



UNIVERZITET U NIŠU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
U NIŠU
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU



Bojana Lj. Jovanović

STOHAISTIČKI EPIDEMIOLOŠKI
MODELI
I NJIHOVA ANALIZA

DOKTORSKA DISERTACIJA

Niš, 2025.



UNIVERSITY OF NIŠ
FACULTY OF SCIENCES AND MATHEMATICS
DEPARTMENT OF MATHEMATICS



Bojana Lj. Jovanović

STOCHASTIC EPIDEMIOLOGICAL
MODELS
AND THEIR ANALYSIS

DOCTORAL DISSERTATION

Niš, 2025.

Подаци о докторској дисертацији

Ментор: др Јасмина Ђорђевић, редовни професор,
Универзитет у Нишу, Природно-математички факултет у Нишу

Наслов: Стохастички епидемиолошки модели и њихова анализа

Резиме: Ова докторска дисертација има за циљ анализу постојећих епидемиолошких модела, њихових модификација, као и новодефинисаних стохастичких модела. Стохастички епидемиолошки модели се конструишу помоћу детерминистичких, увођењем вишедимензионалног Брауновог кретања, Левијевог процеса, ланца Маркова и процеса са кашњењем. Изводе се одговарајући услови који задовољавају параметри модела под којима долази до изумирања и перзистентности болести. Технике примењиване у доказима условљене су типом разматране једначине, као и претпоставкама које важе за њене коефицијенте. Такође, илуструју се краткорочне и дугорочне предикције у сфери стохастичких модела, које се могу применити у превенцији и сузбијању одређених болести. Резултати су потврђени примерима који указују на предност новоуведених модела у поређењу са постојећим резултатима.

Научна област: Математика
Научна дисциплина: Стохастичка анализа

Кључне речи: Стохастичке диференцијалне једначине, Брауново кретање, временски зависно кашњење, процес Левија, процес Маркова, искорењивање, перзистентност у средњем, стационарна расподела

УДК: 519.218:616-036.22

CERIF класификација: Р 001 Математика

Тип лиценце
Креативне заједнице: CC BY-NC-ND

Data on Doctoral Dissertation

Doctoral Supervisor: dr Jasmina Đorđević, Full Professor,
University of Niš, Faculty of Sciences and Mathematics in Niš

Title: Stochastic epidemiological models and their analysis

Abstract: This doctoral dissertation aims to analyze existing epidemiological models, their modifications, and newly defined stochastic models. Stochastic epidemiological models are constructed using deterministic models enriched with multidimensional Brownian motion, Lévy processes, Markov chains, and processes with delay. The appropriate conditions on model parameters under which disease extinction and persistence occur are derived. The techniques applied in the proofs depend on the type of equation considered as well as the assumptions made about its coefficients. Furthermore, both short-term and long-term predictions within the realm of stochastic models are illustrated; these can be applied to the prevention and control of specific diseases. The results are confirmed through examples demonstrating the advantages of the newly introduced models compared to existing ones.

Scientific Field: Mathematics

Scientific Discipline: Stochastic analysis

Key Words: Stochastic differential equations, Brownian motion, time-dependent delay, Lévy process, Markov process, extinction, persistence in mean, stationary distribution

UDC: 519.218:616-036.22

CERIF Classification: P 001 Mathematics

Creative Commons License Type: CC BY-NC-ND



ПРИРОДНО - МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ НИШ

КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА

Редни број, РБР :	
Идентификациони број, ИБР :	
Тип документације, ТД :	Монографска
Тип записа, ТЗ :	Текстуални / графички
Врста рада, ВР :	Докторска дисертација
Аутор, АУ :	Бојана Љ. Јовановић
Ментор, МН :	Јасмина С. Ђорђевић
Наслов рада, НР :	Стохастички епидемиолошки модели и њихова анализа
Језик публикације, ЈП :	Српски
Језик извода, ЈИ :	Српски / енглески
Земља публикавања, ЗП :	Србија
Уже географско подручје, УГП :	Србија
Година, ГО :	2025.
Издавач, ИЗ :	Ауторски репринт
Место и адреса, МА :	Ниш, Вишеградска 33.
Физички опис рада, ФО : (поглавља/страна/ цитата/табела/слика/графика/прилога)	5 поглавља, 203 страна, 181 цитат, 9 табеле, 22 слике
Научна област, НО :	Математика
Научна дисциплина, НД :	Стохастичка анализа
Предметна одредница/Кључне речи, ПО :	Стохастичке диференцијалне једначине, Брауново кретање, временски зависно кашњење, процес Левија, процес Маркова, искорењивање, перзистентност у средњем, стационарна расподела
УДК	519.218:616-036.22
Чува се, ЧУ :	библиотека
Важна напомена, ВН :	/

Извод, ИЗ:	Ова докторска дисертација има за циљ анализу постојећих епидемиолошких модела, њихових модификација, као и новодефинисаних стохастичких модела. Стохастички епидемиолошки модели се конструишу помоћу детерминистичких, увођењем вишедимензионалног Брауновог кретања, Левијевог процеса, ланца Маркова и процеса са кашњењем. Изводе се одговарајући услови који задовољавају параметри модела под којима долази до изумирања и перзистентности болести. Технике примењиване у доказима условљене су типом разматране једначине, као и претпоставкама које важе за њене коефицијенте. Такође, илуструју се краткорочне и дугорочне предикције у сфери стохастичких модела, које се могу применити у превенцији и сузбијању одређених болести. Резултати су потврђени примерима који указују на предност новоуведених модела у поређењу са постојећим резултатима.
Датум прихватања теме, ДП:	13.10.2021.
Датум одбране, ДО:	
Чланови комисије, КО:	Председник: Члан: Члан, ментор:



ПРИРОДНО - МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ НИШ

KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number, ANO :	
Identification number, INO :	
Document type, DT :	Monograph
Type of record, TR :	Textual / graphic
Contents code, CC :	Doctoral dissertation
Author, AU :	Bojana Lj. Jovanović
Mentor, MN :	Jasmina S. Đorđević
Title, TI :	Stochastic epidemiological models and their analysis
Language of text, LT :	Serbian
Language of abstract, LA :	Serbian / English
Country of publication, CP :	Serbia
Locality of publication, LP :	Serbia
Publication year, PY :	2025
Publisher, PB :	Author's reprint
Publication place, PP :	Niš, Višegradska 33.
Physical description, PD : (chapters/pages/ref./tables/pictures/graphs/appendixes)	5 chapters, 203 pages, 181 references, 9 tables, 22 graphs
Scientific field, SF :	Mathematics
Scientific discipline, SD :	Stochastic analysis
Subject/Key words, SIKW :	Stochastic differential equations, Brownian motion, time-dependent delay, Lévy process, Markov process, extinction, persistence in mean, stationary distribution
UC	519.218:616-036.22
Holding data, HD :	Library
Note, N :	/

Abstract, AB :	This doctoral dissertation aims to analyze existing epidemiological models, their modifications, and newly defined stochastic models. Stochastic epidemiological models are constructed using deterministic models enriched with multidimensional Brownian motion, Lévy processes, Markov chains, and processes with delay. The appropriate conditions on model parameters under which disease extinction and persistence occur are derived. The techniques applied in the proofs depend on the type of equation considered as well as the assumptions made about its coefficients. Furthermore, both short-term and long-term predictions within the realm of stochastic models are illustrated; these can be applied to the prevention and control of specific diseases. The results are confirmed through examples demonstrating the advantages of the newly introduced models compared to existing ones.	
Accepted by the Scientific Board on, ASB :		
Defended on, DE :		
Defended Board, DB :	President:	
	Member:	
	Member,	

Образац Q4.09.13 - Издање 1

Predgovor

Matematičke metode imaju široku primenu u različitim biološkim oblastima, uključujući populacionu dinamiku i epidemiologiju. Kako se biološki fenomeni mogu opisati različitim matematičkim modelima, matematičke oblasti poput teorije verovatnoća, statistike, linearne algebre, teorije grafova, kombinatorike, dinamičkih sistema i diferencijalnih jednačina su integralni deo istraživanja u ovom domenu.

Za opisivanje dinamike epidemijских bolesti se često primenjuje matematičko modeliranje koje ima važnu ulogu u analizi širenja i kontroli zaraznih bolesti. Kao značajan deskriptivni alat, matematički modeli se konstruišu tako da obuhvataju suštinske osobine složenih bioloških sistema. Osnovna svrha formulisanja epidemioloških modela je razumevanje kratkoročnog i dugoročnog ponašanja epidemijских bolesti i razvijanje mogućih strategija za njihovu kontrolu ili suzbijanje.

Matematički epidemiološki modeli imaju dugu istoriju primene u proučavanju širenja zaraznih bolesti. Prvi matematički epidemiološki model konstruisao je švajcarski fizičar Danijel Bernuli 1766. godine, kada je matematički opisao širenje malih boginja. Kasnije su i drugi fizičari počeli da se bave matematičkim modeliranjem širenja bolesti. Među najpoznatijima su Anderson Grej Makendrik i Vilijam Ogivli Kermak, koji su predstavili jednostavan deterministički model kojim je uspešno opisivano ponašanje epidemijских bolesti. Kod ovog epidemiološkog modela se pojedinci određene populacije grupišu u različite klase tj. kompartmente na osnovu faze epidemije u kojoj se nalaze: klasu S (Susceptible) pojedinaca podložnih bolesti, klasu I (Infected) zaraženih i infektivnih pojedinaca, klasu R (Recovered) oporavljenih i imunih pojedinaca. Prelazi između ovih klasa modeliraju se matematički pomoću diferencijalnih jednačina koje uključuju ključne parametre kao što su stopa infekcije, stopa oporavka i stopa smrtnosti.

Prema najširoj klasifikaciji matematičkih epidemioloških modela razlikuju se deterministički i stohastički modeli. Prvi razvijeni modeli koji su opisivali širenje tuberkuloze, boginja i rubeola, bili su deterministički, predstavljeni sistemima diferencijalnih jednačina, čija se rešenja najčešće izražavaju kao funkcije vremena koja su jedinstveno određena početnim uslovima. Deterministički modeli su često istraživani u literaturi. Ovi modeli imaju za cilj da opišu dinamiku širenja bolesti na nivou populacije. Međutim, slučajne fluktuacije okruženja značajno utiču na sve aspekte realnog života, zbog čega je potrebno uključiti ove fluktuacije u epidemiološke modele. Ove fluktuacije se ne mogu adekvatno opisati primenom determinističkog pristupa.

Nasuprot tome, stohastički modeli su formulisani tako da inkorporiraju demografske i varijabilnosti iz okruženja. Stohastički epidemiološki modeli su najčešće konstruisani uvođenjem slučajnosti iz okruženja u determinističke epidemiološke modele. Postoje različiti pristupi za uključivanje slučajnosti iz okruženja u determinističke modele. Prvi pristup podrazumeva perturbaciju određenog parametra modela, na primer, stope prenosa, stope smrtnosti i drugih (videti, na primer, [1-3]). Drugi pristup je uvođenje šuma

u deterministički model koji je direktno proporcionalan odgovarajućim klasama modela (videti, na primer, [4], [5]). Prema trećem pristupu, stohastički model se konstruiše uvođenjem pretpostavke da se parametar modela može modelirati nekim procesom, na primer, stacionarnim Ornstein-Uhlenbeckovim procesom, CIR (Cox–Ingersoll–Ross) procesom i drugim (videti [6], [7]).

Prilikom širenja epidemija, često se javlja vremenski interval između početka određene promene (kao što su infekcija ili izlaganje) i njenog uticaja na stanje populacije. U epidemiološkim modelima se ovaj fenomen opisuje *vremenskim kašnjenjem*. Ovaj pojam se često koristi za opisivanje vremenskog perioda koji je potreban da bi se efekti manifestovali u različitim fazama epidemije, poput inkubacije bolesti, vremenskog razmaka između infekcije i pojave simptoma, ili vremena potrebnog da osoba postane zarazna ili da se izleči. Uključivanjem kašnjenja u epidemiološke modele, dobija se sistem diferencijalnih jednačina sa kašnjenjem, koji pruža realniji prikaz prirode bolesti i omogućava preciznije predviđanje dinamike njenog širenja u populaciji.

U realnosti, iznenadne ekološke katastrofe, poput zemljotresa, poplava i suša, mogu imati značajan uticaj na ekološke sisteme. Ovi događaji često dovode do kompleksnih promena u sistemima, čineći trajektorije njihovog ponašanja prekidnim i sa naglim promenama vrednosti. Takve pojave nije moguće precizno opisati diferencijalnim sistemima zasnovanim na Brownovom kretanju. Kako bi se ovi fenomeni adekvatno modelirali, naučnici su sugerisali uvođenje Lévyjevih procesa u modele. Sve veća pažnja posvećena je analizi stohastičkih epidemioloških modela koji uključuju Lévyjeve skokove. Važnost Lévyjevog šuma u epidemiologiji ogleda se u njegovoj sposobnosti da modelira nepredvidive aspekte epidemija, kao što su iznenadni skokovi u broju zaraženih ili neočekivane promene u brzini širenja bolesti. Na ovaj način se dobijaju preciznije prognoze broja zaraženih pojedinaca, pa samim tim omogućavaju bolje upravljanje resursima.

Slučajni faktori iz okruženja mogu dovesti do promena u intenzitetu različitih pojava, što se može interpretirati kao prelazak iz jednog režima u drugi. Ovi spoljašnji uticaji mogu izazvati promene osnovnih parametara epidemioloških modela. U matematičkim modelima se takve promene često modeliraju *telegrafskim šumom*, poznatim i kao obojeni šum i predstavljaju kao prelaz između dva ili više režima. Prema brojnim studijama, prelazi između režima obično imaju svojstvo odsustva memorije, dok vremenski interval između dva prelaza ima eksponencijalu raspodelu (videti, na primer, [8–10]). Primena telegrafskog šuma u epidemiološkim modelima omogućava preciznije modeliranje različitih scenarija, uključujući pojavu novog soja virusa sa različitim svojstvima širenja, nasumične varijacije u brzini širenja, kao i efekte vakcinacije i efikasnost društvenih mera.

Motivisani prethodnom diskusijom, u ovoj disertaciji se razmatraju različiti stohastički epidemiološki modeli u kojima je slučajnost inkorporirana na različite načine. Rezultati su izloženi u pet glava.

Prva glava je uvodnog karaktera i u njoj su navedeni osnovni pojmovi i rezultati teorije stohastičkih procesa, stohastičkih diferencijalnih jednačina, populacione dinamike kao i neke nejednakosti koje se koriste u disertaciji.

U Glavi 2 su proučavani stohastički epidemiološki modeli za prenos virusa Zapadnog Nila koji su konstruisani na bazi determinističkih modela predstavljenih u radu [11]. Razmatrani modeli se sastoje iz populacije vektora i jedne populacije domaćina, i populacije vektora i dve populacije domaćina. Stohastički modeli su dobijeni perturbacijom koeficijenata prenosa pomoću međusobno nezavisnih Brownovih kretanja. Za konstruisane stohastičke modele je dokazano postojanje i jedinstvenost globalnog

pozitivnog rešenja i izvedeni su dovoljni uslovi pod kojima dolazi do iskorenjivanja i perzistentnosti bolesti. Dobijeni teorijski rezultati su ilustrovani numerički primenom *balance implicit* numeričke metode koja očuvava pozitivnost rešenja.

U Glavi 3 je predstavljena analiza dinamike i osetljivosti determinističkog i stohastičkog epidemiološkog modela širenja virusa SARS-CoV-2 koji uključuju više klasa inficiranih. Originalni rezultati su objavljeni u radu [12]. Najpre je analiziran deterministički epidemiološki model, izračunat je njegov osnovni reprodukcionni broj i ispitano je postojanje i stabilnost endemskog ekvilibrijuma. Potom je proučavana dinamička analiza stohastičkog epidemiološkog modela, izvedeni su potrebni i dovoljni uslovi za iskorenjivanje i perzistentnost bolesti, i određen je osnovni reprodukcionni broj. Prikazana je analiza osetljivosti osnovnog reprodukcionnog broja determinističkog i stohastičkog modela na parametre modela. Pored toga, izvedeni su dovoljni uslovi za postojanje stacionarne raspodele stohastičkog modela primenom teorije Hasminskog [13].

U Glavi 4 se proučavaju dva stohastička epidemiološka modela koji uključuju vakcinaciju. U prvom delu ove glave je analiziran problem optimalne kontrole sa i bez ograničenja za stohastički epidemiološki model sa logističkim rastom populacije i saturisanom funkcijom incidence kada imunitet, stečen vakcinacijom ili prirodnim putem, nije trajan. Originalni rezultati iz Poglavlja 4.1 su objavljeni kao poglavlje knjige [14]. Osnovni princip optimalne kontrole u epidemiologiji je identifikacija najefikasnije strategije među dostupnim opcijama, uz minimizaciju broja inficiranih osoba i optimizaciju troškova povezanih sa primenom terapija ili vakcina radi kontrole progresije bolesti. Izvedeni su potrebni uslovi za postojanje optimalne kontrole bez i sa ograničenjima, konstrukcijom Hamiltonijana i primenom principa maksimuma. Teorijski rezultati dobijeni u ovom poglavlju su ilustrovani numerički na primeru ispitivanja uticaja vakcinacije i definisanja optimalne strategije vakcinacije u praktičnim scenarijima širenja bolesti ebole. U drugom delu ove glave je analizirana dinamika stohastičkog SVIR modela sa kašnjenjem koje ima neprekidnu raspodelu kod kog je uključen logistički rast populacije i saturisana funkcija incidence. Originalni rezultati iz Poglavlja 4.2 su objavljeni u radu [15]. Kašnjenje, koje je predstavljeno u ovom poglavlju, odražava vreme potrebno da se nakon kontakta infekcija razvije i osoba postane zarazna. Neprekidne fluktuacije okruženja su uključene u model pomoću Gaussovog belog šuma dok su iznenadne ali značajne fluktuacije opisane Poissonovim procesom. Za tako konstruisani stohastički model su izvedeni dovoljni uslovi za iskorenjivanje i perzistentnost bolesti, kao i uslovi za postojanje ergodične stacionarne raspodele. Postojanje stacionarne raspodele je pokazano primenom teoreme o međusobno isključivim verovatnoćama za procese Feller, jer se u ovom slučaju teorija Khasminskog [13] ne može primeniti budući da se ona odnosi na stohastičke jednačine koje uključuju samo Brownovo kretanje. Da su teorijski rezultati usaglašeni sa realnim podacima, ilustrivano je na primeru širenja bolesti ebole.

U Glavi 5 se razmatra epidemiološki model koji uključuje preventivne mere i može se primeniti za opisivanje širenja virusa SARS-CoV-2 u stohastičkom okviru. Originalni rezultati iz Poglavlja 5.1 su objavljeni u radu [16]. Poseban fokus stavljen je na konstrukciju stohastičkog modela koji integriše više vrsta slučajnosti, čime se postiže veći nivo realističnosti u poređenju sa modelima kod kojih je slučajnost opisana isključivo putem Gaussovog belog šuma. U model su, pre svega, uključene neprekidne fluktuacije iz okoline, prateći rezultate iz [17], pri čemu se pretpostavlja da stopa transmisije zadovoljava Ornstein-Uhlenbeckov proces. Takođe, za modeliranje iznenadnih i značajnih uticaja okoline, primenjen je Poissonov proces, dok je za opisivanje prelaza vrednosti

parametara modela iz jednog stanja u drugo korišćen neprekidni lanac Markova sa konačnim brojem stanja. Na kraju, period inkubacije bolesti je integrisan u model kroz konstantno vremensko kašnjenje. Na taj način je dobijen složen model koji bolje opisuje realne fenomene u prirodi i epidemiološke karakteristike i ima bogatiju dinamičku strukturu u odnosu na postojeće modele. Cilj je istražiti kako kombinacija različitih vrsta slučajnosti, opisanih belim šumom, telegrafskim šumom i skokovima Lévyja sa vremenskim kašnjenjem, utiče na dinamiku modela. Pored toga, za konstruisani model dokazano je postojanje stacionarne raspodele primenom teoreme o međusobno isključivim verovatnoćama za procese Felleri, s obzirom na to da, kao i u prethodnoj glavi, teorija Khasminskog [13] u ovom slučaju nije primenljiva. Ovaj model može se primeniti i na druge zarazne bolesti koje imaju slične karakteristike i načine prenošenja.

Koristim priliku da izrazim zahvalnost svom mentoru prof. dr Jasmini Đorđević na usmeravanju, pomoći i podršci u izradi ove disertacije. Veliku zahvalnost dugujem i prof. dr Mariji Krstić, prof. dr Mariji Milošević, prof. dr Nenadu Šuvaku i doc. dr Dušanu Đorđeviću na podstreku i korisnim sugestijama kojima su doprineli kvalitetu ovog rada.

Ovu disertaciju posvećujem svojim najdražima, koji su uvek uz beskonačnu količinu ljubavi i podrške, imali veru u mene.

Sadržaj

Predgovor

i

1 Uvodni pojmovi i rezultati teorije stohastičkih diferencijalnih jednačina	1
1.1 Osnovni pojmovi teorije stohastičkih procesa	2
1.2 Brownovo kretanje	8
1.3 Integral Itôa	11
1.3.1 Konstrukcija integrala Itôa	11
1.3.2 Neodređeni integral Itôa	13
1.3.3 Formula Itôa	14
1.4 Stohastičke diferencijalne jednačine	16
1.5 Stohastičke funkcionalne diferencijalne jednačine	19
1.5.1 Stohastičke diferencijalne jednačine sa kašnjenjem	21
1.6 Stohastičke diferencijalne jednačine sa prelazima Markova	22
1.7 Lévyjev proces	24
1.7.1 Itô-Lévyjeva dekompozicija	25
1.7.2 Uopštena formula Itôa	27
1.8 Stohastičke diferencijalne jednačine sa skokovima Lévyja	29
1.9 Stohastičke funkcionalne diferencijalne jednačine sa skokovima Lévyja	32
1.10 Stohastičke diferencijalne jednačine sa skokovima Lévyja i prelazima Markova	33
1.11 Stohastičke diferencijalne jednačine sa skokovima Lévyja, kašnjenjem i prelazima Markova	35
1.12 Ergodička stacionarna raspodela	37
1.13 Osnovni pojmovi populacione dinamike	40
1.14 Elementarne, integralne i stohastičke nejednakosti	41
2 Stohastički epidemiološki modeli širenja bolesti koje se prenose putem vektora	44
2.1 Uvod i motivacija	45
2.1.1 Deterministički modeli širenja virusa Zapadnog Nila	46
2.2 Stohastički epidemiološki model širenja virusa Zapadnog Nila sa jednom vrstom ptica	49
2.2.1 Egzistencija i jedinstvenost globalnog pozitivnog rešenja	51
2.2.2 Iskorenjenje bolesti	54
2.2.3 Perzistentnost u srednjem	58
2.3 Stohastički epidemiološki model širenja VZN sa dve vrste ptica	61
2.3.1 Postojanje i jedinstvenost globalnog pozitivnog rešenja	63

2.3.2	Iskorenjivanje bolesti	66
2.3.3	Perzistentnost u srednjem	70
2.4	Zaključak i napomene	73
3	Epidemiološki modeli koji uključuju više klasa inficiranih	74
3.1	Analiza dinamike i osetljivosti determinističkog i stohastičkog modela širenja virusa SARS-CoV-2	75
3.1.1	SARS-CoV-2 epidemiološki modeli	75
3.1.2	Analiza determinističkog modela	77
3.1.3	Dinamička analiza stohastičkog modela	85
3.1.4	Analiza osetljivosti osnovnog reproduktionog broja determinističkog i stohastičkog modela	95
3.2	Stacionarna raspodela stohastičkog modela širenja virusa SARS-CoV-2	98
4	Stohastički epidemiološki modeli koji uključuju vakcinaciju	106
4.1	Optimalna kontrola stohastičkog SVIR modela	107
4.1.1	Konstrukcija stohastičkog epidemiološkog modela	109
4.1.2	Analiza osetljivosti stohastičkog epidemiološkog modela na stopu vakcinacije	111
4.1.3	Optimalna kontrola stohastičkog epidemiološkog SVIR modela	113
4.1.4	Problem stohastičke optimalne kontrole bez ograničenja	113
4.1.5	Problem optimalne kontrole sa ograničenjem troškova	117
4.1.6	Numeričke simulacije	120
4.1.7	Zaključak	123
4.2	Dinamička analiza i stacionarna raspodela stohastičkog modela sa kašnjenjem i Lévyjevim skokovima	123
4.2.1	Konstrukcija stohastičkog epidemiološkog modela sa kašnjenjem i Lévyjevim skokovima	124
4.2.2	Iskorenjivanje bolesti	129
4.2.3	Perzistentnost u srednjem bolesti	139
4.2.4	Stacionarna raspodela	143
4.2.5	Numeričke simulacije	149
4.2.6	Zaključak	151
5	Stohastički epidemiološki model koji uključuje preventivne mere	152
5.1	Dinamička analiza stohastičkog epidemiološkog modela sa skokovima Lévyja, kašnjenjem i promenama režima	153
5.1.1	Uvod i motivacija	153
5.1.2	Konstrukcija stohastičkog epidemiološkog modela sa skokovima Lévyja, promenama režima i kašnjenjem	155
5.1.3	Egzistencija i jedinstvenost globalnog pozitivnog rešenja	158
5.1.4	Iskorenjivanje bolesti	162
5.1.5	Perzistentnost u srednjem bolesti	167
5.1.6	Numeričke simulacije	172
5.1.7	Zaključak	175
5.2	Stacionarna raspodela stohastičkog epidemiološkog modela sa skokovima Lévyja, kašnjenjem i promenama režima	178
	Bibliografija	188

Glava 1

Uvodni pojmovi i rezultati teorije stohastičkih diferencijalnih jednačina

U ovoj glavi su navedeni neki osnovni rezultati iz teorije stohastičkih procesa i stohastičkih diferencijalnih jednačina (SDJ), koji će biti korišćeni u narednim delovima disertacije. Detalji o ovim temama mogu se pronaći u literaturi poput [18–24]. Poglavlje 1.1 pokriva osnovne pojmove poput merljivosti, separabilnosti, svojstva Markova¹, stacionarnosti i drugih. Posebna pažnja je posvećena Brownovom kretanju² (*Wienerov³ proces*) i Itôvom⁴ integralu, i njihovim osobinama, koji su predstavljeni u Poglavljima 1.2 i 1.3, redom. Kako se u ovoj doktorskoj disertaciji proučava dinamika određenih stohastičkih epidemioloških modela, nepoznate veličine predstavljaju brojnost populacije u određenom trenutku. Stoga je neophodno pokazati da su rešenja ovih sistema globalna i pozitivna. Poglavlje 1.4 je posvećeno stohastičkim diferencijalnim jednačinama Itôa i teoremama koje obezbeđuju egzistenciju i jedinstvenost njihovog rešenja. U Poglavlju 1.5 su navedeni rezultati koji se odnose na stohastičke funkcionalne diferencijalne jednačine, a u Poglavlju 1.6 su opisane stohastičke diferencijalne jednačine sa prelazima Markova.

Kako bi se realističnije opisalo širenje epidemije, razmatrane su i stohastičke diferencijalne jednačine sa skokovima, koji se modeliraju Lévyjevim procesom. Ovi procesi omogućavaju uključivanje retkih i naglih promena u dinamiku širenja bolesti, poput neočekivanog povećanja broja zaraženih usled masovnih okupljanja ili migracija, čime se obuhvataju diskontinuirani efekti koji nisu adekvatno opisani tradicionalnim modelima. U Poglavlju 1.7 su navedene osobine procesa Lévyja, dok su u Poglavlju 1.8 sadržane stohastičke diferencijalne jednačine sa skokovima Lévyja i teoreme koje obezbeđuju egzistenciju i jedinstvenost njihovog rešenja. Poglavlje 1.9 je posvećeno rezultatima koji se odnose na stohastičke funkcionalne diferencijalne jednačine sa skokovima Lévyja, a Poglavlje 1.10 rezultatima koji se odnose na stohastičke diferencijalne jednačine sa skokovima Lévyja i prelazima Markova. U Poglavlju 1.11 su navedeni rezultati koji se odnose na stohastičke diferencijalne jednačine sa skokovima Lévyja, kašnjenjem i prelazima Markova.

Pojam ergodičke stacionarne raspodele, kao i teoreme koje garantuju njeno postojanje, predstavljeni su u Poglavlju 1.12. Osnovni koncepti populacione dinamike sadržani

¹Andrey Andreyevich Markov

²Robert Brown

³Norbert Wiener

⁴Kiyosi Itô

su u Poglavlju 1.13. Poglavlje 1.14 obuhvata neke osnovne nejednakosti koje se koriste kao ključni alati u dokazivanju glavnih rezultata u narednim poglavljima.

1.1 Osnovni pojmovi teorije stohastičkih procesa

Stohastički procesi predstavljaju skup vremenski uređenih slučajnih promenljivih i koriste se kao matematički modeli za opisivanje sistema i pojava koje se odvijaju na slučajan način. Nalaze široku primenu u raznim oblastima, uključujući bioinformatiku, finansijska tržišta, savremeno mašinsko učenje (machine learning) itd. Stohastički procesi mogu opisivati veličinu populacije, kretanje cene akcija, kamatnih stopa i drugih tržišnih faktora, služe za predviđanje i analizu vremenskih serija, opisivanje širenja zaraznih bolesti i slično.

Razvoj stohastičkih procesa započeo je početkom dvadesetog veka kao odgovor na potrebu za opisivanjem pojava koje se menjaju tokom vremena, a koje klasična teorija verovatnoće nije mogla adekvatno obuhvatiti. Ovaj napredak bio je podstaknut naglim razvojem nauke i tehnologije, kao i potrebom za detaljnijim proučavanjem dinamičkih sistema.

U nastavku ovog poglavlja navedeni su osnovni pojmovi teorije stohastičkih procesa.

Podrazumeva se da su slučajne promenljive i stohastički procesi koji se navode u nastavku definisani na prostoru verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sa parametarskim skupom $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}$, pri čemu $\mathcal{T}$ može biti interval oblika $[0, \infty)$, $[0, T]$ ili $[t_0, T] \subset [0, \infty)$, gde parametar $t \in \mathcal{T}$ predstavlja vreme.

Definicija 1.1 ([18], Poglavlje 1.3) *Familija $X = \{x(t), t \in \mathcal{T}\}$ slučajnih merljivih funkcija $x(\omega, t) : \Omega \times \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}^d$, se naziva stohastički proces sa faznim prostorom $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B})$ i parametarskim skupom $\mathcal{T}$.*

Proces iz prethodne definicije se naziva stohastički proces sa vrednostima u $\mathbb{R}^d$ ili d -dimenzionalan proces. Za svako fiksirano $t \in \mathcal{T}$ stohastički proces je slučajna promenljiva. Kako je slučajna promenljiva funkcija od $\omega \in \Omega$ sledi da je stohastički proces funkcija od dva argumenta, odnosno, $\{x(\omega, t) | \omega \in \Omega, t \in \mathcal{T}\}$. Dakle, za fiksirano $t \in \mathcal{T}$, stohastički proces se svodi na slučajnu promenljivu $x(t) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ koja se naziva zasek stohastičkog procesa u trenutku t . Sa druge strane, za fiksirano $\omega \in \Omega$, stohastički proces postaje realna funkcija vremena $x(t) : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}^d$, i naziva se trajektorija ili realizacija stohastičkog procesa.

Ukoliko je parametarski skup $\mathcal{T}_1$ diskretan, na primer, $\mathcal{T}_1 = \{0, 1, 2, \dots\}$, tada se familija $\{x(t), t \in \mathcal{T}_1\}$ naziva stohastički proces sa diskretnim vremenom ili slučajni niz. Sa druge strane, ako je $t \in \mathbb{R}$ onda se govori o stohastičkom procesu (u užem smislu).

U nastavku će biti razmatrani procesi sa neprekidnim vremenom.

Stohastički proces određuje familiju konačno-dimenzionalnih funkcija raspodela

$$F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbb{P}\{x(t_1) < x_1, \dots, x(t_n) < x_n\},$$

pri čemu je $x_i \in \mathbb{R}^d$ i $t_i \in \mathcal{T}$, $i = 1, 2, \dots, n$, $n \in \mathbb{N}$.

Da bi se definisala mera $\mathbb{P}$ na prostoru Ω , familija konačno-dimenzionalnih funkcija raspodela $F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ treba da zadovoljava sledeća dva uslova:

- uslov simetrije, odnosno, da za svaku permutaciju $(i_1, \dots, i_n)$ skupa $\{1, \dots, n\}$ važi

$$F_{t_{i_1}, t_{i_2}, \dots, t_{i_n}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n);$$

- *uslov saglasnosti*, odnosno, da važi

$$F_{t_1, t_2, \dots, t_{n-1}, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, +\infty) = F_{t_1, t_2, \dots, t_{n-1}}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}).$$

Fundamentalna teorema Daniel⁵-Kolmogorova⁶ tvrdi da za svaku familiju konačno-dimenzionalnih funkcija raspodela koja zadovoljava uslove simetrije i saglasnosti postoji prostor verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ i stohastički proces $\{x(t), t \in \mathcal{T}\}$ definisan na tom prostoru kome odgovara data familija konačno-dimenzionalnih funkcija raspodela.

U nastavku je naveden pojam *separabilnosti* koji je značajan u određivanju verovatnoća događaja opisanih pomoću stohastičkih procesa koji su definisani na neprebrojivom parametarskom skupu.

Definicija 1.2 ([18], Poglavlje 1.3) *Stohastički proces $X = \{x(t), t \in \mathcal{T}\}$ je separabilan ako postoji prebrojiv skup $S \subset \mathcal{T}$ (separant) i događaj $\Lambda \subset \Omega$ za koji je $\mathbb{P}(\Lambda) = 0$, tako da se za proizvoljan zatvoren skup $F \subset \mathbb{R}^d$ i proizvoljan otvoren interval $I \subset \mathcal{T}$ skupovi*

$$\{\omega : x(\omega, t) \in F, t \in I\} \quad \text{ i } \quad \{\omega : x(\omega, t) \in F, t \in I \cap S\}$$

razlikuju na podskupu od Λ .

Doob⁷ je pokazao da se neseparabilnost procesa jednostavno može prevazići kompletiranjem prostora verovatnoća. To se postiže dodavanjem σ -algebri $\mathcal{F}$ svih podskupova događaja čija je verovatnoća jednaka nuli. U cilju formulisanja Doobove teoreme o separabilnosti stohastičkih procesa najpre se uvode pojmovi *stohastičke ekvivalentnosti*, *neprekidnosti* i *merljivosti* stohastičkog procesa.

Definicija 1.3 ([18], Poglavlje 1.3) *Stohastički procesi $\{x(t), t \in \mathcal{T}\}$ i $\{\tilde{x}(t), t \in \mathcal{T}\}$, definisani na istom prostoru verovatnoće i sa istim skupom stanja, su stohastički ekvivalentni ako je*

$$\mathbb{P}\{x(t) = \tilde{x}(t)\} = 1 \text{ za svako } t \in \mathcal{T}.$$

U tom slučaju se kaže da je jedan proces stohastička modifikacija (verzija) drugog.

Definicija 1.4 ([18], Poglavlje 1.3) *Stohastički proces $\{x(t), t \in \mathcal{T}\}$ je merljiv ako je $x(\omega, t)$ merljiva funkcija u odnosu na $\mathcal{B}_{\mathcal{T}} \times \mathcal{F}$, gde je $\mathcal{B}_{\mathcal{T}}$ Borelovo σ -polje nad $\mathcal{T}$, tj. za svaki Borelov skup B , važi $\{(\omega, t) : x(\omega, t) \in B\} \in \mathcal{B}_{\mathcal{T}} \times \mathcal{F}$.*

Definicija 1.5 ([18], Poglavlje 1.3) *Stohastički proces $\{x(t), t \in \mathcal{T}\}$ je stohastički neprekidan u tački $t_0 \in \mathcal{T}$ ako za svako $\varepsilon > 0$ važi*

$$\mathbb{P}\{|x(t) - x(t_0)| > \varepsilon\} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow t_0. \quad (1.1)$$

Stohastički proces je stohastički neprekidan na skupu $S \subseteq \mathcal{T}$ ako (1.1) važi za svako $t_0 \in S$. U nastavku će se za procese sa osobinom stohastičke neprekidnosti koristiti i termin *neprekidni procesi*.

Teorema 1.1 (Doobova teorema, [25], Teorema 3.7) *Za svaki stohastički neprekidan stohastički proces $\{x(t), t \in \mathcal{T}\}$ postoji stohastički ekvivalentan, separabilan i merljiv stohastički proces $\{\tilde{x}(t), t \in \mathcal{T}\}$ definisan na istom prostoru verovatnoće i sa istim skupom vrednosti.*

⁵Daniel Wyler Stroock

⁶Andrey Kolmogorov

⁷Joseph Leo Doob

Stohastički proces $\{\tilde{x}(t), t \in \mathcal{T}\}$ iz Teoreme 1.1 se naziva *separabilna i merljiva modifikacija* stohastičkog procesa $\{x(t), t \in \mathcal{T}\}$.

Definicija 1.6 ([18], Poglavlje 1.3) Stohastički proces $\{x(t), t \in \mathcal{T}\}$ je neprekidan u srednjem reda p , tj. L_p -neprekidan, u tački $t_0 \in \mathcal{T}$ ako važi

$$\mathbb{E}|x(t) - x(t_0)|^p \rightarrow 0, \quad t \rightarrow t_0. \quad (1.2)$$

Stohastički proces je L_p -neprekidan na skupu $S \subseteq \mathcal{T}$ ako (1.2) važi za svako $t_0 \in S$.

Definicija 1.7 ([18], Poglavlje 1.3) Stohastički proces $\{x(t), t \in \mathcal{T}\}$ je skoro izvesno neprekidan na segmentu $[a, b] \subset \mathcal{T}$ ako su skoro sve njegove trajektorije neprekidne na $[a, b]$, odnosno, ako važi

$$\mathbb{P}\{\omega : x(\omega, t) \text{ ima prekid na } [a, b]\} = 0.$$

U nastavku je navedena teorema, poznata kao kriterijum Kolmogorova, koja daje dovoljne uslove skoro izvesne neprekidnosti stohastičkog procesa.

Teorema 1.2 (Kriterijum Kolmogorova, [20], Teorema 2.3.3) Stohastički proces $\{x(t), t \geq 0\}$ ima skoro izvesno neprekidnu modifikaciju ako postoje pozitivne konstante p, q i k , tako da za svako $T > 0$ i svako $0 \leq s, t \leq T$ važi

$$\mathbb{E}|x(t) - x(s)|^p \leq k|t - s|^{1+q}.$$

Definicija 1.8 ([18], Poglavlje 1.3) Stohastički proces $\{x(t), t \in \mathcal{T}\}$ je proces reda p (L^p -proces) ako je $\mathbb{E}|x(t)|^p < \infty$, za svako $t \in \mathcal{T}$.

Funkcija $K(s, t) = \mathbb{E}[(x(s) - \mathbb{E}[x(s)])(x(t) - \mathbb{E}[x(t)])]$, $s, t \in \mathcal{T}$ je korelaciona funkcija stohastičkog procesa $\{x(t), t \in \mathcal{T}\}$, pri čemu je $\mathbb{E}x(t) = (\mathbb{E}x_1(t), \mathbb{E}x_2(t), \dots, \mathbb{E}x_d(t))$ matematičko očekivanje d -dimenzionalnog stohastičkog procesa $\{x(t), t \in \mathcal{T}\}$.

Definicija 1.9 ([18], Poglavlje 1.3) Stohastički proces drugog reda $\{x(t), t \in \mathcal{T}\}$ je stacionaran (u užem smislu) ako za svaki izbor parametara $t_1, t_2, \dots, t_n \in \mathcal{T}$ i $h \in \mathbb{R}$, za koje je $t_1 + h, t_2 + h, \dots, t_n + h \in \mathcal{T}$, zajednička raspodela za $(x(t_1 + h), x(t_2 + h), \dots, x(t_n + h))$ ne zavisi od h .

Definicija 1.10 ([18], Poglavlje 1.3) Stohastički proces $\{x(t), t \in \mathcal{T}\}$ je stacionaran (u širem smislu) ako za svako $s, t \in \mathcal{T}$ važi $\mathbb{E}|x(t)|^2 < \infty$, $\mathbb{E}x(t) = a = \text{const}$ i korelaciona funkcija $K(s, t)$ zavisi samo od $|t - s|$.

Na datom prostoru verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ familija $\{\mathcal{F}_t, t \in \mathcal{T}\}$ pod- σ -algebri od $\mathcal{F}$ za koju važi $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$, $s \leq t$, $s, t \in \mathcal{T}$, naziva se *filtracija*. Ako je $\mathcal{T} = [0, \infty)$, tada je $\mathcal{F}_\infty = \sigma\{\cup_{t \geq 0} \mathcal{F}_t\}$.

Neka je $\mathcal{F}_{t-} = \sigma\{\cup_{s < t} \mathcal{F}_s\}$ σ -algebra događaja koji prethode momentu $t > 0$ i neka je $\mathcal{F}_{t+} = \sigma\{\cap_{s > t} \mathcal{F}_s\}$ σ -algebra događaja koji se dešavaju neposredno posle trenutka $t > 0$. Filtracija $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ je *neprekidna zdesna* (*neprekidna sleva*) ako za svako $t \geq 0$ važi $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+}$ ($\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t-}$). Za filtraciju se kaže da je neprekidna ako je $\mathcal{F}_{t-} = \mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+}$, za svako $t \geq 0$.

Filtracija $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ zadovoljava *uobičajene uslove* ako je neprekidna zdesna i $\mathcal{F}_0$ sadrži sve događaje iz $\mathcal{F}$ čija je verovatnoća nula. U nastavku će se podrazumevati da filtracija zadovoljava uobičajene uslove.

Definicija 1.11 ([18], Poglavlje 1.3) *Stohastički proces $\{x(t), t \in \mathcal{T}\}$ je adaptiran u odnosu na filtraciju $\{\mathcal{F}_t, t \in \mathcal{T}\}$ ako je za svako $t \in \mathcal{T}$ slučajna promenljiva $x(t)$ $\mathcal{F}_t$ -merljiva.*

Stohastički proces $\{x(t), t \in \mathcal{T}\}$ adaptiran u odnosu na filtraciju $\{\mathcal{F}_t, t \in \mathcal{T}\}$ označava se sa $\{x(t), \mathcal{F}_t, t \in \mathcal{T}\}$.

Za dati stohastički proces $X = \{x(t), t \in \mathcal{T}\}$, prirodna filtracija je ona koja je generisana samim procesom, odnosno, $\mathcal{F}_t^X = \sigma\{x(s), s \leq t\}$ je najmanja σ -algebra u odnosu na koju je $x(s)$ merljivo za svako $s \leq t$. Dakle, X je adaptiran u odnosu na filtraciju $\{\mathcal{F}_t^X, t \in \mathcal{T}\}$. Ako je $\tilde{X} = \{\tilde{x}(t), t \in \mathcal{T}\}$ modifikacija procesa X , tada je i $\tilde{X}$ adaptiran u odnosu na $\{\mathcal{F}_t^X, t \in \mathcal{T}\}$ ako $\mathcal{F}_0$ sadrži sve događaje iz $\mathcal{F}$ čija je verovatnoća nula.

Definicija 1.12 ([18], Poglavlje 1.3) *Stohastički proces $\{x(t), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ je progresivno merljiv ako za svako $t \geq 0$ i $B \in \mathcal{B}^d$ važi*

$$\{(s, \omega) : s \leq t, \omega \in \Omega, x(\omega, s) \in B\} \in \mathcal{B}([0, t]) \times \mathcal{F}_t,$$

pri čemu je $\mathcal{B}([0, t])$ Borelova⁸ σ -polje nad $[0, t]$.

Očigledno, svaki progresivno merljiv stohastički proces $\{x(t), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ je merljiv i adaptiran u odnosu na filtraciju $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$.

Teorema 1.3 ([26], Teorema 1.5) *Ako je stohastički proces $\{x(t), t \geq 0\}$ merljiv i adaptiran u odnosu na filtraciju $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$, tada on ima progresivno merljivu modifikaciju.*

Teorema 1.4 ([26], Teorema 1.7) *Ako je stohastički proces $\{x(t), t \geq 0\}$ adaptiran u odnosu na filtraciju $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ i neprekidan zdesna ili sleva, tada on ima progresivno merljivu modifikaciju.*

Definicija 1.13 ([18], Poglavlje 2.9) *Stohastički proces $\{x(t), t \geq 0\}$ je proces Markova ako je za svako $s < t$ i svaki Borelov skup $B \in \mathcal{B}^d$*

$$\mathbb{P}\{x(t) \in B | \mathcal{F}_s\} = \mathbb{P}\{x(t) \in B | x(s)\}, \text{ skoro izvesno.}$$

Lema 1.1 ([18], Lema 9.2) *Neka je $\bar{h}(x, \omega)$ ograničena, merljiva slučajna funkcija argumenta x , nezavisna od $\mathcal{F}_s$ i neka je ζ slučajna promenljiva koja je $\mathcal{F}_s$ -merljiva. Tada je*

$$\mathbb{E}(\bar{h}(\zeta, \omega) | \mathcal{F}_s) = H(\zeta),$$

gde je $H(x) = \mathbb{E}(\bar{h}(x, \omega))$.

