Kragujevac), 16, (1994), 53–60.

[77] Minčić, S. M., *New Bianchi type identities in the space of nonsymmetric affine connexion*, Facta universitatis (Niš). Ser. Math. Inform, 10 (1995), 35–43.

[78] Minčić, S. M., *Generalized Riemanian spaces*, University of Novi Sad, Faculty of Sciences and Mathematics, 1975 (in Serbian).

[79] Minčić, S. M., *On a family of tensor fields in a generalized Riemannian space*, Filomat, 9:2, (1995), 149–159.

[80] Minčić, S. M., *Some characteristics of curvature tensors of nonsymmetric affine connexion*, Novi Sad J. Math., 29 *No.* 3, (1999), 169–186.

[81] Minčić, S. M., *Ricci type identities in a subspace of a space of non-summetric affine connexion*, Publ. Inst. Math. (Beograd), N.S., 18(32), (1975), 137–148.

[82] Minčić, S. M., *Ricci type identities for basic differentation and curvature tensors in Otsuki spaces*, Novi Sad J.Math, vol. 31, 2, (2001), 73–87.

[83] Minčić, S. M., *Ricci type identities and curvature tensors in Otsuki spaces*, Proceedings of the tenth Congress of Yugoslav Mathematicans, Belgrade, 21-24. 01. (2001), 199–202.

[84] Minčić, S. M., *Ricci type identities for non-basic differentation in Otsuki spaces*, Novi Sad J.Math, vol. 32, 1, (2002), 109–125.

[85] Minčić, S. M., *On curvature tensors of non-symmetric affine connection*, Acta et Commentations Universitatis Tartuensis de Mathematica, Vol. 9, (2005), 13–20.

[86] Minčić, S. M., Stanković, M. S., *On geodesic mapping of general affine connection spaces and of generalized Riemannian spaces*, Mat. vesnik, 49 (1997), 27–33.

[87] Minčić, S. M., Stanković, M. S., *Equitorsion geodesic mappings of generalized Riemannian spaces*, Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S), 61 (75), (1997), 97–104.

[88] Minčić, S. M., Stanković, M. S., Velimirović, Lj. S., *Generalized Riemannian Spaces and Spaces of Non-symmetric Affine Connection,* Faculty of Science and Mathematics , University of Nis , 2013, Nis, ISBN 978- 86-83481-90-3.

[89] Minčić, S. M., Stanković, M. S., Velimirović, Lj. S., *Generalized Kahlerian Spaces*, Filomat 15 (2001), 167–174.

[90] Minčić, S. M., Velimirović, Lj. S., *On subspaces of generalized Riem. space (in Russian)*, Siberian Mathematical Journal, Dep. v VINITI No.3472-V 98 (1998).

[91] Minčić, S. M., Velimirović, Lj. S., *Riemannian Subspaces of Generalized Riemannian Spaces*, Universitatea Din Bacau Studii Si Cercetari Stiintifice, Seria:Matematica, Nr 9, (1999), 111–128.

[92] Minčić, S. M., Velimirović, Lj. S., Stanković, M. S., *Infinitesimal Deformations of a Non -Symmetric Affine Connection Space*, Filomat 15 (2001), 175–182.

[93] Minčić, S. M., Velimirović, Lj. S., *Infinitesimal bending of a subspace of a space with non-symmetric basic tensor*, Acta Univ. Palacki. Olomounc, Fac. rer. nat., Matematica 44 (2005) 115–130.

[94] Minčić, S. M., Velimirović, Lj. S., *On generalized Rimannian spaces containg Rimannian subspaces*, Izvestiya VUZ, Mathematika, 11 (2007), 30–34.

[95] Minčić, S. M., Velimirović, Lj. S., *Derivational formulas of a submanifold of a generalized Riemannian spaces*, Novi Sad J. Math. vol 36, No. 2 (2006), 91–100.

[96] Minčić, S. M., Velimirović, Lj.S., Stanković, M.S., *Integrability conditions of derivational equations of a submanifold of a generalized Riemannian space,* Novi Sad J. Math. .

[97] Minčić, S. M., Velimirović, Lj.S., Stanković, M.S., *New integrability conditions of derivational equations of a submanifold in a generalized Riemannian space,* Filomat 24:2 (2010), 137–146.

[98] Mishra, R. S., *Subspaces of a generalized Riemannian space*, Bull. Acad. Roy. Belgique, 1954, 1058–1071.

[99] Otsuki, T., Tasiro, Y., *On curves in Kählerian spaces*, Math. J. Okayama Univ., 4 No 1 6, (1954), 57–78.

[100] Pastori, M., *Sullo spazio della recente teoria unitaria di Einstein,* Convegno internaz. di geom. difer. (1953) Roma 1954, 107–113.

[101] Pripoae, G., *Vector fields dynamics as geodesic motion on Lie groups*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I, vol. 342, no. 11 (2006) 865-868.

[102] Prvanović, M., *Équations de Gaus d'un sous-espace plongé dans l'espace Riemannien généralisé*, Bull. Acad. Roy. Belgique, Cl. sci., 1955, 615–621.

[103] Prvanović, M., *Relative Frenet formulas for curves in a subspace of a Riem. space*, Tensor (NS), 9, *N*º3, (1959), 190–204.

[104] Prvanović, M., *Holomorphically projective transformations in a locally product Riemannian spaces*, Math. Balkanica, 1, (1971), 195–213.

[105] Prvanović, M., *A note on holomorphically projective transformations of the Kähler space in a locally product Riemannian spaces*, Tensor, N. S. Vol. 35, (1981), 99–104.

[106] Prvanović, M., *π-Projective Curvature Tensors*, Analles Univ. Maria Curie - Sklodowska, Lublin - Polonia, XLI, 16, (1986), 123–133.

[107] Prvanović, M. and Pušić, N., *On manifolds admitting some semi-symmetric metric connection*, Indian Journal of Math., 37, 1, (1995), 37–67.

[108] Prvanović, M., *Four curvature tensors of non-symmetric affine connexion*, (in Rusian), Proceedings of the conference "150 years of Lobachevski geometry", Kazan, (1976), Moscow (1997), 199–205.

[109] Prvanović, M., *Conformand projective transformations of generalized Riemannian spaces in the sence of T. Takasu* (in Serbian), Godišnjak Fil. fak. u Novom Sadu knj. III (1958), 265–272.

[110] Prvanović, M., *Localy conformall Kähler manifolds on constant type and $\mathcal{I}$-invariant curvature tensor*, Facta univ. (Niš), Ser. mech., Automatic control and Rob., vol. 3, N_0 14 (2003), 791–804.

[111] Pujar, S. S., *On totaly real submanifolds of a Kaehlerian manifold admitting the complex conformal connection*, Ind. J. pure and appl. Math., II (10), (1980), 12–59.

[112] Pujar, S. S., *On non-metric semi-symmetric complex connection in a Kählerian manifold*, Bul. Cal. Math. Soc., 91(4), (1999), 313–332.

[113] Pušić, N., *On an invariant tensor of a conformal transformation of a hyperbolic Kaehlerian manifold*, Zbornik radova Fil. fak. Niš, s. Matem., 4, (1990), 55–64.

[114] Pušić, N., *Charasteristic of some hyperbolic Kaehlerian space*, Coll. of Sci. papers of the Fac. of Sci. Kragujevac, 16, (1994), 97–104.

[115] Pušić, N., *Holomorphically-projecive connections of a hyperbolic Kählerian space*, Filomat (Niš), 9:2, (1995), 187–195.

[116] Pušić, N., *On geodesic lines of metric semi-symmetric connection on Riemannian and hyperbolic Kählerian spaces*, Novi Sad J. Math., 29, *No* 3, (1999), 291–299.

[117] Rashevsky, P. K., *Riemannian geometry and tensor analysis (in Russian)*, Moscow, 1967.

[118] Saxena, S. C., Behari, R., *Some properties of generalized Riemann spaces*, Proc. nat. Inst. of sci. India, A26 No 2, (1960), 95–103.

[119] Saxena, S. C., Behari, R., *Some properties and applications of Eisenhart's generalized Riemann spaces*, Proc. nat. Inst. of sci. India, Part A (26), No2 (1960), 48–57.

[120] Singh, K. D., *On generalized Riemann spaces*, Riv. Math. Univ. di Parma, 7, (1956), 125–138.