Definicija 1.14 ([18], Poglavlje 1.3) *Stohastički proces $\{x(t), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ je martingal u odnosu na filtraciju $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ ako je*

$$(i) \quad \mathbb{E}|x(t)| < \infty;$$

$$(ii) \quad \mathbb{E}(x(t) | \mathcal{F}_s) = x(s) \text{ skoro izvesno (s.i.), za } 0 \leq s < t.$$

Definicija 1.15 ([18], Poglavlje 1.3) *Slučajna promenljiva $\tau: \Omega \rightarrow [0, \infty]$ se naziva vreme zaustavljanja filtracije $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$, ako važi $\{\omega : \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ za svako $t \geq 0$.*

⁸Emile Borel

Definicija 1.16 ([18], Poglavlje 1.3) *Neka je $X = \{x(t), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ neprekidan progresivno merljiv proces i neka je τ vreme zaustavljanja. Tada se proces $\{x(t \wedge \tau), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ naziva zaustavljen proces od X .*

U nastavku je navedena varijanta poznate Doobove teoreme.

Teorema 1.5 (Doobova teorema o zaustavljanju martingala, [18], Teorema 1.3.3) *Neka je $\{x(t), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ neprekidan martingal i neka je τ vreme zaustavljanja. Tada za svako $0 \leq s < t < \infty$ važi*

$$E(x_{t \wedge \tau} | \mathcal{F}_s) = x_{s \wedge \tau} \quad \text{s.i.},$$

odnosno, zaustavljen proces $\{x(t \wedge \tau), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ je takode martingal.

Definicija 1.17 ([18], Poglavlje 1.3) *Neprekidan (neprekidan zdesna) proces $\{x(t), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$, za koji je $x(0) = 0$ skoro izvesno, se naziva lokalni martingal ako postoji neopadajući niz vremena zaustavljanja $\{\tau_k, k \geq 1\}$ filtracije $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$, pri čemu je $\mathbb{P}\{\lim_{k \rightarrow \infty} \tau_k = \infty\} = 1$, takav da je $\{x(t \wedge \tau_k), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ martingal za svako $k \geq 1$.*

Dakle, svaki martingal je i lokalni martingal, dok u opštem slučaju obrat ne mora da važi.

Sa ciljem da se navede rezultat koji je poznat kao *strogi zakon velikih brojeva za martingale*, najpre se uvode pojmovi semimartingala, kvazimartingala i kvadratne varijacije.

Definicija 1.18 ([22], Poglavlje 3.1) *Slučajna promenljiva koja predstavlja totalnu varijaciju trajektorija procesa A se označava sa $|A|_t$ ili $\int_0^t |dA(s)|$ i izračunava na sledeći način $|A|_t = \sup_{n \geq 1} \sum_{k=1}^n |A_{\frac{tk}{2^n}} - A_{\frac{(k-1)t}{2^n}}|$.*

Definicija 1.19 ([22], Poglavlje 3.1) *Adaptiran, càdlàg proces A je proces ograničene varijacije, ako su trajektorije procesa A s.i. ograničene varijacije na svakom kompatnom podskupu od $[0, \infty)$, tj. $|A|_t < \infty$ za svako $t \geq 0$.*

Definicija 1.20 ([22], Poglavlje 3.1) *Adaptiran, càdlàg proces Y je semimartingal, ako postoje procesi N i A , za koje je $N(0) = A(0) = 0$ takvi da je*

$$Y(t) = Y(0) + N(t) + A(t),$$

gde je N lokalni martingal i A proces ograničene varijacije.

Definicija 1.21 ([22], Poglavlje 3.1) *Neka je $\tau = (t_0, t_1, \dots, t_{i+1})$ particija $[0, \infty]$ i neka je $X_{t_i} \in L^1$ za svako $t_i \in \tau$. Definiše se*

$$C(X, \tau) := \sum_{i=0}^n |\mathbb{E}\{X_{t_i} - X_{t_{i+1}} | \mathcal{F}_{t_i}\}|.$$

Varijacija procesa X duž τ je

$$Var_\tau(X) = \mathbb{E}\{C(X, \tau)\}.$$

Varijacija procesa X je definisana sa

$$Var(X) = \sup_{\tau} Var_\tau(X).$$

Definicija 1.22 ([22], Poglavlje 3.1) *Adaptiran, càdlàg proces X je kvazimartingal, ako je $\mathbb{E}\{|X_t|\} < \infty$, za svako t i $\text{Var} E(X) < \infty$.*

Definicija 1.23 ([22], Poglavlje 3.5) *Neka su X, Y semimartingali. Kvadratna varijacija procesa X , u oznaci $[X, X] = \{[X, X]_t\}_{t \geq 0}$, je definisana na sledeći način*

$$[X, X] = X^2 - 2 \int X_- dX,$$

gde je $X_{0-} = 0$. Kvadratna kovarijacija (engleski nazivi: quadratic covariance, bracket process) procesa X i Y je definisana sa

$$[X, Y] = XY - \int X_- dY - \int Y_- dX.$$

Teorema 1.6 (Raova teorema, [22], Teorema 3.4.15) *Kvazimartingal X ima jedinstvenu dekompoziciju $X = M + A$, pri čemu je M lokalni martingal i A je predvidiv proces sa trajektorijama lokalno integrabilne varijacije i $A_0 = 0$.*

Definicija 1.24 ([22], Poglavlje 3.5) *Neka je A proces ograničene varijacije sa $A_0 = 0$ i lokalno integrabilnom ukupnom varijacijom. Jedinstveni predvidiv proces ograničene varijacije $\tilde{A}$, takav da je $A - \tilde{A}$ lokalni martingal, se naziva kompenzator procesa A .*

Definicija 1.25 ([22], Poglavlje 3.5) *Neka je X semimartingal takav da je njegov proces kvadratne varijacije $[X, X]$ lokalno integrabilan. Uslovna kvadratna varijacija (engleski nazivi: conditional quadratic variance, sharp bracket, angle bracket, oblique bracket) procesa X , u oznaci $\langle X, X \rangle = \{\langle X, X \rangle_t\}_{t \geq 0}$, se definiše kao kompenzator procesa $[X, X]$, odnosno, $\langle X, X \rangle = [X, X]$.*

Napomena 1.1 ([22], Poglavlje 3.5) *Ako je X neprekidan semimartingal, tada je proces $[X, X]$ takođe neprekidan i prema tome predvidiv. Dakle, $\langle X, X \rangle = [X, X]$ kada je X neprekidan.*

Teorema 1.7 (Strogi zakon velikih brojeva, [18], Teorema 1.3.4) *Neka $\{X(t), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ predstavlja realan neprekidan lokalni martingal za koji je $X(0) = 0$. Tada, ako je*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle X, X \rangle_t = \infty \text{ s.i.} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{X_t}{\langle X, X \rangle_t} = 0 \text{ s.i.,}$$

i

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\langle X, X \rangle_t}{t} < \infty \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{X_t}{t} = 0 \text{ s.i.}$$

Teorema 1.8 (Strogi zakon velikih brojeva za lokalne martingale, [27], Lema 2) *Neka je $\{X(t), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ lokalni martingal za koji je $X(0) = 0$ i neka je*

$$\rho_X(t) := \int_0^t \frac{d\langle X, X \rangle(s)}{1 + s^2}, \quad t \leq 0,$$

pri čemu je $\langle X, X \rangle(t)$ Mejerov proces uslovne kvadratne varijacije. Tada je

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{X(t)}{t} < \infty, \text{ s.i.} \quad \text{pod uslovom da važi} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \rho_X(t) < \infty, \text{ s.i.}$$

U nastavku su navedene leme koje će biti primenjivane u dokazu glavnih rezultata.

Lema 1.2 (Borel-Cantellijeva lema, [18], Lema 1.2.4)

1. Ako je $A_k \subset \mathcal{F}$ i $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_k) < \infty$, tada je

$$\mathbb{P}(\limsup_{k \rightarrow \infty} A_k) = 0.$$

Odnosno, postoji skup $\Omega_0 \in \mathcal{F}$ za koji je $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$ i slučajna promenljiva sa celobrojnim pozitivnim vrednostima k_0 takva da za svako $\omega \in \Omega_0$, važi da $\omega \notin A_k$ za svako $k \geq k_0(\omega)$.

2. Ako je niz $A_k \subset \mathcal{F}$ nezavisan i $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_k) = \infty$, tada je

$$\mathbb{P}(\limsup_{k \rightarrow \infty} A_k) = 1.$$

Odnosno, postoji skup $\Omega_1 \in \mathcal{F}$ za koji je $\mathbb{P}(\Omega_1) = 1$, takav da za svako $\omega \in \Omega_1$, postoji podniz $A_{k_i} \subset \mathcal{F}$, tako da $\omega \in A_{k_i}$ za svako $i \geq 1$.

Lema 1.3 ([28], Teorema 5.1) Neka su $\mathbb{P}, \mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2, \dots$ verovatnosne mere na $\mathbb{R}^d$. Sledeća tvrđenja su ekvivalentna:

1. Niz $\{\mathbb{P}_n : n = 1, 2, \dots\}$ slabo konvergira ka $\mathbb{P}$.

2. Jednakost

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) d\mathbb{P}_n(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) d\mathbb{P}(x),$$

važi za sve beskonačno diferencijabilne funkcije $f(x)$ koje nestaju van ograničenog skupa⁹.

3. $\mathbb{F}_n(x) \rightarrow \mathbb{F}(x)$ kada $n \rightarrow \infty$, u svakoj tački neprekidnosti x funkcije $\mathbb{F}$, pri čemu su $\mathbb{F}, \mathbb{F}_n, n = 1, 2, \dots$, funkcije raspodele koje odgovaraju verovatnoćama $\mathbb{P}, \mathbb{P}_n, n = 1, 2, \dots$, redom.

1.2 Brownovo kretanje

Brownovo kretanje je prvi uočio škotski botaničar Robert Braun 1827. godine. Posmatrao je nasumična mikroskopski vidljiva kretanja malih čestica unutar polenovih zrnaca na površini tečnosti. Iako je u početku bio predmet interesa botaničara, ovaj fenomen su kasnije fizičari uveli u fiziku i razvili kvantitativnu teoriju kako bi ga objasnili. Najznačajniji doprinos razumevanju Brownovog kretanja dali su Albert Einstein¹⁰, Marian von Smoluchowski¹¹ i Paul Langevin¹², čiji su radovi tokom 20. veka kulminirali u potpunijem fizičko-matematičkom opisu ovog fenomena.

Albert Einstein je 1905. godine razvio fizičko-matematički model za opis Brownovog kretanja, iako nije pružio njegov potpun matematički opis. Njegova ključna hipoteza bila je da haotično kretanje čestica polenovog praha nastaje kao rezultat sudara sa molekulima vode, pri čemu čestice polena i molekuli vode poseduju istu kinetičku energiju.

⁹ Za funkciju se kaže da nestaje van ograničenog skupa ako je jednaka 0 van ograničenog skupa (tj. ima ograničenu podršku).

¹⁰ Albert Einstein

¹¹ Marian von Smoluchowski

¹² Paul Langevin

Kasnije su se brojni matematičari i fizičari bavili ovom temom. Posebno značajan doprinos dao je Norbert Wiener, koji je 1923. godine definisao strogu matematičku formulu Brownovog kretanja. U njegovu čast, Brownovo kretanje se često naziva i Wienerov proces. Fenomen je nastavio da intrigira i fizičare, o čemu svedoče radovi Ornsteina¹³ i Uhlenbecka¹⁴. Posebnu pažnju zaslužuje i rad Louisa Bacheliera¹⁵, koji je još 1900. godine iskoristio koncept Brownovog kretanja za opisivanje slučajnih promena cena akcija. Time je postavio temelje probabilističkog pristupa u finansijama, čime je postao preteča modernih finansijskih matematičkih modela.

Brownovo kretanje ima široku primenu i predstavlja univerzalan matematički pojam za opisivanje mnogih složenih procesa u različitim naučnim disciplinama.

Definicija 1.26 ([18], Definicija 1.4.1) *Stohastički proces $B = \{B(t), t \geq 0\}$ je Brownovo kretanje ako zadovoljava sledeće uslove:*

1. $B(0) = 0$, skoro izvesno;
2. ima nezavisne priraštaje, odnosno, za svako $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n, n \in \mathbb{N}$, slučajne promenljive $B(t_0), B(t_1) - B(t_0), \dots, B(t_n) - B(t_{n-1})$ su nezavisne;
3. $B(t) - B(s) \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2|t - s|), 0 \leq s < t$.

Specijalno, za $\sigma^2 = 1$, proces B je *standardno Brownovo kretanje*.

Pored Brownovog kretanja, treba pomenuti i Gaussove¹⁶ procese kojima se modelira veliki broj pojava iz bioloških, fizičkih, tehničkih i ekonomskih nauka.

Definicija 1.27 ([18], Poglavlje 1.4) *Stohastički proces $\{x(t), t \geq 0\}$ je Gaussov proces ako je svaka linearna kombinacija njegovog n -dimenzionalnog zaseka $(x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_n))$ Gaussova slučajna promenljiva, odnosno, ako je za svako $n \in \mathbb{N}, t_1, \dots, t_n \geq 0$ i $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, slučajna promenljiva $\sum_{i=1}^n \alpha_i x(t_i)$ Gaussova.*

Može se dokazati da je stohastički proces $\{B(t), t \geq 0\}$ Brownovo kretanje ako i samo ako je Gaussov proces i $\mathbb{E}B(t) = 0, K(s, t) = \sigma^2 \min\{s, t\}, s, t \geq 0$.

Neka je $\sigma(B) = \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ prirodna filtracija Brownovog kretanja.

Brownovo kretanje ima mnogo važnih osobina među kojima su izdvojene sledeće:

- Drugog je reda, odnosno, $\mathbb{E}|B(t)|^2 < \infty, \forall t \geq 0$;
- Konačno dimenzionalne gustine su: za proizvoljne $n \in \mathbb{N}, 0 \leq t_1 < \dots < t_n$ i $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f_n(t_1, \dots, t_n; u_1, \dots, u_n) \\ = f_1(t_1; u_1) \cdot f_1(t_2 - t_1; u_2 - u_1) \cdot \dots \cdot f_1(t_n - t_{n-1}; u_n - u_{n-1}); \end{aligned}$$

- Homogen je proces Markova;
- Srednje kvadratno je neprekidan;

¹³Leonard Salomon Ornstein

¹⁴George Eugene Uhlenbeck

¹⁵Louis Bachelier

¹⁶Carl F. Gauss

- Skoro izvesno je neprekidan, odnosno, skoro sve njegove trajektorije su neprekidne funkcije na $[0, \infty)$;
- Skoro sve trajektorije su nediferencijabilne funkcije u svakoj tački;
- Proces $\{B(t), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ je martingal;
- Skoro izvesno je neograničene varijacije i konačne srednje-kvadratne varijacije na svakom segmentu $[a, b] \subset [0, \infty)$, odnosno, za proizvoljnu konstantu $c \in \mathbb{R}$ i proizvoljnu particiju $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ segmenta $[a, b]$ za koju $\max_{1 \leq k \leq n} (t_k - t_{k-1}) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$, važi

$$\mathbb{P} \left\{ \sum_{k=1}^n |B(t_k) - B(t_{k-1})| > c \right\} \rightarrow 1 \quad (\text{srednje-kvadratno}),$$

$$\sum_{k=1}^n |B(t_k) - B(t_{k-1})|^2 \rightarrow \sigma^2(b - a) \quad (\text{srednje-kvadratno});$$

- Može se definisati na intervalu $(-\infty, +\infty)$, pri čemu je $\mathbb{E}B(t) = 0$ i $K(s, t) = \frac{1}{2}(|t| + |s| - |t - s|)$. Na taj način se dobijaju nezavisna Brownova kretanja $\{B(t), t \geq 0\}$ i $\{B(-t), t \geq 0\}$ čije su trajektorije skoro izvesno spojene u tački $t = 0$.

Definicija 1.28 ([18], Definicija 1.4.3) *Stohastički proces $\{B(t), t \geq 0\} = \{(B_1(t), B_2(t), \dots, B_m(t)), t \geq 0\}$ je m -dimenzionalno Brownovo kretanje ako ispunjava sledeće uslove:*

- $B(0) = 0$, skoro izvesno;
- ima nezavisne priraštaje;
- $B(t) - B(s) \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2(t - s)I)$, $0 \leq s < t$, gde je I jedinična matrica reda m .

Koordinate m -dimenzionalnog Brownovog kretanja su nezavisna Brownova kretanja. Za m -dimenzionalno Brownovo kretanje važe iste osobine kao za jednodimenzionalan slučaj.

U fizičkim sistemima beli šum se najčešće opisuje stacionarnim procesom $\{\xi(t), t \geq 0\}$ koji ima očekivanje nula i konstantnu spektralnu gustinu $S(\lambda) = S_0$, $\lambda \in \mathbb{R}$, pri čemu je $S(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\lambda t) K(\tau) d\tau$, gde je $K(\tau)$ korelaciona funkcija belog šuma koja kod stacionarnih procesa zavisi samo od vremenske razlike trenutaka, a ne samih trenutaka. Gaussov proces $\{\xi(t), t \geq 0\}$ se naziva *Gaussov beli šum*. Reč „beli” u nazivu potiče iz radiotehnike i ima smisla ako se ima u vidu da je za $\xi(t)$ spektralni sastav nepromenljiv kao i kod bele svetlosti, dok je reč „šum” više istorijskog karaktera. Naime, procesi ovog tipa su se najpre proučavali u radiotehnici gde su se javljali kao šumovi na linijama radiopredaje.

Za Gaussov beli šum slučajne promenljive $\xi(t)$ i $\xi(s)$ su međusobno nekorelirane ako je $t \neq s$, čak i kada su t i s vrlo bliske po vrednosti. Pored toga, disperzija belog šuma je $+\infty$, tako da ovaj proces u prirodi ne postoji, ali je pogodna matematička apstrakcija za opisivanje pojava koje mnogo variraju sa prelaskom iz jednog stanja u drugo.

Na kraju treba istaći da se Gaussov beli šum $\{\xi(t), t \geq 0\}$ može posmatrati kao uopšten stohastički proces koji predstavlja formalan izvod Brownovog kretanja, tačnije $\xi(t) = \frac{dB(t)}{dt} = \dot{B}(t)$ i može se predstaviti u integralnom obliku kao $B(t) = \int_0^t \xi(s)ds$ (videti [29], Poglavlje 2).

1.3 Integral Itôa

Itôv integral predstavlja jedan od ključnih pojmova u stohastičkoj analizi. Japanski matematičar K. Itô, je 1944. godine uveo koncept stohastičkog integrala

$$\int_0^t \varphi(s)dB(s),$$

u odnosu na m -dimenzionalno Brownovo kretanje $B(\cdot)$ za klasu $d \times m$ -dimenzionalnih stohastičkih procesa $\varphi(\cdot)$. Glavni motiv za uvođenje ovog integrala bio je razvoj matematičkog pristupa za rešavanje diferencijalnih jednačina koje uključuju stohastičke procese. Neograničena varijacija Brownovog kretanja i činjenica da njegove trajektorije skoro izvesno nemaju izvod ni u jednoj tački predstavljale su značajne prepreke u ranijim pokušajima definisanja integracije u odnosu na Brownovo kretanje.

Za razliku od klasičnih Riman^[17]-Stieltjesovih^[18] ili Lebesgueovih^[19] integrala, Itôv integral se definiše u kontekstu stohastičkih procesa i njegova glavna karakteristika je ta što uzima u obzir specifične osobine stohastičkih procesa, kao što su prekidi (skokovi), koji su prisutni u mnogim realnim sistemima, poput tržišta finansija, bioloških i fizičkih sistema.

Jedna od najpoznatijih primena Itôvog integrala jeste u finansijama za modeliranje cena akcija i u biologiji za modeliranje dinamike sistema pod uticajem stohastičkih faktora.

1.3.1 Konstrukcija integrala Itôa

Neka su sve slučajne promenljive i procesi koji će biti razmatrani u nastavku definisani na kompletnom prostoru verovatnoće $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Neka je $B = \{B(t), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ jednodimenzionalno standardno Brownovo kretanje adaptirano u odnosu na rastuću familiju pod- σ -algebri $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ σ -algebre $\mathcal{F}$ pri čemu je $\mathcal{F}_t = \sigma\{B(s), s \leq t\}$, $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, $s < t$, i $B(t) - B(s)$ nezavisno u odnosu na $\mathcal{F}_s$ za svako $s < t$.

Za $0 \leq t_0 < T < \infty$ sa $\mathcal{M}_2([t_0, T]; \mathbb{R})$ je označena klasa stohastičkih procesa $\varphi = \{\varphi(t), t \in [t_0, T]\}$ sa sledećim osobinama:

1. φ je $\mathcal{B} \otimes \mathcal{F}$ -merljiv;
2. φ je adaptiran u odnosu na familiju $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$;
3. $\|\varphi\|^2 = \int_{t_0}^T \mathbb{E}|\varphi(t)|^2 dt < \infty$.

¹⁷Bernhard Riemann

¹⁸Thomas Joannes Stieltjes

¹⁹Henri Lebesgue

Prostor $(\mathcal{M}_2([t_0, T]; \mathbb{R}), \|\cdot\|)$ je Banachov²⁰ i u tom prostoru se poistovećuju φ i $\tilde{\varphi}$ ako je $\|\varphi - \tilde{\varphi}\| = 0$.

Neka važi pretpostavka da su proces φ i Brownovo kretanje nezavisni.

Definicija 1.29 ([18], Definicija 1.5.2) *Stohastički proces $\varphi \in \mathcal{M}_2([t_0, T]; \mathbb{R})$ je stepenasti proces ako postoji particija $t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$, nezavisna od B , tako da je*

$$\varphi(t) = \varphi(t_k) \quad \text{s.i.,} \quad t_k \leq t < t_{k+1}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Definicija 1.30 ([18], Definicija 1.5.3) *Neka je $\varphi \in \mathcal{M}_2([t_0, T]; \mathbb{R})$ stepenasti stohastički proces. Slučajna promenljiva*

$$I(\varphi) = \int_{t_0}^T \varphi(t) dB(t) := \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(t_k)(B(t_{k+1}) - B(t_k)),$$

naziva se stohastički integral stepenastog procesa φ u odnosu na Wienerov proces B ili integral Itôa.

Sledeća lema ima ključnu ulogu u definisanju integrala Itôa za proizvoljan proces $\varphi \in \mathcal{M}_2([t_0, T]; \mathbb{R})$.

Lema 1.4 ([18], Lema 1.5.6) *Neka je $B = \{B(t), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ Brownovo kretanje i neka je $\varphi \in \mathcal{M}_2([t_0, T]; \mathbb{R})$. Tada:*

1. *postoji niz stepenastih procesa $\{\varphi_n, n \in \mathbb{N}\}$ tako da*

$$\|\varphi - \varphi_n\|^2 = \int_{t_0}^T \mathbb{E}|\varphi(t) - \varphi_n(t)|^2 dt \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty;$$

2. *ako niz stepenastih procesa $\{\varphi_n, n \in \mathbb{N}\}$ aproksimira φ u smislu da je $\|\varphi - \varphi_n\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ i ako je integral $I(\varphi_n)$ definisan kao u Definiciji 1.30 tada niz slučajnih promenljivih $\{I(\varphi_n), n \in \mathbb{N}\}$ konvergira u srednje-kvadratnom (s.k.) smislu kada $n \rightarrow \infty$;*

3. *ako su $\{\varphi_n, n \in \mathbb{N}\}$ i $\{\varphi'_n, n \in \mathbb{N}\}$ dva niza stepenastih procesa koji aproksimiraju φ , tada je*

$$\text{s.k.} \lim_{n \rightarrow \infty} I(\varphi_n) = \text{s.k.} \lim_{n \rightarrow \infty} I(\varphi'_n).$$

Integral Itôa $I(\varphi)$ može se definisati kao srednje-kvadratna granična vrednost niza stepenastih procesa $\{\varphi_n, n \in \mathbb{N}\}$, tj.

$$I(\varphi) = \int_{t_0}^T \varphi(t) dB(t) := \text{s.k.} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{t_0}^T \varphi_n(t) dB(t),$$

što je direktna posledica Leme 1.4.

Neke od najvažnijih osobina integrala Itôa navedene su u teoremi koja sledi.

Teorema 1.9 ([18], Teorema 1.5.8) *Neka su $\varphi, \psi \in \mathcal{M}_2([t_0, T]; \mathbb{R})$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ proizvoljne konstante. Tada je:*

²⁰ Stefan Banach

1. $I(\varphi)$ $\mathcal{F}_T$ -merljivo;
2. $\mathbb{E}I(\varphi) = 0$;
3. $I(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha I(\varphi) + \beta I(\psi)$;
4. $\mathbb{E}|I(\varphi)|^2 = \int_{t_0}^T \mathbb{E}|\varphi(t)|^2 dt$ (stohastička integralna izometrija);
5. $\mathbb{E}[I(\varphi)I(\psi)] = \int_{t_0}^T \mathbb{E}[\varphi(t)\psi(t)]dt$.

Integral Itôa se može definisati pod slabijim uslovima od prethodno navedenih. Naime, neka je $\mathcal{L}_2([t_0, T]; \mathbb{R})$ klasa stohastičkih procesa koji su $\mathcal{B} \otimes \mathcal{F}$ -merljivi, adaptirani u odnosu na familiju $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ i za koje važi da je

$$P \left\{ \int_{t_0}^T |\varphi(t)|^2 dt < \infty \right\} = 1.$$

Na osnovu definicije klase $\mathcal{L}_2([t_0, T]; \mathbb{R})$ može se zaključiti da je ona šira u odnosu na klasu $\mathcal{M}_2([t_0, T]; \mathbb{R})$. Pored toga, za svako $\varphi \in \mathcal{L}_2([t_0, T]; \mathbb{R})$ postoji niz $\{\varphi_n, n \in \mathbb{N}\}$ iz klase $\mathcal{M}_2([t_0, T]; \mathbb{R})$ tako da se integral Itôa procesa φ može definisati kao

$$I(\varphi) = \lim_{n \rightarrow \infty} I(\varphi_n) \quad (u \text{ verovatnoći}).$$

U ovom slučaju osobine 1-3 Teoreme 1.9 važe, dok ostale ne važe.

Integral Itôa procesa $\varphi \in \mathcal{L}_2([t_0, T]; \mathbb{R})$ zadovoljava sledeću osobinu: za proizvoljne pozitivne konstante N i ε važi

$$\mathbb{P} \left\{ \left| \int_{t_0}^T \varphi(t) dB(t) \right| > \varepsilon \right\} \leq \mathbb{P} \left\{ \int_{t_0}^T |\varphi(t)|^2 dt > N \right\} + \frac{N}{\varepsilon^2}.$$

1.3.2 Neodređeni integral Itôa

U nastavku će biti definisan neodređeni stohastički integral Itôa.

Neka je $T > 0$ i $\varphi \in \mathcal{M}_2([t_0, T]; \mathbb{R})$. Tada za sve $0 \leq a < b \leq T$ funkcija $\{\varphi(t) | t \in [a, b]\} \in \mathcal{M}_2([t_0, T]; \mathbb{R})$ i integral $\int_a^b \varphi(t) dB(t)$ je dobro definisan. Pod ovim uslovima integral Itôa poseduje sledeću osobinu

$$\int_a^b \varphi(t) dB(t) + \int_b^c \varphi(t) dB(t) = \int_a^c \varphi(t) dB(t), \quad 0 \leq a < b < c \leq T.$$

Definicija 1.31 ([18], Definicija 1.5.11) Neka je $I_{\{s < t\}}$, $t_0 \leq s < t < T$ indikator skupa $[t_0, t]$. Neodređeni integral Itôa procesa $\varphi \in \mathcal{M}_2([t_0, T]; \mathbb{R})$ je stohastički proces $X = \{x(t), t \in [t_0, T]\}$, pri čemu je

$$x(t) := \int_{t_0}^T I_{\{s < t\}} \varphi(s) dB(s) = \int_{t_0}^t \varphi(s) dB(s), \quad t \in [t_0, T].$$

Neodređeni stohastički integral Itôa poseduje sledeće osobine:

1. $x(t)$ je $\mathcal{F}_t$ -merljivo za $t \in [t_0, T]$;

2. $\{x(t), \mathcal{F}_t, t \in [t_0, T]\}$ ima separabilnu i merljivu modifikaciju;
3. $x(t_0) = 0$ skoro izvesno;
4. $x(t) - x(s) = \int_s^t \varphi(u) dB(u)$;
5. $\mathbb{E}x(t) = 0$;
6. $\mathbb{E}|x(t)|^2 = \int_{t_0}^t \mathbb{E}|\varphi(s)|^2 ds$;

Teorema 1.10 ([18], Teorema 1.5.14) *Neka je $\varphi \in \mathcal{M}_2([t_0, T]; \mathbb{R})$. Neodređeni stohastički integral Itôa $\{x(t), \mathcal{F}_t, t \in [t_0, T]\}$ je kvadratno integrabilan neprekidan martingal sa kvadratnom varijacijom $[x, x]_t$*

$$[x, x]_t = \int_{t_0}^t |\varphi(u)|^2 du, \quad t \in [t_0, T].$$

Na osnovu prethodne teoreme sledi da, ako je τ vreme zaustavljanja u odnosu na $\{\mathcal{F}_t, t \in [t_0, T]\}$, tada je za $\varphi \in \mathcal{M}_2([t_0, T]; \mathbb{R})$ stohastički proces

$$x(t \wedge \tau) = \int_{t_0}^{t \wedge \tau} \varphi(s) dB(s), \quad t \in [t_0, T],$$

martingal u odnosu na $\{\mathcal{F}_t, t \in [t_0, T]\}$ i $\mathbb{E}x(t \wedge \tau) = 0$.

Neodređeni integral Itôa se može definisati i za stohastičke procese $\varphi \in \mathcal{L}_2([t_0, T]; \mathbb{R})$ imajući u vidu Definiciju 1.31. Tada je proces $X = \{x(t), \mathcal{F}_t, t \in [t_0, T]\}$ merljiv i skoro izvesno neprekidan, dok u opštem slučaju, nije martingal. Međutim, proces X je lokalni martingal, odnosno, $\{x(t \wedge \tau_n), \mathcal{F}_t, t \in [t_0, T]\}$ je martingal, pri čemu je $\{\tau_n, n \in \mathbb{N}\}$ niz vremena zaustavljanja definisanih sa

$$\tau_n = \inf_{t \in [t_0, T]} \left\{ \int_{t_0}^t |\varphi(s)|^2 ds \geq n \right\}.$$

1.3.3 Formula Itôa

Budući da direktno izračunavanje Itôvog integrala po definiciji nije efikasan pristup, u ovom poglavlju će biti razmatrana stohastička verzija smene promenljivih, koja se koristi za rešavanje Itôvog integrala, poznata kao *Itôva formula*.

Ovu formulu je prvi uveo K. Itô 1944. godine u radovima [30, 31], a uopštio je Meyer [32].

Bez umanjenja opštosti u nastavku se pretpostavlja da je $t_0 = 0$.

Najpre je uvedena jednodimenzionalna formula Itôa koja će se u nastavku uopštiti na višedimenzionalni slučaj.

Neka je $B = \{B(t), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ jednodimenzionalno Brownovo kretanje definisano na kompletnom prostoru verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Neka su $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}_+; \mathbb{R})$ i $g \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}_+; \mathbb{R})$, što znači da su to merljivi procesi, adaptirani u odnosu na familiju $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$, pri čemu je, za svako $T > 0$,

$$\int_0^T |f(t)| dt < \infty \quad s.i., \quad \int_0^T |g(t)|^2 dt < \infty \quad s.i.$$

Definicija 1.32 ([18], Definicija 1.6.1) *Neka su $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}_+; \mathbb{R})$ i $g \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}_+; \mathbb{R})$. Jednodimenzionalan stohastički proces $\{x(t), t \geq 0\}$, gde je*

$$x(t) = x(0) + \int_0^t f(s)ds + \int_0^t g(s)dB(s), \quad t \geq 0, \quad (1.3)$$

se naziva proces Itôa. Kaže se da $x(t)$ ima stohastički diferencijal $dx(t)$ za $t \geq 0$ oblika

$$dx(t) = f(t)dt + g(t)dB(t).$$

Prvi integral u izrazu (1.3) je Lebesgueov, dok je drugi integral Itôa. Kako su oba integrala merljiva, $\mathcal{F}_t$ -adaptirana i skoro izvesno neprekidna, to i proces Itôa ima iste osobine. Očigledno, proces Itôa $\{x(t), t \geq 0\}$ i njegov stohastički diferencijal $dx(t)$ se mogu razmatrati na bilo kom segmentu $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

Teorema 1.11 (Formula Itôa, [18], Teorema 1.6.2) *Neka je $\{x(t), t \geq 0\}$ proces Itôa sa stohastičkim diferencijalom $dx(t) = f(t)dt + g(t)dB(t)$ i neka je $F : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ neslučajna funkcija sa neprekidnim parcijalnim izvodima $F'_t(t, x)$, $F'_x(t, x)$, $F''_{xx}(t, x)$. Tada je $\{F(t, x(t)), t \geq 0\}$ takođe proces Itôa sa stohastičkim diferencijalom*

$$dF(t, x(t)) = F'_t(t, x(t))dt + F'_x(t, x(t))dx(t) + \frac{1}{2}F''_{xx}(t, x(t))g^2(t)dt, \quad t \geq 0. \quad (1.4)$$

Izraz (1.4) je poznat kao Itôva formula za stohastičko diferenciranje u jednodimenzionalnom slučaju.

U nastavku se navodi višedimenzionalna formula Itôa. Iz tog razloga potrebno je najpre uvesti pojam višedimenzionalnog stohastičkog diferencijala.

Definicija 1.33 ([18], Definicija 1.6.3) *Neka je $B = \{B(t), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ m -dimenzionalno Brownovo kretanje. Neprekidan i adaptiran d -dimenzionalan stohastički proces $\{x(t), t \geq 0\}$, pri čemu je $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_d(t))^T$, je proces Itôa ako je oblika*

$$x(t) = x(0) + \int_0^t f(s)ds + \int_0^t g(s)dB(s),$$

gde je $a \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^d)$ i $b \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^{d \times m})$. Kaže se da $\{x(t), t \geq 0\}$ ima stohastički diferencijal $dx(t)$ za $t \geq 0$, pri čemu je

$$dx(t) = f(t)dt + g(t)dB(t).$$

Neka $C^{1,2}([0, \infty) \times \mathbb{R}^d; \mathbb{R})$ predstavlja familiju nenegativnih realnih funkcija $V(t, x)$ sa neprekidno-diferencijabilnim parcijalnim izvodima prvog reda po t i prvog i drugog reda po x . Uvode se sledeće oznake

$$V_t = \frac{\partial V}{\partial t}, \quad V_x = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_d} \right),$$

$$V_{xx} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{d \times d} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_d} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x_d \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 V}{\partial x_d \partial x_d} \end{pmatrix}.$$

Teorema 1.12 (Višedimenzionalna formula Itôa, [18], Teorema 1.6.4) *Neka je $\{x(t), t \geq 0\}$ d -dimenzionalan proces Itôa sa stohastičkim diferencijalom $dx(t) = f(t)dt + g(t)dB(t)$ i neka je $V \in C^{1,2}([0, \infty) \times \mathbb{R}^d; \mathbb{R})$. Tada je $\{V(t, x(t)), t \geq 0\}$ takođe proces Itôa sa stohastičkim diferencijalom*

$$dV(t, x(t)) = \left[V_t(t, x(t)) + V_x(t, x(t))f(t) + \frac{1}{2} \text{trace} (g^T(t) V_{xx}(t, x(t)) g(t)) \right] dt + V_x(t, x(t))g(t)dB(t), \quad t \geq 0.$$

1.4 Stohastičke diferencijalne jednačine

Stohastičke diferencijalne jednačine predstavljaju proširenje običnih diferencijalnih jednačina. One uključuju stohastičke procese kojima se opisuje neizvesnost ili slučajnost u promenama sistema i ključne su za modeliranje sistema sa inherentnom neizvesnošću, omogućavajući matematičko razumevanje i predviđanje njihovog ponašanja. SDJ imaju široku primenu u raznim disciplinama, uključujući fiziku, biologiju, finansije, inženjerstvo i epidemiologiju.

Teorija stohastičkih diferencijalnih jednačina počela je da se razvija u okviru teorije stohastičkih procesa pedesetih godina prošlog veka. Nezavisno jedan od drugog, ovu teoriju su razvili I. I. Gikhman²¹ [33], [34] i K. Itô [30], [35], [36]. Danas je opšte prihvaćena terminologija koju je uveo Itô.

Neka je promena stanja nekog sistema, čija je dinamika opisana stohastičkim procesom $X = \{x(t), t \in [0, T]\}$ za vremenski period dt , zadata sledećom diferencijalnom jednačinom

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) + g(t, x(t))\xi(t), \quad t \in [0, T], \quad x(0) = x_0, \quad (1.5)$$

gde su $f : [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, $g : [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d \times m}$ neslučajne Borelove funkcije.

S obzirom na pomenutu vezu između Gaussovog belog šuma i Brownovog kretanja jednačina (1.5) se može predstaviti stohastičkom diferencijalnom jednačinom

$$dx(t) = f(t, x(t))dt + g(t, x(t))dB(t), \quad t \in [0, T], \quad x(0) = x_0, \quad (1.6)$$

pri čemu je $B = \{B(t), t \in [0, T]\}$ m -dimenzionalno Brownovo kretanje, a x_0 je d -dimenzionalna slučajna promenljiva koja je stohastički nezavisna u odnosu na proces B .

Imajući u vidu Definiciju 1.33 stohastičkog diferencijala, jednačina (1.6) se može zapisati u ekvivalentnom integralnom obliku na sledeći način

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x(s))ds + \int_0^t g(s, x(s))dB(s), \quad t \in [0, T]. \quad (1.7)$$

Funkcije $f(t, x(t))$ i $g(t, x(t))$ su *koeficijenti jednačine* (1.6), pri čemu se $f(t, x(t))$ naziva *koeficijent prenosa*, a $g(t, x(t))$ *koeficijent difuzije* ili *rasipanja*.

Nadalje će se podrazumevati da je filtracija $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$, $\mathcal{F}_t = \sigma\{x_0, B(s), 0 \leq s \leq t\}$ generisana Brownovim kretanjem.

Definicija 1.34 ([18], Definicija 2.2.1) *Merljiv stohastički proces $X = \{x(t), t \in [0, T]\}$ je strogo rešenje jednačine (1.6) ako zadovoljava sledeće uslove:*

²¹ Iosif I. Gikhman

1. $x(t)$ je $\mathcal{F}_t$ -merljivo za svako $t \in [0, T]$;
2. $\int_0^T |f(t, x(t))| dt < \infty$ s.i., $\int_0^T |g(t, x(t))|^2 dt < \infty$ s.i.;
3. $x(0) = x_0$ s.i.;
4. jednačina (1.7) je zadovoljena skoro izvesno za svako $t \in [0, T]$.

Jednačina (1.6) ima jedinstveno strogo rešenje ako za svaka dva stroga rešenja x i $\tilde{x}$ važi

$$\mathbb{P}\{x(t) = \tilde{x}(t), t \in [0, T]\} = 1.$$

Lebesgueov i Itôv integral na desnoj strani jednakosti (1.7) dobro su definisani i skoro izvesno neprekidni, zbog čega je i $X(\cdot)$ skoro izvesno neprekidan proces. To je direktna posledica osobina 1 i 2 Definicije 1.34. Pored toga, oba integrala su jedinstvena do stohastičke ekvivalentnosti. U tom slučaju, u skladu sa Teoremom 1.1 Dooba, uvek se pretpostavlja da se radi sa merljivom, separabilnom i skoro izvesno neprekidnom modifikacijom strogog rešenja.

Definicija 1.35 ([18], Definicija 5.2.7) *Neka je τ vreme zaustavljanja filtracije $\mathcal{F}$ pri čemu je $0 \leq \tau \leq T < \infty$ skoro izvesno. Tada se $\mathcal{F}_t$ -adaptiran, neprekidan stohastički proces $\{x(t), 0 \leq t < \tau\}$ sa vrednostima u $\mathbb{R}^d$ naziva lokalno rešenje jednačine (1.7) ako je $x(0) = x_0$ i ukoliko postoji neopadajući niz $\{\tau_k\}_{k \geq 0}$ vremena zaustavljanja filtracije $\mathcal{F}$ tako da $0 \leq \tau_k \uparrow \tau$ skoro izvesno i*

$$x(t) = x_0 + \int_0^{t \wedge \tau_k} f(s, x(s)) ds + \int_0^{t \wedge \tau_k} g(s, x(s)) dB(s), \quad t \in [0, T), \quad \text{s.i.} \quad (1.8)$$

Pored toga, ako $\limsup_{t \rightarrow \tau} |x(t)| = \infty$ skoro izvesno za $\tau < T < \infty$, tada je $x(t)$, $t \in [0, \tau]$ maksimalno lokalno rešenje, a τ je vreme eksplozije.

U sledećoj teoremi su dati dovoljni uslovi egzistencije i jedinstvenosti strogog rešenja jednačine (1.6). Radi jednostavnosti u izražavanju, nadalje će se umesto termina strogo rešenje koristiti samo termin rešenje.

Teorema 1.13 ([18], Teorema 2.3.1) *Neka je m -dimenzionalno Brownovo kretanje B i x_0 slučajna promenljiva, nezavisna od B , za koju je $\mathbb{E}|x_0|^2 < \infty$. Neka su $f : [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, $g : [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m$ Borelove funkcije koje zadovoljavaju globalni Lipschitzov²² uslov i uslov linearnog rasta, odnosno, postoji konstanta $L > 0$ tako da za svako $(t, x), (t, y) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d$, važi*

$$|f(t, x) - f(t, y)| + |g(t, x) - g(t, y)| \leq L|x - y|, \quad (1.9)$$

$$|f(t, x)|^2 + |g(t, x)|^2 \leq L^2(1 + |x|^2). \quad (1.10)$$

Tada postoji jedinstveno skoro izvesno neprekidno rešenje jednačine (1.6) sa osobinom $\mathbb{E} \sup_{t \in [0, T]} |x(t)|^2 < \infty$. Pored toga, ako je $\mathbb{E}|x_0|^p < \infty$, za $p \geq 2$, tada je $\mathbb{E} \sup_{t \in [0, T]} |x(t)|^p < \infty$.

Sledeća teorema predstavlja uopštenje Teoreme 1.13 u kojoj je uniformni Lipschitzov uslov zamenjen lokalnim Lipschitzovim uslovom.

²²Rudolf Lipschitz

Teorema 1.14 ([18], Teorema 2.3.4) *Neka važi uslov linearnog rasta (1.10) i neka je Lipschitzov uslov (1.9) zamenjen sledećim lokalnim Lipschitzovim uslovom: za svaki ceo broj $n \geq 1$, postoji pozitivna konstanta L_n takva da je za svako $t \in [0, T]$ i za svako $x, y \in \mathbb{R}^d$ za koje je $|x| \vee |y| \leq n$,*

$$|f(t, x) - f(t, y)| + |g(t, x) - g(t, y)| \leq L_n |x - y|. \quad (1.11)$$

Tada postoji jedinstveno rešenje $x(t)$, $t \in [0, T]$, jednačine (1.6) sa osobinom

$$\mathbb{E} \sup_{t \in [0, T]} |x(t)|^2 < \infty.$$

Teorema 1.15 ([18], Teorema 5.2.8) *Neka važi lokalni Lipschitzov uslov tj. za svaki ceo broj $n \geq 1$, postoji pozitivna konstanta L_n takva da je za svako $t \in [0, T]$ i za svako $x, y \in \mathbb{R}^d$ za koje je $|x| \vee |y| \leq n$,*

$$|f(t, x) - f(t, y)| + |g(t, x) - g(t, y)| \leq L_n |x - y|. \quad (1.12)$$

Tada postoji jedinstveno maksimalno lokalno rešenje $x(t)$, $t \in [0, T]$, jednačine (1.6).

Rešenje stohastičke diferencijalne jednačine može imati i globalno svojstvo. Za uvođenje pojma globalnog rešenja, potrebno je razmatrati rešenje stohastičke diferencijalne jednačine (1.6) na intervalu $[0, \infty)$, koje zadovoljava početni uslov $x(0) = x_0$. Ukoliko pretpostavke Teoreme egzistencije i jedinstvenosti rešenja 1.13 tj. 1.14 važe na svakom konačnom podintervalu $[0, T]$ intervala $[0, \infty)$, tada jednačina (1.6) ima jedinstveno rešenje $x(t)$ na celom intervalu $[0, \infty)$. Rešenje koje poseduje ovu osobinu naziva se *globalno rešenje*.