[121] Singh, U.P., *On relative curvature tensors in the subspace of a Riemannian space,* Revue de la fac. des sc. D'Istambul, vol.33, (1968), 69–75.

[122] Sinyukov, N.S., *Geodesic mappings of Riemannian spaces* , "Nauka", Moskow, 1979 (in Russian).

[123] Shouten, J.A., *Ricci calculus,* Springer-Verlag, Berlin, 1954.

[124] Stanković, M. S., *First type almost geodesic mappings of general affine connection spaces*, Novi Sad J. Math., 29, No. 3, (1999), 313–323.

[125] Stanković, M. S., *On a canonic almost geodesic mappings of the second type of affine spaces*, FILOMAT (Niš), 13, (1999), 105–114.

[126] Stanković, M. S., *On a special almost geodesic mappings of the third type of affine spaces*, Novi Sad J. Math., 31, No. 2, (2001), 125–135.

[127] Stanković, M. S., Minčić, S. M., *New special geodesic mappings of generalized Riemannian space*, Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S), 67(81), (2000), 92–102.

[128] Stanković, M. S., Minčić, S. M., *New special geodesic mappings of affine connection spaces*, Filomat 14 (2000), 19–31.

[129] Stanković, M. S., *Some mappinggs of non-symmetric affine connection spaces (in Serbian)*, Ph.D. Thesis, Univ. of Niš, 2001.

[130] Stanković, M. S., Minčić, S. M., Velimirović, Lj. S., *On holomorphically projective mappings of generalized Kählerian spaces*, Mat. vesnik, 54, (2002), 195–202.

[131] Stanković, M. S. , Minčić, S. M., Velimirović, Lj. S., *On equitorsion holomorphically projective mappings of generalised Kählerian spaces*, Czechoslovak Mathematical Journal, 54(129), (2004), 701–715.

[132] Stanković, M. S., Minčić, S. M., Velimirović, Lj. S., Zlatanović M. Lj., *Equitorsion conform mappings of generalized Riemannian spaces*, Mat. vesnik, 61(2009), 119-129.

[133] Stanković, M. S., Velimirović, Lj. S., Zlatanović, M. Lj., *Some relation in the Generalized Kählerian Space of Second Kind*, Filomat, 23:2, (2009), 82–89.

[134] Stanković, M. S., Minčić, S. M., Velimirović, Lj. S., Zlatanović, M. Lj., *On equitorsion geodesic mappings of general affine connection spaces*, Rendiconti del Seminario Matematico della Universitá di Padova, 124(2010), 77-90.

[135] Stanković, M. S., Zlatanović, M. Lj., Velimirović, Lj. S., *Equitorsion Holomorphically Projective Mappings of Generalized Kählerian Space of First Kind*, Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 60, No. 3, (2010), 635-653.

[136] Stanković, M. S., Zlatanović, M. Lj., *Prof. Dr Svetislav Minčić and his contribution to differential geometry*, Proceedings of the XVI Geometrical seminar, (2011), 5–27.

[137] Stanković, M. S., Ćirić, M. S., Zlatanović, M. Lj., *Geodesic mappings of equiaffine and anti-equiaffine general affine connection spaces preserving torsion*, Filomat, accepted for publication.

[138] Stanković, M. S., Zlatanović, M. Lj., Velimirović, Lj. S., *Equitorsion Holomorphically Projective Mappings of Generalized Kählerian Space of Second Kind*, International Electronic Journal of Geometry, Vol. 3, No.2 (2010), 26-39.

[139] Stanković, M. S., Zlatanović, M. Lj., Vesić, N. O., *Some properties of ET-projective tensors obtained from Weyl projective tensor* Filomat 29 (3), 573-584

[140] Stepanov, S.E., Gordeeva, I.A., Panzhenskii, V.I., *Riemann-Cartan manifolds,* Journal of Mathematical Science, Springer: New York, Vol. 169, No. 3, (2010), 342-361.

[141] Stepanov, S.E., *Some conformal and projective scalar invariants of Riemannian manifolds,* Mathematical Notes, Vol. 80, No. 5-6, (2006), 848-852.

[142] Velimirović, A. M., *Conformal equitorsion and concircular transformations in a generalized Riemannian space* Mathematics (2020) 8(1), https://doi.org/10.3390/math8010061

[143] Velimirović, Lj. S., Minčić, S. M., Stanković, M. S., *Infinitesimal deformations of curvature tensors at non-symmetric affine connection space,* Mat. vesnik, 54, (2002), 219–226.

[144] Velimirović, Lj. S., Minčić, S. M., Stanković, M. S., *On comutativty of the Lie derivative and covariant derivative at non-symmetric affine connection space,* Proceeding of the Workshop Contemparary geometry and related topics, Belgrade, 15-21 may 2002, Word Scientific, 425–430.

[145] Velimirović, Lj. S., Minčić, S. M., Stanković, M. S., *Infinitesimal deformations and Lie derivative of non-symmetric affine connection space,* Acta Univ. Palacki. Olomouc., Fac. rer. nat., Mathematica 42, (2003), 111–121.

[146] Velimirović, Lj. S., Minčić, S. M., *Infinitesimal bending of a subspace of a generalized Riemannian space,* Tensor, N., S., Vol. 65 (2004), 212–224.

[147] Velimirović, Lj. S., Minčić, S. M., Stanković, M. S., *Infinitesimal deformation of a basic tensor of a generalized Riemannian space*, Filomat 21:2, (2007), 237–244.

[148] Velimirović, Lj. S., Minčić, S. M., Stanković, M. S., *Infinitesimal rigidity and flexibility at non-symmetric affine connection space,* European Journal of Combinatorics, Vol 31, No.4 (2010), 1148–1159.

[149] Weatherburn, C. E., *Riemannian geometry and tensor calculus,* Cambridge U. P., 1950.

[150] Yano, K., *Sur la thèorie des deformations infinitesimales*, Journal of Fac. of Sci. Univ. of Tokyo, 6, (1949), 1–75.

[151] Yano, K., *On harmonic and Killing vector Fields*, Ann. of Math. second Ser., V.55, No1, (1952), 38–45.

[152] Yano, K., *Infinitesimal variations of submanifolds*, Kodai Math. J., 1 (1978), 30–44.

[153] Yano, K., *Notes on infinitesimal variations of submanifolds*, Journal of Math. Soc. Japan, v.32, 1980.

[154] Yano, K., Ki, U-Hand, Pak, J., *Infinitesimal variations of the Ricci tensor of a submanifolds*, Kodai Math. Sem. Rep., 29(1978), 271–284.

[155] Yano, K., *Concircular geometry*, I-IV. Proc. Imp. Acad. Tokyo, 16, (1940), 195-200; 354-360;442–448; 505–511.

[156] Yano, K., *On complex conformal connections*, Kodai Math. Sem. Rep., 26, (1975), 137–151.

[157] Yano, K., *Differential geometry of complex and almost complex spaces*, *Pergamon Press, New York,* 1965.

[158] Yano, K. *The theory of Lie derivatives and its applications*, N- Holland Publ. Co. Amsterdam, 1957.

[159] M Zlatanovic, I Hinterleitner, M Najdanovic, *On equitorsion concircular tensors of generalized Riemannian spaces* Filomat 28 (3), 463-471

Биографија

Ана Велимировић је рођена 13.09.1992. године у Нишу. Основну школу "Сретен Младеновић Мика" у Нишу завршила је 2007. године као носилац Вукове дипломе. Гимназију "Бора Станковић" у Нишу, природно-математички смер, завршила је 2011. године са одличним успехом.

Основне академске студије је уписала 2011. године на департману за математику Природно-математичког факултета у Нишу, које је завршила 2015. године. Исте године је уписала мастер академске студије на Природно-математичком факултету у Нишу, студијски програм Математика, које је завршила 2018. године са просечном оценом 9,06. Мастер рад под менторством проф. др Милана Златановића одбранила је 2018. године.

Докторске академске студије на Природно-математичком факултету у Нишу уписала је 2018. године. Све испите предвиђене наставним планом и програмом докторских академских студија положила је са оценом 10 (десет) и добила сагласност о усвајању теме докторске дисертације под називом "Конформне, конциркуларне и пројективне (геодезијске) трансформације у просторима несиметричне афине конексије и генералисаним Римановим просторима".