Teorema 1.16 ([18], Teorema 2.2.9) *Neka je $\{x(t), t \in [0, T]\}$ rešenje jednačine (1.6) čiji koeficijenti zadovoljavaju uslove teoreme postojanja i jedinstvenosti rešenja. Tada je $\{x(t), t \in [0, T]\}$ proces Markova čije su verovatnoće prelaza definisane sa*

$$\mathbb{P}(x, t_1; t, B) := \mathbb{P}(x^{\xi, t_1}(t) \in B)$$

gde je $x^{\xi, t_1}(t)$ rešenje jednačine

$$x^{\xi, t_1}(t) = \xi + \int_{t_1}^t f(u, x^{\xi, t_1}(u)) du + \int_{t_1}^t g(u, x^{\xi, t_1}(u)) dB(u), \quad t \geq t_1.$$

Definicija 1.36 ([20], Definicija 7.3.3) *Infinitesimalni operator L pridružen jednačini (1.6) se definiše na sledeći način*

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^d f_i(t, x) \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d [g^T(t, x) g(t, x)]_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}. \quad (1.13)$$

Kao i u prethodnom poglavlju, neka je $C^{1,2}([0, \infty) \times \mathbb{R}^d; \mathbb{R}_+)$ familija svih neneativnih funkcija $V(t, x)$ sa neprekidno-diferencijabilnim parcijalnim izvodima prvog reda po t i prvog i drugog reda po x . Tada je za $V \in C^{1,2}([0, \infty) \times \mathbb{R}^d; \mathbb{R}_+)$, diferencijalni operator L definisan u (1.13), određen na sledeći način

$$LV(t, x) = V_t(t, x) + V_x(t, x) f(t, x) + \frac{1}{2} \text{trace} [g^T(t, x) V_{xx}(t, x) g(t, x)].$$

Ukoliko je $V(t, 0) = 0$, $t \geq 0$, tada se funkcija $V(t, x)$ naziva *funkcija Lyapunova*²³.

Metod funkcije Lyapunova se može koristiti u proučavanju različitih kvalitativnih i kvantitativnih svojstava stohastičkih diferencijalnih jednačina.

Za rešenje stohastičke diferencijalne jednačine (1.6) sa datim početnim uslovom, važi sledeća teorema:

Teorema 1.17 (Dynkinova²⁴ formula, [20], Teorema 7.4.1) *Neka je τ vreme zaustavljanja i neka je $E[\tau|x_0] < \infty$. Tada je*

$$E[\varphi(x_\tau)|x_0] = \varphi(x_0) + E \left[\int_0^\tau L(\varphi(x_t)) dt | x_0 \right],$$

gde je L operator definisan sa (1.13), a φ je dva puta neprekidno diferencijabilna funkcija.

1.5 Stohastičke funkcionalne diferencijalne jednačine

Stohastičke funkcionalne diferencijalne jednačine (SFDJ) se prvi put pominju u radovima Eulera²⁵, Bernoullija²⁶, Lagrangea²⁷ i Laplacea²⁸ u XVIII veku. Sistemi ovih jednačina se koriste u modeliranju pojava u različitim oblastima kao što su fizika, mehanika, biologija, ekologija, ekonomija, finansije, medicina i druge.

Neka su sve slučajne promenljive i procesi definisani na prostoru verovatnoće $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sa filtracijom $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ koja zadovoljava uobičajene uslove.

Za fiksirano $\tau > 0$, neka je $C([-\tau, 0]; \mathbb{R}^d)$ familija neprekidnih funkcija $\varphi : [-\tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}^d$, sa supremum-normom definisanom na sledeći način $\|\varphi\| := \sup_{-\tau \leq \theta \leq 0} |\varphi(\theta)|$. Pored toga, $(C([-\tau, 0]; \mathbb{R}^d), \|\cdot\|)$ je Banahov prostor. Neka je $\mathcal{C} = C([-\tau, 0]; \mathbb{R}^d)$, a $\mathcal{D}$ prostor svih $\mathcal{F}_0$ -adaptiranih slučajnih promenljivih $\varphi \in \mathcal{C}$.

Definicija 1.37 ([37], Definicija 2.1) *Za svaki stohastički proces $Y(t) : [-\tau, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ i svako $t \in [0, T]$, segment proces $Y_t : [-\tau, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ se definiše na sledeći način*

$$Y_t(\theta, \omega) := Y(t + \theta, \omega), \quad \theta \in [-\tau, 0], \quad \omega \in \Omega.$$

Stohastička funkcionalna diferencijalna jednačina je oblika

$$dx(t) = f(t, x_t) dt + g(t, x_t) dB(t), \quad t \in [0, T], \quad (1.14)$$

gde su funkcionali $f : [0, T] \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^d$, $g : [0, T] \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^{d \times m}$ Borel merljivi, $\{x(t), 0 \leq t \leq T\}$ je d -dimenzionalan proces i $x_t := \{x(t + \theta), \theta \in [-\tau, 0]\}$ je stohastički *segment proces* iz familije $\mathcal{C}$ i interpretira se kao prošlost stanja u odnosu na trenutak t . Zbog zavisnosti od prošlosti, početni uslov je zadat na čitavom intervalu $[-\tau, 0]$, tj.

$$x_0 = \xi = \{\xi(\theta), \theta \in [-\tau, 0]\}, \quad (1.15)$$

pri čemu ξ predstavlja $\mathcal{F}_0$ -merljivu slučajnu promenljivu iz familije $\mathcal{C}$, za koju važi $\mathbb{E}[\|\xi\|^2] < \infty$.

²³ Aleksandr Mikhailovich Lyapunov

²⁴ Eugene Dynkin

²⁵ Leonhard Euler

²⁶ Daniel Bernoulli

²⁷ Joseph – Louis Lagrange

²⁸ Pierre – Simon Laplace

Definicija 1.38 ([18], Definicija 5.2.1) *Za d -dimenzionalan stohastički proces $\{x(t), t \in [-\tau, T]\}$ se kaže da je rešenje jednačine (1.14) ako ima sledeće osobine:*

- *neprekidan je i $\{x_t, t \in [0, T]\}$ je $\mathcal{F}_t$ -adaptiran,*
- $\int_0^T |f(t, x_t)| dt < \infty, \int_0^T |g(t, x_t)|^2 dt < \infty,$
- $x_0 = \xi$ i za svako $t \in [0, T]$, integralni oblik jednačine (1.14) je zadovoljen s.i.

Rešenje $\{x(t), t \in [-\tau, T]\}$ jednačine (1.14) je jedinstveno ako je bilo koje drugo rešenje $\{\tilde{x}(t), t \in [-\tau, T]\}$ stohastički ekvivalentno tom rešenju, tj. ako je

$$\mathbb{P}\{x(t) = \tilde{x}(t), t \in [-\tau, T]\} = 1.$$

Teorema 1.18 ([18], Teorema 5.2.2) *Ako za funkcionalne f i g važe uniformni Lipschitzov uslov i uslov linearnog rasta, tj. ako postoji konstanta $K > 0$, tako da je*

$$|f(t, \varphi) - f(t, \psi)| \vee |g(t, \varphi) - g(t, \psi)| \leq K\|\varphi - \psi\|, \quad (1.16)$$

$$|f(t, \varphi)| \vee |g(t, \varphi)| \leq K(1 + \|\varphi\|), \quad (1.17)$$

za svako $t \in [0, T]$ i $\varphi, \psi \in \mathcal{C}$, tada postoji jedinstveno, s.i. neprekidno rešenje $x(t)$ jednačine (1.14). Uz to, ako je $\mathbb{E}\|\xi\|^p < \infty$ za $p \geq 2$, tada je $\mathbb{E} \sup_{-\tau \leq t \leq T} |x(t)|^p < \infty$.

Ako se pretpostavi da je $f(t, 0) \equiv 0$ i $g(t, 0) \equiv 0$, jednačina (1.14) ima rešenje $x(t) \equiv 0$ koje odgovara početnom uslovu $x_0 = 0$. Ovo rešenje se naziva *trivijalno rešenje* stohastičke funkcionalne diferencijalne jednačine (1.14).

Diferencijalni operator pridružen jednačini (1.14) se definiše formulom

$$LV(t, \xi) := \limsup_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E}_{t, \xi} V(t + \Delta, x_{t+\Delta}) - V(t, \xi)}{\Delta},$$

gde je $x(s), s \geq t$ rešenje jednačine (1.14) sa početnim uslovom $x_t = \xi$, a $V(t, \xi)$ je funkcional definisan za $t \geq 0$ i $\xi \in \mathcal{D}$.

U nastavku će klasa funkcionala $V(t, \xi)$ biti redukovana da bi se odredio operator L . Najpre, za $t \geq 0$ i funkciju $\xi \in \mathcal{D}$, neka je $V(t, \xi) = V(t, \xi(0), \xi(\theta)), -\tau \leq \theta \leq 0$. Tada se definiše funkcija

$$V_\xi(t, x) = V(t, \xi) = V(t, x_t) = V(t, x, x(t + \theta)), \quad -\tau \leq \theta \leq 0,$$

gde je $\xi = x_t, x = \xi(0) = x(t)$.

Neka je $C^{1,2}([0, \infty) \times \mathcal{D}; \mathbb{R}_+)$ familija funkcionala $V(t, \xi)$, tako da su, za svako $t \geq 0$ neprekidno-diferencijabilni prvi parcijalni izvod po t i prvi i drugi parcijalni izvod po x funkcije $V_\xi(t, x)$ i $V_\xi(t, 0) = 0$. Tada je $V(t, \xi)$ *funkcional Lyapunova* [18]. Primenom operatora L , koji je pridružen jednačini (1.14), dobija se

$$LV(t, x_t) = \frac{\partial V_\xi(t, x)}{\partial t} + f^T(t, x_t) \frac{\partial V_\xi(t, x)}{\partial x} + \frac{1}{2} \text{trace} \left[g^T(t, x_t) \frac{\partial^2 V_\xi(t, x)}{\partial x^2} g(t, x_t) \right].$$

Kako SFDJ (1.14) zavisi od stanja sistema iz prošlosti, njeno rešenje ne zadovoljava svojstvo Markova. Međutim, u [38] je pokazano da za segment proces $x_t = \{x(t + \theta), \theta \in [-\tau, 0]\}$, važi svojstvo Markova.

Teorema 1.19 (Svojstvo Markova, [38], Teorema 3.1.1) *Ako za funkcionalne f i g jednačine (1.14), važi uniformni Lipschitzov uslov (1.16), tada trajektorije $\{x_t^\xi, t \geq 0, \xi \in \mathcal{C}\}$ predstavljaju proces Markova sa vrednostima u $\mathcal{C}$ i verovatnoćama prelaza*

$$p(t_1, \xi; t_2, B) := \mathbb{P}(\omega : \omega \in \Omega, x_{t_2}^{\xi, t_1} \in B), \quad t_1 \leq t_2, \quad B \in \mathcal{B}(\mathcal{C}), \quad \xi \in \mathcal{C},$$

gde je $x^{\xi, t_1}(\cdot)$ rešenje jednačine (1.14) sa početnom vrednošću ξ u trenutku t_1 , tj. zadovoljava jednačinu

$$\begin{aligned} x^{\xi, t_1}(t) &= \xi(t_1) + \int_{t_1}^t f(u, x_u^{\xi, t_1}) du + \int_{t_1}^t g(u, x_u^{\xi, t_1}) dB(u), \quad t \in [t_1, T], \quad (1.18) \\ x_0 &= \xi(\theta), \quad t_1 - \tau < \theta < t_1. \end{aligned}$$

Drugim rečima, važi svojstvo Markova

$$\mathbb{P}(x_{t_2} \in B | \mathcal{F}_{t_1}) = p(t_1, x_{t_1}(\cdot); t_2, B) = \mathbb{P}(x_{t_2} \in B | x_{t_1}), \quad s.i.$$

1.5.1 Stohastičke diferencijalne jednačine sa kašnjenjem

Stohastičke diferencijalne jednačine sa kašnjenjem čine značajnu klasu stohastičkih funkcionalnih diferencijalnih jednačina. Uvodi se sledeća stohastička diferencijalna jednačina sa konstantnim kašnjenjem

$$dx(t) = F(t, x(t), x(t - \tau))dt + G(t, x(t), x(t - \tau))dw(t), \quad t \in [0, T], \quad (1.19)$$

sa početnim uslovom (1.15), gde je $F : [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ i $G : [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d \times m}$. Ako se definišu funkcije $f(t, \xi) = F(t, \xi(0), \xi(-\tau))$ i $g(t, \xi) = G(t, \xi(0), \xi(-\tau))$, pri čemu je $(t, \xi) \in [0, T] \times C([-\tau, 0]; \mathbb{R}^d)$, tada se jednačina (1.19) može zapisati u obliku (1.14). Shodno tome, zaključuje se da Teorema egzistencije i jedinstvenosti rešenja 1.18 važi i za jednačinu (1.19). Neka funkcije F i G zadovoljavaju lokalni Lipschitzov uslov i uslov linearnog rasta tj. neka za svaki ceo broj $n \geq 1$ postoji pozitivna konstanta K_n tako da je za svako $t \in [0, T]$ i svako $x, y, \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^d$ za koje je $|x| \vee |y| \vee |\bar{x}| \vee |\bar{y}| \leq n$, važi

$$|F(t, x, y) - F(t, \bar{x}, \bar{y})|^2 \vee |G(t, x, y) - G(t, \bar{x}, \bar{y})|^2 \leq K_n(|x - \bar{x}|^2 + |y - \bar{y}|^2) \quad (1.20)$$

i postoji konstanta $K > 0$ takva da za svako $(t, x, y) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ važi

$$|F(t, x, y)|^2 \vee |G(t, x, y)|^2 \leq K(1 + |x|^2 + |y|^2). \quad (1.21)$$

Tada, na osnovu Teoreme 1.18, postoji jedinstveno rešenje jednačine (1.19).

Međutim, uslov (1.20) se može oslabiti. Naime, na intervalu $[0, \tau]$ jednačina (1.19) postaje

$$dx(t) = F(t, x(t), \xi(t - \tau))dt + G(t, x(t), \xi(t - \tau))dw(t)$$

sa početnim uslovom $x(0) = \xi(0)$. Poslednja jednačina predstavlja stohastičku diferencijalnu jednačinu bez kašnjenja koja ima jedinstveno rešenje ukoliko uslov linearnog rasta (1.21) važi i ako su funkcije $F(t, x, y)$ i $G(t, x, y)$ lokalno Lipschitz neprekidne samo po x . Dakle, ukoliko je poznato rešenje jednačine $x(t)$ na intervalu $[0, \tau]$ tada isti argument (lokalna Lipschitz neprekidnost) važi i na intervalima $[\tau, 2\tau]$, $[2\tau, 3\tau]$, itd. Nastavljajući postupak dobija se rešenje na celom intervalu $[-\tau, T]$, tj. važi sledeća teorema.

Teorema 1.20 ([18], Teorema 5.3.1) *Neka važi uslov linearnog rasta (1.21) i neka za svaki ceo broj $n \geq 1$ postoji konstanta K_n takva da je za svako $t \in [0, T]$, $y \in \mathbb{R}^d$ i $x, \bar{x} \in \mathbb{R}^d$ za koje je $|x| \vee |\bar{x}| \leq n$,*

$$|F(t, x, y) - F(t, \bar{x}, y)|^2 \vee |G(t, x, y) - G(t, \bar{x}, y)|^2 \leq K_n |x - \bar{x}|^2. \quad (1.22)$$

Tada postoji jedinstveno rešenje stohastičke diferencijalne jednačine sa kašnjenjem (1.19).

Kako bi se što realnije prikazao kumulativni efekat istorije procesa na njegovo trenutno stanje, u nekim modelima se koristi *vremenski raspodeljeno kašnjenje*, koje može biti konačno ili beskonačno. Ovi modeli nalaze primenu u opisivanju dinamike populacije i epidemiologiji. Opšti oblik *stohastičke diferencijalne jednačine sa vremenski raspodeljenim kašnjenjem* (engleski naziv: Stochastic differential equations with time-distributed delay) je

$$\begin{aligned} dx(t) = & F\left(t, x_t, \int_{-\infty}^0 k_1(s)x(t+s)ds, \dots, \int_{-\infty}^0 k_r(s)x(t+s)ds\right) dt \\ & + G\left(t, x_t, \int_{-\infty}^0 k_1(s)x(t+s)ds, \dots, \int_{-\infty}^0 k_r(s)x(t+s)ds\right) dw(t), \quad t \geq 0, \end{aligned} \quad (1.23)$$

sa početnim uslovom $x_0 = \xi = \{\xi(\theta), -\infty < \theta \leq 0\} \in L^p_{\mathcal{F}_0}((-\infty, 0]; \mathbb{R}^d)$ ²⁹ i $F : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d \times r} \rightarrow \mathbb{R}^d$, $G : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d \times r} \rightarrow \mathbb{R}^{d \times m}$. Funkcije $k_i \in L((-\infty, 0]; \mathbb{R}_+)$ ³⁰, $i = 1, 2, \dots, r$, poseduju svojstvo $\int_{-\infty}^0 k_i(s)ds = 1$ i nazivaju se *jezgro*.

1.6 Stohastičke diferencijalne jednačine sa prelazima Markova

Stohastičke diferencijalne jednačine nalaze široku primenu u brojnim naučnim i tehničkim disciplinama. U pojedinim oblastima, sistemi opisani ovim jednačinama tokom vremena podležu promenama koje se odvijaju prema različitim zakonitostima, a u slučajnim trenucima mogu naglo preći iz jednog režima u drugi.

Takvi prelazi se modeliraju korišćenjem lanaca Markova sa konačnim brojem stanja, što predstavlja ključni motiv za proučavanje *stohastičkih diferencijalnih jednačina sa prelazima Markova*. U knjizi [19] je analiziran ovaj tip jednačina.

Pored već uvedenih oznaka, neka $a = \{a(t), t \in [0, T]\}$ označava neprekidan zdesna lanac Markova definisan na datom prostoru verovatnoća, sa konačnim skupom stanja $\mathbb{A} = \{1, 2, \dots, N\}$ i generatorom $\Gamma = (\gamma_{ij})_{N \times N}$ definisanim sa

$$\mathbb{P}\{a(t + \Delta) = j | a(t) = i\} = \begin{cases} \gamma_{ij}\Delta + o(\Delta), & i \neq j, \\ 1 + \gamma_{ii}\Delta + o(\Delta), & i = j, \end{cases}$$

²⁹ $L^p_{\mathcal{F}_0}(\Omega; \mathbb{R}^d)$ predstavlja familiju $\mathcal{F}_0$ -merljivih slučajnih promenljivih ξ sa vrednostima u $\mathbb{R}^d$ za koje je $\mathbb{E}|\xi|^2 < \infty$,

³⁰ $L^p([a, b]; \mathbb{R}^d)$ predstavlja familiju Borel merljivih funkcija $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$ za koje je $\int_a^b |h(t)|^p dt < \infty$

pri čemu je $\Delta > 0$, a $\gamma_{ij} \geq 0$ predstavlja gustinu prelaza iz stanja i u stanje j , kada je $i \neq j$, dok je

$$\gamma_{ii} = - \sum_{j \neq i} \gamma_{ij}.$$

Pretpostavlja se da je lanac Markova $a(\cdot)$ nezavisan u odnosu na Brownovo kretanje $B(\cdot)$. Pritom je skoro svaka trajektorija procesa $a(\cdot)$ neprekidna zdesna stepenasta funkcija sa konačnim brojem skokova na intervalu $[0, T]$.

Uvodi se sledeća stohastička diferencijalna jednačina sa prelazima Markova

$$dx(t) = f(t, x(t), a(t))dt + g(t, x(t), a(t))dB(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1.24)$$

$$x(0) = x_0 \in L^2_{\mathcal{F}_0}(\Omega; \mathbb{R}^d), \quad r(0) = r_0,$$

pri čemu su

$$f : [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad g : [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{R}^{d \times m}$$

Borelove funkcije.

Definicija 1.39 ([19], Definicija 3.11) *Stohastički proces $\{x(t), 0 \leq t \leq T\}$ sa vrednostima u $\mathbb{R}^d$ je rešenje jednačine (1.24) ako ima sledeća svojstva:*

- (1) *neprekidan je i $\mathcal{F}_t$ adaptiran;*
- (2) *$\{f(t, x(t), a(t))\}_{0 \leq t \leq T} \in \mathcal{L}_1([0, T]; \mathbb{R}^d)$ i $\{g(t, x(t), a(t))\}_{0 \leq t \leq T} \in \mathcal{L}_2([0, T]; \mathbb{R}^{d \times m});$*
- (3) *jednačina*

$$x(t) = x(0) + \int_0^t f(s, x(s), a(s))ds + \int_0^t g(s, x(s), a(s))dw(s), \quad 0 \leq t \leq T,$$

je zadovoljena sa verovatnoćom jedan.

Rešenje $\{x(t), 0 \leq t \leq T\}$ je jedinstveno ako za bilo koje drugo rešenje $\{\bar{x}(t), 0 \leq t \leq T\}$ važi

$$\mathbb{P}\{x(t) = \bar{x}(t) \text{ za svako } 0 \leq t \leq T\} = 1.$$

Teorema 1.21 ([19], Teorema 3.13) *Ako koeficijenti f i g jednačine (1.24) zadovoljavaju Lipschitzov uslov i uslov linearnog rasta, tj. ako postoji konstanta $\bar{K}$ tako da za svako $x, y \in \mathbb{R}^d$, $t \in [0, T]$ i $i \in \mathbb{A}$ važi*

$$|f(t, x, i) - f(t, y, i)|^2 \vee |g(t, x, i) - g(t, y, i)|^2 \leq \bar{K}|x - y|^2,$$

i ako postoji konstanta $K > 0$ tako da za svako $(t, x, i) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{A}$ važi

$$|f(t, x, i)|^2 \vee |g(t, x, i)|^2 \leq K(1 + |x|^2),$$

tada postoji jedinstveno rešenje $\{x(t), t \in [0, T]\}$ jednačine (1.24). Štaviše, ako je $x(t)$ rešenje jednačine (1.24) onda je

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0 \leq t \leq T} |x(t)|^2\right) \leq (1 + 3\mathbb{E}|x_0|^2)e^{3KT(T+4)},$$

tj. rešenje pripada klasi $\mathcal{M}_2([0, T]; \mathbb{R}^d)$.

Teorema 1.22 ([19], Teorema 3.27) *Neka je $x(t)$ rešenje jednačine (1.24) za $t \geq 0$, čiji koeficijenti f i g zadovoljavaju uslove teoreme postojanja i jedinstvenosti rešenja (npr. Teoreme 1.21). Tada je $(x(t), a(t))$, proces Markova sa verovatnoćama prelaza*

$$p(s, (\xi, i); t, B \times \{j\}) = \mathbb{P}(\omega : \omega \in \Omega, x_s^{(\xi, i)}(t) \in B \times \{j\}),$$

za $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, $(\xi, i) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{A}$ i $j \in \mathbb{A}$, gde je $x_s^{(\xi, i)}$ rešenje jednačine (1.24) za $t \geq s$, sa početnom vrednošću $x(s) = \xi$ i $a(s) = i \in \mathbb{A}$. Odnosno,

$$x_s^{(\xi, i)}(t) = \int_s^t f(u, x_s^{(\xi, i)}(u), a_s^i(u)) du + \int_s^t g(u, x_s^{(\xi, i)}(u), a_s^i(u)) dB(u), \quad t \geq s.$$

1.7 Lévyjev proces

Teorijska i empirijska istraživanja ukazuju na to da je za analizu dinamike epidemija ključno razmatrati mogućnost gotovo trenutnih promena velike amplitude (skokova) u broju zaraženih ili preminulih. Za matematičko modeliranje ovih pojava u literaturi se primenjuju procesi sa skokovima.

U ovom poglavlju biće predstavljeni Lévyjevi procesi, nazvani po francuskom matematičaru Polu Lévyju, i naglašena njihova bogata struktura. Navedeni su osnovni pojmovi i ključni rezultati koji su primenjivani u analizi difuzionih procesa sa skokovima u nastavku disertacije. Navedeni rezultati se mogu naći u knjigama [21], [23], [24].

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ potpun prostor verovatnoće sa prirodnom filtracijom $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$, koja je neprekidna zdesna i takva da $\mathcal{F}$ sadrži sve skupove mere nula.

Definicija 1.40 ([21], Definicija 1.1) $\mathcal{F}_t$ -adaptiran proces $\{\mathcal{Z}(t), t \geq 0\} = \{\mathcal{Z}_t, t \geq 0\}$ sa vrednostima u $\mathbb{R}$ se naziva procesom Lévyja ako važi:

- $\mathcal{Z}(0) = 0$ s.i.
- $\mathcal{Z}(t)$ je neprekidan u verovatnoći (odnosno, za svako $t \geq 0$ i $k > 0$ važi $\mathbb{P}(|\mathcal{Z}(t + \epsilon) - \mathcal{Z}(t)| > k) \rightarrow 0$ kada $\epsilon \rightarrow 0$),
- ima stacionarne priraštaje (odnosno, raspodela priraštaja $\mathcal{Z}(t + s) - \mathcal{Z}(t)$ zavisi od s , a ne zavisi od t),
- ima nezavisne priraštaje (odnosno, $\mathcal{Z}(t) - \mathcal{Z}(s)$ ne zavisi od $\mathcal{F}_s = \sigma(\mathcal{Z}(u), 0 \leq u \leq s)$).

Lema 1.5 ([21], Teorema 1.2) *Neka je $\{\mathcal{Z}(t), t \geq 0\}$ proces Lévyja. Tada proces $\mathcal{Z}(t)$ ima svoju càdlàg verziju, odnosno, verziju koja je neprekidna zdesna i ograničena sleva, koja je takode proces Lévyja.*

Skok procesa $\mathcal{Z}(t)$ za $t \geq 0$ je definisan sa

$$\Delta \mathcal{Z}(t) = \mathcal{Z}(t) - \mathcal{Z}(t-).$$

Neka je B_0 familija Borelovih skupova $U \subset \mathbb{R}$ čije zatvorenje $\bar{U}$ ne sadrži 0. Za $U \in B_0$,

$$\bar{N}(t, U) = \bar{N}(t, U, \omega) := \sum_{s: 0 < s \leq t} \mathbf{I}_U(\Delta \mathcal{Z}(s))$$

Drugim rečima, $\bar{N}(t, U)$ je broj skokova veličine $\Delta Z(s) \in U$ koji se dešavaju pre ili u trenutku t . $\bar{N}(t, U)$ se naziva Poissonova slučajna mera (ili mera skokova) procesa $Z(\cdot)$. Budući da je trajektorija procesa *càdlàg* (neprekidna zdesna i ograničena sleva), za svako $U \in B_0$, važi $\bar{N}(t, U) < \infty$, s.i.

Jedan primer procesa Lévyja je Brownovo kretanje koje ima stacionarne i nezavisne priraštaje, zbog čega se klasifikuje kao Lévyjev proces sa s.i. neprekidnim trajektorijama. Drugi značajan primer procesa Lévyja je Poissonov proces. Poissonov proces $\Theta(t)$ sa intenzitetom $\lambda > 0$ je Lévyjev proces čije vrednosti pripadaju skupu $\mathbb{N} \cup \{0\}$ za koji važi

$$\mathbb{P}(\Theta(t) = n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Teorema 1.23 ([21], Teorema 1.5)

1. Skupovna funkcija $U \rightarrow \bar{N}(t, U, \omega)$ definiše σ -konačnu meru na B_0 za svako fiksirano t, ω . Diferencijalna forma ove mere je $\bar{N}(t, dz)$.
2. Skupovna funkcija $[a, b] \times U \rightarrow \bar{N}(b, U, \omega) - \bar{N}(a, U, \omega)$, $[a, b] \subset [0, \infty)$, $U \in B_0$ definiše σ -konačnu meru za svako fiksirano ω . Diferencijalna forma ove mere je $N(dt, dz)$.
3. Skupovna funkcija

$$\lambda(U) = E[\bar{N}(1, U)],$$

pri čemu $E = E_P$ označava očekivanje u odnosu na meru P , takođe definiše σ -konačnu meru na B_0 , koja se naziva Lévyjeva mera procesa $\{Z(t), t \geq 0\}$.

4. Za fiksiran skup $U \in B_0$, proces

$$\Theta_U(t) = \Theta_U(t, \omega) := \bar{N}(t, U, \omega)$$

je Poissonov proces sa intenzitetom $\lambda_P = \lambda(U)$.

1.7.1 Itô-Lévyjeva dekompozicija

Sledeći rezultati pružaju opis procesa Lévyja.

Teorema 1.24 (Itô-Lévyjeva dekompozicija, [21], Teorema 1.7) Neka je $\{Z(t), t \geq 0\}$ Lévyjev proces. Tada $\{Z(t), t \geq 0\}$ ima dekompoziciju

$$Z(t) = \alpha t + \sigma B(t) + \int_{|z| < R} \tilde{N}(t, dz) + \int_{|z| \geq R} \bar{N}(t, dz) \quad (1.25)$$

za neke konstante $\alpha \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R}, R \in [0, \infty]$. Takođe, mera

$$\tilde{N}(dt, dz) = \bar{N}(dt, dz) - \lambda(dz)dt$$

je kompenzovana Poissonova slučajna mera procesa $Z(\cdot)$, i $B(t)$ je Brownovo kretanje nezavisno od $\tilde{N}(dt, dz)$. Za svako $A \in B_0$ proces

$$M_t := \tilde{N}(t, A)$$

je martingal. Ako je $\alpha = 0$ i $R = \infty$, proces $\{Z(t), t \geq 0\}$ je Lévyjev martingal.

Teorema 1.25 ([21], Teorema 1.8) *Ako je $R = 1$ i $E|Z_t| < \infty$ za svako $t \geq 0$, tada je*

$$\int_{|z| \geq 1} |z| \lambda(dz) < \infty.$$

Ako je $R = \infty$, tada je

$$Z(t) = \alpha t + \sigma B(t) + \int_{\mathbb{R}} \tilde{N}(t, dz).$$

Teorema 1.26 ([22], Teorema I.32) *Lévyjev proces je strogi proces Markova.*

Teorema 1.27 ([22], Posledica II.4) *Lévyjev proces je semimartingal.*

U cilju definisanja stohastičkog integrala u odnosu na Lévyjev proces, uvodi se sledeća definicija i teorema.

Definicija 1.41 ([21], Definicija 1.12) *Neka je D_{ucp} prostor càdlàg adaptiranih procesa, sa topologijom uniformne konvergencije u verovatnoći na kompaktnim skupovima (oznaka ucp). $H_n \rightarrow H$ ucp ako za svako $t > 0$, $\sup_{0 \leq s \leq t} |H_n(s) - H(s)| \rightarrow 0$ u verovatnoći ($A_n \rightarrow A$ u verovatnoći ako za svako $\epsilon > 0$ postoji $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tako da je $n \geq n_\epsilon \Rightarrow \mathbb{P}(|A_n - A| > \epsilon) < \epsilon$). Neka je L_{ucp} prostor adaptiranih càglàd procesa (neprekidni sleva sa desnim granicama), sa ucp topologijom. Ako je $H(t)$ stepenasta funkcija oblika*

$$H(t) = H_0(t)I_0(t) + \sum_i H_i(t)I_{(T_i, T_{i+1}]}(t),$$

gde je $H_i \in \mathcal{F}_{T_i}$, $0 = T_0 \leq T_1 \leq \dots \leq T_{n+1} < \infty$ su $\mathcal{F}_t$ -vremena zaustavljanja i X je càdlàg, definiše se

$$J_X H(t) := \int_0^t H(s) dX(s) = H(0)X(0) + \sum_i H_i(t)(X(T_{i+1} \wedge t) - X(T_i \wedge t)), \quad t \geq 0.$$

Teorema 1.28 ([21], Teorema 1.13) *Neka je X semimartingal. Tada se preslikavanje J_X može proširiti*

$$J_X : L_{ucp} \rightarrow D_{ucp}$$

tako da se očuva neprekidnost i linearnost.

Ova konstrukcija dozvoljava da se definiše stohastički integral oblika

$$\int_0^t H(s) dZ(s)$$

za svako $H \in L_{ucp}$. Na osnovu dekompozicije (1.25) ovaj integral se može podeliti na integrale u odnosu na ds , $dB(s)$, $\tilde{N}(ds, dz)$, i $\tilde{N}(ds, dz)$.

Na osnovu ovog, prirodno je razmatrati uopšteniji stohastički integral oblika

$$X(t) = \int_0^t f(s, \omega) ds + \int_0^t g(s, \omega) dB(s) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} h(s, \omega, z) \tilde{N}(ds, dz), \quad (1.26)$$

pri čemu integrandi zadovoljavaju odgovarajuće uslove za postojanje integrala i, radi jednostavnosti, označeno je

$$\tilde{N} = \begin{cases} \bar{N}(ds, dz) - \lambda(dz)ds, & \text{ako je } |z| < R, \\ \bar{N}(ds, dz), & \text{ako je } |z| \geq R, \end{cases}$$

pri čemu je R definisano u Teoremi 1.24. Kao što je uobičajeno, biće korišćena skraćena diferencijalna notacija za procese $X(t)$ koji zadovoljavaju (1.26):

$$X(t) = f(t, \omega)dt + g(t, \omega)dB(t) + \int_{\mathbb{R}} h(t, \omega, z)\tilde{N}(dt, dz). \quad (1.27)$$

Ovakvi procesi se nazivaju *Itô-Lévyjevi procesi*.

Podsećanja radi, semimartingal $M(t)$ se naziva lokalnim martingalom do trenutka T (u odnosu na verovatnosnu meru $\mathbb{P}$) ako postoji rastući niz $\mathcal{F}_t$ -vremena zaustavljanja τ_n tako da je $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = T$ s.i. i $M(t \wedge \tau_n)$ je martingal u odnosu na verovatnosnu meru $\mathbb{P}$ za sve n .

Neka je $M(t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}_+} \eta(t, \omega, u)\tilde{N}(du, ds), t \in [0, T]$. Tada,

$$(i) \quad E \left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}_+} \eta^2(t, \omega, u)\lambda(du)dt \right) < \infty \Rightarrow M(t), t \in [0, T], \text{ je martingal; } \quad (1.28)$$

$$(ii) \quad \int_0^T \int_{\mathbb{R}_+} \eta^2(t, \omega, u)\lambda(du)dt < \infty, \text{ s.i. } \Rightarrow M(t), t \in [0, T], \text{ je lokalni martingal.}$$

Napomena 1.2 Neka je

$$\Psi_{loc}^2 := \left\{ \psi(t, z) \text{ predvidiv} : \int_0^t \int_Y |\psi(s, z)|^2 \lambda(du)ds < \infty \right\}$$

i za svako $\psi(t, z) \in \Psi_{loc}^2$,

$$M(t) := \int_0^t \int_Y \psi(s, z)\tilde{N}(ds, du).$$

Tada, važi

$$\langle M, M \rangle_t = \int_0^t \int_Y |\psi(s, u)|^2 \lambda(du)ds,$$

i

$$[M, M]_t = \int_0^t \int_Y |\psi(s, u)|^2 \tilde{N}(du)ds,$$

pri čemu je proces $[M, M](t)$ dat u Definiciji 1.23, a $\langle M, M \rangle(t)$ u Definiciji 1.25.

1.7.2 Uopštena formula Itôa

U ovom poglavlju je navedena uopštena formula Itôa za Itô-Lévyjeve procese.

Teorema 1.29 (Jednodimenzionalna formula Itôa za Itô-Lévyjeve procese, [21], Teorema 1.14) *Neka je $x(t) \in \mathbb{R}$ Itô-Lévyjev proces oblika*

$$dx(t) = f(t, \omega)dt + g(t, \omega)dB(t) + \int_Y h(t, \omega, u)d\tilde{N}(dt, du),$$

pri čemu je

$$\tilde{N} = \begin{cases} \bar{N}(ds, dz) - \lambda(dz)ds, & \text{ako je } |z| < R, \\ \bar{N}(ds, dz), & \text{ako je } |z| \geq R, \end{cases}$$

za neko $R \in [0, \infty]$.

Neka je $F(t, x(t)) \in C^2(\mathbb{R}^2)$ i neka je $V(t) = F(t, x(t))$. Tada je $V(t)$, takođe, Itô-Lévyjev proces i važi

$$\begin{aligned} dV(t, x(t)) &= \frac{\partial F}{\partial t}(t, x(t))dt + \frac{\partial F}{\partial x}(t, x(t))(f(t, \omega)dt + g(t, \omega)dB(t)) \\ &\quad + \frac{1}{2}g^2(t, \omega)\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, x(t))dt \\ &\quad + \int_{|z| < R} (F(t, x(t^-) + h(t, \omega, u)) - F(t, x(t^-)) \\ &\quad - \frac{\partial F}{\partial x}(t, x(t^-))h(t, \omega, u))\lambda(du)dt \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}} (F(t, x(t^-) + h(t, \omega, u)) - F(t, x(t^-)))\tilde{N}(dt, du). \end{aligned}$$

Teorema 1.30 (Višedimenzionalna formula Itôa za Itô-Lévyjeve procese, [21], Teorema 1.16) *Neka je $x(t) \in \mathbb{R}^n$, Itô-Lévyjev proces oblika*

$$dx(t) = f(t, \omega)dt + g(t, \omega)dB(t) + \int_{\mathbb{R}^l} h(t, \omega, u)d\tilde{N}(dt, du), \quad (1.29)$$

pri čemu su

$$\begin{aligned} f : [0, T] \times \Omega &\rightarrow \mathbb{R}^d, \quad g : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{d \times m}, \\ h : [0, T] \times \Omega \times \mathbb{R}^l &\rightarrow \mathbb{R}^{d \times m \times l}, \end{aligned}$$

adaptirani procesi takvi da integrali postoje. Takođe, $B(t)$ je m -dimenzionalno Brownovo kretanje i

$$\begin{aligned} \tilde{N}(dt, du)^T &= (\tilde{N}_1(dt, du_1), \dots, \tilde{N}_l(dt, du_l)) \\ &= (\bar{N}_1(dt, du_1) - I_{|z_1| < R_1} \lambda_1(du_1)dt, \dots, \bar{N}_l(dt, du_l) - I_{|z_l| < R_l} \lambda_l(du_l)dt), \end{aligned}$$

pri čemu su $\{\bar{N}_k\}$ nezavisne Poissonove slučajne mere sa Lévyjevim merama $\lambda_k, k \in \{1, 2, \dots, l\}$, koje potiču od nezavisnih jednodimenzionalnih Lévyjevih procesa $Z_k, k \in \{1, 2, \dots, l\}$.

Svaka kolona $h^{(k)}$ matrice $h = [h_{ij}]$ dimenzije $n \times l$, zavisi od u samo preko k -te koordinate, odnosno,

$$h^{(k)}(t, \omega, u) = h^{(k)}(t, \omega, u_k), \quad (u_1, \dots, u_l) \in \mathbb{R}^l$$

Stoga je integral desne strane jednakosti (1.29) samo skraćeni matrični zapis. Kada se napiše u razvijenom obliku relacija (1.29), je ekvivalentna relaciji

$$dx_i(t) = f_i(t, \omega)dt + \sum_{j=1}^m g_{ij}(t, \omega)dB_j(t) + \sum_{j=1}^l \int_{\mathbb{R}} h_{ij}(t, \omega, u_j)d\tilde{N}_j(dt, du_j),$$

za $1 \leq i \leq n$.

Neka je $F(t, x(t)) \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ i neka je $V(t) = F(t, x(t))$. Tada je $V(t)$, takođe, Itô-Lévyjev proces i važi

$$\begin{aligned} dV(t, x(t)) &= \frac{\partial F}{\partial t} dt + \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i} (f_i dt + g_i dB(t)) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n (gg^T)_{ij} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} dt \\ &\quad + \sum_{k=1}^l \int_{|z_k| < R_k} \left((F(t, x(t^-) + h^{(k)}(t, \omega, u_k)) - F(t, x(t^-))) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{i=1}^n h_i^{(k)}(t, \omega, u_k) \frac{\partial F}{\partial x_i}(t, x(t^-)) \right) \lambda_k(du_k) dt \\ &\quad + \sum_{k=1}^l \int_{\mathbb{R}} (F(t, x(t^-) + h^{(k)}(t, \omega, u_k)) - F(t, x(t^-))) \tilde{N}_k(dt, du_k), \end{aligned}$$

pri čemu je $h^{(k)} \in \mathbb{R}^n$, k -ta kolona $n \times l$ matrice $h = [h_{ik}]$ i $h_i^{(k)} = h_{ik}$, i -ta koordinata vektora $h^{(k)}$.

Teorema 1.31 (Izometrija Itô-Lévyja, [21], Teorema 1.17) Neka je $X(t) \in \mathbb{R}^n$ definisan izrazom (1.29), pri čemu je $X(0) = 0$ i $f = 0$. Tada važi

$$\begin{aligned} E[X^2(t)] &= E \left[\int_0^t \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m g_{ij}^2(s, \omega) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^l \int_{\mathbb{R}} h_{ij}^2(s, \omega, u_j) \lambda_j(du_j) \right) ds \right] \\ &= \sum_{i=1}^n E \left[\int_0^t \left(\sum_{j=1}^m g_{ij}^2(s, \omega) + \sum_{j=1}^l \int_{\mathbb{R}} h_{ij}^2(s, \omega, u_j) \lambda_j(du_j) \right) ds \right], \end{aligned}$$

pod uslovom da je desna strana ove jednakosti konačna.

Kao posledica ove teoreme, važe sledeći rezultati:

- Itôva izometrija

$$E \left[\left(\int_0^t g(s, \omega) B(s) \right)^2 \right] = E \left[\int_0^t g^2(s, \omega) ds \right].$$

- Lévyjeva izometrija

$$E \left[\left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}} h(s, \omega, u) \tilde{N}(ds, du) \right)^2 \right] = E \left[\int_0^t \int_{\mathbb{R}} h^2(s, \omega, u) \lambda(du) ds \right].$$

1.8 Stohastičke diferencijalne jednačine sa skokovima Lévyja

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ potpun prostor verovatnoće sa prirodnom filtracijom $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$, koja je neprekidna zdesna i takva da $\mathcal{F}$ sadrži sve $\mathbb{P}$ -nula skupove.

Neka je proces $B(\cdot)$ d -dimenzionalno Brownovo kretanje i $(x(t))$ za $t \in [0, T]$, difuzioni proces opisan sledećim stohastičkim diferencijalnim jednačinama sa skokovima Lévyja

$$\begin{aligned} dx(t) &= f(t, x(t))dt + g(t, x(t))dB(t) + \int_Y h(t, x(t^-), u) \tilde{N}(dt, du), \\ x(0) &= x_0 \in \mathbb{R}^d, \end{aligned} \tag{1.30}$$

pri čemu su $f : [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, $g : [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d \times m}$, $h : [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^{d \times m \times l}$, Borelove funkcije. Takođe, $g(x, k)g^T(x, k) =: (d_{ij}(x, k))$, $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Definicija 1.42 ([21], Definicija 1.5) *Neka je τ vreme zaustavljanja filtracije $\mathcal{F}$ pri čemu je $0 \leq \tau \leq T < \infty$ s.i. Tada se $\mathcal{F}_t$ -adaptiran, neprekidan stohastički proces $\{x(t), 0 \leq t < \tau\}$ sa vrednostima u $\mathbb{R}^d$ naziva lokalno rešenje jednačine (1.30) ako je $x(0) = x_0$ i ukoliko postoji neopadajući niz $\{\tau_k\}_{k \geq 0}$ vremena zaustavljanja filtracije $\mathcal{F}$ tako da $0 \leq \tau_k \uparrow \tau$ s.i. i*

$$\begin{aligned} x(t) = & x_0 + \int_0^{t \wedge \tau_k} f(s, x(s))ds + \int_0^{t \wedge \tau_k} g(s, x(s))dB(s) \\ & + \int_0^{t \wedge \tau_k} h(s, x(s^-), u)\tilde{N}(ds, du), \quad t \in [0, T], \quad \text{s.i.} \end{aligned}$$

Teorema 1.32 ([21], Teorema 1.19) *Neka koeficijenti f, g i h jednačine (1.30) zadovoljavaju sledeće uslove:*

- (Lipschitzov uslov) *postoji konstanta $\bar{K}$ tako da za svako $x, y \in \mathbb{R}^d$, $t \in [0, T]$ važi*

$$\begin{aligned} & |f(t, x) - f(t, y)|^2 + \|g(t, x) - g(t, y)\|^2 \\ & + \sum_{k=1}^l \int_Y |h_k(t, x, z_k) - h_k(t, y, z_k)|^2 \lambda_k(dz_k) \leq \bar{K}|x - y|^2, \end{aligned} \quad (1.31)$$

- (uslov linearnog rasta) *postoji konstanta $K > 0$ tako da za svako $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d$ važi*

$$|f(t, x)|^2 \vee \|g(t, x)\|^2 + \sum_{k=1}^l \int_Y |h_k(t, x, z_k) - h_k(t, y, z_k)|^2 \lambda_k(dz_k) \leq K(1 + |x|^2). \quad (1.32)$$

Tada postoji jedinstveno, càdlàg adaptirano rešenje $\{x(t), t \in [0, T]\}$ jednačine (1.30), tako da je

$$\mathbb{E}(|x(t)|^2) < \infty.$$

Teorema 1.33 ([23], Teorema 6.2.11) *Neka važi lokalni Lipschitzov uslov tj.*

- *za svaki ceo broj $n \geq 1$, postoji pozitivna konstanta $\bar{K}_n$ takva da je za svako $t \in [0, T]$ i za svako $x, y \in \mathbb{R}^d$ za koje je $|x| \vee |y| \leq n$,*

$$\begin{aligned} & |f(t, x) - f(t, y)|^2 + \|g(t, x) - g(t, y)\|^2 \\ & + \sum_{k=1}^l \int_Y |h_k(t, x, z_k) - h_k(t, y, z_k)|^2 \lambda_k(dz_k) \leq \bar{K}_n|x - y|^2. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Tada postoji jedinstveno maksimalno lokalno rešenje stohastičke diferencijalne jednačine (1.30).

Napomena 1.3 *Na osnovu Napomene 2, Poglavlje 4.1 na strani 234 u [39], može se zaključiti da pethodne teoreme važe i u slučaju kada su koeficijenti $f(t, x), g(t, x)$ i $h(t, x, z)$ jednačine (1.30) slučajne funkcije adaptirane u odnosu na filtraciju $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$, a uslovi teorema su zadovoljeni sa verovatnoćom 1 (pritom konstante $K, \bar{K}, \bar{K}_n, n \in \mathbb{N}$ nisu slučajne).*

Rešenje jednačine u vremenski-homogenom slučaju, odnosno, kada je $f(t, x) = f(x)$, $g(t, x) = g(x)$ i $h(t, x, z) = h(x, z)$ se naziva *difuzija sa skokovima* ili *Lévyjeva difuzija*.

Teorema 1.34 ([22], Teorema V.32) *Rešenje jednačine (1.30) je proces Markova, dok je u vremenski-homogenom slučaju Lévyjeva difuzija strogi proces Markova.*

Definicija 1.43 ([21], Definicija 1.21) *Neka je $X(t)$ sa vrednostima u $\mathbb{R}^n$ rešenje jednačine (1.30). Tada je operator L procesa X definisan na funkcijama $V : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ na sledeći način*

$$LV(t, x) = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{1}{t} \{E[V(t, X(t))|x_0] - V(0, x_0)\} \quad (\text{ako postoji limes}),$$

gde je $X(0) = x_0$.

Teorema 1.35 ([21], Teorema 1.22) *Neka je $V(x, t) \in \mathbb{C}_0^{2,1}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$. Tada postoji operator L sistema (1.30) i važi*

$$\begin{aligned} LV(t, x) = & \frac{\partial V(t, x)}{\partial t} + \sum_{i=1}^n f_i(t, x) \frac{\partial V(t, x)}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n (gg^T)_{ij}(t, x) \frac{\partial^2 V(t, x)}{\partial x_i \partial x_j} \\ & + \int_Y \sum_{k=1}^l (V(t, x + h^{(k)}(t, x, u)) - V(t, x) + \nabla V(t, x) h^{(k)}(t, x, u)) \lambda_k(du_k). \end{aligned} \quad (1.34)$$

Teorema 1.36 (Dynkinova formula I, [21], Teorema 1.23) *Neka je $X(t)$ sa vrednostima u $\mathbb{R}^n$ Lévyjeva difuzija i neka je $\varphi \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$. Neka je τ vreme zaustavljanja i neka je $E[\tau|x_0] < \infty$. Tada je*

$$E[\varphi(x_\tau)|x_0] = \varphi(x_0) + E \left[\int_0^\tau L\varphi(x(t))dt | x_0 \right],$$

gde je operator $L(\cdot)$ definisan sa (1.34).

Teorema 1.37 (Dynkinova formula II, [21], Teorema 1.24) *Neka je $X(t)$ sa vrednostima u $\mathbb{R}^n$ Lévyjeva difuzija, $G \subset \mathbb{R}^n$ otvoren skup i neka je $\varphi \in C^2(G) \cap C(\bar{G})$. Neka je $\tau < \infty$ vreme zaustavljanja i*

$$\tau \leq \tau_G := \inf\{t > 0; X(t) \notin G\}$$

$$X(\tau) \in \bar{G}, \quad \text{s.i.}$$

$$E \left[|\varphi(x_\tau)| + \int_0^\tau L\varphi(x(t))dt | x_0 \right] < \infty,$$

Tada je

$$E[\varphi(x_\tau)|x_0] = \varphi(x_0) + E \left[\int_0^\tau L\varphi(x(t))dt | x_0 \right],$$

gde je operator $L(\cdot)$ definisan sa (1.34).

U nastavku ovog poglavlja je navedena *Teorema upoređivanja rešenja stohastičkih diferencijalnih jednačina*, koja se može naći u [40].

Razmatraju se dve jednodimenzionalne stohastičke diferencijalne jednačine:

$$dX_1(t) = X_1(0) + \int_0^t f_1(s, X_1(s))ds + \int_0^t g_1(s, X_1(s))dB(s) \\ + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} h_1(s, X_1(s^-), u)\tilde{N}(ds, du),$$

i

$$dX_2(t) = X_2(0) + \int_0^t f_2(s, X_2(s))ds + \int_0^t g_2(s, X_2(s))dB(s) \\ + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} h_2(s, X_2(s^-), u)\tilde{N}(ds, du),$$

sa početnim uslovima $X_1(0)$ i $X_2(0)$.

Teorema 1.38 (Teorema upoređivanja rešenja SDJ, [40], Teorema 3.1) *Sledeća dva tvrđenja su ekvivalentna:*

1) Za proizvoljno $t \in [0, T]$, važi

$$X_1(0) \leq X_2(0) \Rightarrow X_1(t) \leq X_2(t), \quad s.i.$$

2) za svako $(t, X) \in [0, T] \times \mathbb{R}$, koeficijenti $f_i(t, X)$, $g_i(t, X)$, i $h_i(t, X)$, $i = 1, 2$, zadovoljavaju

$$f_1(t, X) < f_2(t, X),$$

$$g_1(t, X) = g_2(t, X),$$

$$h_1(t, X, u) = h_2(t, X, u), \quad \lambda(du) - s.i.$$

1.9 Stohastičke funkcionalne diferencijalne jednačine sa skokovima Lévyja

Neka su sve slučajne promenljive i procesi definisani na prostoru verovatnoće $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sa filtracijom $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ koja zadovoljava uobičajene uslove. Za fiksirano $\tau > 0$, neka je $\mathcal{M}([-\tau, 0]; \mathbb{R}^d)$ familija càdlàg funkcija $\varphi : [-\tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}^d$, sa supremum-normom definisanom na sledeći način $\|\varphi\| := \sup_{-\tau \leq \theta \leq 0} |\varphi(\theta)|$. Pored toga, $(\mathcal{M}([-\tau, 0]; \mathbb{R}^d), \|\cdot\|)$ je Banahov prostor. Neka je $\mathcal{M} := \mathcal{M}([-\tau, 0]; \mathbb{R}^d)$, a $\mathcal{D}$ prostor svih $\mathcal{F}_0$ -adaptiranih slučajnih promenljivih $\varphi \in \mathcal{M}$.

U ovom poglavlju se uvodi *stohastička funkcionalna diferencijalna jednačina sa skokovima Lévyja* (SFDJsL) oblika

$$dX(t) = f(t, X_t)dt + g(t, X_t)dB(t) + \int_{\mathbb{R}} h(s, X_t, u)\tilde{N}(dt, du), \quad (1.35)$$

$$X_0 = \xi = \{\xi(\theta), \theta \in [-\tau, 0]\}, \quad (1.36)$$

gde su funkcionali $f : [0, T] \times \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^d$, $g : [0, T] \times \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^{d \times m}$, $h : [0, T] \times \mathcal{M} \times \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^{d \times m \times l}$ Borel merljivi, ξ je $\mathcal{F}_0$ -merljiva slučajna promenljiva iz familije $\mathcal{M}$, za koju važi $\mathbb{E}\|\xi\|^2 < \infty$ i $X_t := \{X(t + \theta), \theta \in [-\tau, 0]\}$ je stohastički segment proces iz familije $\mathcal{M}$ i interpretira se kao prošlost stanja u odnosu na trenutak t .

Definicija 1.44 ([37], **Definicija 1.5**) *Neka je τ vreme zaustavljanja filtracije $\mathcal{F}_t$ pri čemu je $0 \leq \tau \leq T < \infty$ s.i. Tada se $\mathcal{F}_t$ -adaptiran, neprekidan stohastički proces $\{X(t), 0 \leq t < \tau\}$ sa vrednostima u $\mathbb{R}^d$ naziva lokalno rešenje jednačine (1.35) ako je $X_0 = \xi$ i ukoliko postoji neopadajući niz $\{\tau_k\}_{k \geq 0}$ vremena zaustavljanja filtracije $\mathcal{F}_t$ tako da $0 \leq \tau_k \uparrow \tau$ s.i. i*

$$X(t) = x_0 + \int_0^{t \wedge \tau_k} f(s, X_s) ds + \int_0^{t \wedge \tau_k} g(s, X_s) dB(s) + \int_0^{t \wedge \tau_k} h(s, X_s, u) \tilde{N}(ds, du),$$

$$t \in [0, T], \quad \text{s.i.}$$

U nastavku je navedena teorema koja daje uslove egzistencije i jedinstvenosti rešenja stohastičkih funkcionalnih diferencijalnih jednačina sa skokovima Lévyja, koja se može naći u [37].

Teorema 1.39 ([37], **Teorema 2.12**) *Ako za funkcionalne f, g i h važi uniformni Lipschitzov uslov i uslov linearnog rasta, tj. ako postoji konstanta $K > 0$, tako da je*

$$\|f(t, \varphi) - f(t, \psi)\| \vee \|g(t, \varphi) - g(t, \psi)\| \vee \|h(t, \varphi, z) - h(t, \psi, z)\| \leq K \|\varphi - \psi\|, \quad (1.37)$$

$$\|f(t, \varphi)\| \vee \|g(t, \varphi)\| \vee \|h(t, \varphi, z)\| \leq K(1 + \|\varphi\|), \quad (1.38)$$

za svako $t \in [0, T]$ i $\varphi, \psi \in \mathcal{M}$, tada postoji jedinstveno rešenje $X(t)$ jednačine (1.35).

Kako SFDJsL (1.35) zavisi od stanja sistema iz prošlosti, njeno rešenje X ne zadovoljava svojstvo Markova. Međutim, u [37] je pokazano da segment proces X_t zadovoljava svojstvo Markova.

Teorema 1.40 (Svojstvo Markova, [37], **Teorema 3.9**) *Neka za funkcionalne f, g i h jednačine (1.18), važe uniformni Lipschitzov uslov (1.37) i uslov linearnog rasta (1.38), i neka je $X^{(\xi, x)}(\cdot)$, jedinstveno strogo rešenje sistema (1.35) sa početnom vrednošću (1.36). Tada polje*

$$\{(X_t^{(\xi, x)}, X^{(\xi, x)}(t)), t \geq 0\},$$

opisuje proces Markova sa verovatnoćama prelaza

$$p(t_1, (\xi, x); t_2, B) := \mathbb{P}(\omega : \omega \in \Omega, X_{t_2}^{t_1, (\xi, x)} \in B), \quad t_1 \leq t_2, \quad B \in \mathcal{B}(\mathcal{M}), \quad (\xi, x) \in \mathcal{M},$$

tj. za svako $(\xi, x) \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_0; \mathcal{M})$ i svako $B \in \mathcal{B}(\mathcal{M})$, važi svojstvo Markova

$$\mathbb{P}(X_{t_2}^{(\xi, x)} \in B | \mathcal{F}_{t_1}) = p(t_1, X_{t_1}^{(\xi, x)}, t_2, B) = \mathbb{P}(X_{t_2}^{(\xi, x)} \in B | X_{t_1}^{(\xi, x)}), \quad \text{s.i.}$$

na Ω .

1.10 Stohastičke diferencijalne jednačine sa skokovima Lévyja i prelazima Markova

Kod populacionih sistema, osim uticaja Gaussovog belog šuma, često je prisutan i *obojeni* ili, takozvani, *telegrafski šum*. Njegov uticaj se ogleda u slučajnim prelazima sistema iz jednog stanja u drugo, što zavisi od raznih slučajnih faktora poput godišnjeg doba, doba dana i slično. Ovakvi prelazi se modeliraju korišćenjem lanaca Markova sa

konačnim brojem stanja, što predstavlja ključnu motivaciju za proučavanje stohastičkih diferencijalnih jednačina sa prelazima Markova.

Pored već uvedenih oznaka, neka $a = \{a(t), t \in [0, T]\}$ označava neprekidan zdesna lanac Markova definisan na datom prostoru verovatnoća, sa konačnim skupom stanja $\mathbb{A} = \{1, 2, \dots, N\}$ i generatorom $\Gamma = (\gamma_{ij})_{N \times N}$ definisanim sa

$$\mathbb{P}\{a(t + \Delta) = j | a(t) = i\} = \begin{cases} \gamma_{ij}\Delta + o(\Delta), & i \neq j, \\ 1 + \gamma_{ii}\Delta + o(\Delta), & i = j, \end{cases}$$

pri čemu je $\Delta > 0$, a $\gamma_{ij} \geq 0$ predstavlja gustinu prelaza iz stanja i u stanje j , kada je $i \neq j$, dok je

$$\gamma_{ii} = - \sum_{j \neq i} \gamma_{ij}.$$

Pretpostavlja se da su lanac Markova $a(t)$, Brownovo kretanje $B(t)$ i kompenzovani Poissonov proces $\tilde{N}(t, \omega)$ međusobno nezavisni i definisani na istom potpunom prostoru verovatnoće $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathbb{P})$. Pritom je skoro svaka trajektorija procesa $a(t)$ neprekidna zdesna stepenasta funkcija sa konačnim brojem skokova na intervalu $[0, T]$.

Stohastička diferencijalna jednačina sa skokovima Lévyja i prelazima Markova je oblika

$$\begin{aligned} dx(t) &= f(t, x(t), a(t))dt + g(t, x(t), a(t))dB(t) \\ &\quad + \int_Y h(t, x(t), a(t), u)\tilde{N}(dt, du), \\ x(0) &= x_0, \quad a(0) = a_0, \end{aligned} \tag{1.39}$$

pri čemu su $f : [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{R}^d$, $g : [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{R}^{d \times m}$, $h : [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{A} \times \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^{d \times m \times l}$ Borelove funkcije.

Definicija 1.45 ([41], Definicija 1.14) *Neka je τ vreme zaustavljanja filtracije $\mathcal{F}$ pri čemu je $0 \leq \tau \leq T < \infty$ s.i. Tada se $\mathcal{F}_t$ -adaptiran, neprekidan stohastički proces $\{X(t), 0 \leq t < \tau\}$ sa vrednostima u $\mathbb{R}^d$ naziva lokalno rešenje jednačine (1.39) ako je $X_0 = \xi$ i ukoliko postoji neopadajući niz $\{\tau_k\}_{k \geq 0}$ vremena zaustavljanja filtracije $\mathcal{F}$ tako da $0 \leq \tau_k \uparrow \tau$ s.i. i*

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \int_0^{t \wedge \tau_k} f(s, x(s), a(s))ds + \int_0^{t \wedge \tau_k} g(s, x(s), a(s))dB(s) \\ &\quad + \int_0^{t \wedge \tau_k} \int_Y h(s, x(s), a(s), u)\tilde{N}(ds, du), \quad t \in [0, T), \quad \text{s.i.} \end{aligned}$$

Teorema 1.41 ([41], Propozicija 7.1) *Neka koeficijenti f, g i h jednačine (1.39) zadovoljavaju sledeće uslove:*

- *Lipschitzov uslov: postoji konstanta K tako da za svako $x, \bar{x} \in \mathbb{R}^d$, $k \in \mathbb{A}$ važi*

$$\begin{aligned} &|f(t, x, k) - f(t, \bar{x}, k)|^2 + \|g(t, x, k) - g(t, \bar{x}, k)\|^2 \\ &+ \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^l \int_Y |h_{ij}(t, x, k, u_j) - h_{ij}(t, \bar{x}, k, u_j)|^2 \lambda_j(du_j) \leq K|x - \bar{x}|^2, \end{aligned} \tag{1.40}$$

Stohastičke diferencijalne jednačine sa skokovima Lévyja, kašnjenjem i prelazima Markova

- *uslov linearnog rasta: postoji konstanta $\bar{K} > 0$ tako da za svako $(t, x, k) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{A}$ važi*

$$|f(t, x, k)|^2 \vee \|g(t, x, k)\|^2 + \int_Y \sum_{j=1}^l |h^{(j)}(t, x, k, u_j)|^2 \lambda_j(du_j) \leq \bar{K}(1 + |x|^2). \quad (1.41)$$

Tada postoji jedinstveno, càdlàg adaptirano rešenje $\{x(t), t \in [0, T]\}$ jednačine (1.39), tako da je

$$\mathbb{E}(|x(t)|^2) < \infty.$$

Teorema 1.42 ([41], Propozicija 9.2) *Rešenje jednačine (1.39) je proces Markova.*

1.11 Stohastičke diferencijalne jednačine sa skokovima Lévyja, kašnjenjem i prelazima Markova

Pretpostavlja se da su lanac Markova $a(t)$, Brownovo kretanje $B(t)$ i kompenzovani Poissonov proces $\tilde{N}(t, \omega)$ međusobno nezavisni i definisani na potpunom prostoru verovatnoće $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ za koje važe svi uslovi iz Poglavlja 1.10.

Stohastička diferencijalna jednačina sa skokovima Lévyja, kašnjenjem i prelazima Markova je oblika

$$\begin{aligned} dx(t) &= f(t, x(t), x(t - \tau), a(t))dt + g(t, x(t), x(t - \tau), a(t))dB(t) \\ &\quad + \int_Y h(t, x(t), x(t - \tau), a(t), u) \tilde{N}(dt, du), \end{aligned} \quad (1.42)$$

$$x(0) := \xi = \{\xi(\theta), \theta \in [-\tau, 0]\} \in L^2_{\mathcal{F}_0}([-\tau, 0]; \mathbb{R}^d), \quad a(0) = a_0,$$

pri čemu su $f : [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{R}^d$, $g : [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{R}^{d \times m}$, $h : [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{A} \times \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^{d \times m \times l}$ Borelove funkcije.

Teorema 1.43 ([42], Teorema 3.1) *Neka koeficijenti f, g i h jednačine (1.42) zadovoljavaju sledeće uslove:*

- *(Lipschitzov uslov) postoji konstanta K tako da za svako $x, y, \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^d$, $k \in \mathbb{A}$ važi*

$$\begin{aligned} &|f(t, x, y, k) - f(t, \bar{x}, \bar{y}, k)|^2 + \|g(t, x, y, k) - g(t, \bar{x}, \bar{y}, k)\|^2 \\ &+ \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^l \int_Y |h_{ij}(t, x, y, k, u_j) - h_{ij}(t, \bar{x}, \bar{y}, k, u_j)|^2 \lambda_j(du_j) \leq K(|x - \bar{x}|^2 + |y - \bar{y}|^2), \end{aligned} \quad (1.43)$$

- *(uslov linearnog rasta) postoji konstanta $\bar{K} > 0$ tako da za svako $(t, x, y, k) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{A}$ važi*

$$|f(t, x, y, k)|^2 \vee \|g(t, x, y, k)\|^2 + \int_Y \sum_{j=1}^l |h^{(j)}(t, x, y, k, u_j)|^2 \lambda_j(du_j) \leq \bar{K}(1 + |x|^2 + |y|^2). \quad (1.44)$$

Tada postoji jedinstveno, càdlàg adaptirano rešenje $\{x(t), t \in [0, T]\}$ jednačine (1.42), tako da je

$$\mathbb{E}(|x(t)|^2) < \infty.$$

Teorema 1.44 ([42], Teorema 3.3) Neka za koeficijente jednačine (1.42) važi lokalni Lipschitzov uslov tj. postoji konstanta $K_n > 0$ takva da za svako $k \in \mathbb{A}$ i svako $x, \bar{x}, y, \bar{y} \in \mathbb{R}^d$ za koje je $|x| \vee |\bar{x}| \vee |y| \vee |\bar{y}| \leq n$, važi

$$|f(t, x, y, k) - f(t, \bar{x}, \bar{y}, k)|^2 + \|g(t, x, y, k) - g(t, \bar{x}, \bar{y}, k)\|^2 + \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^l \int_Y |h_{ij}(t, x, y, k, u_j) - h_{ij}(t, \bar{x}, \bar{y}, k, u_j)|^2 \lambda_j(du_j) \leq K_n (|x - \bar{x}|^2 + |y - \bar{y}|^2).$$

Tada postoji jedinstveno maksimalno lokalno rešenje stohastičke diferencijalne jednačine (1.42).

Kako sistem SDJ (1.42) sadrži kašnjenje, tj. stanje sistema u sadašnjem trenutku zavisi od stanja sistema iz prošlosti, rešenje $\{x(t)\}_{t \in [0, T]}$ sistema (1.42) nije proces Markova [37]. Međutim, važi sledeća teorema.

Teorema 1.45 (Formula Itôa za procese sa skokovima Lévyja, kašnjenjem i prelazima Markova, [43], Teorema 1.2) Neka je proces $x(t)$ sa vrednostima u $\mathbb{R}^n$, dat sa (1.42). Takođe, $B(t)$ je m -dimenzionalno Brownovo kretanje i

$$\begin{aligned} \bar{N}(dt, du)^T &= (\bar{N}_1(dt, du_1), \dots, \bar{N}_l(dt, du_l)) \\ &= (N_1(dt, du_1) - I_{|z_1| < R_1} \lambda_1(du_1)dt, \dots, N_l(dt, du_l) - I_{|z_l| < R_l} \lambda_l(du_l)dt), \end{aligned}$$

pri čemu su $\{N_r\}$ nezavisne Poissonove slučajne mere sa Lévyjevima merama $\lambda_r, r \in \{1, 2, \dots, l\}$, koje potiču od nezavisnih jednodimenzionalnih Lévyjevih procesa $\mathcal{Z}_r, r \in \{1, 2, \dots, l\}$.

Svaka kolona $h^{(r)}$ matrice $h = [h_{ij}]$ dimenzije $d \times l$, zavisi od u samo preko r -te koordinate, odnosno,

$$h^{(r)}(t, x, y, k, u) = h^{(r)}(t, x, y, k, u_r), \quad (u_1, \dots, u_l) \in \mathbb{R}^l, \quad k \in \mathbb{A}.$$

Stoga je integral desne strane jednakosti (1.42) skraćeni matrični zapis. Kada se napiše u razvijenom obliku relacija (1.42) je ekvivalentna relaciji

$$dx_i(t) = f_i(t, x, y, k)dt + \sum_{j=1}^m g_{ij}(t, x, y, k)dB_j(t) + \sum_{j=1}^l \int_{\mathbb{R}} h_{ij}(t, x, y, k, u_j) \bar{N}_j(dt, du_j),$$

za $1 \leq i \leq d$.

Neka je $V(t, x, k) \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{A}; \mathbb{R})$. Operator $L(\cdot)$ se definiše na sledeći način

$$\begin{aligned} LV(t, x, y, k) &= V_t(t, x, k) + f(t, x, y, k)V_x(t, x, k) \\ &\quad + \frac{1}{2} \text{trace}[g(t, x, y, k)V_{xx}(t, x, k)g^T(t, x, y, k)] \\ &\quad + \sum_{r=1}^l \int_Y (V(t, x + h^{(r)}(t, x, y, k, u_r), k) - V(t, x, k) \\ &\quad - V_x(t, x, k)h^{(r)}(t, x, y, k, u_r)) \lambda_r(du_r) + \sum_{j=1}^N \gamma_{kj} V(t, x, k), \end{aligned} \quad (1.45)$$

gde je

$$V_x(t, x, k) = \left(\frac{\partial V(t, x, k)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial V(t, x, k)}{\partial x_d} \right),$$

$$V_{xx}(t, x, k) = \left(\frac{\partial^2 V(t, x, k)}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{d \times d}.$$

Tada važi

$$\begin{aligned} V(t, x(t), a(t)) &= V(0, x(0), a(0)) + \int_0^t LV(s, x(s), x(s - \tau), a(s)) ds \\ &+ \int_0^t g(s, x(s), x(s - \tau), a(s)) V_x(s, x(s), a(s)) dB(s) \\ &+ \sum_{r=1}^l \int_0^t \int_Y (V(s, x(s) + h^{(r)}(s, x(s), x(s - \tau), a(s), u_r), k) \\ &\quad - V(s, x(s), a(s))) \tilde{N}(ds, du_r) \\ &+ \int_0^t \int_Y (V(s, x(s), k_0 + \bar{h}(a(s), k)) - V(s, x(s), a(s))) \mu(ds, dk), \end{aligned} \quad (1.47)$$

pri čemu je funkcija $\bar{h}$ definisana sa

$$\bar{h}(i, j) = \begin{cases} j - i, & \text{za } y \in \Delta_{ij}, \\ 0, & \text{inače,} \end{cases}$$

$\mu(ds, dl) = \nu(ds, dl) - \mu(dl)$ predstavlja martingalnu meru, ν slučajnu Poissonovu meru, μ Lebegovu meru na $\mathbb{R}$, dok su Δ_{ij} uzastopni, levo zatvoreni, desno otvoreni intervali realne prave.

1.12 Ergodička stacionarna raspodela

Neka je $X = \{x(t), t \in \mathcal{T}\}$ stohastički proces sa vrednostima u $\mathbb{R}^d$ koji je definisan na prostoru verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, pri čemu σ -algebra $\mathcal{F}_t = \sigma\{x(s), 0 \leq s \leq t\}$ sadrži sve informacije o procesu za vremenski period $0 \leq s \leq t$. Već je u Definiciji [1.13](#) rečeno da se proces $x(\cdot)$ naziva proces Markova ukoliko za svako $0 \leq s \leq t < \infty$ i za sve Borelove skupove $B \in \mathcal{B}$ važi

$$\mathbb{P}(x(t) \in B | \mathcal{F}_s) = \mathbb{P}(x(t) \in B | x(s)) \quad s.i.$$

Verovatnoća prelaza procesa Markova je funkcija $\mathbb{P}(s, x; t, B)$ definisana na $0 \leq s \leq t < \infty$, $x \in \mathbb{R}$, $B \in \mathcal{B}$, sa sledećim osobinama:

1. $\mathbb{P}(s, x; t, B) = \mathbb{P}(x(t) \in B | x(s))$;
2. $\mathbb{P}(s, x; t, \cdot)$ je verovatnosna mera na familiji Borelovih skupova $\mathcal{B}$;
3. $\mathbb{P}(s, \cdot; t, B)$ je Borel merljiva funkcija;

$$4. \mathbb{P}(s, x; t, B) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{P}(r, y; t, B) \mathbb{P}(s, x; r, dy).$$

Osobina 4 predstavlja poznate *jednačine Chapman³¹-Kolmogorova*.

Svojstvo Markova u terminima verovatnoća prelaza može se iskazati kao $\mathbb{P}(x(t) \in B | \mathcal{F}_s) = \mathbb{P}(s, x(s); t, B)$. Iz tog razloga opravdano je zapisati $\mathbb{P}(x(t) \in B | x(s) = x) = \mathbb{P}(s, x; t, B)$, što zapravo predstavlja verovatnoću da će proces biti u skupu B u trenutku t , pod uslovom da je u trenutku s , $s \leq t$, bio u stanju x . Proces Markova je *vremenski homogen* (u odnosu na t) ukoliko je verovatnoća prelaza $\mathbb{P}(s, x; t, B)$ stacionarna, odnosno,

$$\mathbb{P}(s + u, x; t + u, B) = \mathbb{P}(s, x; t, B), \quad 0 \leq s \leq t < \infty, x \in \mathbb{R}, B \in \mathcal{B}.$$

U tom slučaju je verovatnoća prelaza funkcija koja zavisi od x, B i razlike vremenskih trenutaka $t - s$, jer je $\mathbb{P}(s, x; t, A) = \mathbb{P}(0, x; t - s, B)$. Na osnovu izloženog, jasno je $\mathbb{P}(0, x; t, B) = \mathbb{P}(x; t, B)$. U opštem slučaju, neka $\mathbb{P}(x; t, \cdot)$ označava verovatnoću definisanu na sledeći način

$$\mathbb{P}(x; t, B) = \mathbb{P}(x(t) \in B | x(0) = x),$$

za proizvoljan Borelov skup $B \in \mathcal{B}$.

Definicija 1.46 ([22], Poglavlje I.5) *Stacionarna raspodela procesa Markova je verovatnosna mera ϑ , definisana na merljivom prostoru $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$, koja zadovoljava*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{P}(x; t, B) \vartheta(dx) = \vartheta(B), \quad \text{za svako } x \in \mathbb{R}^d, B \in \mathcal{B}.$$

Definicija 1.47 ([22], Poglavlje I.5) *Stohastička diferencijalna jednačina ima stacionarnu raspodelu $\pi(\cdot)$ ukoliko postoji verovatnoća $\pi(\cdot)$ definisana na merljivom prostoru $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B})$, tako da je*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(x; t, B) = \pi(B), \quad \text{za svako } x \in \mathbb{R}^d, B \in \mathcal{B}.$$

U nastavku će biti izloženi teorijski rezultati Khasminskog³² [13] koji se koriste prilikom dokazivanja postojanja stacionarne raspodele stohastičkih diferencijalnih jednačina.

Neka su $B_i(t)$, $1 \leq i \leq d$, nezavisna Brownova kretanja definisana na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Neka je $\mathbb{R}_+^d = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d : x_i > 0, 1 \leq i \leq d\}$.

Pretpostavlja se da je $\{x(t), t \geq 0\}$ homogen proces Markova u d -dimenzionalnom Euklidovom prostoru E_d i da zadovoljava stohastičku diferencijalnu jednačinu

$$dx(t) = f(x(t))dt + \sum_{r=1}^d g_r(x(t))dB_r(t). \quad (1.48)$$

Difuzionu matricu procesa X data je sa $G(x) = (\bar{g}_{ij}(x))$, $i, j = 1, \dots, d$, pri čemu je $\bar{g}_{ij}(x) = \sum_{k=1}^d g_k^i(x)g_k^j(x)$.

Sledeća lema daje uslove pod kojima jednačina (1.48) ima ergodičku stacionarnu raspodelu.

³¹Sydney Chapman

³²Rafail Zalmonovich Khasminskii

Lema 1.6 ([13], Teorema 4.1) *Proces Markova $x(\cdot)$ (1.48) ima jedinstvenu ergodičku stacionarnu raspodelu $\pi(\cdot)$ ukoliko postoji ograničen domen $D \subset \mathbb{R}^d$ sa glatkom granicom ∂D i*

(A.1) *u domenu D i nekoj njegovoj okolini najmanja sopstvena vrednost difuzione matrice $G(x)$ nije u okolini nule;*

(A.2) *ukoliko je $z \in \mathbb{R}^d \setminus D$ tada je srednje vreme τ , za koje trajektorija koja polazi iz z dostiže skup D , konačno i $\sup_{z \in K} \mathbb{E}(\tau|x(0) = z) < \infty$ za bilo koji kompaktan podskup $K \in \mathbb{R}^d$.*

Lema 1.7 ([13], Teorema 4.2) *Neka proces Markova $x(\cdot)$ (1.48) ima jedinstvenu ergodičku stacionarnu raspodelu $\pi(\cdot)$ i neka je $f(x)$ integrabilna funkcija u odnosu na meru $\pi(\cdot)$. Tada za svako $x \in \mathbb{R}^d$ važi*

$$\mathbb{P} \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(x(s)) ds = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \pi(dx) \right\} = 1.$$

Napomena 1.4 U radu [44], Napomena 3.2 na strani 1160, autori su pokazali da se uslov (A.1) iz Leme 1.6 može zameniti slabijim uslovom: postoji $i \in \{1, 2, \dots, d\}$ i pozitivna konstanta κ tako da je

$$\bar{g}_{ii}(x) \geq \kappa, \quad \text{za svako } x \in D \subset \mathbb{R}^d. \quad (1.49)$$

U ovoj disertaciji se primenjuju procesi koji zadovoljavaju jače svojstvo od svojstva Markova, tzv. *Fellerovo svojstvo*. Definicija Fellerovog svojstva i Fellerovih procesa uključuje uvođenje pretpostavke neprekidnosti za funkciju prelaza, što zahteva da se razmatraju procesi unutar topološkog prostora $(\mathbb{E}, \mathcal{T}_E)$. Pretpostavlja se da je $(\mathbb{E}, \mathcal{T}_E)$ lokalno kompaktan³³, separabilan prostor sa prebrojivom bazom³⁴ (engleski naziv: locally compact, separable space with a countable basis, kraće: lccb prostor).

Za topološki prostor $\mathbb{E}$, $\mathbb{C}_0(\mathbb{E})$ označava neprekidne funkcije sa realnim vrednostima koje nestaju u beskonačnosti³⁵, tj. funkcije za koje je skup $\{x : |f(x)| > \epsilon\}$ kompaktan za svako $\epsilon > 0$.

Definicija 1.48 (Svojstvo Feller, [22], Poglavlje I.5) *Neka je $\mathbb{E}$ lccb prostor. Tada, funkcija prelaza $\{\mathbb{P}_t\}_{t \geq 0}$ poseduje svojstvo Feller ako za svako $f \in \mathbb{C}_0(\mathbb{E})$ važi*

- $\mathbb{P}_t f \in \mathbb{C}_0(\mathbb{E})$,
- preslikavanje $t \rightarrow \mathbb{P}_t f$ je neprekidno u odnosu na normu topologije prostora $\mathbb{C}_0(\mathbb{E})$,
- $\mathbb{P}_0 f = f$.

Definicija 1.49 (Proces Feller, [22], Poglavlje I.5) *Proces Markova čija funkcija prelaza ima svojstvo Feller je proces Feller.*

Primeri procesa Feller su Brownovo kretanje, Poissonov proces i svi procesi Lévyja.

³³ Topološki prostor $\mathbb{E}$ se naziva lokalno kompaktnim ako svaka tačka $x \in \mathbb{E}$ ima kompaktnu okolinu.

³⁴ Baza za topologiju $\mathcal{T}$ prostora $\mathbb{E}$ je porodica otvorenih skupova takva da svaki otvoreni skup može biti izražen kao unija nekih elemenata iz baze.

³⁵ Funkcija $f(x)$ nestaje u beskonačnosti ako njene vrednosti teže nuli dok njen argument x teži beskonačnosti.

Teorema 1.46 ([22], Teorema I.5.46) *Neka je X càdlàg Fellerov proces u odnosu na filtraciju $\mathbb{F}$. Tada je on i proces Markova u odnosu na $\mathbb{F}$.*

U nastavku je navedena lema koja daje uslove pod kojima je rešenje SDJ sa skokovima Lévyja proces Fellerov. Neka je

$$dX^0(t) = f(t, X^0(t))dt + g(t, X^0(t))dB(t), \quad (1.50)$$

$$dX(t) = f(t, X(t))dt + g(t, X(t))dB(t) + \int_Y h(t, X^-(t), u)\tilde{N}(dt, du). \quad (1.51)$$

Napomena 1.5 U [45], Sekcija 2 i [46], Poglavlje V, Sekcija 8, je pokazano da je dovoljan uslov da proces $X^0(\cdot)$ (1.50) ima strogo svojstvo Fellerov i gustinu prelaza, da je difuziona matrica tog procesa uniformno pozitivna.

Lema 1.8 ([47], Lema 4.3) *Neka je karakteristična mera $\lambda(\cdot)$ procesa Lévyja N sa kompenzatorom $\tilde{N}$ konačna i neka proces $X^0(\cdot)$ (1.50) ima strogo svojstvo Fellerov i gustinu prelaza u odnosu na Lebesgueovu meru. Tada proces $X(\cdot)$ (1.51) ima strogo svojstvo Fellerov i gustinu prelaza u odnosu na Lebesgueovu meru.*

U nastavku sledi formulacija leme koja se koristi da bi se dokazala egzistencija stacionarne raspodele za procese Fellerov.

Lema 1.9 (Međusobno isključive verovatnoće, [48], Teorema 4.2) *Neka je $x(\cdot)$ proces Fellerov i C kompaktan skup. Tada, ili postoji invarijantna verovatnosna mera ϑ ili je*

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{P}(s, x, C)ds = 0, \quad (1.52)$$

gde je $\mathbb{P}(s, x, C)$ verovatnoća da $x(s) \in C$ i $x(0) = x_0$.

1.13 Osnovni pojmovi populacione dinamike

Glavni rezultati ove disertacije se odnose na širenje različitih zaraznih bolesti među populacijom domaćina. U zavisnosti od toga kakav uticaj ta bolest ima na pojedince iz populacije, populacija domaćina se deli na podklase, na primer, podložnih nekoj bolesti, inficiranih, oporavljenih i slično. Značajno je ispitati dinamiku širenja bolesti. Iz tog razloga se u ovom poglavlju uvode osnovni pojmovi populacione dinamike koji će kasnije biti razmatrani za svaki od modela pojedinačno.

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ kompletan prostor verovatnoća sa filtracijom $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ koja zadovoljava uobičajene uslove. Neka $N(t)$ predstavlja veličinu posmatrane populacije u trenutku $t \geq 0$ i neka je početni broj jedinki u populaciji $N(0) = N_0 > 0$ skoro izvesno.

Definicija 1.50 ([49], Definicija 2.2) *Osnovni pojmovi populacione dinamike:*

- *Do lokalnog istrebljenja populacije dolazi ako za broj jedinki u populaciji $N(t), t \geq 0$, važi da je*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = 0 \quad \text{s.i.}$$

- *Populacija je neperzistentna u srednjem ako za broj jedinki u populaciji $N(t), t \geq 0$, važi da je*

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t N(s) ds = 0 \quad s.i.$$

- *Do eksponencijalnog istrebljenja populacije dolazi ako za broj jedinki u populaciji $N(t), t \geq 0$, važi da je*

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} N(t) = 0 \quad s.i.$$

- *Populacija je stohastički slabo perzistentna ako za broj jedinki u populaciji $N(t), t \geq 0$, važi da je*

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} N(t) > 0 \quad s.i.$$

- *Populacija je stohastički slabo perzistentna u srednjem ako za broj jedinki u populaciji $N(t), t \geq 0$, važi da je*

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t N(s) ds > 0 \quad s.i.$$

- *Populacija je stohastički strogo perzistentna u srednjem ako za broj jedinki u populaciji $N(t), t \geq 0$, važi da je*

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t N(s) ds > 0 \quad s.i.$$

- *Populacija je stohastički postojana ako za proizvoljno $\epsilon \in (0, 1)$ postoje pozitivne konstante $\beta = \beta(\epsilon)$ i $M = M(\epsilon)$ tako da za broj jedinki u populaciji $N(t), t \geq 0$, važi da je*

$$\mathbb{P} \left\{ \liminf_{t \rightarrow \infty} N(t) \geq \beta \right\} \geq 1 - \epsilon \quad i \quad \mathbb{P} \left\{ \limsup_{t \rightarrow \infty} N(t) \leq M \right\} \geq 1 - \epsilon.$$

Na osnovu prethodne definicije može se zaključiti da iz eksponencijalnog istrebljenja populacije sledi njena neperzistentnost u srednjem i lokalno istrebljenje. Takođe, iz stohastičke postojanosti populacije sledi njena stohastička stroga i slaba perzistentnost u srednjem i slaba perzistentnost, iz stohastičke stroge perzistentnosti u srednjem sledi njena stohastička slaba perzistentnost u srednjem i slaba perzistentnost, a iz stohastičke slabe perzistentnosti u srednjem sledi njena stohastička slaba perzistentnost. U opštem slučaju, obrnuto ne važi. Pored toga, populacija je stohastički postojana, ako je stohastički ograničena i perzistentna.

1.14 Elementarne, integralne i stohastičke nejednakosti

Prilikom dokazivanja glavnih rezultata u ovoj disertaciji, koristiće se neke elementarne nejednakosti, nejednakost izmedju aritmetičke i geometrijske sredine kao i stohastičke nejednakosti.

- Elementarne nejednakosti koje će biti navedene mogu se naći u [50]. Neka su $a, b \in \mathbb{R}$ i $\epsilon > 0$ proizvoljni. Tada:

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &\leq 2a^2 + 2b^2; \\ \pm 2ab &\leq a^2 + b^2; \\ |ab| &\leq \epsilon a^2 + \frac{1}{\epsilon} b^2.\end{aligned}$$

- *Nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine (A-G nejednakost) [50]:* Za proizvoljne nenegativne realne brojeve $x_1, x_2, \dots, x_n, n \in \mathbb{N}$, važi nejednakost

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}$$

Za potrebe daljeg razmatranja biće navedena jedna od verzija Grönwall³⁶–Bellmanove³⁷ nejednakosti, s obzirom na to da postoji više verzija. Dokaz navedene nejednakosti se može naći u [18].

Teorema 1.47 (Grönwall–Bellmanova nejednakost, [18], Teorema 1.8.1) *Neka je $T > 0$ i $c \geq 0$. Neka je $u(\cdot)$ Borelova ograničena nenegativna funkcija definisana na $[0, T]$ i neka je $v(\cdot)$ nenegativna integrabilna funkcija na $[0, T]$. Ako je*

$$u(t) \leq c + \int_0^t v(s)u(s)ds, \quad t \in [0, T],$$

tada je

$$u(t) \leq c e^{\int_0^t v(s)ds}, \quad t \in [0, T].$$

Teorema 1.48 (Hölderova³⁸ nejednakost, [18], Poglavlje 1.2) *Neka je $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, i X, Y slučajne promenljive takve da $X \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^d)$, $Y \in L^q(\Omega, \mathbb{R}^d)$. Tada je*

$$\mathbb{E}|X^T Y| \leq \mathbb{E}(X^p)^{\frac{1}{p}} \mathbb{E}(Y^q)^{\frac{1}{q}}.$$

Teorema 1.49 (Chebyshevljeva³⁹ nejednakost, [18], Poglavlje 1.2) *Neka je $p > 0$, $b > 0$ i X slučajna promenljiva takva da $X \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^d)$. Tada je*

$$\mathbb{P}\{\omega \in \Omega : |X(\omega)| \geq b\} \leq b^{-p} \mathbb{E}|X|^p.$$

Teorema 1.50 (Burkholder⁴⁰–Davis⁴¹–Gundyjeva⁴² nejednakost, [18], Teorema 1.7.3) *Neka je $g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^{d \times m})$. Za $t > 0$, definiše se,*

$$x(t) = \int_0^t g(s)dB(s) \quad i \quad A(t) = \int_0^t |g(s)|^2 ds.$$

³⁶Thomas Hakon Grönwall

³⁷Richard Bellman

³⁸Otto Hölder

³⁹Pafnuty Chebyshev

⁴⁰Donald L. Burkholder

⁴¹Burgess Davis

⁴²Richard F. Gundy

Tada, za svako $p > 0$, postoji univerzalne pozitivne konstante c_p, C_p (koje zavise samo od p), tako da je

$$c_p \mathbb{E} |A(t)|^{\frac{p}{2}} \leq \mathbb{E} \left(\sup_{0 \leq s \leq t} x(s)^p \right) \leq C_p \mathbb{E} |A(t)|^{\frac{p}{2}},$$

za svako $t > 0$. Specijalno, može se uzeti

$$\begin{aligned} c_p &= \left(\frac{p}{2}\right)^p, & C_p &= \left(\frac{32}{p}\right)^{\frac{p}{2}}, & \text{za } 0 \leq p < 2, \\ c_p &= 1, & C_p &= 4, & \text{za } p = 2, \\ c_p &= (2p)^{-\frac{p}{2}}, & C_p &= \left[\frac{p^{p+1}}{2(p-1)^{p-1}} \right]^{\frac{p}{2}}, & \text{za } p > 2. \end{aligned}$$

Lema 1.10 (Fatouova⁴³ lema, [18], Lema 1.2.4) Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ merljiv prostor i $X \in \mathcal{F}$, i neka je $\{f_n\}$ niz $(\mathcal{F}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}_+})$ -merljivih nenegativnih funkcija, pri čemu $f_n : X \rightarrow [0, +\infty]$. Definiše se funkcija $f : X \rightarrow [0, +\infty]$, $f(x) := \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, za svako $x \in X$. Tada je f $(\mathcal{F}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}_+})$ -merljiva funkcija i važi

$$\int_X f d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu,$$

pri čemu integrali i granična vrednost mogu biti beskonačni.