Априла 2019. ради као практикант у компанији *Code3 Profit*.

У истој компанији ради од маја 2019 до септембра 2021 као software developer. Допринела је пројектима компаније који су углавном оријентисани на пословну аналитику.

Након тога започиње рад у компанији *TietoEvry*, Београд, Србија од септембра 2021.

Служи се програмима *Wolfram Mathematica*, *Excel*, *Visual Studio*. Поседује знање из области објектно орјентисаних језика и релационих база.

Говори енглески и немачки језик.

Библиографија

Ана Велимировић је, самостално или у коауторству, публиковала шест научних радова у часописима који су на *SCI* листи:

1. N.. Vesić, M. L. Zlatanović, A. M. Velimirović, *Projective invariants for equitorsion geodesic mappings of semi-symmetric affine connection spaces,* Journal of Mathematical Analysis and Applications 472 (2), 1571-1580 2 2019, M21
2. A. M. Velimirović, *Conformal Equitorsion and Concircular Transformations in a Generalized Riemannian Space.* Mathematics 8 (61) 2020, M21.
3. C. L. Bejan, A. M. Velimirović, *Linear Connections with and without Torsion, Making Parallel an Integrable Endomorphism on a Manifold*, Filomat 33 (10), 2943-2949 2019, M22.
4. A. M. Velimirović, M. L Zlatanović *On semisymmetric connection*, Filomat 33 (No 4), 2019, M22.
5. Miloš Z. Petrović, Ana M. Velimirović *Projective Curvature Tensors of Some Special Manifolds with Non-symmetric Linear Connection* Mediterr. J. Math. (IF 1.216) Pub Date : 2021-05-12
6. Ana M. Velimirović, *Conformal curvature tensors in a Generalised Riemannian space in Einsenhart sense* Appl. Anal. Discrete Math. 14 (2020), 459-471.https://doi.org/10.2298/AADM200206034V

ИЗЈАВА О АУТОРСТВУ

Изјављујем да је докторска дисертација, под насловом

Конформне, концикуларне и пројективне (геодезијске) трансформације у просторима несиметричне афине конексије и генералисаним Римановим просторима

која је одбрањена на Природно – математичком факултету Универзитета у Нишу:

- резултат сопственог истраживачког рада;
- да ову дисертацију, ни у целини, нити у деловима, нисам пријављивао/ла на другим факултетима, нити универзитетима;
- да нисам повредио/ла ауторска права, нити злоупотребио/ла интелектуалну својину других лица.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци, који су у вези са ауторством и добијањем академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада, и то у каталогу Библиотеке, Дигиталном репозиторијуму Универзитета у Нишу, као и у публикацијама Универзитета у Нишу.

У Нишу, 5.9.2022.

Потпис аутора дисертације:

Ана М. Велимировић

ИЗЈАВА О ИСТОВЕТНОСТИ ЕЛЕКТРОНСКОГ И ШТАМПАНОГ ОБЛИКА ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ

Наслов дисертације:

Конформне, конциркуларне и пројективне (геодезијске) трансформације у просторима несиметричне афине конексије и генералисаним Римановим просторима

Изјављујем да је електронски облик моје докторске дисертације, коју сам предао/ла за уношење у **Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу,** истоветан штампаном облику.

У Нишу, 5.9.2022.

Потпис аутора дисертације:

Ана М. Велимировић

ИЗЈАВА О КОРИШЋЕЊУ

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Никола Тесла“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу унесе моју докторску дисертацију, под насловом:

Конформне, конциркуларне и пројективне (геодезијске) трансформације у просторима несиметричне афине конексије и генералисаним Римановим просторима

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском облику, погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију, унету у Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу, могу користити сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons), за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство **(CC BY)**
2. Ауторство – некомерцијално **(CC BY-NC)**
3. [✓ **Ауторство – некомерцијално – без прераде (CC BY-NC-ND)**]
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима **(CC BY-NC-SA)**
5. Ауторство – без прераде **(CC BY-ND)**
6. Ауторство – делити под истим условима **(CC BY-SA)**

У Нишу, 5.9.2022.

Потпис аутора дисертације:

А. Вел

Ана М. Велимировић