U nastavku su navedene eksponencijalne martingalne nejednakosti koje će biti primenjivane u dokazivanju glavnih rezultata.

Teorema 1.51 (Eksponencijalna martingalna nejednakost, [18], Teorema 1.7.4) Neka je $g = (g_1, \dots, g_m) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^+; \mathbb{R}^{1 \times m})$, i neka su T, α, β proizvoljni pozitivni brojevi. Tada važi

$$\mathbb{P} \left\{ \sup_{t \in [0, T]} \left[\int_0^t g(s) dB(s) - \frac{\alpha}{2} \int_0^t |g(s)|^2 ds \right] > \beta \right\} \leq e^{-\alpha\beta}.$$

Teorema 1.52 (Eksponencijalna martingalna nejednakost sa skokovima, [23], Teorema 5.2.9) Neka su $g : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ i $h : [t_0, \infty) \times Y \rightarrow \mathbb{R}$, $t_0 \geq 0$, predvidivi $\mathcal{F}_t$ -adaptirani procesi tako da je, za svako $T > 0$,

$$\int_{t_0}^T |g(t)|^2 dt < \infty, \quad i \quad \int_{t_0}^T \int_Y |h(t, u)|^2 \lambda(du) dt < \infty, \quad s.i.$$

Tada za svake dve konstante $\alpha, \beta > 0$, važi

$$\mathbb{P} \left\{ \sup_{t_0 \leq t \leq T} \left[\int_{t_0}^t g(s) dB(s) - \frac{\alpha}{2} \int_{t_0}^t |g(s)|^2 ds + \int_{t_0}^t \int_Y h(s, u) \tilde{N}(ds, du) - \frac{1}{\alpha} \int_{t_0}^t \int_Y (e^{\alpha h(s, u)} - 1 - \alpha h(s, u)) \lambda(du) ds \right] > \beta \right\} \leq e^{-\alpha\beta}.$$

⁴³Pierre Joseph Étienne Fatou

Glava 2

Stohastički epidemiološki modeli širenja bolesti koje se prenose putem vektora

Bolesti koje se prenose putem *vektora* predstavljaju značajnu pretnju javnom zdravlju širom sveta. Ozbiljnost ovih bolesti ogleda se u njihovom potencijalu da izazovu velike zdravstvene, socijalne i ekonomske posledice. Često imaju visoke stope smrtnosti ili dugotrajne posledice po zdravlje, dok njihovo širenje zavisi od kompleksnih interakcija između vektora (komaraca, krpelja i dr.), *domaćina* (ljudi, ptica, konja i dr.) i okruženja. Bolesti koje se prenose putem vektora, kao što su malarija, denga, virus Zapadnog Nila, Zika virus i lajmska bolest, postale su sve šire rasprostranjene širom sveta. Ovo širenje je u velikoj meri podstaknuto faktorima kao što su klimatske promene, koje omogućavaju vektorima, poput komaraca i krpelja, da nastanjuju nova područja. Urbanizacija i globalizacija dodatno doprinose ovom procesu, jer povećavaju ljudsku mobilnost i stvaraju povoljne uslove za širenje vektora u područjima koja prethodno nisu bila ugrožena. Kao rezultat toga, bolesti koje su ranije bile ograničene na specifične geografske regije sada se pojavljuju i u novim, neočekivanim područjima, čineći ih ozbiljnim globalnim izazovom za javno zdravlje. Za mnoge bolesti koje prenose vektori ne postoje specifični lekovi ili vakcine (npr. virus Zapadnog Nila i denga groznica), a mogu izazvati ozbiljne simptome poput visoke temperature, bolova, krvarenja i neuroloških komplikacija, pa i da dovedu do smrtnog ishoda. Njihovo razumevanje, praćenje i kontrola, uz razvoj preventivnih mera i terapija, ključni su za smanjenje njihovog uticaja na globalnom nivou.

Epidemiološki modeli širenja bolesti koje se prenose putem vektora igraju ključnu ulogu u razumevanju dinamike širenja bolesti, proceni uticaja mera kontrole i pružaju dragocene uvide u epidemiologiju bolesti kao što su malarija, virus Zapadnog Nila i Zika virus. Modeli koji opisuju ove bolesti su složeni jer uključuju interakciju između domaćina i vektora, koji predstavljaju ključni element u širenju bolesti. Direktna interakcija između domaćinima nije značajan u ovim modelima. Ovi modeli su često uopštenja klasičnih kompartmentalnih modela, koji pored dinamike populacije domaćina, uzimaju u obzir i dinamiku populacije vektora.

Ova glava je organizovana na sledeći način. U Poglavlju 2.1 su predstavljeni deterministički modeli širenja virusa Zapadnog Nila razmatrani u [1], na osnovu kojih su formulisani odgovarajući stohastički modeli u Poglavljima 2.2 i 2.3. Pored toga, u Poglavlju 2.2 dokazano je postojanje i jedinstvenost globalnog pozitivnog rešenja

stohastičkog modela koji uključuje populacije vektora i jednu populaciju domaćina i dobijeni su dovoljni uslovi pod kojima dolazi do iskorenjivanja i perzistentnosti bolesti. U Poglavlju 2.3 dokazano je postojanje i jedinstvenost globalnog pozitivnog rešenja stohastičkog modela koji uključuje populacije vektora i dve vrste domaćina i dobijeni su dovoljni uslovi pod kojima dolazi do iskorenjivanja i perzistentnosti bolesti. Pored toga, Poglavlja 2.2 i 2.3, sadrže numeričke simulacije koje ilustruju teorijske rezultate.

2.1 Uvod i motivacija

Virus Zapadnog Nila (VZN) je virus koji uzrokuje groznicu Zapadnog Nila i neuro-invazivnu bolest Zapadnog Nila kod ljudi. Prenosni ciklus VZN uključuje komarce kao vektore i ptice kao prirodne rezervoare ili amplifikacione domaćine. Glavni vektori su komarci iz rodova *Culex* i *Aedes*, ali je poznato da i drugi rodovi komaraca u prirodi mogu biti zarazni, dok veliki broj divljih ptica može igrati ulogu amplifikacionih domaćina. Virus Zapadnog Nila može inficirati ljude, konje i druge sisare, koji predstavljaju krajnje domaćine, jer se sa njih virus ne može preneti nazad na komarce, budući da razvijaju niske nivoe viremije. Danas bolesti koje prenose vektori predstavljaju glavni uzrok smrti u mnogim zemljama u razvoju. Trenutno je virus Zapadnog Nila prisutan u Africi, na Bliskom Istoku, u Evropi, Aziji, Australiji i Americi, te je postao najrasprostranjeniji virus iz porodice flavivirusa koji može prouzrokovati encefalitis (upalna stanja koja zahvataju mozak).

U epidemiologiji, matematički modeli predstavljaju moćne alate za proširivanje znanja o dinamici epidemija kako bi se one mogle kontrolisati. U radu [51], autori su uveli deterministički model koji se sastoji iz sistema običnih diferencijalnih jednačina (ODJ) za opisivanje dinamike širenja VZN i ispitali uticaj migratornih ptica i temperaturnih uslova na njegovu dinamiku. U [52] je razmatran deterministički model prenosa VZN koji se sastoji iz sistema ODJ u koji je uključena mera uklanjanja komaraca, i analizirana dinamika prenosa bolesti. U radu [53] je primenjen statistički pristup za analizu širenja VZN, kako bi se identifikovali ključni faktori iz okruženja koji doprinose njegovom prenosu.

U realnosti, epidemiološki modeli su neizbežno podložni slučajnim uticajima iz okruženja. Stoga je prirodno uključiti slučajne fluktuacije opisane šumovima u epidemiološke modele kako bi se oni učinili realističnijim u poređenju sa njihovim determinističkim pandanima. Fluktuacije iz okruženja mogu se uključiti u ove modele na različite načine. Jedan od načina je perturbacija određenih parametara modela, poput stope prenosa, stope smrtnosti i drugih (videti, na primer, [1-3]), pomoću Brownovog kretanja. Drugi način je uvođenje šuma u deterministički model proporcionalno odgovarajućim klasama modela (videti, na primer, [4], [5]), dok treći način podrazumeva uvođenje pretpostavke da se parametar modela može opisati nekim procesom, npr. stacionarnim Ornstein-Uhlenbeckovim procesom (kao u radovima [6], [7]). Stohastički epidemiološki model širenja bolesti koje prenose vektori, je razmatran u [54], gde su uspostavljeni uslovi za stabilnost endemskog ekvilibrijuma za modele sa i bez kašnjenja. U ovoj glavi je cilj proučiti neke epidemiološke modele za prenos VZN u stohastičkom okviru i otkriti kako slučajni uticaji iz okruženja utiču na dinamiku prenosa bolesti. Stohastički epidemiološki modeli su konstruisani na bazi determinističkih epidemioloških modela širenja VZN koji su predstavljeni u radu [11], tako što su koeficijenti prenosa perturbovani pomoću međusobno nezavisnih Brownovih kretanja.

2.1.1 Deterministički modeli širenja virusa Zapadnog Nila

U ovom poglavlju su predstavljeni deterministički epidemiološki modeli širenja virusa Zapadnog Nila u populacijama komaraca kao vektora i ptica kao domaćina, koji su analizirani u [11].

Ukupna populacija vektora podeljena je u tri klase: podložni (S_v), izloženi (E_v) i zaraženi (I_v) vektori. Slično tome, ukupna populacija ptica podeljena je u četiri klase: podložne (S_b), izložene (E_b), zaražene (I_b) i oporavljene (R_b) ptice. Parametari koji se odnose na populaciju vektora imaju indeks "v", dok parametari koji se odnose na populaciju ptica imaju indeks "b". Broj podložnih komaraca i ptica se uvećava po konstantnoj stopi ψ_j , $j \in \{v, b\}$, dok se sve klase populacija komaraca i ptica umanjuju po stopi μ_j , $j \in \{v, b\}$ koja predstavlja prirodnu stopu smrtnosti. Izloženi komarci (ptice) postaju zaraženi po konstantnoj stopi ν_v (ν_b), koja predstavlja recipročnu vrednost perioda inkubacije. Zaražene ptice se oporavljaju po stopi γ_b i umiru od bolesti po stopi δ_b , dok oporavljene ptice gube imunitet i postaju podložne po stopi ρ_b . K predstavlja kapacitet (maksimalni broj jedinki) populacije ptica i neka je

$$H := \frac{\mu_b}{\psi_b} K.$$

Ukupne populacije komaraca i ptica u trenutku $t \geq 0$ su označene sa

$$N_v(t) = S_v(t) + E_v(t) + I_v(t) \quad \text{ i } \quad N_b(t) = S_b(t) + E_b(t) + I_b(t) + R_b(t).$$

U nastavku će biti opisana dva deterministička epidemiološka modela prenosa VZN. Model I se sastoji iz populacija vektora i jedne vrste ptica, dok se Model II sastoji iz populacija vektora i dve vrste ptica (stanarice i selice/migracione).

Model I. Podložni komarci prelaze u klasu izloženih komaraca kada ujedu zaraženu pticu, po stopi infekcije $\lambda_v(t)$. Slično, osetljive ptice prelaze u klasu izloženih ptica kada ih ujede zaraženi komarac, po stopi infekcije $\lambda_b(t)$. Snaga infekcija vektora $\lambda_v(t)$ i ptica $\lambda_b(t)$, definisane su kao

$$\lambda_v(t) := b_{vb}(t)\beta_{vb}\frac{I_b(t)}{N_b(t)} \quad \text{ i } \quad \lambda_b(t) := b_{bv}(t)\beta_{bv}\frac{I_v(t)}{N_v(t)}.$$

Snaga infekcije ptica $\lambda_b(t)$, predstavlja proizvod prosečnog broja ujeda po ptici dnevno $\left(b_{vb}(t) = \frac{b(t)}{N_b(t)}\right)$, verovatnoće prenosa virusa sa komarca na pticu (β_{bv}) i verovatnoće $\left(\frac{I_v(t)}{N_v(t)}\right)$ da je komarac zarazan u trenutku t . Snaga infekcije komaraca, $\lambda_v(t)$, definiše se slično kao $\lambda_b(t)$, i predstavlja proizvod prosečnog broja ujeda po komarcu dnevno $\left(b_{bv}(t) = \frac{b(t)}{N_v(t)}\right)$, verovatnoće prenosa virusa sa ptice na komarca (β_{vb}) i verovatnoće $\left(\frac{I_b(t)}{N_b(t)}\right)$ da je ptica zarazna u trenutku t .

Za stopu ujeda se pretpostavlja da je nelinearna funkcija oblika

$$b(t) = \frac{\sigma_v N_v(t) \sigma_b N_b(t)}{\sigma_v N_v(t) + \sigma_b N_b(t)},$$

gde je σ_v prosečan broj ujeda za komarca dnevno ukoliko postoji dostupan domaćin, σ_b broj ujeda koje domaćin može tolerisati dnevno nakon čega će preduzeti mere zaštite protiv dodatnih ujeda (npr. napuštanjem područja).

Deterministički epidemiološki model za modeliranje dinamike širenja virusa Zapadnog Nila dat je sledećim sistemom jednačina

$$\begin{aligned}
dS_v(t) &= (\psi_v N_v(t) - \lambda_v(t) S_v(t) - \mu_v S_v(t)) dt, \\
dE_v(t) &= (\lambda_v(t) S_v(t) - \nu_v E_v(t) - \mu_v E_v(t)) dt, \\
dI_v(t) &= (\nu_v E_v(t) - \mu_v I_v(t)) dt, \\
dS_b(t) &= (\psi_b H + \rho_b R_b(t) - \lambda_b(t) S_b(t) - \mu_b S_b(t)) dt, \\
dE_b(t) &= (\lambda_b(t) S_b(t) - \nu_b E_b(t) - \mu_b E_b(t)) dt, \\
dI_b(t) &= (\nu_b E_b(t) - \gamma_b I_b(t) - \mu_b I_b(t) - \delta_b I_b(t)) dt, \\
dR_b(t) &= (\gamma_b I_b(t) - \rho_b R_b(t) - \mu_b R_b(t)) dt.
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Opseg vrednosti parametara modela, koji je preuzet iz nekoliko naučnih radova (videti [55-68]), dat je u Tabeli 2.1.

Parametar	Vrednost	Rang	Jedinica
β_{vb}	0.9738	0.65-1	$ujed^{-1}$
β_{vm}	0.8875	0.65-1	$ujed^{-1}$
β_{iv}	0.462	0.32-0.58	$ujed^{-1}$
ψ_v	0.0666	–	dan^{-1}
μ_v	0.0666	0.05-0.33	dan^{-1}
ν_v	0.1	0.07-0.14	dan^{-1}
δ_v	0	–	dan^{-1}
σ_v	0.25	0.125-0.33	$ujeda \times dan^{-1}$
ψ_m	0.0014	0-0.033	dan^{-1}
μ_m	0.0014	0-0.01	dan^{-1}
ν_m	0.5	0.33-1	dan^{-1}
γ_m	0.2222	0.2-0.25	dan^{-1}
ρ_m	0	–	dan^{-1}
δ_m	0	0-0.125	dan^{-1}
σ_m	30	$0 - \infty$	$ujeda \times dan^{-1}$
ψ_b	0.0164	0-0.022	dan^{-1}
μ_b	0.0014	0-0.01	dan^{-1}
ν_b	0.5	0.33-1	dan^{-1}
γ_b	0.1	0-0.2	dan^{-1}
ρ_b	0	–	dan^{-1}
δ_b	0.26	0.125-0.33	dan^{-1}
σ_b	5	$0 - \infty$	$ujeda \times dan^{-1}$

Tabela 2.1: Opseg vrednosti parametara modela (2.1)

Širok spektar vrsta ptica može biti optimalan domaćin za VZN, pa različite preferencije koje komarci imaju prema određenim vrstama ptica mogu biti ključne u modeliranju širenja VZN. Zbog toga je u radu [11] razmatran i deterministički model širenja VZN koji sadrži dve vrste ptica (stanarice i selice/migracione ptice).

Preferirani domaćin za vrstu *Culex pipiens*, koja je važan vektor u prenošenju VZN-a, jeste američki drozd (videti [69]). Iz tog razloga, da bi procenili opseg vrednosti parametara za populaciju ptica selica, autori su izabrali američkog drozda kao vrstu ptica

selica, iako u ovu kategoriju mogu spadati i druge vrste ptica (npr. severni kardinali, domaći vrapci ([70–72])).

Model II. U modelu sa dve vrste ptica, klase i parametri koji se odnose na ptice selice označeni su indeksom m (migracione ptice), dok je za stanarice ostao indeks b kao u modelu (2.1). Parametri koji se odnose na ptice selice su: stopa rađanja ψ_m , prirodna stopa smrtnosti μ_m , stopa pri kojoj ptice selice postaju zaražene ν_m , stopa oporavka γ_m , stopa smrtnosti zbog bolesti δ_m , stopa pri kojoj oporavljene ptice gube imunitet ρ_m . Parametri σ_m i σ_b sadrže preferencu komaraca prema različitim vrstama ptica. Veće vrednosti parametara $\sigma_i, i \in \{b, m\}$ označavaju veću preferencu koju komarac ima prema toj vrsti ptica. Ovde se pretpostavlja da komarci imaju veću preferencu prema pticama selicama i da ptice selice imaju nižu stopu smrtnosti zbog bolesti u odnosu na ptice stanarice. Stopa ujeda i -te populacije ptica je data sa $\frac{\sigma_i N_i(t)}{\sigma_m N_m(t) + \sigma_b N_b(t)}$, za $i = m, b$.

Deterministički model širenja VZN sa dve vrste ptica, predstavljen u [11], ima sledeći oblik:

$$\begin{aligned}
dS_v(t) &= (\psi_v N_v(t) - \lambda_v(t) S_v(t) - \mu_v S_v(t)) dt, \\
dE_v(t) &= (\lambda_v(t) S_v(t) - \nu_v E_v(t) - \mu_v E_v(t)) dt, \\
dI_v(t) &= (\nu_v E_v(t) - \mu_v I_v(t)) dt, \\
dS_b(t) &= (\psi_b H - \lambda_b(t) S_b(t) - \mu_b S_b(t)) dt, \\
dI_b(t) &= (\lambda_b S_b(t) - \gamma_b I_b(t) - \mu_b I_b(t) - \delta_b I_b(t)) dt, \\
dR_b(t) &= (\gamma_b I_b(t) - \mu_b R_b(t)) dt. \\
dS_m(t) &= (\psi_m H - \lambda_m(t) S_m(t) - \mu_m S_m(t)) dt, \\
dI_m(t) &= (\lambda_m S_m(t) - \gamma_m I_m(t) - \mu_m I_m(t) - \delta_m I_m(t)) dt, \\
dR_m(t) &= (\gamma_m I_m(t) - \mu_m R_m(t)) dt.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

U ovom modelu, snage infekcije $\lambda_b(t)$ i $\lambda_m(t)$ su modifikovane kako bi uključile populaciju ptica selica i mogu se izračunati kao proizvod ukupnog broja ujeda po ptici $\frac{b(t)}{N_i(t)}, i \in \{b, m\}$, verovatnoće da je komarac zaražen $\frac{I_v(t)}{N_v(t)}$, u trenutku t , verovatnoće prenosa po ujedu, $\beta_{iv}, i \in \{b, m\}$, i udelom ujeda koji se dešavaju na razmatranoj vrsti ptica, $\frac{\sigma_i N_i(t)}{\sigma_m N_m(t) + \sigma_b N_b(t)}, i = b, m$. Snaga infekcije populacije komaraca, $\lambda_v(t)$, može se izračunati kao zbir snaga infekcije populacija domaćih i ptica selica. Odnosno,

$$\begin{aligned}
\lambda_v(t) &:= b_{vb}(t) \beta_{vb} \frac{I_b(t)}{N_b(t)} + b_{vm}(t) \beta_{vm} \frac{I_m(t)}{N_m(t)}, \\
\lambda_b(t) &:= b_{bv}(t) \beta_{bv} \frac{I_v(t)}{N_v(t)}, \quad \lambda_m(t) := b_{mv}(t) \beta_{mv} \frac{I_v(t)}{N_v(t)}.
\end{aligned}$$

Za $i \in \{b, m\}$, $b_{vi}(t)$ označavaju stope ujeda po ptici stanarici ili selici od strane komarca dnevno, dok $b_{iv}(t)$ označava stopu ujeda ptice stanarice ili selice po komarcu dnevno i definišu se na sledeći način:

$$\begin{aligned}
b_{vb}(t) &:= \frac{b(t)}{N_b(t)} \frac{\sigma_b N_b(t)}{\sigma_m N_m(t) + \sigma_b N_b(t)}, & b_{vm}(t) &:= \frac{b(t)}{N_m(t)} \frac{\sigma_m N_m(t)}{\sigma_m N_m(t) + \sigma_b N_b(t)}, \\
b_{bv}(t) &:= \frac{b(t)}{N_v(t)} \frac{\sigma_b N_b(t)}{\sigma_m N_m(t) + \sigma_b N_b(t)}, & b_{mv}(t) &:= \frac{b(t)}{N_v(t)} \frac{\sigma_m N_m(t)}{\sigma_m N_m(t) + \sigma_b N_b(t)},
\end{aligned}$$

Stohastički epidemiološki model širenja virusa Zapadnog Nila sa jednom vrstom ptica

gde je $b(t)$ stopa ujeda u trenutku t ,

$$b(t) := \frac{\sigma_v N_v(t)(\sigma_m N_m(t) + \sigma_b N_b(t))}{\sigma_v N_v(t) + \sigma_m N_m(t) + \sigma_b N_b(t)}.$$

Stopa ujeda u modelu sa dve vrste ptica uključuje različitu dostupnost ptica i preference komaraca.

2.2 Stohastički epidemiološki model širenja virusa Zapadnog Nila sa jednom vrstom ptica

Kako slučajne varijacije iz okruženja mogu imati značajan uticaj na sve sfere života, prirodno je istražiti kako takve varijacije utiču na dinamiku epidemioloških modela. U ovom poglavlju će, na osnovu determinističkog modela (2.1) koji opisuje širenje VZN u populacijama komaraca kao vektora i ptica stanarica, biti konstruisan stohastički.

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ kompletan prostor verovatnoće sa prirodnom filtracijom $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$, koja je neprekidna zdesna takva da $\mathcal{F}$ sadrži sve skupove mere nula. Pored toga, neka su $B_1(\cdot)$ i $B_2(\cdot)$ međusobno nezavisna standardna Brownova kretanja, definisana na datom prostoru verovatnoće i

$$\mathbb{R}_+^7 := \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) \mid x_i > 0, i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}\}.$$

Pretpostavlja se da fluktuacije iz okruženja utiču na parametre transmisije β_{vb} i β_{bv} tako da je

$$\begin{aligned} \beta_{vb} &\longmapsto \beta_{vb} + \sigma_1 \dot{B}_1(t), \\ \beta_{bv} &\longmapsto \beta_{bv} + \sigma_2 \dot{B}_2(t), \end{aligned} \quad (2.3)$$

pri čemu su $\sigma_1^2 > 0$ i $\sigma_2^2 > 0$ intenziteti belih šumova $\dot{B}_1(t) = \frac{dB_1(t)}{dt}$ i $\dot{B}_2(t) = \frac{dB_2(t)}{dt}$, $t \geq 0$, redom. Ovi diferencijali ne postoje u običnom (jakom) smislu, ali kako su preslikavanja $t \mapsto B_i(t, \omega)$, $i = 1, 2$, neprekidna za skoro svako ω , ona su slabo diferencijabilna za skoro svako ω , i mogu se interpretirati u slabom smislu (videti Poglavlje 1.2).

Zamenom (2.3) u (2.1), dobija se stohastički model oblika

$$\begin{aligned} dS_v(t) &= (\psi_v N_v(t) - \lambda_v(t) S_v(t) - \mu_v S_v(t)) dt - \sigma_1 b_{vb}(t) \frac{I_b(t)}{N_b(t)} S_v(t) dB_1(t), \\ dE_v(t) &= (\lambda_v(t) S_v(t) - \nu_v E_v(t) - \mu_v E_v(t)) dt + \sigma_1 b_{vb}(t) \frac{I_b(t)}{N_b(t)} S_v(t) dB_1(t), \\ dI_v(t) &= (\nu_v E_v(t) - \mu_v I_v(t)) dt, \\ dS_b(t) &= (\psi_b H + \rho_b R_b(t) - \lambda_b(t) S_b(t) - \mu_b S_b(t)) dt - \sigma_2 b_{bv}(t) \frac{I_v(t)}{N_v(t)} S_b(t) dB_2(t), \\ dE_b(t) &= (\lambda_b(t) S_b(t) - \nu_b E_b(t) - \mu_b E_b(t)) dt + \sigma_2 b_{bv}(t) \frac{I_v(t)}{N_v(t)} S_b(t) dB_2(t), \\ dI_b(t) &= (\nu_b E_b(t) - \gamma_b I_b(t) - \mu_b I_b(t) - \delta_b I_b(t)) dt, \\ dR_b(t) &= (\gamma_b I_b(t) - \rho_b R_b(t) - \mu_b R_b(t)) dt, \end{aligned} \quad (2.4)$$

sa početnom vrednošću

$$S_v(0) = S_v^0, E_v(0) = E_v^0, I_v(0) = I_v^0, S_b(0) = S_b^0, E_b(0) = E_b^0, I_b(0) = I_b^0, R_b(0) = R_b^0.$$

Parametri ovog modela imaju istu biološku interpretaciju kao u determinističkom modelu (2.1).

Kako $N_v(t) = S_v(t) + E_v(t) + I_v(t), t \geq 0$ označava ukupnu populaciju vektora, sumiranjem prve tri jednačine sistema (2.4), dobija se sledeća diferencijalna jednačina

$$dN_v(t) = (\psi_v - \mu_v)N_v(t)dt.$$

Njenim rešavanjem, dobija se,

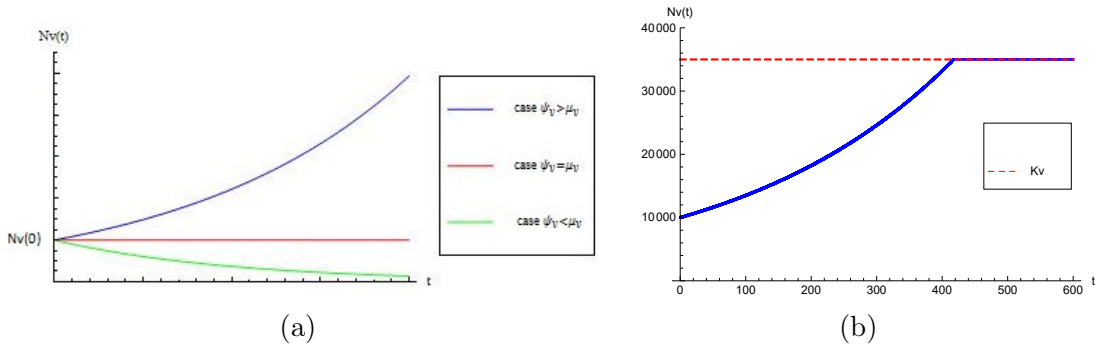
$$N_v(t) = e^{(\psi_v - \mu_v)t} N_v(0).$$

Odavde je

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} N_v(t) = \begin{cases} +\infty, & \psi_v > \mu_v, \\ N_v(0), & \psi_v = \mu_v, \\ 0, & \psi_v < \mu_v. \end{cases} \quad (2.5)$$

Ako je $\psi_v < \mu_v$, tada dolazi do izumiranja populacije vektora, dok u slučaju $\psi_v > \mu_v$ dolazi do prekomernog razmnožavanja vektora. Ovo je ilustrovano na Slici 2.1 (a).

Napomena 2.1 U biologiji je poznato da broj organizama koji mogu preživeti unutar jednog ekosistema zavisi od kapaciteta sredine. Kada broj jedinki određene populacije dostigne kapacitet sredine, ta vrsta će početi da iscrpljuje svoje resurse hrane, vode i drugih. U tom slučaju, dostupni resursi neće biti dovoljni da omoguće populaciji da nastavi da se uvećava na duži rok, tako da će populacija na kraju početi da se smanjuje. Dakle, populacija se može uvećavati samo dok ne dostigne kapacitet sredine, što je ilustrovano na Slici 2.1 (b). Više detalja o kapacitetu sredine mogu se naći u radovima [73] i [74].



Slika 2.1: Evolucija populacije vektora.

Na osnovu Napomene 2.1, pretpostavlja se da je veličina populacije vektora ograničena kapacitetom sredine K_v . Kako bi se prevazišao nedostatak modela (2.4), izvršena je njegova modifikacija tako što je u prvoj jednačini član koji opisuje rast populacije, $\psi_v N_v(t)$ zamenjen sa $\psi_v H_v$, gde je $H_v := \frac{\mu_v}{\psi_v} K_v$. Na taj način model dobija sledeći oblik:

$$\begin{aligned} dS_v(t) &= (\psi_v H_v - \lambda_v(t)S_v(t) - \mu_v S_v(t)) dt - \sigma_1 b_{vb}(t) \frac{I_b(t)}{N_b(t)} S_v(t) dB_1(t), \\ dE_v(t) &= (\lambda_v(t)S_v(t) - \nu_v E_v(t) - \mu_v E_v(t)) dt + \sigma_1 b_{vb}(t) \frac{I_b(t)}{N_b(t)} S_v(t) dB_1(t), \\ dI_v(t) &= (\nu_v E_v(t) - \mu_v I_v(t)) dt, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
dS_b(t) &= (\psi_b H + \rho_b R_b(t) - \lambda_b(t) S_b(t) - \mu_b S_b(t)) dt - \sigma_2 b_{bv}(t) \frac{I_v(t)}{N_v(t)} S_b(t) dB_2(t), \\
dE_b(t) &= (\lambda_b(t) S_b(t) - \nu_b E_b(t) - \mu_b E_b(t)) dt + \sigma_2 b_{bv}(t) \frac{I_v(t)}{N_v(t)} S_b(t) dB_2(t), \\
dI_b(t) &= (\nu_b E_b(t) - \gamma_b I_b(t) - \mu_b I_b(t) - \delta_b I_b(t)) dt, \\
dR_b(t) &= (\gamma_b I_b(t) - \rho_b R_b(t) - \mu_b R_b(t)) dt,
\end{aligned} \tag{2.6}$$

sa početnom vrednošću

$$S_v(0) = S_v^0, E_v(0) = E_v^0, I_v(0) = I_v^0, S_b(0) = S_b^0, E_b(0) = E_b^0, I_b(0) = I_b^0, R_b(0) = R_b^0.$$

Neka je

$$\Gamma = \left\{ (S_v, E_v, I_v, S_b, E_b, I_b, R_b) \in \mathbb{R}_+^7 : 0 < S_v + E_v + I_v \leq K_v = \frac{\psi_v H_v}{\mu_v}, \right. \\
\left. \frac{\psi_b H}{\mu_b + \delta_b} \leq S_b + E_b + I_b + R_b \leq K = \frac{\psi_b H}{\mu_b} \right\}. \tag{2.7}$$

2.2.1 Egzistencija i jedinstvenost globalnog pozitivnog rešenja

Teorema 2.1 *Za svako $t \geq 0$ i proizvoljnu početnu vrednost $(S_v(0), E_v(0), I_v(0), S_b(0), E_b(0), I_b(0), R_b(0)) \in \Gamma$, postoji jedinstveno rešenje $(S_v(t), E_v(t), I_v(t), S_b(t), E_b(t), I_b(t), R_b(t))$ sistema (2.6) i rešenje ostaje u Γ sa verovatnoćom jedan. Pored toga, važi*

$$0 \leq N_v(t) \leq \frac{\psi_v H_v}{\mu_v} \quad i \quad \frac{\psi_b H}{\mu_b + \delta_b} \leq N_b(t) \leq \frac{\psi_b H}{\mu_b}, \quad t \geq 0.$$

Dokaz. Kako koeficijenti sistema (2.6) zadovoljavaju lokalni Lipschitzov uslov, tada za proizvoljnu početnu vrednost $(S_v(0), E_v(0), I_v(0), S_b(0), E_b(0), I_b(0), R_b(0))$ postoji jedinstveno lokalno rešenje na $[0, \tau_e]$, gde je τ_e vreme eksplozije (Teorema 1.15). Da bi se pokazalo da je ovo rešenje globalno, potrebno je pokazati da je $\tau_e = \infty$ s.i. Neka je $k_0 > 0$ dovoljno veliko tako da su $S_v(0), E_v(0), I_v(0), S_b(0), E_b(0), I_b(0)$ i $R_b(0)$ unutar segmenta $[\frac{1}{k_0}, k_0]$. Za svako $k \geq k_0$, definiše se vreme zaustavljanja na sledeći način

$$\tau_k := \inf \left\{ t \in [0, \tau_e) : \min \{S_v(t), E_v(t), I_v(t), S_b(t), E_b(t), I_b(t), R_b(t)\} \leq \frac{1}{k} \text{ ili } \right. \\
\left. \max \{S_v(t), E_v(t), I_v(t), S_b(t), E_b(t), I_b(t), R_b(t)\} \geq k \right\}.$$

Niz τ_k je rastući po k . Neka je $\tau_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} \tau_k$. Tada, $\tau_\infty \leq \tau_e$ s.i. Ako se pokaže $\tau_\infty = \infty$ s.i, tada je $\tau_e = \infty$, odnosno, $(S_v(t), E_v(t), I_v(t), S_b(t), E_b(t), I_b(t), R_b(t)) \in \mathbb{R}_+^7$, s.i. za svako $t \geq 0$. Ako ovo ne bi bilo zadovoljeno, tada postoji $T > 0$ i $\epsilon \in (0, 1)$ tako da $\mathbb{P} \{ \tau_\infty \leq T \} > \epsilon$. Prema tome, postoji ceo broj $k_1 \geq k_0$ tako da

$$\mathbb{P} \{ \tau_k \leq T \} \geq \epsilon$$

za svako $k \geq k_1$.

Sumiranjem prve tri jednačine sistema (2.6), dobija se diferencijalna jednačina kojom je opisana dinamika ukupne populacije vektora

$$dN_v(t) = (\psi_v H_v - \mu_v N_v(t)) dt.$$

Njenim rešavanjem, dobija se

$$N_v(t) = \frac{\psi_v H_v}{\mu_v} + \left(N_v(0) - \frac{\psi_v H_v}{\mu_v} \right) e^{-\int_0^t \mu_v ds}.$$

Na osnovu uslova teoreme, kako je $0 \leq N_v(0) \leq \frac{\psi_v H_v}{\mu_v}$, sledi da je

$$0 \leq N_v(t) \leq \frac{\psi_v H_v}{\mu_v}, \quad t \geq 0.$$

Slično, sumiranjem poslednje četiri jednačine sistema (2.6), dobija se diferencijalna jednačina kojom je opisana dinamika ukupne populacije ptica

$$dN_b(t) = (\psi_b H - \delta_b I_b(t) - \mu_b N_b(t)) dt.$$

Tada je

$$\begin{aligned} (\psi_b H - (\mu_b + \delta_b) N_b(t)) dt &\leq dN_b(t) \leq (\psi_b H - \mu_b N_b(t)) dt \\ \Leftrightarrow (\mu_b + \delta_b) \left(\frac{\psi_b H}{\mu_b + \delta_b} - N_b(t) \right) dt &\leq dN_b(t) \leq \mu_b \left(\frac{\psi_b H}{\mu_b} - N_b(t) \right) dt, \end{aligned}$$

za $t \in [0, \tau_k)$. Odavde sledi

$$\begin{aligned} d \left(\frac{\psi_b H}{\mu_b + \delta_b} - N_b(t) \right) + (\mu_b + \delta_b) \left(\frac{\psi_b H}{\mu_b + \delta_b} - N_b(t) \right) dt &\leq 0, \\ d \left(\frac{\psi_b H}{\mu_b} - N_b(t) \right) + \mu_b \left(\frac{\psi_b H}{\mu_b} - N_b(t) \right) dt &\geq 0, \end{aligned}$$

za $t \in [0, \tau_k)$. Integracijom od 0 do t , $t \in [0, \tau_k)$, dobija se

$$\begin{aligned} \left(\frac{\psi_b H}{\mu_b + \delta_b} - N_b(t) \right) &\leq \left(\frac{\psi_b H}{\mu_b + \delta_b} - N_b(0) \right) e^{-\int_0^t (\mu_b + \delta_b) ds}, \\ \left(\frac{\psi_b H}{\mu_b} - N_b(t) \right) &\geq \left(\frac{\psi_b H}{\mu_b} - N_b(0) \right) e^{-\int_0^t \mu_b ds}. \end{aligned}$$

Na osnovu uslova teoreme, kako je $\frac{\psi_b H}{\mu_b + \delta_b} \leq N_b(0) \leq \frac{\psi_b H}{\mu_b}$, sledi

$$\frac{\psi_b H}{\mu_b + \delta_b} \leq N_b(t) \leq \frac{\psi_b H}{\mu_b}, \quad t \in [0, \tau_k).$$

Neka je $\mathbb{C}^2$ -funkcija $V : \mathbb{R}_+^7 \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ definisana na sledeći način

$$\begin{aligned} V(X(t)) &:= V(S_v(t), E_v(t), I_v(t), S_b(t), E_b(t), I_b(t), R_b(t)) \\ &= S_v(t) - 1 - \ln S_v(t) + (E_v(t) - \ln(E_v(t) + 1)) + (I_v(t) - 1 - \ln I_v(t)) \\ &\quad + (S_b(t) - 1 - \ln S_b(t)) + (E_b(t) - \ln(E_b(t) + 1)) + (I_b(t) - 1 - \ln I_b(t)) \\ &\quad + (R_b(t) - 1 - \ln R_b(t)). \end{aligned} \tag{2.8}$$

Kako je $u - 1 - \ln u \geq 0$ za svako $u > 0$, to je $V(X(t))$ nenegativna funkcija. Neka je $k \geq k_0$ i $T > 0$ proizvoljno. Primenom Itôve formule (Teorema 1.12), dobija se

$$\begin{aligned} dV(X(t)) &= LV(X(t))dt + \sigma_1 \left(1 - \frac{S_v(t)}{E_v(t) + 1} \right) b_{vb}(t) \frac{I_b(t)}{N_b(t)} dB_1(t) \\ &\quad + \sigma_2 \left(1 - \frac{S_b(t)}{E_b(t) + 1} \right) b_{bv}(t) \frac{I_v(t)}{N_v(t)} dB_2(t), \end{aligned}$$

gde je $LV : \mathbb{R}_+^7 \rightarrow \mathbb{R}$, definisan sa

$$\begin{aligned}
 LV(X(t)) &:= \left(1 - \frac{1}{S_v(t)}\right) (\psi_v H_v - (\lambda_v(t) + \mu_v) S_v(t)) + \frac{1}{2} \sigma_1^2 b_{vb}^2(t) \frac{I_b^2(t)}{N_b^2(t)} \\
 &+ \left(1 - \frac{1}{E_v(t)+1}\right) (\lambda_v(t) S_v(t) - (\nu_v + \mu_v) E_v(t)) \\
 &+ \frac{1}{2} \frac{1}{(E_v(t)+1)^2} \sigma_1^2 b_{vb}^2(t) \frac{I_b^2(t)}{N_b^2(t)} S_v^2(t) + \left(1 - \frac{1}{I_v(t)}\right) (\nu_v E_v(t) - \mu_v I_v(t)) \\
 &+ \left(1 - \frac{1}{S_b(t)}\right) (\psi_b H + \rho_b R_b(t) - (\lambda_b(t) + \mu_b) S_b(t)) \\
 &+ \frac{1}{2} \sigma_2^2 b_{bv}^2(t) \frac{I_v^2(t)}{N_v^2(t)} + \left(1 - \frac{1}{E_b(t)+1}\right) (\lambda_b(t) S_b(t) - (\nu_b + \mu_b) E_b(t)) \\
 &+ \frac{1}{2} \frac{1}{(E_b(t)+1)^2} \sigma_2^2 b_{bv}^2(t) \frac{I_v^2(t)}{N_v^2(t)} S_b^2(t) + \left(1 - \frac{1}{I_b(t)}\right) (\nu_b E_b(t) - (\gamma_b + \mu_b + \delta_b) I_b(t)) \\
 &+ \left(1 - \frac{1}{R_b(t)}\right) (\gamma_b I_b(t) - (\rho_b + \mu_b) R_b(t)) \\
 &\leq \psi_v H_v + \sigma_v K_v \beta_{vb} + 3\mu_v + \frac{\sigma_1^2}{2} K_v^2 (1 + K_v^2) + \nu_v + \psi_b H + \sigma_v \beta_{bv} + 4\mu_b \\
 &+ \frac{\sigma_2^2}{2} \sigma_v^2 (1 + K^2) + \nu_b + \gamma_b + \delta_b + \rho_b =: C.
 \end{aligned}$$

Na osnovu poslednje dve relacije, dobija se

$$\begin{aligned}
 dV(X(t)) &\leq Cdt + \sigma_1 \left(1 - \frac{S_v(t)}{E_v(t)+1}\right) b_{vb}(t) \frac{I_b(t)}{N_b(t)} dB_1(t) \\
 &+ \sigma_2 \left(1 - \frac{S_b(t)}{E_b(t)+1}\right) b_{bv}(t) \frac{I_v(t)}{N_v(t)} dB_2(t).
 \end{aligned}$$

Integracijom poslednje nejednakosti od 0 do $\tau_k \wedge T = \min\{\tau_k, T\}$ i računanjem očekivanja, sledi

$$\mathbb{E}V(X(\tau_k \wedge T)) \leq C\mathbb{E}(\tau_k \wedge T) + V(X(0)) \leq CT + V(X(0)).$$

Neka je $\Omega_k = \{k \leq T\}$. Tada je $\mathbb{P}(\Omega_k) \geq \epsilon$. Za svako $\omega \in \Omega_k$, bar jedan od $S_v(\tau_k, \omega)$, $E_v(\tau_k, \omega)$, $I_v(\tau_k, \omega)$, $S_b(\tau_k, \omega)$, $E_b(\tau_k, \omega)$, $I_b(\tau_k, \omega)$ i $R_b(\tau_k, \omega)$ je jednak ili k ili $\frac{1}{k}$. Dakle, $V(S_v(\tau_k, \omega), E_v(\tau_k, \omega), I_v(\tau_k, \omega), S_b(\tau_k, \omega), E_b(\tau_k, \omega), I_b(\tau_k, \omega), R_b(\tau_k, \omega))$ nije manje ili od $k - 1 - \ln k$ ili od $\frac{1}{k} - 1 - \ln \frac{1}{k}$. Prema tome, važi

$$V(X(\tau_k \wedge T)) \geq \min \left\{ k - 1 - \ln k, \frac{1}{k} - 1 - \ln \frac{1}{k} \right\}.$$

Tada je

$$CT + V(X(0)) \geq \mathbb{E}[I_{\Omega_k} V(X(\tau_k \wedge T))] \geq \epsilon \min \left\{ k - 1 - \ln k, \frac{1}{k} - 1 - \ln \frac{1}{k} \right\},$$

gde je I_{Ω_k} indikator događaja Ω_k . Kada $k \rightarrow \infty$, dobija se

$$\infty > V(X(0)) + CT = \infty,$$

što je u suprotnosti sa pretpostavkom. Dakle, $\tau_\infty = \infty$ s.i, čime je dokaz kompletan. $\triangle$

Napomena 2.2 Skup Γ je pozitivno invarijantni skup sistema (2.6) za svako $t \geq 0$, odnosno, ako početna vrednost sistema pripada Γ , on nikad ne napušta Γ .

2.2.2 Iskorenjenje bolesti

U ovom poglavlju biće izvedeni dovoljni uslovi za iskorenjenje bolesti u modelu (2.6).

Teorema 2.2 *Neka je $(S_v(t), E_v(t), I_v(t), S_b(t), E_b(t), I_b(t), R_b(t)) \in \Gamma$ rešenje sistema (2.6) sa proizvoljnom početnom vrednošću $(S_v(0), E_v(0), I_v(0), S_b(0), E_b(0), I_b(0), R_b(0)) \in \Gamma$. Ako važi*

$$\sigma_1^2 > \frac{\beta_{vb}^2}{2(\nu_v + \mu_v)} \quad i \quad \sigma_2^2 > \frac{\beta_{bv}^2}{2(\nu_b + \mu_b)},$$

tada je

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} E_v(t) &= 0, & \lim_{t \rightarrow \infty} I_v(t) &= 0, & \lim_{t \rightarrow \infty} E_b(t) &= 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} I_b(t) &= 0, & \lim_{t \rightarrow \infty} R_b(t) &= 0 \quad s.i., \end{aligned}$$

odnosno, bolest će biti iskorenjena iz populacije.

Dokaz. Na osnovu Teoreme 2.1, rešenje sistema (2.6) je pozitivno za svako $t \geq 0$. Primenom Itôve formule (Teorema 1.12) na funkciju $\log E_v(t)$, dobija se

$$\begin{aligned} d \log E_v(t) &= \left[\frac{1}{E_v(t)} (\lambda_v(t) S_v(t) - (\nu_v + \mu_v) E_v(t)) - \frac{1}{2} \left(\sigma_1 b_{vb}(t) \frac{S_v(t) I_b(t)}{E_v(t) N_b(t)} \right)^2 \right] dt \\ &\quad + \sigma_1 b_{vb}(t) \frac{I_b(t)}{N_b(t)} S_v(t) \frac{1}{E_v(t)} dB_1(t). \end{aligned}$$

Integracijom obe strane poslednje jednakosti od 0 do t je

$$\begin{aligned} \log E_v(t) &= \log E_v(0) + \int_0^t \left[\lambda_v(s) \frac{S_v(s)}{E_v(s)} - (\nu_v + \mu_v) - \frac{1}{2} \left(\sigma_1 b_{vb}(s) \frac{S_v(s) I_b(s)}{E_v(s) N_b(s)} \right)^2 \right] ds \\ &\quad + M_1(t), \end{aligned} \tag{2.9}$$

pri čemu je $M_1(t) = \int_0^t \left(\sigma_1 b_{vb}(s) \frac{S_v(s) I_b(s)}{E_v(s) N_b(s)} \right) dB_1(s)$. Na osnovu osobina Brownovog kretanja (Teorema 1.10) $M_1(\cdot)$ je neprekidan martingal. Primenom eksponencijalne martingalne nejednakosti (Teorema 1.51), dobija se

$$\mathbb{P} \left\{ \sup_{0 \leq t \leq n} \left[M_1(t) - \frac{\alpha}{2} \int_0^t \left(\sigma_1 b_{vb}(s) \frac{S_v(s) I_b(s)}{E_v(s) N_b(s)} \right)^2 ds \right] > \beta \right\} \leq e^{-\alpha\beta},$$

gde je $n > 1$ proizvoljan nenegativan ceo broj i α i β su proizvoljne pozitivne konstante koje će biti određene u nastavku. Neka je $\epsilon \in (0, 1)$ proizvoljno. Ako su $\alpha = \epsilon$ i $\beta = \frac{2 \ln n}{\epsilon}$, tada je

$$\mathbb{P} \left\{ \sup_{0 \leq t \leq n} \left[M_1(t) - \frac{\epsilon}{2} \int_0^t \left(\sigma_1 b_{vb}(s) \frac{S_v(s) I_b(s)}{E_v(s) N_b(s)} \right)^2 ds \right] > \frac{2 \ln n}{\epsilon} \right\} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Kako red $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergira, na osnovu Borel-Cantellijeve leme, sledi da postoji $\Omega_0 \subset \Omega$ za koji je $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$, tako da za svako $\omega \in \Omega_0$ postoji ceo broj $n_0(\omega)$, tako da za $n \geq n_0(\omega)$ i $t \in [n-1, n]$, važi

$$\sup_{0 \leq t \leq n} \left[M_1(t) - \frac{\epsilon}{2} \int_0^t \left(\sigma_1 b_{vb}(s) \frac{S_v(s) I_b(s)}{E_v(s) N_b(s)} \right)^2 ds \right] \leq \frac{2 \ln n}{\epsilon}.$$

Tada je

$$M_1(t) \leq \frac{\epsilon}{2} \int_0^t \left(\sigma_1 b_{vb}(s) \frac{S_v(s) I_b(s)}{E_v(s) N_b(s)} \right)^2 ds + \frac{2 \ln n}{\epsilon}. \quad (2.10)$$

Zamenom (2.10) u (2.9), dobija se

$$\begin{aligned} \log E_v(t) &\leq \log E_v(0) + \frac{2 \ln n}{\epsilon} \\ &\quad + \int_0^t \left[\lambda_v(s) \frac{S_v(s)}{E_v(s)} - (\nu_v + \mu_v) - \frac{1-\epsilon}{2} \left(\sigma_1 b_{vb}(s) \frac{S_v(s) I_b(s)}{E_v(s) N_b(s)} \right)^2 \right] ds \\ &\leq \log E_v(0) - (\nu_v + \mu_v)t + \frac{2 \ln n}{\epsilon} \\ &\quad + \int_0^t \left[-\frac{\sigma_1^2(1-\epsilon)}{2} \left(\frac{\lambda_v(s)}{\beta_{vb}} \frac{S_v(s)}{E_v(s)} - \frac{\beta_{vb}}{(1-\epsilon)\sigma_1^2} \right)^2 + \frac{\beta_{vb}^2}{2(1-\epsilon)\sigma_1^2} \right] ds \\ &\leq \log E_v(0) - (\nu_v + \mu_v)t + \frac{\beta_{vb}^2}{2(1-\epsilon)\sigma_1^2}t + \frac{2 \ln n}{\epsilon}. \end{aligned}$$

Deljenjem obe strane poslednje nejednakosti sa t , sledi

$$\frac{\log E_v(t)}{t} \leq \frac{\log E_v(0)}{t} - (\nu_v + \mu_v) + \frac{\beta_{vb}^2}{2(1-\epsilon)\sigma_1^2} + \frac{2 \ln n}{t\epsilon}.$$

Računanjem $\limsup$ kada $t \rightarrow \infty$ u poslednjoj nejednakosti, dobija se

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{\log E_v(t)}{t} \leq \frac{\beta_{vb}^2}{2(1-\epsilon)\sigma_1^2} - (\nu_v + \mu_v), \quad (2.11)$$

za svako $\epsilon \in (0, 1)$. Neka je niz $\{\epsilon_k\}_k$ takav da je $\epsilon_k \in (0, 1)$, za svako $k \in \mathbb{N}$, i $\lim_{k \rightarrow \infty} \epsilon_k = 0$. Tada je

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{\log E_v(t)}{t} \leq \frac{\beta_{vb}^2}{2(1-\epsilon_k)\sigma_1^2} - (\nu_v + \mu_v), \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Računanjem $\limsup$ kada $k \rightarrow \infty$ u poslednjoj nejednakosti, dobija se

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{\log E_v(t)}{t} \leq \frac{\beta_{vb}^2}{2\sigma_1^2} - (\nu_v + \mu_v) < 0,$$

na osnovu uslova teoreme $\sigma_1^2 > \frac{\beta_{vb}^2}{2(\nu_v + \mu_v)}$. Odavde sledi da je,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} E_v(t) = 0 \quad s.i.$$

EksPLICITNIM rešavanjem treće diferencijalne jednačine sistema (2.6), dobija se

$$I_v(t) = e^{-\mu_v t} \left[I_v(0) + \int_0^t (\nu_v E_v(s) e^{\mu_v s}) ds \right].$$

Računanjem granične vrednosti kada $k \rightarrow \infty$ u poslednjoj nejednakosti i primenom L'Hospitalovog pravila, sledi da je

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} I_v(t) = 0 \quad s.i.$$

Slično, primenom Itôve formule (Teorema 1.12) na $\log E_b(t)$, dobija se

$$d \log E_b(t) = \left[\frac{1}{E_b(t)} (\lambda_b(t) S_b(t) - (\nu_b + \mu_b) E_b(t)) - \frac{1}{2} \left(\sigma_2 b_{bv}(t) \frac{S_b(t) I_v(t)}{E_b(t) N_v(t)} \right)^2 \right] dt \\ + \sigma_2 b_{bv}(s) \frac{S_b(s) I_v(s)}{E_b(s) N_v(s)} dB_2(t).$$

Integracijom obe strane poslednje nejednakosti od 0 do t , dobija se

$$\log E_b(t) = \log E_b(0) - (\nu_b + \mu_b)t + \int_0^t \left[\lambda_b(s) \frac{S_b(s)}{E_b(s)} - \frac{1}{2} \left(\sigma_2 b_{bv}(s) \frac{S_b(s) I_v(s)}{E_b(s) N_v(s)} \right)^2 \right] ds \\ + M_2(t),$$

gde je $M_2(t) = \int_0^t \left(\sigma_2 b_{bv}(s) \frac{S_b(s) I_v(s)}{E_b(s) N_v(s)} \right) dB_2(s)$. Na osnovu osobina Brownovog kretanja (Teorema 1.10) $M_1(\cdot)$ je neprekidan martingal. Primenom eksponencijalne martingalne nejednakosti (Teorema 1.51), pri čemu je kao i u prvom delu dokaza $n > 1$ proizvoljan nenegativan ceo broj, $\epsilon \in (0, 1)$ proizvoljno, $\alpha = \epsilon$ i $\beta = \frac{2 \ln n}{\epsilon}$, dobija se

$$M_2(t) \leq \frac{\epsilon}{2} \int_0^t \left(\sigma_2 b_{bv}(s) \frac{S_b(s) I_v(s)}{E_b(s) N_v(s)} \right)^2 ds + \frac{2 \ln n}{\epsilon}.$$

Na osnovu poslednje dve relacije, sledi

$$\log E_b(t) \leq \log E_b(0) - (\nu_b + \mu_b)t + \frac{2 \ln n}{\epsilon} \\ + \int_0^t \left[-\frac{\sigma_2^2(1-\epsilon)}{2} \left(\frac{\lambda_b(s) S_b(s)}{\beta_{bv} E_b(s)} - \frac{\beta_{bv}}{(1-\epsilon)\sigma_2^2} \right)^2 + \frac{\beta_{bv}^2}{2(1-\epsilon)\sigma_2^2} \right] ds \\ \leq \log E_b(0) - (\nu_b + \mu_b)t + \frac{\beta_{bv}^2}{2(1-\epsilon)\sigma_2^2}t + \frac{2 \ln n}{\epsilon}.$$

Deljenjem obe strane poslednje nejednakosti sa t i i računanjem $\limsup$ kada $t \rightarrow \infty$, dobija se

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{\log E_b(t)}{t} \leq \frac{\beta_{bv}^2}{2(1-\epsilon)\sigma_2^2} - (\nu_b + \mu_b),$$

za proizvoljno $\epsilon \in (0, 1)$. Odavde sledi

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{\log E_b(t)}{t} \leq \frac{\beta_{bv}^2}{2(1-\epsilon_k)\sigma_2^2} - (\nu_b + \mu_b), \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Računanjem granične vrednosti kada $k \rightarrow \infty$ u poslednjoj nejednakosti, dobija se

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{\log E_b(t)}{t} \leq \frac{\beta_{bv}^2}{2\sigma_2^2} - (\nu_b + \mu_b) < 0,$$

na osnovu uslova teoreme $\sigma_2^2 > \frac{\beta_{bv}^2}{2(\nu_b + \mu_b)}$. Tada je

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} E_b(t) = 0 \text{ s.i.}$$

Eksplisnim rešavanjem šeste i sedme diferencijalne jednačine sistema (2.6), dobija se

$$I_b(t) = e^{-(\gamma_b + \mu_b + \delta_b)t} \left[I_b(0) + \int_0^t (\nu_b E_b(s) e^{(\gamma_b + \mu_b + \delta_b)s}) ds \right],$$

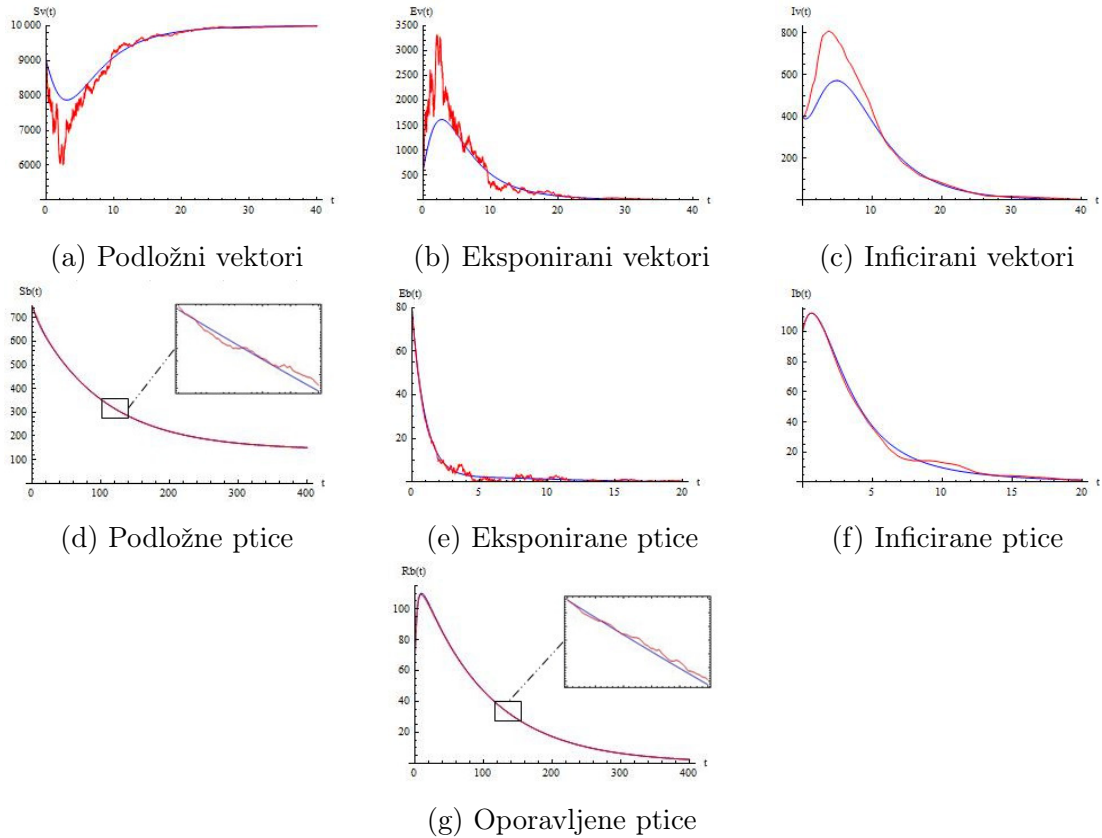
$$R_b(t) = e^{-(\rho_b + \mu_b)t} \left[R_b(0) + \int_0^t (\gamma_b I_b(s) e^{(\rho_b + \mu_b)s}) ds \right].$$

Računanjem graničnih vrednosti kada $t \rightarrow \infty$ u poslednjim jednakostima i primenom L'Hospitalovog pravila, sledi da je

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} I_b(t) = 0 \text{ s.i.}, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} R_b(t) = 0 \text{ s.i.}$$

Time je dokaz kompletan. $\triangle$

Rezultat Teoreme 2.2 je ilustrovan na Slici 2.2. Za aproksimaciju rešenja sistema (2.6), primenjena je *Balance Implicit* numerička metoda ([75], Teorema 1) koja očuvava pozitivnost rešenja, s obzirom da koeficijenti sistema (2.6) zadovoljavaju uslove za njenu primenu. Ova metoda se koristi za aproksimaciju rešenja diferencijalnih jednačina kod epidemioloških modela ili drugih sistema gde je važno očuvati fizički smislen opseg rešenja, poput pozitivnosti veličine populacija ili koncentracija. Ova metoda će biti korišćena za aproksimaciju rešenja i u nastavku ove glave.



Slika 2.2: Determinističke (plave) i stohastičke (crvene) trajektorije sistema (2.6) sa parametrima modela iz Tabele 2.1 i $\sigma_1^2 = 0.45, \sigma_2^2 = 0.2$

U simulacijama na Slici 2.2 su korišćene vrednosti parametara iz Tabele 2.1 i početni uslovi $S_v(0) = 9000, E_v(0) = 600, I_v(0) = 400, S_b(0) = 750, E_b(0) = 80, I_b(0) =$

100, $R_b(0) = 70$. Radi jednostavnosti, pretpostavlja se da je $\psi_v = \mu_v$, što implicira da je populacija vektora konstantna. Za ovakav izbor vrednosti parametara modela, neka su $\sigma_1^2 = 0.45$ i $\sigma_2^2 = 0.2$. Takav izbor parametara zadovoljava uslove Teoreme 2.2, što znači da dolazi do iskorenjivanja bolesti. Grafici na Slici 2.2 potvrđuju teorijski rezultat odsustva bolesti.

2.2.3 Perzistentnost u srednjem

U nastavku se razmatraju dovoljni uslovi pod kojima je virus perzistentan u srednjem u populaciji.

Neka je $\langle X(t) \rangle := \frac{1}{t} \int_0^t X(s) ds$.

Definicija 2.1 Sistem (2.6) sa proizvoljnom početnom vrednošću $(S_v(0), E_v(0), I_v(0), S_b(0), E_b(0), I_b(0), R_b(0)) \in \Gamma$, je strogo perzistentan u srednjem ako važi bar jedan od sledećih uslova

$$\begin{aligned} \liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t E_v(s) ds > 0 \text{ s.i. ili } \liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t I_v(s) ds > 0 \text{ s.i. ili,} \\ \liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t E_b(s) ds > 0 \text{ s.i. ili } \liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t I_b(s) ds > 0 \text{ s.i.} \end{aligned}$$

Teorema 2.3 Za proizvoljnu početnu vrednost $(S_v(0), E_v(0), I_v(0), S_b(0), E_b(0), I_b(0), R_b(0)) \in \Gamma$, ako važi

$$\begin{aligned} \varpi := & 2\sqrt{\frac{\sigma_v \sigma_b \frac{\psi_b H}{\mu_b + \delta_b} \beta_{bv}}{\sigma_v K_v + \sigma_b \frac{\psi_b H}{\mu_b + \delta_b}} \frac{\psi_b H}{K+1}} - \psi_b H \left(1 - \frac{\mu_b}{\mu_b + \delta_b}\right) - \sigma_v \beta_{bv} - \mu_b \\ & - \frac{\sigma_v^2 \sigma_b^2}{2} (1 + K^2) - \frac{\sigma_v \sigma_b \frac{\psi_b H}{\mu_b + \delta_b} \beta_{bv}}{\sigma_v K_v + \sigma_b \frac{\psi_b H}{\mu_b + \delta_b}} \frac{K}{K+1} > 0, \end{aligned} \quad (2.12)$$

tada je bolest strogo perzistentna u srednjem u populaciji ptica, odnosno, važi

$$\begin{aligned} \liminf_{t \rightarrow +\infty} \langle E_b(t) \rangle & \geq \frac{1}{\nu_b + \mu_b} \varpi > 0, \\ \liminf_{t \rightarrow +\infty} \langle I_b(t) \rangle & \geq \frac{\nu_b}{\gamma_b + \mu_b + \delta_b} \frac{1}{\nu_b + \mu_b} \varpi > 0, \\ \liminf_{t \rightarrow +\infty} \langle R_b(t) \rangle & \geq \frac{\gamma_b}{\rho_b + \mu_b} \frac{\nu_b}{\gamma_b + \mu_b + \delta_b} \frac{1}{\nu_b + \mu_b} \varpi > 0. \end{aligned}$$

Dokaz. Primenom Itôve formule (Teorema 1.12) na funkciju $S_b(t) + E_b(t) + I_b(t) + R_b(t) - \log S_b(t) - \log(E_b(t) + 1)$, dobija se

$$\begin{aligned} & d(S_b(t) + E_b(t) + I_b(t) + R_b(t) - \log S_b(t) - \log(E_b(t) + 1)) \\ & = \psi_b H - \mu_b N_b(t) - \delta_b I_b(t) - \frac{\psi_b H}{S_b(t)} - \frac{\rho_b R_b(t)}{S_b(t)} + (\lambda_b(t) + \mu_b) + \frac{\sigma_2^2 b_{bv}^2(t) I_v^2(t)}{2N_v^2(t)} \\ & \quad - \frac{\lambda_b(t) S_b(t)}{E_b(t) + 1} + \frac{(\nu_b + \mu_b) E_b(t)}{E_b(t) + 1} + \frac{\sigma_2^2 b_{bv}^2(t) I_v^2(t) S_b^2(t)}{2N_v^2(t) (E_b(t) + 1)^2} \\ & \quad + \left(\frac{\sigma_2 b_{bv}(t) I_v(t)}{N_v(t)} + \frac{\sigma_2 b_{bv}(t) I_v(t) S_b(t)}{N_v(t) (E_b(t) + 1)} \right) dB_2(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \psi_b H \left(1 - \frac{\mu_b}{\mu_b + \delta_b} \right) - \delta_b I_b(t) - \frac{\psi_b H}{S_b(t)} + \sigma_v \beta_{bv} + \mu_b + \frac{\sigma_v^2 \sigma_b^2}{2} (1 + K^2) \\
 &\quad - \frac{\sigma_v \sigma_b \frac{\psi_b H}{\mu_b + \delta_b} \beta_{bv}}{\sigma_v K_v + \sigma_b \frac{\psi_b H}{\mu_b + \delta_b}} \frac{S_b(t)}{K+1} + \frac{\sigma_v \sigma_b \frac{\psi_b H}{\mu_b + \delta_b} \beta_{bv}}{\sigma_v K_v + \sigma_b \frac{\psi_b H}{\mu_b + \delta_b}} \frac{K}{K+1} + (\nu_b + \mu_b) E_b(t) \\
 &\quad + \left(\frac{\sigma_2 b_{bv}(t) I_v(t)}{N_v(t)} + \frac{\sigma_2 b_{bv}(t) I_v(t) S_b(t)}{N_v(t) (E_b(t) + 1)} \right) dB_2(t) \\
 &\leq \psi_b H \left(1 - \frac{\mu_b}{\mu_b + \delta_b} \right) + \sigma_v \beta_{bv} + \mu_b + \frac{\sigma_v^2 \sigma_b^2}{2} (1 + K^2) \\
 &\quad - 2 \sqrt{\frac{\sigma_v \sigma_b \frac{\psi_b H}{\mu_b + \delta_b} \beta_{bv}}{\sigma_v K_v + \sigma_b \frac{\psi_b H}{\mu_b + \delta_b}} \frac{\psi_b H}{K+1} + \frac{\sigma_v \sigma_b \frac{\psi_b H}{\mu_b + \delta_b} \beta_{bv}}{\sigma_v K_v + \sigma_b \frac{\psi_b H}{\mu_b + \delta_b}} \frac{K}{K+1}} + (\nu_b + \mu_b) E_b(t) \\
 &\quad + \left(\frac{\sigma_2 b_{bv}(t) I_v(t)}{N_v(t)} + \frac{\sigma_2 b_{bv}(t) I_v(t) S_b(t)}{N_v(t) (E_b(t) + 1)} \right) dB_2(t),
 \end{aligned}$$

pri čemu su izostavljeni neki nepozitivni članovi, primenjene ocene $S_b(t) \leq N_b(t) \leq K$, $\frac{I_v(t)}{N_v(t)} \leq 1$, $b_{bv}(t) \leq \sigma_v$, $\lambda_b(t) \leq \sigma_v \beta_{bv}$, $\frac{1}{E_b(t)+1} \leq 1$, i nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine. Integracijom prethodne nejednakosti od 0 do t i deljenjem sa t , dobija se

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{t} (N_b(t) - N_b(0) - \log S_b(t) - \log(E_b(t) + 1) + \log S_b(0) + \log(E_b(0) + 1)) \\
 &\leq \psi_b H \left(1 - \frac{\mu_b}{\mu_b + \delta_b} \right) + \sigma_v \beta_{bv} + \mu_b + \frac{\sigma_v^2 \sigma_b^2}{2} (1 + K^2) - 2 \sqrt{\frac{\sigma_v \sigma_b \frac{\psi_b H}{\mu_b + \delta_b} \beta_{bv}}{\sigma_v K_v + \sigma_b \frac{\psi_b H}{\mu_b + \delta_b}} \frac{\psi_b H}{K+1}} \\
 &\quad + \frac{\sigma_v \sigma_b \frac{\psi_b H}{\mu_b + \delta_b} \beta_{bv}}{\sigma_v K_v + \sigma_b \frac{\psi_b H}{\mu_b + \delta_b}} \frac{K}{K+1} + (\nu_b + \mu_b) \langle E_b(t) \rangle + \frac{M_3(t)}{t},
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

gde je $M_3(t) = \int_0^t \left(\frac{\sigma_2 b_{bv}(t) I_v(t)}{N_v(t)} + \frac{\sigma_2 b_{bv}(t) I_v(t) S_b(t)}{N_v(t) (E_b(t) + 1)} \right) dB_2(t)$. Na osnovu osobina Brownovog kretanja (Teorema 1.10), proces $M_3(t)$ je neprekidan martingal, $M_3(0) = 0$, i

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{\langle M_3, M_3 \rangle_t}{t} \leq \sigma_v^2 \sigma_b^2 (1 + K^2) < +\infty \text{ s.i.}$$

Primenom strogog zakona velikih brojeva za neprekidne martingale (Teorema 1.7), sledi da je

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{M_3(t)}{t} = 0, \text{ s.i.}$$

Kako je $S_b(t) + E_b(t) + I_b(t) + R_b(t) - \log S_b(t) - \log(E_b(t) + 1) \geq -\log K > -\infty$, $t \geq 0$, tada je

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{N_b(t) - N_b(0) - \log S_b(t) - \log(E_b(t) + 1) + \log S_b(0) + \log(E_b(0) + 1)}{t} = 0 \text{ s.i.}$$

Izračunavanjem granične vrednosti kada $t \rightarrow +\infty$ u (2.13), dobija se

$$\begin{aligned}
 \liminf_{t \rightarrow +\infty} (\nu_b + \mu_b) \langle E_b(t) \rangle &\geq 2 \sqrt{\frac{\sigma_v \sigma_b \frac{\psi_b H}{\mu_b + \delta_b} \beta_{bv}}{\sigma_v K_v + \sigma_b \frac{\psi_b H}{\mu_b + \delta_b}} \frac{\psi_b H}{K+1}} - \psi_b H \left(1 - \frac{\mu_b}{\mu_b + \delta_b} \right) \\
 &\quad - \sigma_v \beta_{bv} - \mu_b - \frac{\sigma_v^2 \sigma_b^2}{2} (1 + K^2) - \frac{\sigma_v \sigma_b \frac{\psi_b H}{\mu_b + \delta_b} \beta_{bv}}{\sigma_v K_v + \sigma_b \frac{\psi_b H}{\mu_b + \delta_b}} \frac{K}{K+1}.
 \end{aligned}$$

Odavde, na osnovu uslova [2.12](#), važi da je

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} \langle E_b(t) \rangle \geq \frac{1}{\nu_b + \mu_b} \varpi > 0. \quad (2.14)$$

Integracijom šeste jednačine sistema [\(2.6\)](#), i deljenjem sa t , dobija se

$$\frac{I_b(t) - I_b(0)}{t} = \frac{1}{t} \int_0^t \nu_b E_b(s) ds - \frac{1}{t} \int_0^t (\gamma_b + \mu_b + \delta_b) I_b(s) ds.$$

Kako važi relacija [\(2.14\)](#), izračunavanjem granične vrednosti kada $t \rightarrow +\infty$ u prethodnoj nejednakosti, sledi

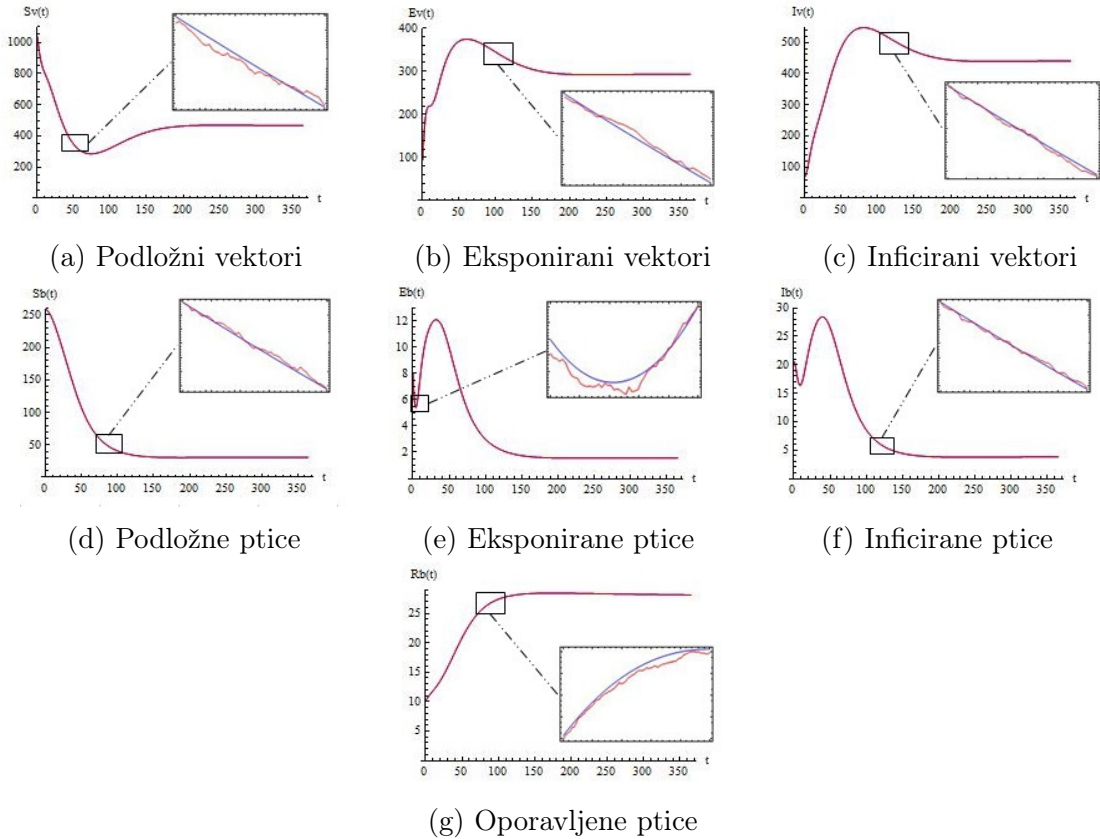
$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} \langle I_b(t) \rangle = \liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{\nu_b}{\gamma_b + \mu_b + \delta_b} \langle E_b(t) \rangle \geq \frac{\nu_b}{\gamma_b + \mu_b + \delta_b} \frac{1}{\nu_b + \mu_b} \varpi > 0. \quad (2.15)$$

Slično, kako važi relacija [\(2.15\)](#), integracijom sedme jednačine sistema [\(2.6\)](#), deljenjem sa t i izračunavanjem granične vrednosti kada $t \rightarrow +\infty$, sledi

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} \langle R_b(t) \rangle = \liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{\gamma_b}{\rho_b + \mu_b} \langle I_b(t) \rangle \geq \frac{\gamma_b}{\rho_b + \mu_b} \frac{\nu_b}{\gamma_b + \mu_b + \delta_b} \frac{1}{\nu_b + \mu_b} \varpi > 0.$$

Ovim je dokaz kompletan. $\triangle$

Teorijski rezultat Teoreme [2.3](#) je ilustrovan na Slici [2.3](#).



Slika 2.3: Determinističke (plave) i stohastičke (crvene) trajektorije modela sa parametrima datim u Tabeli [2.1](#) i $\sigma_1 = 0.00001, \sigma_2 = 0.000003$ (jedinica vremena Δt je 1 dan).

U simulacijama na Slici 2.3 su korišćene vrednosti parametara modela iz Tabele 2.1 i početni uslovi $S_v(0) = 1080$, $E_v(0) = 50$, $I_v(0) = 70$, $S_b(0) = 260$, $E_b(0) = 10$, $I_b(0) = 20$, $R_b(0) = 10$. Radi jednostavnosti, pretpostavlja se da je $\psi_v = \mu_v$, što implicira da je populacija vektora konstantna. Za ovakav izbor parametara modela, neka su vrednosti $\sigma_1 = 0.00001$ i $\sigma_2 = 0.000003$. Takav izbor parametara zadovoljava uslove Teoreme 2.3, što znači da je bolest perzistentna. Grafici na Slici 2.3 potvrđuju teorijski rezultat perzistentnosti bolesti.

Napomena 2.3 Na osnovu razmatranja u Teoremama 2.2 i 2.3, može se zaključiti da manji intenziteti Gaussovog belog šuma garantuju perzistentnost bolesti, dok veći intenziteti belog šuma omogućuju njeno iskorenjivanje, što pokazuje značaj fluktuacija iz okruženja na dinamičko ponašanje bolesti.

2.3 Stohastički epidemiološki model širenja VZN sa dve vrste ptica

U nastavku će biti predstavljen stohastički model za širenje VZN koji se sastoji iz populacije komaraca kao vektora, i dve vrste ptica. Model je konstruisan uvođenjem slučajnosti u deterministički epidemiološki model (2.2).

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ kompletan prostor verovatnoće sa prirodnom filtracijom $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$, koja je neprekidna zdesna takva da $\mathcal{F}$ sadrži sve skupove mere nula i neka su $B_1(\cdot)$, $B_2(\cdot)$, $B_3(\cdot)$ i $B_4(\cdot)$ međusobno nezavisna standardna Brownova kretanja, definisana na prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathbb{P})$. Takođe,

$$\mathbb{R}_+^9 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9) \mid x_i > 0, i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}\}.$$

Uvodi se pretpostavka da slučajnost iz okruženja prevashodno utiče na stope transmisije β_{vb} , β_{vm} , β_{bv} i β_{mv} , odnosno, da važi

$$\begin{aligned} \beta_{vb} &\mapsto \beta_{vb} + \sigma_1 \dot{B}_1(t), & \beta_{vm} &\mapsto \beta_{vm} + \sigma_2 \dot{B}_2(t), \\ \beta_{bv} &\mapsto \beta_{bv} + \sigma_3 \dot{B}_3(t) & \text{ i } & \beta_{mv} \mapsto \beta_{mv} + \sigma_4 \dot{B}_4(t), \end{aligned} \quad (2.16)$$

pri čemu su $\sigma_1^2 > 0$, $\sigma_2^2 > 0$, $\sigma_3^2 > 0$ i $\sigma_4^2 > 0$ intenziteti belih šumova $\dot{B}_1(\cdot)$, $\dot{B}_2(\cdot)$, $\dot{B}_3(\cdot)$ i $\dot{B}_4(\cdot)$, redom. Zamenom (2.16) u model (2.2), dobija se sledeći sistem stohastičkih diferencijalnih jednačina

$$\begin{aligned} dS_v(t) &= (\psi_v N_v(t) - (\lambda_v(t) + \mu_v) S_v(t)) dt - \sigma_1 b_{vb}(t) \frac{I_b(t)}{N_b(t)} S_v(t) dB_1(t) \\ &\quad - \sigma_2 b_{vm}(t) \frac{I_m(t)}{N_m(t)} S_v(t) dB_2(t), \\ dE_v(t) &= (\lambda_v(t) S_v(t) - (\nu_v + \mu_v) E_v(t)) dt + \sigma_1 b_{vb}(t) \frac{I_b(t)}{N_b(t)} S_v(t) dB_1(t) \\ &\quad + \sigma_2 b_{vm}(t) \frac{I_m(t)}{N_m(t)} S_v(t) dB_2(t), \\ dI_v(t) &= (\nu_v E_v(t) - \mu_v I_v(t)) dt, \\ dS_b(t) &= (\psi_b H - \lambda_b(t) S_b(t) - \mu_b S_b(t)) dt - \sigma_3 b_{bv}(t) \frac{I_v(t)}{N_v(t)} S_b(t) dB_3(t), \\ dI_b(t) &= (\lambda_b(t) S_b(t) - (\gamma_b + \mu_b + \delta_b) I_b(t)) dt + \sigma_3 b_{bv}(t) \frac{I_v(t)}{N_v(t)} S_b(t) dB_3(t), \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned}
 dR_b(t) &= (\gamma_b I_b(t) - \mu_b R_b(t)) dt, \\
 dS_m(t) &= (\psi_m H - \lambda_m(t) S_m(t) - \mu_m S_m(t)) dt - \sigma_4 b_{mv}(t) \frac{I_v(t)}{N_v(t)} S_m(t) dB_4(t), \\
 dI_m(t) &= (\lambda_m(t) S_m(t) - (\gamma_m + \mu_m + \delta_m) I_m(t)) dt + \sigma_4 b_{mv}(t) \frac{I_v(t)}{N_v(t)} S_m(t) dB_4(t), \\
 dR_m(t) &= (\gamma_m I_m(t) - \mu_m R_m(t)) dt,
 \end{aligned}$$

sa početnim uslovom

$$\begin{aligned}
 S_v(0) &= S_v^0, & E_v(0) &= E_v^0, & I_v(0) &= I_v^0, & S_b(0) &= S_b^0, & I_b(0) &= I_b^0, & R_b(0) &= R_b^0, \\
 S_m(0) &= S_m^0, & I_m(0) &= I_m^0, & R_m(0) &= R_m^0.
 \end{aligned}$$

Parametri modela imaju isto značenje opisano u Poglavlju 2.2.2.

Kako je $N_v(t) = S_v(t) + E_v(t) + I_v(t)$, $t \geq 0$, sumiranjem prve tri jednačine sistema (2.17), dobija se

$$dN_v(t) = (\psi_v - \mu_v) N_v(t) dt.$$

EksPLICITNIM rešavanjem prethodne jednačine, sledi

$$N_v(t) = e^{(\psi_v - \mu_v)t} N_v(0).$$

Tada je

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} N_v(t) = \begin{cases} +\infty, & \psi_v > \mu_v, \\ N_v(0), & \psi_v = \mu_v, \\ 0, & \psi_v < \mu_v. \end{cases}$$

Na osnovu Napomene 2.1, populacija vektora je ograničena kapacitetom okoline K_v . Kako bi se izbegao neograničen rast populacije vektora u slučaju $\psi_v > \mu_v$, model (2.17) je modifikovan, tako što je član koji opisuje rast populacije $\psi_v N_v(t)$ u prvoj jednačini zamenjen sa $\psi_v H_v$, gde je $H_v = \frac{\mu_v}{\psi_v} K_v$, i dobijen je model

$$\begin{aligned}
 dS_v(t) &= (\psi_v H_v - (\lambda_v(t) + \mu_v) S_v(t)) dt - \sigma_1 b_{vb}(t) \frac{I_b(t)}{N_b(t)} S_v(t) dB_1(t) \\
 &\quad - \sigma_2 b_{vm}(t) \frac{I_m(t)}{N_m(t)} S_v(t) dB_2(t), \\
 dE_v(t) &= (\lambda_v(t) S_v(t) - (\nu_v + \mu_v) E_v(t)) dt + \sigma_1 b_{vb}(t) \frac{I_b(t)}{N_b(t)} S_v(t) dB_1(t) \\
 &\quad + \sigma_2 b_{vm}(t) \frac{I_m(t)}{N_m(t)} S_v(t) dB_2(t), \\
 dI_v(t) &= (\nu_v E_v(t) - \mu_v I_v(t)) dt, \\
 dS_b(t) &= (\psi_b H - \lambda_b(t) S_b(t) - \mu_b S_b(t)) dt - \sigma_3 b_{bv}(t) \frac{I_v(t)}{N_v(t)} S_b(t) dB_3(t), \\
 dI_b(t) &= (\lambda_b(t) S_b(t) - (\gamma_b + \mu_b + \delta_b) I_b(t)) dt + \sigma_3 b_{bv}(t) \frac{I_v(t)}{N_v(t)} S_b(t) dB_3(t), \\
 dR_b(t) &= (\gamma_b I_b(t) - \mu_b R_b(t)) dt, \\
 dS_m(t) &= (\psi_m H - \lambda_m(t) S_m(t) - \mu_m S_m(t)) dt - \sigma_4 b_{mv}(t) \frac{I_v(t)}{N_v(t)} S_m(t) dB_4(t), \\
 dI_m(t) &= (\lambda_m(t) S_m(t) - (\gamma_m + \mu_m + \delta_m) I_m(t)) dt + \sigma_4 b_{mv}(t) \frac{I_v(t)}{N_v(t)} S_m(t) dB_4(t), \\
 dR_m(t) &= (\gamma_m I_m(t) - \mu_m R_m(t)) dt,
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

sa početnim uslovom

$$\begin{aligned} S_v(0) &= S_v^0, & E_v(0) &= E_v^0, & I_v(0) &= I_v^0, & S_b(0) &= S_b^0, & I_b(0) &= I_b^0, & R_b(0) &= R_b^0, \\ S_m(0) &= S_m^0, & I_m(0) &= I_m^0, & R_m(0) &= R_m^0. \end{aligned}$$

Neka je

$$\Gamma_1 = \left\{ (S_v, E_v, I_v, S_b, I_b, R_b, S_m, I_m, R_m) \in \mathbb{R}_+^9 : 0 \leq S_v + E_v + I_v \leq K_v, \right. \\ \left. \frac{\psi_b H}{\mu_b + \delta_b} \leq S_b + I_b + R_b \leq \frac{\psi_b H}{\mu_b}, \frac{\psi_m H}{\mu_m + \delta_m} \leq S_m + I_m + R_m \leq \frac{\psi_m H}{\mu_m} \right\}.$$

2.3.1 Postojanje i jedinstvenost globalnog pozitivnog rešenja

Teorema 2.4 Za proizvoljnu početnu vrednost $(S_v(0), E_v(0), I_v(0), S_b(0), I_b(0), R_b(0), S_m(0), I_m(0), R_m(0)) \in \Gamma_1$, postoji jedinstveno rešenje $(S_v(t), E_v(t), I_v(t), S_b(t), I_b(t), R_b(t), S_m(t), I_m(t), R_m(t))$ sistema (2.18) i rešenje ostaje u Γ_1 sa verovatnoćom jedan. Pored toga,

$$\frac{\psi_b H}{\mu_b + \delta_b} \leq N_b(t) \leq \frac{\psi_b H}{\mu_b}$$

i

$$\frac{\psi_m H}{\mu_m + \delta_m} \leq N_m(t) \leq \frac{\psi_m H}{\mu_m}.$$

Dokaz. Kako koeficijenti sistema (2.18) zadovoljavaju lokalni Lipschitzov uslov, za proizvoljnu početnu vrednost $(S_v(0), E_v(0), I_v(0), S_b(0), I_b(0), R_b(0), S_m(0), I_m(0), R_m(0))$ postoji jedinstveno lokalno rešenje na $[0, \tau_e]$, gde je τ_e vreme eksplozije (Teorema 1.15). Da bi se pokazalo da je rešenje globalno, potrebno je pokazati da je $\tau_e = \infty$ s.i., kao što je urađeno u Teoremi 2.1. Neka je $k_0 \geq 0$ dovoljno veliko tako da se $S_v(0), E_v(0), I_v(0), S_b(0), I_b(0), R_b(0), S_m(0), I_m(0)$ i $R_m(0)$ nalaze unutar segmenta $[\frac{1}{k_0}, k_0]$. Za svaki ceo broj $k \geq k_0$, definiše se vreme zaustavljanja na sledeći način

$$\tau_k = \inf \left\{ t \in [0, \tau_e) : \min \{S_v(t), E_v(t), I_v(t), S_b(t), I_b(t), R_b(t), S_m(t), I_m(t), R_m(t)\} \leq \frac{1}{k} \right.$$

$$\left. \text{ili } \max \{S_v(t), E_v(t), I_v(t), S_b(t), I_b(t), R_b(t), S_m(t), I_m(t), R_m(t)\} \geq k \right\}.$$

Niz τ_k je rastući po k . Neka je $\tau_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} \tau_k$, odakle sledi $\tau_\infty \leq \tau_e$ s.i. Ako važi da je $\tau_\infty = \infty$ s.i., tada je $\tau_e = \infty$, što znači da je $(S_v(t), E_v(t), I_v(t), S_b(t), I_b(t), R_b(t), S_m(t), I_m(t), R_m(t)) \in \mathbb{R}_+^9$ s.i. za svako $t \geq 0$. U suprotnom, postoje $T > 0$ i $\epsilon \in (0, 1)$ tako da je $\mathbb{P} \{ \tau_\infty \leq T \} > \epsilon$. Tada, postoji $k_1 \geq k_0$, tako da je

$$\mathbb{P} \{ \tau_k \leq T \} > \epsilon$$

za svako $k \geq k_1$.

Sumiranjem prve tri jednačine sistema (2.18), dobija se diferencijalna jednačina

$$dN_v(t) = (\psi_v H_v - \mu_v N_v(t)) dt.$$

Njenim rešavanjem, dobija se

$$N_v(t) = \frac{\psi_v H_v}{\mu_v} + \left(N_v(0) - \frac{\psi_v H_v}{\mu_v} \right) e^{-\int_0^t \mu_v ds}.$$

Na osnovu uslova teoreme, kako je $0 \leq N_v(0) \leq \frac{\psi_v H_v}{\mu_v}$, sledi da je

$$0 \leq N_v(t) \leq \frac{\psi_v H_v}{\mu_v}, \quad t \geq 0.$$

Kako je $N_b(t) = S_b(t) + I_b(t) + R_b(t)$, $t \geq 0$, i $N_m(t) = S_m(t) + I_m(t) + R_m(t)$, $t \geq 0$, sumiranjem jednačina sistema (2.18) koje se odnose na ptice stanarice (sa indeksom b) i sumiranjem jednačina sistema (2.18) koje se odnose na ptice selice (sa indeksom m), dobijaju se diferencijalne jednačine

$$dN_b(t) = (\psi_b H - \delta_b I_b(t) - \mu_b N_b(t)) dt,$$

$$dN_m(t) = (\psi_m H - \delta_m I_m(t) - \mu_m N_m(t)) dt.$$

Za populaciju ptica stanarica, važi

$$\begin{aligned} (\psi_b H - (\mu_b + \delta_b) N_b(t)) dt &\leq dN_b(t) \leq (\psi_b H - \mu_b N_b(t)) dt \\ \Leftrightarrow (\mu_b + \delta_b) \left(\frac{\psi_b H}{\mu_b + \delta_b} - N_b(t) \right) dt &\leq dN_b(t) \leq \mu_b \left(\frac{\psi_b H}{\mu_b} - N_b(t) \right) dt, \end{aligned}$$

za $t \in [0, \tau_k)$. Na osnovu toga je

$$\begin{aligned} d \left(\frac{\psi_b H}{\mu_b + \delta_b} - N_b(t) \right) + (\mu_b + \delta_b) \left(\frac{\psi_b H}{\mu_b + \delta_b} - N_b(t) \right) dt &\leq 0, \\ d \left(\frac{\psi_b H}{\mu_b} - N_b(t) \right) + \mu_b \left(\frac{\psi_b H}{\mu_b} - N_b(t) \right) dt &\geq 0, \end{aligned}$$

za $t \in [0, \tau_k)$. Integracijom od 0 do t , $t \in [0, \tau_k)$, dobija se

$$\begin{aligned} \left(\frac{\psi_b H}{\mu_b + \delta_b} - N_b(t) \right) &\leq \left(\frac{\psi_b H}{\mu_b + \delta_b} - N_b(0) \right) e^{-\int_0^t (\mu_b + \delta_b) ds}, \\ \left(\frac{\psi_b H}{\mu_b} - N_b(t) \right) &\geq \left(\frac{\psi_b H}{\mu_b} - N_b(0) \right) e^{-\int_0^t \mu_b ds}. \end{aligned}$$

Na osnovu uslova teoreme, kako je $\frac{\psi_b H}{\mu_b + \delta_b} \leq N_b(0) \leq \frac{\psi_b H}{\mu_b}$, sledi

$$\frac{\psi_b H}{\mu_b + \delta_b} \leq N_b(t) \leq \frac{\psi_b H}{\mu_b}, \quad t \in [0, \tau_k).$$

Slično, za populaciju ptica selica, važi

$$\frac{\psi_m H}{\mu_m + \delta_m} \leq N_m(t) \leq \frac{\psi_m H}{\mu_m}, \quad t \in [0, \tau_k).$$

Neka je nenegativna C^2 -funkcija $V : \mathbb{R}_+^9 \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ definisana na sledeći način

$$\begin{aligned} V(X(t)) &:= V(S_v(t), E_v(t), I_v(t), S_b(t), I_b(t), R_b(t), S_m(t), I_m(t), R_m(t)) \\ &= (S_v(t) - 1 - \ln S_v(t)) + (E_v(t) - \ln(E_v(t) + 1)) + (I_v(t) - 1 - \ln I_v(t)) \\ &\quad + (S_b(t) - 1 - \ln S_b(t)) + (I_b(t) - \ln(I_b(t) + 1)) + (R_b(t) - 1 - \ln R_b(t)) \\ &\quad + (S_m(t) - 1 - \ln S_m(t)) + (I_m(t) - \ln(I_m(t) + 1)) \\ &\quad + (R_m(t) - 1 - \ln R_m(t)). \end{aligned}$$

Na osnovu $u - 1 - \ln u \geq 0$ za svako $u > 0$ sledi nenegativnost funkcije $V(X(t))$. Neka je $k \geq k_0$ i $T > 0$ proizvoljni. Primenom Itôve formule (Teorema 1.12) na funkciju

$V(X(t))$, dobija se

$$\begin{aligned} dV(X(t)) = & LV(X(t))dt + \sigma_1 b_{vb}(t) \frac{I_b(t)}{N_b(t)} \left(1 - \frac{S_v(t)}{E_v(t) + 1}\right) dB_1(t) \\ & + \sigma_2 b_{vm}(t) \frac{I_m(t)}{N_m(t)} \left(1 - \frac{S_v(t)}{E_v(t) + 1}\right) dB_2(t) \\ & + \sigma_3 b_{bv}(t) \frac{I_v(t)}{N_v(t)} \left(1 - \frac{S_b(t)}{I_b(t) + 1}\right) dB_3(t) \\ & + \sigma_4 b_{mv}(t) \frac{I_v(t)}{N_v(t)} \left(1 - \frac{S_m(t)}{I_m(t) + 1}\right) dB_4(t), \end{aligned}$$

gde je $LV : \mathbb{R}_+^9 \rightarrow \mathbb{R}$ definisan sa

$$\begin{aligned} LV(X(t)) = & \left(1 - \frac{1}{S_v(t)}\right) (\psi_v H_v - (\lambda_v(t) + \mu_v) S_v(t)) + \frac{1}{2} \sigma_1^2 b_{vb}^2(t) \frac{I_b^2(t)}{N_b^2(t)} \\ & + \frac{1}{2} \sigma_2^2 b_{vm}^2(t) \frac{I_m^2(t)}{N_m^2(t)} + \left(1 - \frac{1}{E_v(t) + 1}\right) (\lambda_v(t) S_v(t) - (\nu_v + \mu_v) E_v(t)) \\ & + \frac{1}{2} \frac{1}{(E_v(t) + 1)^2} \left(\sigma_1^2 b_{vb}^2(t) \frac{I_b^2(t)}{N_b^2(t)} + \sigma_2^2 b_{vm}^2(t) \frac{I_m^2(t)}{N_m^2(t)} \right) S_v^2(t) \\ & + \left(1 - \frac{1}{I_v(t)}\right) (\nu_v E_v(t) - \mu_v I_v(t)) \\ & + \left(1 - \frac{1}{S_b(t)}\right) (\psi_b H - (\lambda_b(t) + \mu_b) S_b(t)) + \frac{1}{2} \sigma_3^2 b_{bv}^2(t) \frac{I_v^2(t)}{N_v^2(t)} \\ & + \left(1 - \frac{1}{I_b(t) + 1}\right) (\lambda_b(t) S_b(t) - (\gamma_b + \mu_b + \delta_b) I_b(t)) \\ & + \frac{1}{2} \frac{1}{(I_b(t) + 1)^2} \sigma_3^2 b_{bv}^2(t) \frac{I_v^2(t)}{N_v^2(t)} S_b^2(t) + \left(1 - \frac{1}{R_b(t)}\right) (\gamma_b I_b(t) - \mu_b R_b(t)) \\ & + \left(1 - \frac{1}{S_m(t)}\right) (\psi_m H - (\lambda_m(t) + \mu_m) S_m(t)) + \frac{1}{2} \sigma_4^2 b_{mv}^2(t) \frac{I_v^2(t)}{N_v^2(t)} \\ & + \left(1 - \frac{1}{I_m(t) + 1}\right) (\lambda_m(t) S_m(t) - (\gamma_m + \mu_m + \delta_m) I_m(t)) \\ & + \frac{1}{2} \sigma_4^2 b_{mv}^2(t) \frac{S_m^2(t)}{(I_m(t) + 1)^2} \frac{I_v^2(t)}{N_v^2(t)} + \left(1 - \frac{1}{R_m(t)}\right) (\gamma_m I_m(t) - \mu_m R_m(t)) \\ \leq & \psi_v H_v + (\beta_{vb} \sigma_v K_v + \beta_{vm} \sigma_v K_v) + 3\mu_v + \nu_v + \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{2} \sigma_v^2 K_v^2 (1 + K_v^2) + \psi_b H \\ & + \sigma_v \beta_{bv} + \gamma_b + \delta_b + 3\mu_b + \frac{\sigma_3^2}{2} \sigma_v^2 (1 + K^2) + \psi_m H + \sigma_v \beta_{mv} + \gamma_m + \delta_m \\ & + 3\mu_m + \frac{\sigma_4^2}{2} \sigma_v^2 (1 + K^2) =: C. \end{aligned}$$

Na osnovu poslednje dve relacije, važi

$$\begin{aligned} dV(X(t)) \leq & Cdt + \left(1 - \frac{S_v(t)}{E_v(t) + 1}\right) \left(\sigma_1 b_{vb}(t) \frac{I_b(t)}{N_b(t)} dB_1(t) + \sigma_2 b_{vm}(t) \frac{I_m(t)}{N_m(t)} dB_2(t) \right) \\ & + \sigma_3 \left(1 - \frac{S_b(t)}{I_b(t) + 1}\right) b_{bv}(t) \frac{I_v(t)}{N_v(t)} dB_3(t) \\ & + \sigma_4 \left(1 - \frac{S_m(t)}{I_m(t) + 1}\right) b_{mv}(t) \frac{I_v(t)}{N_v(t)} dB_4(t). \end{aligned}$$

Integracijom poslednje nejednakosti od 0 do $\tau_k \wedge T = \min\{\tau_k, T\}$ i izračunavanjem očekivane vrednosti, dobija se

$$\mathbb{E}V(X(\tau_k \wedge T)) \leq C\mathbb{E}(\tau_k \wedge T) + V(X(0)) \leq CT + V(X(0)).$$

Neka je $\Omega_k = \{k \leq T\}$. Tada je $\mathbb{P}(\Omega_k) \geq \epsilon$. Za svako $\omega \in \Omega_k$, bar jedan od $S_v(\tau_k, \omega)$, $E_v(\tau_k, \omega)$, $I_v(\tau_k, \omega)$, $S_b(\tau_k, \omega)$, $I_b(\tau_k, \omega)$, $R_b(\tau_k, \omega)$, $S_m(\tau_k, \omega)$, $I_m(\tau_k, \omega)$ i $R_m(\tau_k, \omega)$ je jednak ili k ili $\frac{1}{k}$. Prema tome, važi

$$V(X(\tau_k \wedge T)) \geq \min \left\{ k - 1 - \ln k, \frac{1}{k} - 1 - \ln \frac{1}{k} \right\}.$$

Oдавde sledi

$$CT + V(X(0)) \geq \mathbb{E}[I_{\Omega_k} V(X(\tau_k \wedge T))] \geq \epsilon \min \left\{ k - 1 - \ln k, \frac{1}{k} - 1 - \ln \frac{1}{k} \right\},$$

gde je I_{Ω_k} indikator događaja Ω_k . Kada $k \rightarrow \infty$, dobija se

$$\infty > V(X(0)) + CT = \infty,$$

što je u kontradikciji sa pretpostavkom. Dakle, $\tau_\infty = \infty$ s.i. čime je dokaz kompletan. $\triangle$

Napomena 2.4 Skup Γ_1 je pozitivno invarijantan skup sistema (2.18) za svako $t \geq 0$, tj. rešenje sistema (2.18) ne napušta Γ_1 za proizvoljnu početnu vrednost iz skupa Γ_1 .

2.3.2 Iskorenjivanje bolesti

U ovom delu biće izvedeni dovoljni uslovi za iskorenjivanje bolesti za model (2.18) koji uključuje dve grupe ptica.

Teorema 2.5 Neka je $(S_v(t), E_v(t), I_v(t), S_b(t), I_b(t), R_b(t), S_m(t), I_m(t), R_m(t)) \in \Gamma_1$ rešenje sistema (2.18) sa proizvoljnom početnom vrednošću $(S_v(0), E_v(0), I_v(0), S_b(0), I_b(0), R_b(0), S_m(0), I_m(0), R_m(0)) \in \Gamma_1$. Ako važi

$$\frac{\beta_{vb}^2}{\sigma_1^2} + \frac{\beta_{vm}^2}{\sigma_2^2} < 2(\nu_v + \mu_v), \quad \sigma_3^2 > \frac{\beta_{bv}^2}{2(\gamma_b + \mu_b + \delta_b)} \quad i \quad \sigma_4^2 > \frac{\beta_{mv}^2}{2(\gamma_m + \mu_m + \delta_m)},$$

tada dolazi do iskorenjivanja bolesti, tj.

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} E_v(t) &= 0, & \lim_{t \rightarrow +\infty} I_v(t) &= 0, & \lim_{t \rightarrow +\infty} I_b(t) &= 0, \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} R_b(t) &= 0, & \lim_{t \rightarrow +\infty} I_m(t) &= 0, & \lim_{t \rightarrow +\infty} R_m(t) &= 0 \end{aligned} \quad s.i.$$

Dokaz. Na osnovu Teoreme 2.4, rešenje sistema (2.18) je pozitivno za svako $t \geq 0$. Primenom Itôve formule (Teorema 1.12) na $\log E_v(t)$, a potom integracijom od 0 do t , dobija se

$$\begin{aligned} \log E_v(t) &= \log E_v(0) + \int_0^t \left[\lambda_v(s) \frac{S_v(s)}{E_v(s)} - (\nu_v + \mu_v) - \frac{1}{2} \left(\sigma_1 b_{vb}(s) \frac{S_v(s) I_b(s)}{E_v(s) N_b(s)} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \left(\sigma_2 b_{vm}(s) \frac{S_v(s) I_m(s)}{E_v(s) N_m(s)} \right)^2 \right] ds + M_4(t) + M_5(t), \end{aligned} \quad (2.19)$$

gde su $M_4(t) = \int_0^t \sigma_1 b_{vb}(s) \frac{S_v(s) I_b(s)}{E_v(s) N_b(s)} dB_1(s)$ i $M_5(t) = \int_0^t \sigma_2 b_{vm}(s) \frac{S_v(s) I_m(s)}{E_v(s) N_m(s)} dB_2(s)$ neprekidni martingali, na osnovu osobina Brownovog kretanja (Teorema 1.10). Primenom eksponencijalne martingalne nejednakosti (Teorema 1.51) dobija se

$$\mathbb{P} \left\{ \sup_{0 \leq t \leq n} \left[M_4(t) - \frac{\alpha}{2} \int_0^t \left(\sigma_1 b_{vb}(s) \frac{S_v(s) I_b(s)}{E_v(s) N_b(s)} \right)^2 ds \right] > \beta \right\} \leq e^{-\alpha\beta},$$

$$\mathbb{P} \left\{ \sup_{0 \leq t \leq n} \left[M_5(t) - \frac{\alpha}{2} \int_0^t \left(\sigma_2 b_{vm}(s) \frac{S_v(s) I_m(s)}{E_v(s) N_m(s)} \right)^2 ds \right] > \beta \right\} \leq e^{-\alpha\beta},$$

pri čemu je $n > 1$ proizvoljan ceo broj, α i β pozitivne konstante koje će biti određene u nastavku.

Na osnovu sličnog razmatranja kao u Teoremi 2.2, dobijaju se sledeće ocene

$$M_4(t) \leq \frac{\epsilon}{2} \int_0^t \left(\sigma_1 b_{vb}(s) \frac{S_v(s) I_b(s)}{E_v(s) N_b(s)} \right)^2 ds + \frac{2 \ln n}{\epsilon}, \quad (2.20)$$

i

$$M_5(t) \leq \frac{\epsilon}{2} \int_0^t \left(\sigma_2 b_{vm}(s) \frac{S_v(s) I_m(s)}{E_v(s) N_m(s)} \right)^2 ds + \frac{2 \ln n}{\epsilon}, \quad (2.21)$$

pri čemu je $n > 1$ proizvoljan ceo broj, $\epsilon \in (0, 1)$ proizvoljan, $\alpha = \epsilon$ i $\beta = \frac{2 \ln n}{\epsilon}$. Zamenom (2.20) i (2.21) u (2.19), dobija se

$$\begin{aligned} \log E_v(t) &= \log E_v(0) - (\nu_v + \mu_v)t + \int_0^t \left[-\frac{\sigma_1^2(1-\epsilon)}{2} \left(\frac{\lambda_v(s) S_v(s)}{\beta_{vb} E_v(s)} - \frac{\beta_{vb}}{(1-\epsilon)\sigma_1^2} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{\beta_{vb}^2}{2(1-\epsilon)\sigma_1^2} - \frac{\sigma_2^2(1-\epsilon)}{2} \left(\frac{\lambda_v(s) S_v(s)}{\beta_{vm} E_v(s)} - \frac{\beta_{vm}}{(1-\epsilon)\sigma_2^2} \right)^2 + \frac{\beta_{vm}^2}{2(1-\epsilon)\sigma_2^2} \right] ds + \frac{4 \ln n}{\epsilon} \\ &\leq \log E_v(0) - (\nu_v + \mu_v)t + \frac{\beta_{vb}^2}{2(1-\epsilon)\sigma_1^2} t + \frac{\beta_{vm}^2}{2(1-\epsilon)\sigma_2^2} t + \frac{4 \ln n}{\epsilon}. \end{aligned}$$

Deljenjem sa t i računanjem $\limsup$ kada $t \rightarrow \infty$ u prethodnoj nejednakosti, dobija se

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{\log E_v(t)}{t} \leq \frac{\beta_{vb}^2}{2(1-\epsilon)\sigma_1^2} + \frac{\beta_{vm}^2}{2(1-\epsilon)\sigma_2^2} - (\nu_v + \mu_v),$$

za svako $\epsilon \in (0, 1)$. Neka je niz $\{\epsilon_k\}_k$ takav da je $\epsilon_k \in (0, 1)$, za svako k , i $\lim_{k \rightarrow \infty} \epsilon_k = 0$. Tada je

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{\log E_v(t)}{t} \leq \frac{\beta_{vb}^2}{2(1-\epsilon_k)\sigma_1^2} + \frac{\beta_{vm}^2}{2(1-\epsilon_k)\sigma_2^2} - (\nu_v + \mu_v), \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Računanjem granične vrednosti kada $k \rightarrow \infty$ u poslednjoj nejednakosti, dobija se

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{\log E_v(t)}{t} \leq \frac{\beta_{vb}^2}{2\sigma_1^2} + \frac{\beta_{vm}^2}{2\sigma_2^2} - (\nu_v + \mu_v) < 0 \quad s.i.,$$

na osnovu uslova teoreme. Odavde sledi da je

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} E_v(t) = 0 \quad s.i. \quad (2.22)$$

EksPLICITNIM rešavanjem treće jednačine sistema (2.18), dobija se

$$I_v(t) = e^{-\mu_v t} \left[I_v(0) + \int_0^t (\nu_v E_v(s) e^{\mu_v s}) ds \right].$$

Računanjem granične vrednosti kada $k \rightarrow \infty$ u poslednjoj nejednakosti, primenom L'Hospitalovog pravila i (2.22), sledi da je

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} I_v(t) = 0 \quad s.i.$$

Slično, primenom Itôve formule (Teorema 1.12) na $\log I_b(t)$ i integracijom od 0 do t , dobija se

$$\begin{aligned} \log I_b(t) &= \log I_b(0) - \int_0^t \left[\lambda_b(t) \frac{S_b(t)}{I_b(t)} - \frac{1}{2} \left(\sigma_3 b_{bv}(s) \frac{S_b(s) I_v(s)}{I_b(s) N_v(s)} \right)^2 \right] ds \\ &\quad - (\gamma_b + \mu_b + \delta_b)t + M_6(t), \end{aligned}$$

gde je $M_6(t) = \int_0^t \left(\sigma_3 b_{bv}(s) \frac{S_b(s) I_v(s)}{I_b(s) N_v(s)} \right) dB_3(s)$. Na osnovu osobina Brownovog kretanja (Teorema 1.10), $M_6(t)$ je neprekidan martingal. Primenom eksponencijalne martingalne nejednakosti (Teorema 1.51), kao u prvom delu dokaza, dobija se

$$M_6(t) \leq \frac{\epsilon}{2} \int_0^t \left(\sigma_3 b_{bv}(s) \frac{S_b(s) I_v(s)}{I_b(s) N_v(s)} \right)^2 ds + \frac{2 \ln n}{\epsilon},$$

pri čemu je $n > 1$ proizvoljan ceo broj. Na osnovu poslednje dve relacije, sledi

$$\log I_b(t) \leq \log I_b(0) - (\gamma_b + \mu_b + \delta_b)t + \frac{\beta_{bv}^2}{2(1-\epsilon)\sigma_3^2}t + \frac{2 \ln n}{\epsilon}.$$

Ponavljanjem procedure kao pri računanju $\lim_{t \rightarrow \infty} E_v(t)$, dobija se da je

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} I_b(t) = 0 \quad s.i. \quad (2.23)$$

EksPLICITNIM rešavanjem šeste jednačine sistema (2.18), dobija se

$$R_b(t) = e^{-\mu_b t} \left[R_b(0) + \int_0^t (\gamma_b I_b(s) e^{\mu_b s}) ds \right].$$

Računanjem granične vrednosti kada $t \rightarrow \infty$ u poslednjoj nejednakosti, primenom L'Hospitalovog pravila i (2.23), sledi da je

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} R_b(t) = 0 \quad s.i.$$

Pored toga, primenom Itôve formule (Teorema 1.12) na $\log I_m(t)$ i integracijom od 0 do t , dobija se

$$\begin{aligned} \log I_m(t) &= \log I_m(0) - \int_0^t \left[\lambda_m(t) \frac{S_m(t)}{I_m(t)} - \frac{1}{2} \left(\sigma_4 b_{mv}(s) \frac{S_m(s) I_v(s)}{I_m(s) N_v(s)} \right)^2 \right] ds \\ &\quad - (\gamma_m + \mu_m + \delta_m)t + M_7(t), \end{aligned}$$

gde je $M_7(t) = \int_0^t \left(\sigma_4 b_{mv}(s) \frac{S_m(s) I_v(s)}{I_m(s) N_v(s)} \right) dB_4(s)$, neprekidan martingal, na osnovu osobina Brownovog kretanja (Teorema 1.10). Primenom eksponencijalne martingalne nejednakosti (Teorema 1.51) i ponavljanjem procedure kao pri računanju $\lim_{t \rightarrow \infty} E_v(t)$ i $\lim_{t \rightarrow \infty} I_b(t)$, dobija se da je

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} I_m(t) = 0 \text{ s.i.} \quad (2.24)$$

EksPLICITNIM rešavanjem devete jednačine sistema (2.18), dobija se

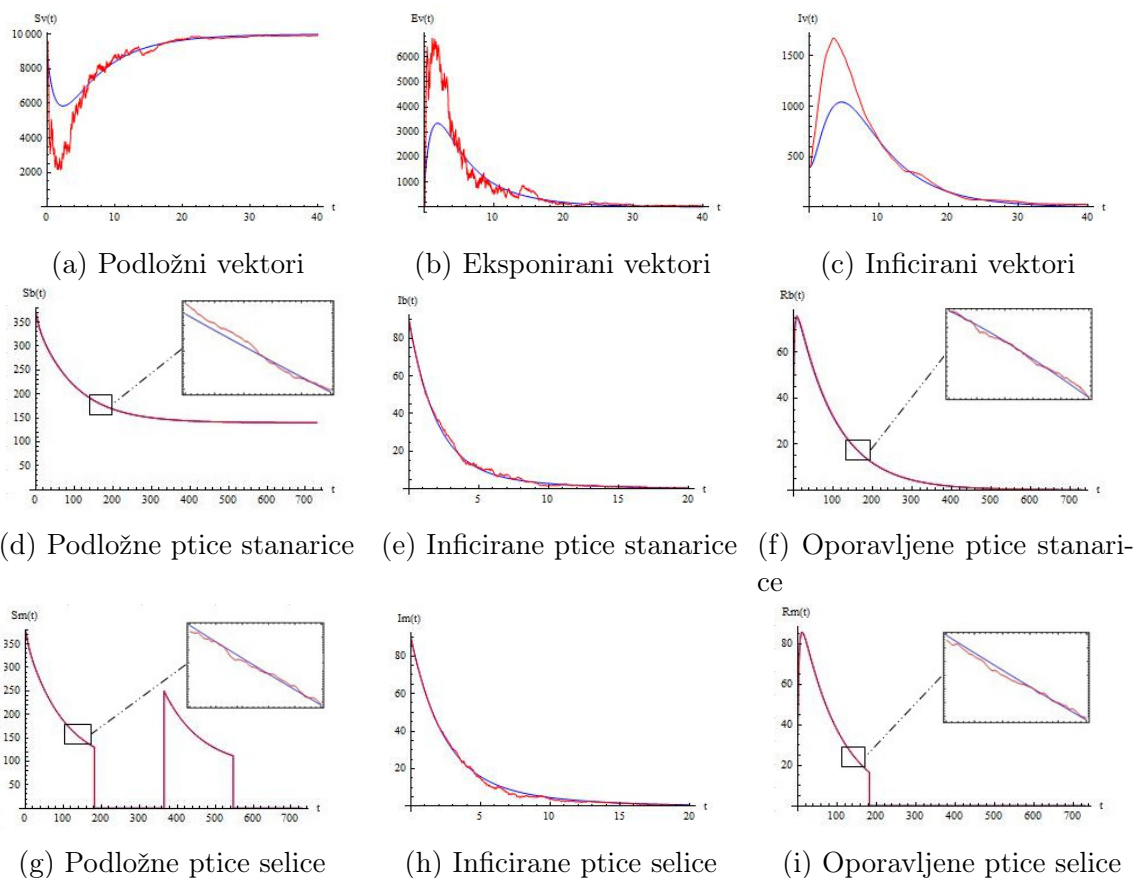
$$R_m(t) = e^{-\mu_m t} \left[R_m(0) + \int_0^t (\gamma_m I_m(s) e^{\mu_m s}) ds \right].$$

Računanjem granične vrednosti kada $t \rightarrow \infty$ u poslednjoj nejednakosti, primenom L'Hospitalovog pravila i (2.24), sledi da je

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} R_m(t) = 0 \text{ s.i.}$$

Ovim je dokaz kompletan. $\triangle$

Na Slici 2.4 je ilustrovan rezultat Teoreme 2.5. U slučaju kada model (2.18) uključuje ptice stancarice i ptice selice, uvodi se pretpostavka da se u trenutku $t = 0$, tj. na početku prve posmatrane godine, ptice selice doseljavaju na određeno područje, dok u trenutku $t = 180$ dan one napuštaju područje, i isto ponašanje pokazuju u toku svake sledeće godine.



Slika 2.4: Determinističke (plave) i stohastičke (crvene) trajektorije modela (2.18).

Simulacije na Slici 2.4 su dobijene korišćenjem parametara modela iz Tabele 2.1 i početnim vrednostima $S_v(0) = 9000, E_v(0) = 600, I_v(0) = 400, S_b(0) = 370, I_b(0) = 90, R_b(0) = 40, S_m(0) = 380, I_m(0) = 90, R_b(0) = 30$. Pretpostavlja se da je $\psi_v = \mu_v$ odnosno, da je populacija vektora konstantna i $\sigma_1^2 = 0.9, \sigma_2^2 = 0.9, \sigma_3^2 = 0.12$ i $\sigma_4^2 = 0.2$. Takav izbor parametara modela zadovoljava uslov Teoreme 2.5, što znači da dolazi do iskorenjivanja bolesti. Grafici na Slici 2.4 ilustruju teorijski rezultat.

2.3.3 Perzistentnost u srednjem

Definicija 2.2 Sistem (2.18) je strogo perzistentan u srednjem ako važi bar jedan od sledećih uslova

$$\begin{aligned} \liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t E_v(s) ds > 0 \text{ s.i. ili } \liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t I_v(s) ds > 0 \text{ s.i. ili} \\ \liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t I_b(s) ds > 0 \text{ s.i. ili } \liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t I_m(s) ds > 0 \text{ s.i.} \end{aligned}$$

Teorema 2.6 Za proizvoljnu početnu vrednost $(S_v(0), E_v(0), I_v(0), S_b(0), I_b(0), R_b(0), S_m(0), I_m(0), R_m(0)) \in \Gamma_1$, ako važi

$$\begin{aligned} \varpi_2 = & 2\sqrt{\frac{\sigma_v \sigma_b \frac{\psi_b H}{\mu_b + \delta_b} \beta_{bv}}{\sigma_v K_v + \sigma_b \frac{\psi_b H}{\mu_b + \delta_b} + \sigma_m \frac{\psi_m H}{\mu_m}} \frac{\psi_b H}{K+1}} - \psi_b H \left(1 - \frac{\mu_b}{\mu_b + \delta_b}\right) - \sigma_v \beta_{bv} - \mu_b \\ & - \frac{\sigma_3^2 \sigma_v^2}{2} (1 + K^2) - \frac{\sigma_v \sigma_b \frac{\psi_b H}{\mu_b + \delta_b} \beta_{bv}}{\sigma_v K_v + \sigma_b \frac{\psi_b H}{\mu_b + \delta_b} + \sigma_m \frac{\psi_m H}{\mu_m}} \frac{K}{K+1} \\ & + 2\sqrt{\frac{\sigma_v \sigma_m \frac{\psi_m H}{\mu_m + \delta_m} \beta_{mv}}{\sigma_v K_v + \sigma_b \frac{\psi_b H}{\mu_b + \delta_b} + \sigma_m \frac{\psi_m H}{\mu_m + \delta_m}} \frac{\psi_m H}{\mu_m + 1}} - \psi_m H \left(1 - \frac{\mu_m}{\mu_m + \delta_m}\right) \\ & - \sigma_v \beta_{mv} - \mu_m - \frac{\sigma_4^2 \sigma_v^2}{2} \left(1 + \frac{\psi_m^2 H^2}{\mu_m^2}\right) - \frac{\sigma_v \sigma_m \frac{\psi_m H}{\mu_m + \delta_m} \beta_{mv}}{\sigma_v K_v + \sigma_b \frac{\psi_b H}{\mu_b + \delta_b} + \sigma_m \frac{\psi_m H}{\mu_m + \delta_m}} \frac{\psi_m H}{\mu_m + 1} > 0, \end{aligned} \quad (2.25)$$

tada je bolest strogo perzistentna u srednjem, odnosno, važi da je

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} (\langle I_b(t) \rangle + \langle I_m(t) \rangle) \geq \frac{1}{\max\{\gamma_b + \mu_b, \gamma_m + \mu_m\}} \varpi_2 > 0,$$

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} (\langle R_b(t) \rangle + \langle R_m(t) \rangle) \geq \frac{\min\{\gamma_b, \gamma_m\}}{\max\{\rho_b, \rho_m\}} \frac{1}{\max\{\gamma_b + \mu_b, \gamma_m + \mu_m\}} \varpi_2 > 0.$$

Dokaz. Neka je $U(X(t)) := S_b(t) + I_b(t) + R_b(t) - \log S_b(t) - \log(I_b(t) + 1) + S_m(t) + I_m(t) + R_m(t) - \log S_m(t) - \log(I_m(t) + 1)$. Primenom Itôve formule (Teorema 1.12) na $U(X(t))$, dobija se

$$\begin{aligned} d(U(X(t))) = & \psi_b H - \mu_b N_b(t) - \delta_b I_b(t) - \frac{\psi_b H}{S_b(t)} + (\lambda_b(t) + \mu_b) + \frac{\sigma_3^2 b_{bv}^2(t) I_v^2(t)}{2N_v^2(t)} \\ & - \frac{\lambda_b(t) S_b(t)}{I_b(t) + 1} + \frac{(\gamma_b + \mu_b + \delta_b) I_b(t)}{I_b(t) + 1} + \frac{\sigma_3^2 b_{bv}^2(t) I_v^2(t) S_b^2(t)}{2N_v^2(t) (I_b(t) + 1)^2} \\ & + \left(\frac{\sigma_3 b_{bv}(t) I_v(t)}{N_v(t)} + \frac{\sigma_3 b_{bv}(t) I_v(t) S_b(t)}{N_v(t) (I_b(t) + 1)} \right) dB_3(t) + \psi_m H - \mu_m N_m(t) \\ & - \delta_m I_m(t) - \frac{\psi_m H}{S_m(t)} + (\lambda_m(t) + \mu_m) + \frac{\sigma_4^2 b_{mv}^2(t) I_v^2(t)}{2N_v^2(t)} \\ & - \frac{\lambda_m(t) S_m(t)}{I_m(t) + 1} + \frac{(\gamma_m + \mu_m + \delta_m) I_m(t)}{I_m(t) + 1} + \frac{\sigma_4^2 b_{mv}^2(t) I_v^2(t) S_m^2(t)}{2N_v^2(t) (I_m(t) + 1)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{\sigma_4 b_{mv}(t) I_v(t)}{N_v(t)} + \frac{\sigma_4 b_{mv}(t) I_v(t) S_m(t)}{N_v(t)(I_m(t) + 1)} \right) dB_4(t) \\
& \leq \psi_b H \left(1 - \frac{\mu_b}{\mu_b + \delta_b} \right) - \delta_b I_b(t) - \frac{\psi_b H}{S_b(t)} + \sigma_v \beta_{bv} + \mu_b + \frac{\sigma_3^2 \sigma_v^2}{2} (1 + K^2) \\
& \quad - \frac{\sigma_v \sigma_b \frac{\psi_b H}{\mu_b + \delta_b} \beta_{bv}}{\sigma_v K_v + \sigma_b \frac{\psi_b H}{\mu_b + \delta_b} + \sigma_m \frac{\psi_m H}{\mu_m}} \frac{S_b(t)}{K + 1} + \frac{\sigma_v \sigma_b \frac{\psi_b H}{\mu_b + \delta_b} \beta_{bv}}{\sigma_v K_v + \sigma_b \frac{\psi_b H}{\mu_b + \delta_b} + \sigma_m \frac{\psi_m H}{\mu_m}} \frac{K}{K + 1} \\
& \quad + (\gamma_b + \mu_b + \delta_b) I_b(t) + \left(\frac{\sigma_3 b_{bv}(t) I_v(t)}{N_v(t)} + \frac{\sigma_3 b_{bv}(t) I_v(t) S_b(t)}{N_v(t)(I_b(t) + 1)} \right) dB_3(t) \\
& \quad + \psi_m H \left(1 - \frac{\mu_m}{\mu_m + \delta_m} \right) - \delta_m I_m(t) - \frac{\psi_m H}{S_m(t)} + \sigma_v \beta_{mv} + \mu_m \\
& \quad + \frac{\sigma_4^2 \sigma_v^2}{2} \left(1 + \frac{\psi_m^2 H^2}{\mu_m^2} \right) - \frac{\sigma_v \sigma_m \frac{\psi_m H}{\mu_m + \delta_m} \beta_{mv}}{\sigma_v K_v + \sigma_b \frac{\psi_b H}{\mu_b} + \sigma_m \frac{\psi_m H}{\mu_m + \delta_m}} \frac{S_m(t)}{\frac{\psi_m H}{\mu_m} + 1} \\
& \quad + \frac{\sigma_v \sigma_m \frac{\psi_m H}{\mu_m + \delta_m} \beta_{mv}}{\sigma_v K_v + \sigma_b \frac{\psi_b H}{\mu_b} + \sigma_m \frac{\psi_m H}{\mu_m + \delta_m}} \frac{\frac{\psi_m H}{\mu_m}}{\frac{\psi_m H}{\mu_m} + 1} + (\gamma_b + \mu_b + \delta_b) I_b(t) \\
& \quad + \left(\frac{\sigma_4 b_{mv}(t) I_v(t)}{N_v(t)} + \frac{\sigma_4 b_{mv}(t) I_v(t) S_m(t)}{N_v(t)(I_m(t) + 1)} \right) dB_4(t) \\
& \leq \psi_b H \left(1 - \frac{\mu_b}{\mu_b + \delta_b} \right) + \sigma_v \beta_{bv} + \mu_b + \frac{\sigma_3^2 \sigma_v^2}{2} (1 + K^2) \\
& \quad - 2 \sqrt{\frac{\sigma_v \sigma_b \frac{\psi_b H}{\mu_b + \delta_b} \beta_{bv}}{\sigma_v K_v + \sigma_b \frac{\psi_b H}{\mu_b + \delta_b} + \sigma_m \frac{\psi_m H}{\mu_m}} \frac{\psi_b H}{K + 1} + \frac{\sigma_v \sigma_b \frac{\psi_b H}{\mu_b + \delta_b} \beta_{bv}}{\sigma_v K_v + \sigma_b \frac{\psi_b H}{\mu_b + \delta_b} + \sigma_m \frac{\psi_m H}{\mu_m}} \frac{K}{K + 1}} \\
& \quad + (\gamma_b + \mu_b) I_b(t) + \left(\frac{\sigma_3 b_{bv}(t) I_v(t)}{N_v(t)} + \frac{\sigma_3 b_{bv}(t) I_v(t) S_b(t)}{N_v(t)(I_b(t) + 1)} \right) dB_3(t) \\
& \quad + \psi_m H \left(1 - \frac{\mu_m}{\mu_m + \delta_m} \right) + \sigma_v \beta_{mv} + \mu_m + \frac{\sigma_4^2 \sigma_v^2}{2} \left(1 + \frac{\psi_m^2 H^2}{\mu_m^2} \right) \\
& \quad - 2 \sqrt{\frac{\sigma_v \sigma_m \frac{\psi_m H}{\mu_m + \delta_m} \beta_{mv}}{\sigma_v K_v + \sigma_b \frac{\psi_b H}{\mu_b} + \sigma_m \frac{\psi_m H}{\mu_m + \delta_m}} \frac{\psi_m H}{\frac{\psi_m H}{\mu_m} + 1} + \frac{\sigma_v \sigma_m \frac{\psi_m H}{\mu_m + \delta_m} \beta_{mv}}{\sigma_v K_v + \sigma_b \frac{\psi_b H}{\mu_b} + \sigma_m \frac{\psi_m H}{\mu_m + \delta_m}} \frac{\frac{\psi_m H}{\mu_m}}{\frac{\psi_m H}{\mu_m} + 1}} \\
& \quad + (\gamma_m + \mu_m) I_m(t) + \left(\frac{\sigma_4 b_{mv}(t) I_v(t)}{N_v(t)} + \frac{\sigma_4 b_{mv}(t) I_v(t) S_m(t)}{N_v(t)(I_m(t) + 1)} \right) dB_4(t),
\end{aligned}$$

pri čemu su neki nepozitivni članovi izostavljeni, primenjene ocene $S_b(t) \leq N_b(t) \leq K$, $S_m(t) \leq N_m(t) \leq \frac{\psi_m H}{\mu_m}$, $\frac{I_v(t)}{N_v(t)} \leq 1$, $b_{bv}(t), b_{mv}(t) \leq \sigma_v$, $\lambda_b(t) \leq \sigma_v \beta_{bv}$, $\lambda_m(t) \leq \sigma_v \beta_{mv}$, $\frac{1}{I_b(t)+1} \leq 1$, $\frac{1}{I_m(t)+1} \leq 1$, i nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine. Integracijom prethodne nejednakosti od 0 do t i deljenjem sa t , dobija se

$$\begin{aligned}
\frac{U(X(t)) - U(X(0))}{t} & \leq -\varpi_2 + (\gamma_b + \mu_b) \langle I_b(t) \rangle + (\gamma_m + \mu_m) \langle I_m(t) \rangle \\
& \quad + \frac{M_8(t)}{t} + \frac{M_9(t)}{t},
\end{aligned} \tag{2.26}$$

gde je ϖ_2 definisan izrazom (2.25), $M_8(t) = \int_0^t \left(\frac{\sigma_3 b_{bv}(t) I_v(t)}{N_v(t)} + \frac{\sigma_3 b_{bv}(t) I_v(t) S_b(t)}{N_v(t)(I_b(t)+1)} \right) dB_3(t)$ i $M_9(t) = \left(\frac{\sigma_4 b_{mv}(t) I_v(t)}{N_v(t)} + \frac{\sigma_4 b_{mv}(t) I_v(t) S_m(t)}{N_v(t)(I_m(t)+1)} \right) dB_4(t)$. Na osnovu osobina Brownovog kreta-

nja (Teorema 1.10), $M_8(t)$ i $M_9(t)$ su neprekidni martingali. Pored toga, važi

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{\langle M_8, M_8 \rangle_t}{t} \leq \sigma_3^2 \sigma_v^2 (1 + K^2) < +\infty \quad s.i.$$

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{\langle M_9, M_9 \rangle_t}{t} \leq \sigma_4^2 \sigma_v^2 \left(1 + \frac{\psi_m^2 H^2}{\mu_m^2}\right) < +\infty \quad s.i.$$

Primenom strogog zakona velikih brojeva za martingale (Teorema 1.51), sledi

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{M_8(t)}{t} = 0 \quad s.i., \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{M_9(t)}{t} = 0 \quad s.i.$$

Kako je $U(X(t)) \geq -\log S_b(t) - \log S_m(t) \geq -\log \frac{\psi_b H}{\mu_b} - \log \frac{\psi_m H}{\mu_m} > -\infty, t \geq 0$, tada je

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{U(X(t)) - U(X(0))}{t} = 0 \quad s.i.$$

Računanjem $\liminf$ kada $t \rightarrow +\infty$ u (2.26), dobija se

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} ((\gamma_b + \mu_b) \langle I_b(t) \rangle + (\gamma_m + \mu_m) \langle I_m(t) \rangle) \geq \varpi_2.$$

Tada je

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} (\langle I_b(t) \rangle + \langle I_m(t) \rangle) \geq \frac{1}{\max\{\gamma_b + \mu_b, \gamma_m + \mu_m\}} \varpi_2 > 0, \quad (2.27)$$

na osnovu uslova teoreme (2.25).

Sumiranjem šeste i devete jednačine sistema (2.18), a zatim integracijom i deljenjem sa t , dobija se

$$\frac{R_b(t) - R_b(0)}{t} + \frac{R_m(t) - R_m(0)}{t} = \frac{\gamma_b}{t} \langle I_b(t) \rangle - \frac{\rho_b}{t} \langle R_b(t) \rangle + \frac{\gamma_m}{t} \langle I_m(t) \rangle - \frac{\rho_m}{t} \langle R_m(t) \rangle.$$

Kako važi (2.27), računanjem $\liminf$ kada $t \rightarrow +\infty$ u prethodnoj nejednakosti, dobija se

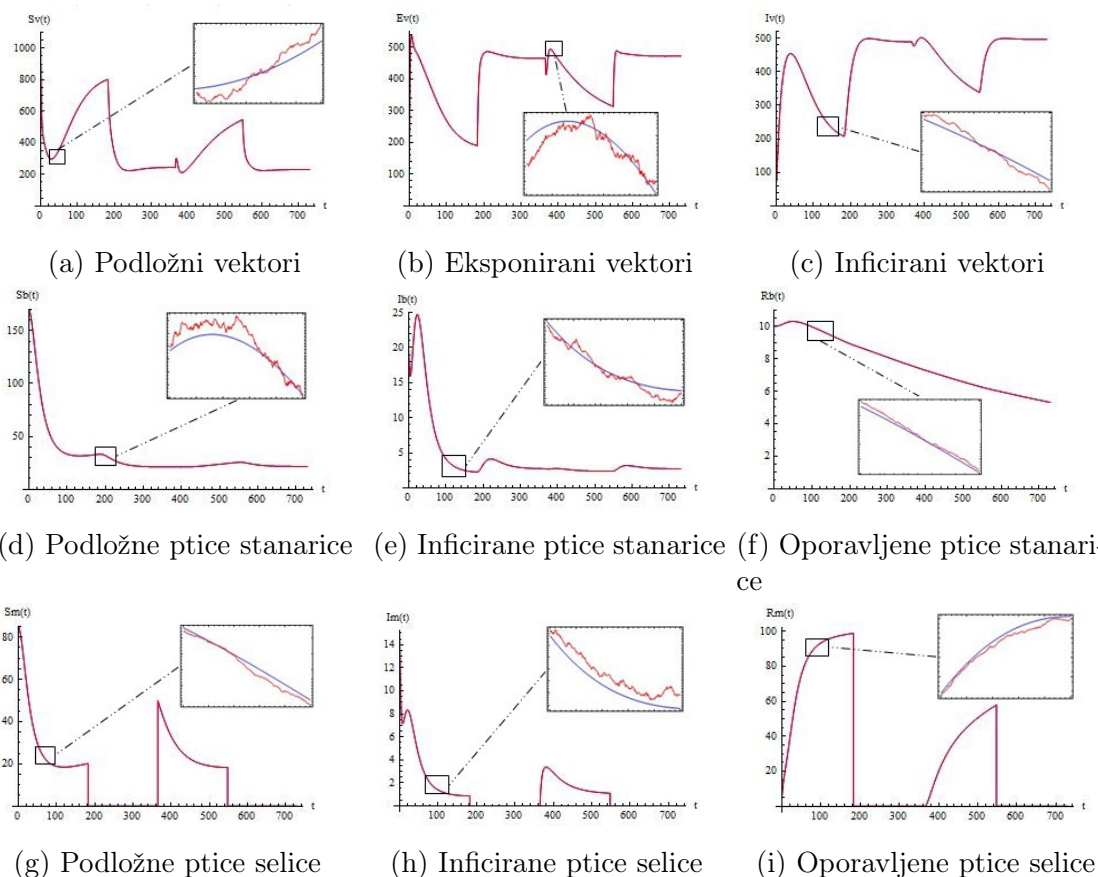
$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} (\langle R_b(t) \rangle + \langle R_m(t) \rangle) \geq \frac{\min\{\gamma_b, \gamma_m\}}{\max\{\rho_b, \rho_m\}} \frac{1}{\max\{\gamma_b + \mu_b, \gamma_m + \mu_m\}} \varpi_2 > 0.$$

Ovim je dokaz kompletan. $\triangle$

Slika 2.5 ilustruje rezultat perzistentnosti bolesti dokazan u Teoremi 2.6. Simulacije su dobijene sa parametrima modela definisanim u Tabeli 2.1 i početnim uslovima $S_v(0) = 1080, E_v(0) = 50, I_v(0) = 70, S_b(0) = 170, I_b(0) = 20, R_b(0) = 10, S_m(0) = 82, I_m(0) = 13, R_b(0) = 5$. Za ovakav izbor parametara modela odabrane su vrednosti $\sigma_1 = 0.00000003, \sigma_2 = 0.00000003, \sigma_3 = 0.0000001$ i $\sigma_4 = 0.0000001$ koje zadovoljavaju uslove Teoreme 2.6.

Za odabrane vrednosti parametra i početne uslove, sa grafika se može videti da je bolest perzistentna u populaciji, što potvrđuje teorijski rezultat.

I u ovom slučaju kada razmatrani model uključuje populacije ptica stanarica i ptica selica, dokazano je da manji intenzitet belog šuma osigurava perzistentnost bolesti, dok veći intenzitet belog šuma dovodi do iskorenjivanja bolesti.



Slika 2.5: Determinističke (plave) i stohastičke (crvene) trajektorije modela (2.18).

2.4 Zaključak i napomene

U ovoj glavi su proučavana dva stohastička epidemiološka modela za širenje virusa Zapadnog Nila. Prvi model se sastoji od populacije vektora i populacije jedne vrste ptica, dok se drugi model sastoji od populacije vektora i populacija dve vrste ptica. Slučajnost je uključena u model pod pretpostavljkom da fluktuacije okruženja prvenstveno utiču na stope prenosa virusa između vektora i populacije domaćina. Dokazano je da razmatrani sistemi imaju jedinstvena globalna pozitivna rešenja. Izvedeni su dovoljni uslovi za iskorenjivanje i perzistentnost bolesti. Na osnovu analize, može se zaključiti da manji intenzitet belog šuma doprinosi perzistentnosti bolesti, dok veći intenziteti belog šuma dovode do iskorenjivanja bolesti. Ovi rezultati pokazuju da fluktuacije okruženja opisane belim šumom imaju značajan uticaj na dinamiku širenja bolesti.

Oba stohastička modela mogu biti generalizovana pod pretpostavkom da su koeficijenti modela ograničene funkcije vremena (na primer $\psi_v(s)$ itd.). To bi modele učinilo realnijim jer bi vremenska zavisnost koeficijenata efikasnije opisivala širenje bolesti. Druga generalizacija modela je da koeficijenti zavise od parametra l koji bi uključio svojstva geografske oblasti u modele (na primer $\psi_v(l)$ itd.). Pored toga, temperatura je značajan faktor koji utiče na veličinu populacije i širenje bolesti, tako da se važna generalizacija može dobiti uzimajući da koeficijenti modela zavise od temperature (na primer $\psi_v(t)$, itd.). Model može sadržati sve tri generalizacije. U ovom slučaju koeficijenti bi bili funkcije tri parametra (na primer $\psi_v(s, l, t)$, itd.). Ove vrste generalizacija modele bi učinile realnijim.

Glava 3

Epidemiološki modeli koji uključuju više klasa inficiranih

Kao što je već pomenuto, jedan od proučavanijih epidemioloških modela u literaturi je SIR epidemiološki model, u kojem je ukupna populacija (N) podeljena u tri klase, i to klasu osetljivih (S), klasu zaraženih (I) i klasu oporavljenih (R) osoba. Epidemiološke modele je moguće modifikovati uvođenjem dodatnih klasa kako bi što realnije opisivali tok epidemije i predvideli broj slučajeva zaraze, hospitalizacija i smrtnosti tokom vremena. Uvođenje više klasa inficiranih osoba omogućava preciznije modeliranje kompleksnih epidemioloških situacija, uključujući period inkubacije, razlike u stadijumima bolesti i nivoima infektivnosti, kao i razlikovanje asimptomatskih slučajeva i osoba sa blagim simptomima od onih koje su hospitalizovane ili u kritičnom stanju. Tako modifikovani modeli omogućavaju identifikaciju populacionih grupa koje su najugroženije i pomažu u proceni resursa, kao što su kapaciteti bolnica, broj medicinskog osoblja, broj respiratora i količina lekova potrebnih za lečenje i negu pacijenata tokom epidemija. Takvi modeli realnije opisuju stvarne potrebe sistema tokom epidemija i pandemija, obezbeđujući ključne uvide za planiranje intervencija i donošenje političkih strategija vlasti u cilju očuvanja zdravlja populacije.

U Poglavlju 3.1 je predstavljena analiza dinamike i osetljivosti determinističkog i stohastičkog epidemiološkog modela širenja virusa *teškog akutnog respiratornog sindroma koronavirusa 2* (*Severe Acute Respiratory Syndrome Coronavirus 2*), SARS-CoV-2. Originalni rezultati iz ovog poglavlja su objavljeni u radu [12]. Opis epidemioloških modela je dat u Podpoglavlju 3.1.1. Podpoglavlje 3.1.2 je posvećeno analizi determinističkog epidemiološkog modela. Najpre su navedeni preliminarni rezultati u delu 3.1.2.1, a potom je u delu 3.1.2.2 izračunat osnovni reprodukcioni broj determinističkog modela, koji predstavlja epidemiološki značajan parametar i određuje potencijal zarazne bolesti da uđe u populaciju, o čemu će više reči biti u delu 3.1.2.1. U delu 3.1.2.3 je ispitano postojanje i stabilnost endemskog ekvilibrijuma. U Podpoglavlju 3.1.3 je data dinamička analiza stohastičkog epidemiološkog modela. Naime, izvedeni su potrebni i dovoljni uslovi za iskorenjivanje (u delu 3.1.3.1) i perzistentnost bolesti (u delu 3.1.3.2), i određen je osnovni reprodukcioni broj R_0^S stohastičkog modela. Podpoglavlje 3.1.4 je posvećeno analizi osetljivosti osnovnog reprodukcionog broja determinističkog i stohastičkog modela na parametre modela. U Poglavlju 3.2 su izvedeni dovoljni uslovi za postojanje stacionarne raspodele stohastičkog modela.

3.1 Analiza dinamike i osetljivosti determinističkog i stohastičkog modela širenja virusa SARS-CoV-2

Infekcije koronavirusom u populacijama ljudi nisu novina, jer je tokom poslednje dve decenije bilo nekoliko epidemija, uključujući *teški akutni respiratorni sindrom koronavirusa* (engleski naziv: *Severe Acute Respiratory Syndrome Coronavirus*, kraće: SARS-CoV), u Kini 2002. godine i *bliskoistočni respiratorni sindrom koronavirusa* (engleski naziv: *Middle East Respiratory Syndrome Coronavirus*, kraće: MERS-CoV), u Saudijskoj Arabiji 2012. godine. U novembru 2019. godine prijavljen je prvi potvrđeni slučaj SARS-CoV-2, nakon čega se SARS-CoV-2 infekcija vrlo brzo proširila širom sveta. Bolest koju izaziva virus SARS-CoV-2 poznata je kao *Covid-19*. Simptomi bolesti Covid-19 mogu biti veoma različiti, od blagih do ozbiljnih, uključujući i smrtne ishode. Zbog toga je pandemija Covid-19 proglašena globalnom vanrednom situacijom od strane Svetske zdravstvene organizacije [76].

Na temelju objavljenih istraživanja zaključuje se da se Covid-19 primarno prenosi s čoveka na čoveka oralnim putem dok respiratorne aerosole i kapljice iz okruženja kontaminirane virusom igraju manju ulogu u širenju bolesti (videti [77]). Osobe zaražene SARS-CoV-2 virusom koje pokazuju simptome bolesti prenose virus na podložne osobe bliskom kontaktom (fizička ili prostorna blizina sa zaraženim osobama, rukovanje ili grljenje). Međutim, zaraženi pojedinci mogu biti bez simptoma (*asimptomatski zaraženi*) a takođe prenositi virus (videti [78]). Na osnovu analize u [79], pojedinci sa simptomima imaju veći značaj u širenju infekcije od asimptomatskih pojedinaca. (Više informacija o asimptomatskim prenosiocima virusa i procenama njihovog učešća u zaraženoj populaciji mogu se naći u radovima [80] i [81].) Zaraženi pojedinac je *superprenosilac* virusa ukoliko ima visok nivo virusnog opterećenja, koji se javlja zbog problema sa imunitetom ili primarne bolesti, i/ili povećanu društvenu aktivnost.

Opisani su i proučavani brojni deterministički epidemiološki modeli širenja SARS-CoV-2 virusa. U radovima [82–85] su analizirani deterministički SIR i SEIR modeli kao i različite verzije ovih epidemioloških modela.

Pored toga, slučajnost iz životne sredine (npr. variranje u temperaturi, količini padavina, apsolutnoj vlažnosti vazduha i druge) i ponašanja infektivnih agenasa kao što su bakterije, virusi, gljivice i paraziti, u takvom okruženju, sugerise uvođenje Gaussovog belog šuma u epidemiološke modele kako bi se inkorporirao efekat slučajnosti. Na taj način su dobijeni stohastički epidemiološki modeli. Stohastički epidemiološki modeli širenja SARS-CoV-2 virusa su proučavani u radovima [1], [86], [87]. U [1], autori su definisali stohastički model širenja bolesti Covid-19 perturbacijom stopa prenosa bolesti i uspostavili dovoljne uslove za perzistentnost i iskorenjivanje bolesti. U ovom poglavlju su analizirani epidemiološki modeli širenja korona virusa SARS-CoV-2, koji su proučavani u radu [1].

3.1.1 SARS-CoV-2 epidemiološki modeli

Osnovna pretpostavka modela koji je analiziran u ovoj glavi je da je populacija podeljena u sedam međusobno disjunktne klase:

- S - klasa podložnih osoba,
- E - klasa osoba koje su bile izložene virusu SARS-CoV-2, ali nisu još uvek razvili virulenciju da bi mogli preneti virus (mogu postati zarazni nakon perioda inkubacije),
- I - klasa zaraženih osoba sa simptomima,

◦ P - klasa *superkliconoša* (osoba koje prenose zaraznu bolest na znatno veći broj ljudi nego što je to uobičajeno za većinu zaraženih osoba, često zbog većih količina virusa u organizmu ili specifičnih uslova koji olakšavaju prenos, kao što su kontakt u zatvorenom prostoru ili specifične navike kao što su kašljanje ili kijanje),

◦ H - klasa hospitalizovanih osoba,

◦ A - klasa asimptomatski zaraženih osoba,

◦ R - klasa osoba oporavljenih od virusa.

Ukupna veličina populacije u trenutku $t \geq 0$, je

$$N(t) = S(t) + E(t) + I(t) + P(t) + A(t) + H(t) + R(t).$$

Deterministički model se sastoji od običnih diferencijalnih jednačina (ODJ), oblika

$$\begin{aligned} dS(t) &= \left(\Lambda - \left(\frac{\beta}{N(t)} (I(t) + lH(t)) + \frac{\beta'}{N(t)} P(t) + \mu \right) S(t) \right) dt, \\ dE(t) &= \left(\frac{\beta}{N(t)} (I(t) + lH(t)) S(t) + \frac{\beta'}{N(t)} P(t) S(t) - (\kappa + \mu) E(t) \right) dt, \\ dI(t) &= (\kappa \rho_1 E(t) - (\gamma_a + k_1 \gamma_i + \delta_i) I(t)) dt, \\ dP(t) &= (\kappa \rho_2 E(t) - (\gamma_a + k_2 \gamma_i + \delta_p) P(t)) dt, \\ dH(t) &= (\gamma_a (I(t) + P(t)) - (\gamma_r + \delta_h) H(t)) dt, \\ dA(t) &= (\kappa (1 - \rho_1 - \rho_2) E(t) - (\gamma_i + \mu) A(t)) dt, \\ dR(t) &= (\gamma_i (A(t) + k_1 I(t) + k_2 P(t)) + \gamma_r H(t) - \mu R(t)) dt, \end{aligned} \quad (3.1)$$

sa početnim uslovom $S(0) = S_0$, $E(0) = E_0$, $I(0) = I_0$, $P(0) = P_0$, $H(0) = H_0$, $A(0) = A_0$, $R(0) = R_0$, pri čemu je biološka interpretacija parametara modela data u Tabeli 3.1

Simbol	Opis	Vrednost
Λ	broj novorođenih	310 [88]
β	stopa prenosa bolesti za inficirane	2.55 [83]
l	relativna prenosivost hospitalizovanih pojedinaca	1.56 [83]
β'	stopa prenosa bolesti za superkliconoše	7.65 [83]
κ	stopa po kojoj eksponirani postaju infektivni	0.25 [83]
ρ_1	stopa prelaza iz klase eksponiranih u klasu inficiranih	0.58 [83]
ρ_2	stopa prelaza iz klase eksponiranih u klasu superkliconoša	0.001 [83]
γ_a	stopa hospitalizacije	0.94 [83]
γ_r	stopa oporavka za hospitalizovane	0.5 [83]
γ_i	stopa oporavka za nehospitalizovane	0.27 [83]
k_1	težinski koeficijent stope oporavka za klasu zaraženih	0.85 [p]
k_2	težinski koeficijent stope oporavka za klasu superkliconoša	0.95 [p]
δ_i	stopa smrtnosti od bolesti za inficirane	1/23 [89]
δ_p	stopa smrtnosti od bolesti za superskliconoše	1/23 [89]
δ_h	stopa smrtnosti od bolesti za hospitalizovane	1/23 [89]
μ	prirodna stopa smrtnosti	0.00714 [88]

Tabela 3.1: Vrednosti parametara modela, dobijene na osnovu epidemije u Wuhanu u periodu Januar 4 - Mart 9, 2020, ili racionalno pretpostavljeni (k_1, k_2).

Neka su nezavisna Brownova kretanja $B_1 = \{B_1(t), t \geq 0\}$ i $B_2 = \{B_2(t), t \geq 0\}$, definisana na kompletnom prostoru verovatnoće $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ sa filtracijom $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ koja sadrži sve skupove mere nula, pri čemu je $\mathcal{F}_t := \mathcal{F}_t^{B_1} \cup \mathcal{F}_t^{B_2}$, i $\mathcal{F}_t^{B_i}$, $i = 1, 2$, su σ -algebre generisane Brownovim kretanjima B_1 i B_2 .

Stohastički model je konstruisan pod pretpostavkom da slučajnost iz okruženja najviše utiče na stope prenosa β i β' , tj. stope prenosa β i β' su perturbovane na sledeći način

$$\beta \mapsto \beta + \sigma_1 dB_1(t), \quad \beta' \mapsto \beta' + \sigma_2 dB_2(t),$$

gde su $\sigma_1 > 0$ i $\sigma_2 > 0$ intenziteti belih šumova. Dobijeni stohastički model je oblika

$$\begin{aligned} dS(t) &= \left(\Lambda - \left(\frac{\beta}{N(t)} (I(t) + lH(t)) + \frac{\beta'}{N(t)} P(t) + \mu \right) S(t) \right) dt \\ &\quad - \frac{\sigma_1}{N(t)} (I(t) + lH(t)) S(t) dB_1(t) - \frac{\sigma_2}{N(t)} P(t) S(t) dB_2(t), \\ dE(t) &= \left(\frac{\beta}{N(t)} (I(t) + lH(t)) S(t) + \frac{\beta'}{N(t)} P(t) S(t) - (\kappa + \mu) E(t) \right) dt \\ &\quad + \frac{\sigma_1}{N(t)} (I(t) + lH(t)) S(t) dB_1(t) + \frac{\sigma_2}{N(t)} P(t) S(t) dB_2(t), \\ dI(t) &= (\kappa \rho_1 E(t) - (\gamma_a + k_1 \gamma_i + \delta_i) I(t)) dt, \\ dP(t) &= (\kappa \rho_2 E(t) - (\gamma_a + k_2 \gamma_i + \delta_p) P(t)) dt, \\ dH(t) &= (\gamma_a (I(t) + P(t)) - (\gamma_r + \delta_h) H(t)) dt, \\ dA(t) &= (\kappa (1 - \rho_1 - \rho_2) E(t) - (\gamma_i + \mu) A(t)) dt, \\ dR(t) &= (\gamma_i (A(t) + k_1 I(t) + k_2 P(t)) + \gamma_r H(t) - \mu R(t)) dt, \end{aligned} \tag{3.2}$$

sa početnim uslovom

$$\begin{aligned} S(0) &= S_0, & E(0) &= E_0, & I(0) &= I_0, & P(0) &= P_0, & H(0) &= H_0, \\ A(0) &= A_0, & R(0) &= R_0, \end{aligned}$$

gde su k_1, k_2 konstante za koje važi $k_2 < k_1 < 1$. Opis i vrednosti parametara modela su dati u Tabeli [3.1](#).

3.1.2 Analiza determinističkog modela

U ovom podpoglavlju će biti proučavan deterministički model [\(3.1\)](#). Najpre su navedeni preliminarni rezultati.

3.1.2.1 Preliminarni rezultati

Neka je $x = (x_1, \dots, x_n)$, $x_i = x_i(t)$ i t vremenska promenljiva ($t \geq 0$). Posmatra se sistem običnih diferencijalnih jednačina (ODJ) koji se sastoji iz n grupa oblika

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n, \tag{3.3}$$

koji se može napisati u matričnom obliku

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad f \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^n). \tag{3.4}$$

Definicija 3.1 ([90], Definicija 1.1.6) Neka je $D \subset \mathbb{R}^n$. Vektorska funkcija $f(x)$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, zadovoljava Lipschitzov uslov po promenljivoj x u oblasti D , ako postoji konstanta $L > 0$ tako da za bilo koje dve tačke $x, y \in D$ važi

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\|.$$

Definicija 3.2 ([90], Definicija 1.1.7) Neka je $D \subset \mathbb{R}^n$. Vektorska funkcija $f(x)$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, zadovoljava lokalni Lipschitzov uslov po promenljivoj x u oblasti D , ako za svaku tačku $x_0 \in D$ postoji okolina $U \subset D$ te tačke takva da postoji konstanta $L_u > 0$, tako da za bilo koje dve tačke $x, y \in U$ važi

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L_u\|x - y\|.$$

Teorema 3.1 (Picardova teorema egzistencije i jedinstvenosti rešenja, [90], Teorema 1.1.2) Neka je vektorska funkcija $f(x)$ definisana i neprekidna u oblasti $\mathbb{G} \subset \mathbb{R}^n$ i neka zadovoljava lokalni Lipschitzov uslov po promenljivoj x na $\mathbb{G}$. Tada kroz svaku tačku $x^0 \in \mathbb{G}$ prolazi jedinstveno rešenje $x = \phi(t)$ sistema (3.3), definisano u nekoj okolini tačke t_0 .

Ako su funkcije f_i lokalno Lipschitz neprekidne po promenljivoj x na $\mathbb{G}$, po Teoremi 3.1 oblast egzistencije i jedinstvenosti rešenja dinamičkog sistema (3.3) je $\mathbb{R} \times \mathbb{G}$ - za bilo koju tačku (t_0, x^0) , $t_0 \in \mathbb{R}$, $x^0 \in \mathbb{G}$ postoji jedinstveno neproduživo rešenje $x = x(t)$ sistema (3.3), definisano na maksimalnom intervalu egzistencije $I(x^0)$, koje zadovoljava početni uslov $x(t_0) = x^0$.

Geometrijsko mesto tačaka $\Gamma = \{(t, x(t)) : t \in I(x^0)\} \subset \mathbb{G}$ se naziva integralna kriva rešenja $x = x(t)$, $t \in I(x^0)$. Ona daje potpunu informaciju o rešenju. Međutim, često je dovoljno poznavati faznu trajektoriju rešenja, kao geometrijsko mesto tačaka $\gamma = \{(x(t)) : t \in I(x^0)\} \subset \mathbb{R}^n$. Dakle, fazna trajektorija je projekcija integralne krive na fazni prostor

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}\},$$

paralelno t -osi. Specijano za $n = 2$, fazni prostor se naziva fazna ravan.

Pravac fazne trajektorije je pravac kretanja tačke $(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ po faznoj trajektoriji u pravcu rasta promenljive t . Tako se dolazi do faznog portreta-grafika faznih trajektorija u faznom prostoru (ravni) sa naznačenim pravcima.

Definicija 3.3 ([90], Definicija 7.1.2) Tačka $x_0 \in \mathbb{R}^n$ u kojoj je $f(x_0) = 0$ se naziva položaj ravnoteže ili ekvilibrijum dinamičkog sistema (3.3).

Očigledno, ako je tačka x_0 položaj ravnoteže sistema (3.4), tada ovaj sistem ima rešenje $x(t) = x_0$, $t \in \mathbb{R}$, a odgovarajuća trajektorija je upravo tačka x_0 u faznom prostoru $\mathbb{R}^n$.

Neka je

$$A := \frac{\partial f}{\partial x}(x^*) = Df(x^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x^*) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x^*) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x^*) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x^*) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x^*) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x^*) \end{pmatrix}_{n \times n}, \quad (3.5)$$

gde je x^* položaj ravnoteže sistema (3.4). Matrica A se naziva Jakobijeva matrica položaja ravnoteže x^* sistema (3.4). Linearizovan sistem dinamičkog sistema (3.4) dat je sa

$$\frac{dx}{dt} = Ax. \quad (3.6)$$

Definicija 3.4 ([90], Poglavlje 7.1) *Položaj ravnoteže x^* nelinearnog sistema (3.4) naziva se hiperbolički ako je realni deo svake sopstvene vrednosti Jakobijeve matrice $J(x^*)$ različit od nule. Ako je realni deo neke sopstvene vrednosti Jakobijeve matrice $J(x^*)$ jednak nuli, položaj ravnoteže x^* se naziva nehiperbolički.*

Definicija 3.5 (Lokalna stabilnost položaja ravnoteže, [90], Definicija 7.4.1) *Položaj ravnoteže x_0 sistema (3.4) je lokalno stabilan, ako za svako $R > 0$, postoji $r = r(R) > 0$, tako da za svaku faznu trajektoriju $x = x(t)$ ovog sistema važi*

$$\|x(t_0) - x_0\| < r \Rightarrow \|x(t) - x_0\| < R,$$

za svako $t \in [t_0, \infty)$. Položaj ravnoteže je nestabilan ako nije stabilan.

Definicija 3.6 (Lokalna asimptotska stabilnost položaja ravnoteže, [90], Definicija 7.4.2) *Položaj ravnoteže x_0 sistema (3.4) je lokalno asimptotski stabilan, ako je stabilan i postoji $\delta > 0$, tako da važi*

$$\|x(t_0) - x_0\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x_0\| = 0.$$

Definicija 3.7 (Globalna asimptotska stabilnost položaja ravnoteže, [90], Poglavlje 7.4) *Položaj ravnoteže x_0 sistema (3.4) je globalno asimptotski stabilan, ako za svaku trajektoriju $x(t)$, važi*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x_0\| = 0.$$

U nastavku je predstavljen metod matrice sledeće generacije. Posmatra se dinamički model koji se sastoji iz n grupa:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x), \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.7)$$

sa nenegativnim početnim uslovima i neka je m , $m \leq n$, broj infektivnih grupa u modelu (3.7). Definiše se X_s kao skup svih stanja bez bolesti na sledeći način

$$X_s = \{x \geq 0 | x_i = 0, i = 1, 2, \dots, m\}.$$

Definicija 3.8 ([91], Poglavlje 1) *Osnovni reprodukcionni broj R_0 definiše se kao očekivani broj sekundarnih slučajeva koje jedan zaraženi pojedinac generiše tokom svog zaraznog perioda u potpuno osetljivoj populaciji.*

Da bi se izračunao osnovni reprodukcionni broj R_0 za sistem (3.7), važno je razlikovati nove infekcije od svih drugih promena u populaciji. Neka je:

- $F_i(x)$ stopa pojavljivanja novih infekcija u grupi i ;
- $\nu_i^+(x)$ stopa pojavljivanja svih drugih individua u grupi i ;
- $\nu_i^-(x)$ stopa odlaska individua iz grupe i ;

za $i = 1, \dots, n$.

Za ovako definisane funkcije $F_i(x)$, $\nu_i^+(x)$ i $\nu_i^-(x)$ podrazumeva se da su najmanje dva puta neprekidno-diferencijabilne po svakoj promenljivoj.

Sada se sistem jednačina (3.7) može zapisati na sledeći način

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x) = F_i(x) - \nu_i(x), \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.8)$$

gde je $\nu_i(x) = \nu_i^-(x) - \nu_i^+(x)$.

Funkcije iz sistema (3.8) zadovoljavaju sledeće uslove:

- C1: Ako je $x_i \geq 0$ onda važi $F_i(x), \nu_i^+(x), \nu_i^-(x) \geq 0$ za $i = 1, \dots, n$.
- C2: Ako je $x_i = 0$ onda je $\nu_i^-(x) = 0$ (i -ta grupa je prazna pa nema ko da je napusti). Očigledno, ako $x \in X_s$ onda je $i = 0$ za svako $\nu_i^- = 1, \dots, m$.
- C3: $F_i(x) = 0$ za $i > m$.
- C4: Ako $x \in X_s$, tada je $F_i(x) = 0$ i $\nu_i(x) = 0$ za svako $i = 1, \dots, m$.
- C5: Ako je $F(x) = 0$, tada sve sopstvene vrednosti matrice $Df(x_0)$ imaju negativni realni deo.

Lema 3.1 ([91], Lema 1) *Ako je x_0 položaj ravnoteže bez bolesti sistema (3.8) i $f_i(x)$ zadovoljavaju uslove C1-C5, tada su matrice $DF(x_0)$ i $D\nu(x_0)$ date sa*

$$DF(x_0) = \begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D\nu(x_0) = \begin{pmatrix} V & 0 \\ J_3 & J_4 \end{pmatrix}, \quad (3.9)$$

gde su matrice F i V matrice dimenzija $m \times m$ definisane sa

$$F = \left(\frac{\partial F(x_0)}{\partial x_i} \right), \quad V = \left(\frac{\partial \nu(x_0)}{\partial x_i} \right), \quad (3.10)$$

za $1 \leq i \leq m$, F je nenegativna i V je invertibilna matrica.

Matrica FV^{-1} je matrica sledeće generacije a osnovni reprodukcionni broj je definisan kao spektralni radijus (tj. sopstvena vrednost matrice sa najvećim modulom) ove matrice tj.

$$R_0 = \rho(FV^{-1}), \quad (3.11)$$

gde $\rho(A)$ označava spektralni radijus matrice A .

Naredna teorema tvrdi da je osnovni reprodukcionni broj R_0 granični parametar za stabilnost položaja ravnoteže bez bolesti.

Teorema 3.2 ([91], Teorema 2) *Neka je x_0 položaj ravnoteže bez bolesti sistema (3.8) i neka funkcije $f_i(x)$ zadovoljavaju uslove C1-C5. Ako je $R_0 < 1$ tada je x_0 lokalno asimptotski stabilan položaj ravnoteže, dok ako je $R_0 > 1$ tada je x_0 nestabilan položaj ravnoteže, gde je R_0 dato sa (3.11).*

U nastavku se razmatra sistem običnih diferencijalnih jednačina (ODJ) sa parametrom ϕ :

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \phi), \quad f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad f \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}). \quad (3.12)$$

Uobičajna definicija bifurkacije je: *do bifurkacije dolazi za vrednost parametra $\phi = \phi_0$ ako postoji parametar ϕ_1 proizvoljno blizu parametra ϕ_0 tako da sistemi $\frac{dx}{dt} = f(x, \phi_1)$ i $\frac{dx}{dt} = f(x, \phi_0)$ nisu topološki ekvivalentni; konstantu ϕ_0 nazivamo bifurkacioni kritični parametar.*

Kaže se da dolazi do bifurkacije ako se sa promenom vrednosti parametra ϕ menja kvalitativna struktura faznog portreta sistema. Zapravo, može doći do promene u broju položaja ravnoteže (do nestajanja određenih ili nastajanja novih položaja ravnoteže) ili može doći do promene u stabilnosti postojećih položaja ravnoteže. Bifurkacije su veoma značajne sa stanovišta primene.

U primenama često položaj ravnoteže uvek postoji bez obzira na vrednost parametra ϕ . Međutim, može se desiti da položaj ravnoteže menja svoju stabilnost u zavisnosti od parametra. *Transkritična bifurkacija* je klasičan oblik bifurkacije koja opisuje ovakve promene u faznom portretu.

Teorija centar manifolda se koristi za određivanje lokalne stabilnosti nehiperboličkog ravnotežnog stanja. U nastavku je opisana teorija koja ne samo da može da odredi lokalnu stabilnost nehiperboličkog ravnotežnog stanja, već i rešava pitanje postojanja drugog ravnotežnog stanja (koje bifurkira iz nehiperboličkog ravnotežnog stanja). Ova teorija je zasnovana na opštoj teoriji centar manifolda.

Bez gubitka opštosti, uvodi se pretpostavka da je 0 ravnotežno stanje sistema (3.12) za sve vrednosti parametra ϕ , tj.

$$f(0, \phi) \equiv 0, \quad \forall \phi.$$

Teorema 3.3 ([92], Teorema 4.1) *Neka važe sledeći uslovi:*

◦ $A = D_x f(0, 0) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(0, 0) \right)$ je matrica linearizacije sistema (3.12) oko ravnotežnog stanja (ekvilibrijuma) 0, pri čemu je parametar ϕ evaluiran u 0. Nula je jedinstvena sopstvena vrednost matrice A , a sve ostale sopstvene vrednosti matrice A imaju negativne realne delove;

◦ Matrica A ima nenegativan desni sopstveni vektor ω i levi sopstveni vektor v koji odgovaraju sopstvenoj vrednosti nula.

Neka je f_k k -ta komponenta funkcije f i

$$a = \sum_{k,i,j=1}^n v_k \omega_i \omega_j \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial x_j}(0, 0), \quad b = \sum_{k,i=1}^n v_k \omega_i \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial \phi}(0, 0).$$

Lokalna dinamika sistema (3.12) oko ravnotežnog stanja 0 potpuno je određena izrazima a i b i važi

1. $a > 0, b > 0$. Kada je $\phi < 0$ i $|\phi| \ll 1$, ekvilibrijum 0 je lokalno asimptotski stabilan, i postoji pozitivan nestabilan ekvilibrijum; kada je $0 < \phi \ll 1$, ekvilibrijum 0 je nestabilan, i postoji negativan lokalno asimptotski stabilan ekvilibrijum;
2. $a < 0, b < 0$. Kada je $\phi < 0$ i $|\phi| \ll 1$, ekvilibrijum 0 je nestabilan; kada je $0 < \phi \ll 1$, ekvilibrijum 0 je lokalno asimptotski stabilan, i postoji pozitivan nestabilan ekvilibrijum;
3. $a > 0, b < 0$. Kada je $\phi < 0$ i $|\phi| \ll 1$, ekvilibrijum 0 je nestabilan, i postoji lokalno asimptotski stabilan negativan ekvilibrijum; kada je $0 < \phi \ll 1$, ekvilibrijum 0 je stabilan, i javlja se pozitivan nestabilan ekvilibrijum;
4. $a < 0, b > 0$. Kada je ϕ najpre negativan a potom pozitivan, ekvilibrijum 0 menja svoju stabilnost tj. iz stabilnog stanja prelazi u nestabilno. U skladu s tim, negativan nestabilan ekvilibrijum postaje pozitivan i lokalno asimptotski stabilan.

3.1.2.2 Osnovni reprodukcionni broj

Da bi se odredio osnovni reprodukcionni broj R_0 za sistem (3.1), primenjuje se metod matrice sledeće generacije (Lema 3.1). Ekvilibrijum bez bolesti sistema (3.1) je

$$\varepsilon_0 \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right).$$

Klase inficiranih pojedinaca modela (3.1) su $(E(t), I(t), P(t), H(t))$. Sledeći metodu matrice sledeće generacije, matrica F transmisivnih članova i matrica V tranzicionih članova, izračunate u tački ε_0 , date su sa

$$F = \begin{pmatrix} 0 & \beta & \beta' & l\beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} \kappa + \mu & 0 & 0 & 0 \\ -\kappa\rho_1 & \omega_i & 0 & 0 \\ -\kappa\rho_2 & 0 & \omega_p & 0 \\ 0 & -\gamma_a & -\gamma_a & \omega_h \end{pmatrix},$$

pri čemu su

$$\omega_i = \gamma_a + k_1\gamma_i + \delta_i, \quad \omega_p = \gamma_a + k_2\gamma_i + \delta_p, \quad \omega_h = \gamma_r + \delta_h. \quad (3.13)$$

Izračunavanjem dominantne sopstvene vrednosti matrice sledeće generacije $F \cdot V^{-1}$, dobija se osnovni reprodukcionni broj

$$R_0^D = \frac{\kappa}{\kappa + \mu} \frac{\omega_h(\beta\rho_1\omega_p + \beta'\rho_2\omega_i) + \ell\beta\gamma_a(\rho_1\omega_p + \rho_2\omega_i)}{\omega_h\omega_i\omega_p}.$$

Na osnovu metode matrice sledeće generacije (Teorema 3.2), ako je $R_0^D < 1$, tada je ekvilibrijum bez bolesti lokalno asimptotski stabilan a ako je $R_0^D > 1$, tada je nestabilan. Poznato je da se iskorenjivanje bolesti dešava pod uslovima za asimptotsku stabilnost ekvilibrijuma bez bolesti, dok se perzistentnost javlja kada je $R_0^D > 1$.

3.1.2.3 Postojanje i stabilnost endemskog ekvilibrijuma

U nastavku se istražuje postojanje i stabilnost endemskog ekvilibrijuma. Neka je

$$\varepsilon^* := (S^*, E^*, I^*, P^*, H^*, A^*, R^*)$$

endemski ekvilibrijum sistema. Snaga infekcije Covid-19 je označena sa

$$F^*(t) := \beta \frac{I^*(t)}{N^*(t)} + l\beta \frac{H^*(t)}{N^*(t)} + \beta' \frac{P^*(t)}{N^*(t)}. \quad (3.14)$$

Da bi se pronašli uslovi za postojanje endemskog ekvilibrijuma odnosno, kada je bar jedna od vrednosti E, I, P, H, A različita od nule, rešenja jednačina sistema (3.1) su izražena u terminima snage infekcije u stacionarnom stanju. U slučaju stacionarnog stanja (odnosno kada je desna strana modela nula), dobija se

$$\begin{aligned} S^* &= \frac{\Lambda}{F^* + \mu}, & E^* &= \frac{\Lambda F^*}{(F^* + \mu)(\kappa + \mu)}, \\ I^* &= \frac{\Lambda F^* \kappa \rho_1}{(F^* + \mu)(\kappa + \mu)\omega_i}, & P^* &= \frac{\Lambda F^* \kappa \rho_2}{(F^* + \mu)(\kappa + \mu)\omega_p}, \\ H^* &= \frac{\Lambda F^* \kappa \gamma_a (\rho_2 \omega_i + \rho_1 \omega_p)}{(F^* + \mu)(\kappa + \mu)\omega_h \omega_i \omega_p}, & A^* &= \frac{\Lambda F^* \kappa (1 - \rho_1 - \rho_2)}{(F^* + \mu)(\kappa + \mu)\sigma_a}, \end{aligned}$$

$$R^* = F^* \kappa \Lambda \left[\gamma_a \gamma_r \sigma_a (\rho_1 \omega_p + \rho_2 \omega_i) + \gamma_i \omega_h \sigma_a (k_1 \rho_1 \omega_p + k_2 \rho_2 \omega_i) + \gamma_i (1 - \rho_1 - \rho_2) \omega_h \omega_i \omega_p \right],$$

gde je $\sigma_a = \gamma_i + \mu$ i $\omega_h, \omega_i, \omega_p$ su dati izrazom (3.13). Uvrštavanjem prethodnih jednakosti u (3.14), dobija se nenulti ekvilibrijum sistema (3.1) koji zadovoljava linearne jednačine, date u terminima F^* , kao u nastavku:

$$\nu F^* = \mu \sigma_a \eta,$$

pri čemu je

$$\begin{aligned}\eta &= (\kappa + \mu)(R_0^D - 1)\omega_h\omega_i\omega_p, \\ \nu &= \sigma_a\kappa(\rho_2m_2\omega_i + \rho_1m_1\omega_p) + \sigma_a\omega_h\omega_i\omega_p(\kappa(1 - \rho_1 - \rho_2) + \mu), \\ m_1 &= \gamma_a(\gamma_r + \mu) + \omega_h(\mu + k_1\gamma_i), \\ m_2 &= \gamma_a(\gamma_r + \mu) + \omega_h(\mu + k_2\gamma_i).\end{aligned}$$

Očigledno, $\nu > 0$, dok je $\eta > 0$ samo ako je $R_0^D > 1$. Stoga se može reći da sistem (3.1) ima jedinstven pozitivan endemski ekvilibrijum kada je $R_0^D > 1$, a nema pozitivan ekvilibrijum kada je $R_0^D < 1$.

Teorema 3.4 Model (3.1) ima endemski ekvilibrijum ε^* sa svim pozitivnim komponentama, pod uslovom da je $R_0^D > 1$.

Dakle, endemski ekvilibrijum postoji ako i samo ako je $R_0^D > 1$, odnosno, ako i samo ako je ekvilibrijum bez bolesti nestabilan. U nastavku, se pokazuje da je endemski ekvilibrijum ε^* lokalno asimptotski stabilan kada je $R_0^D > 1$. Zapravo, kada je $R_0^D = 1$, model (3.1) prolazi kroz transkritičnu bifurkaciju, pri čemu je $\beta' := \beta'_c$ kritični bifurkacioni parametar, definisan sa

$$\beta' := \beta'_c = \frac{(\kappa + \mu)\omega_h\omega_p\omega_i - l\beta\kappa\gamma_a(\rho_2\omega_i + \rho_1\omega_p) - \beta\kappa\rho_1\omega_h\omega_p}{\kappa\rho_2\omega_h\omega_i}, \quad (3.15)$$

kad god je

$$\beta < \beta_c = \frac{\kappa + \mu}{\kappa} \cdot \frac{\omega_h\omega_i\omega_p}{l\gamma_a(\rho_1\omega_p + \rho_2\omega_i) + \rho_1\omega_h\omega_p}. \quad (3.16)$$

Teorema 3.5 1. Model (3.1) prolazi kroz transkritičnu bifurkaciju, pri čemu je β'_c definisan sa (3.15), kritični bifurkacioni parametar, kada koeficijent prenosa zbog regularnih zaraženih individua β zadovoljava (3.16).

2. Endemski ekvilibrijum ε^* sistema (3.1) je lokalno asimptotski stabilan ako je $R_0^D > 1$.

Dokaz. 1. Neka je $x := (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7)^T = (S, E, I, P, H, A, R)^T$. Tada se model (3.1) može zapisati u obliku

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad \text{gde je } f(x) = (f_1(x), \dots, f_7(x)),$$

na sledeći način:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= \lambda - \beta\frac{x_3}{X} - \beta'\frac{x_4}{X} - l\beta\frac{x_5}{X} - \mu x_1, \\ \frac{dx_2}{dt} &= \beta\frac{x_3}{X} + \beta'\frac{x_4}{X} + l\beta\frac{x_5}{X} - \sigma_e x_2, \\ \frac{dx_3}{dt} &= \kappa\rho_1 x_2 - \omega_i x_3, \\ \frac{dx_4}{dt} &= \kappa\rho_2 x_2 - \omega_p x_4, \\ \frac{dx_5}{dt} &= \gamma_a x_3 + \gamma_a x_4 - \omega_h x_5, \\ \frac{dx_6}{dt} &= \kappa(1 - \rho_1 - \rho_2)x_2 - \sigma_a x_6, \\ \frac{dx_7}{dt} &= k_1\gamma_i x_3 + k_2\gamma_i x_4 + \gamma_r x_5 + \gamma_i x_6 - \mu x_7,\end{aligned} \quad (3.17)$$

pri čemu je $X = x_1 + \dots + x_7$, $\sigma_e = \kappa + \mu$, $\sigma_a = \gamma_i + \mu$ i $\omega_h, \omega_i, \omega_p$ su dati izrazima (3.13). Jakobijan $\mathbb{J}^*$ sistema (3.17) u tački ε_0 ekvilibrijuma bez bolesti, je

$$\mathbb{J}^* = \begin{pmatrix} -\mu & 0 & -\beta & -\beta' & -l\beta & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma_e & \beta & \beta' & l\beta & 0 & 0 \\ 0 & \kappa\rho_1 & -\omega_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \kappa\rho_2 & 0 & -\omega_p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_a & \gamma_a & -\omega_h & 0 & 0 \\ 0 & \kappa(1 - \rho_1 - \rho_2) & 0 & 0 & 0 & -\sigma_a & 0 \\ 0 & 0 & k_1\gamma_i & k_2\gamma_i & \gamma_r & \gamma_i & -\mu \end{pmatrix}.$$

Karakteristična jednačina matrice $\mathbb{J}^*$ koja odgovara sopstvenoj vrednosti λ je $\det(\mathbb{J}^* - \lambda \mathbb{I}_7) = 0$. Na osnovu karakteristične jednačine, tri sopstvene vrednosti matrice $\mathbb{J}^*$ su realne i negativne, odnosno, $\lambda_1 = \lambda_2 = -\mu$ i $\lambda_3 = -\sigma_a = -\gamma_i - \mu$. Ostale četiri sopstvene vrednosti se mogu dobiti iz sledeće jednačine

$$Q(\lambda) = \lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4 = 0,$$

pri čemu je

$$\begin{aligned} a_4 &= \omega_h\omega_i\omega_p\sigma_e(1 - R_0^D), \\ a_3 &= \sigma_e(\omega_h\omega_i + \omega_h\omega_p + \omega_i\omega_p) + \omega_h\omega_i\omega_p - l\beta\kappa\gamma_a(\rho_1 + \rho_2) \\ &\quad - \kappa\omega_h(\beta\rho_1 + \beta'\rho_2) - \kappa(\beta\rho_1\omega_p + \beta'\rho_2\omega_i), \\ a_2 &= \sigma_e(\omega_h + \omega_i + \omega_p) + \omega_h\omega_i + \omega_h\omega_p + \omega_i\omega_p - \kappa(\beta\rho_1 + \beta'\rho_2), \\ a_1 &= \sigma_e + \omega_h + \omega_i + \omega_p. \end{aligned} \quad (3.18)$$

U nastavku se proučava slučaj kada je $R_0^D = 1$. Neka je β' bifurkacioni parametar. Rešavanjem $R_0^D = 1$ po β' , dobija se (3.16). Uz pretpostavku (3.16), β'_c je pozitivno. Za $\beta' = \beta'_c$, na osnovu (3.18) dobija se $a_4 = 0$ i $a_1 > 0$, $a_1a_2 - a_3 > 0$, tako da je $\lambda = 0$ koren polinoma $Q(\lambda)$, i na osnovu kriterijuma stabilnosti Routh-Hurwitz sledi da ostala tri korena ovog polinoma imaju strogo negativne realne delove.

Stoga, transformisani sistem (3.17), za $\beta' = \beta'_c$, ima hiperbolički ekvilibrijum, odnosno, Jakobijan $\mathbb{J}^*$ evaluiran za $\beta = \beta'_c$, u oznaci $\mathbb{J}^*|_{\beta'=\beta'_c}$, ima jednostavnu sopstvenu vrednost sa nulitim realnim delom, dok sve ostale sopstvene vrednosti imaju negativne realne delove.

2. Teorema 3.3 se može koristiti za analizu dinamike modela (3.17) u okolini $\beta' = \beta'_c$. Jacobijan $J^*|_{\beta=\beta'_c}$ ima desni sopstveni vektor (koji odgovara sopstvenoj vrednosti nula) $v = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7)^T$, pri čemu je

$$v_1 = -\sigma_a\sigma_e\omega_h\omega_i\omega_p, \quad v_2 = \mu\sigma_a\omega_h\omega_i\omega_p, \quad v_3 = \kappa\mu\rho_1\sigma_a\omega_h\omega_p, \quad v_4 = \kappa\mu\rho_2\sigma_a\omega_h\omega_i,$$

$$v_5 = \kappa\mu\gamma_a\sigma_a(\rho_1\omega_p + \rho_2\omega_i), \quad v_6 = \kappa\mu(1 - \rho_1 - \rho_2)\omega_h\omega_i\omega_p, \quad v_7 = \kappa\Omega,$$

$$\Omega = \gamma_a\gamma_r\sigma_a(\rho_1\omega_p + \rho_2\omega_i) + \gamma_i\omega_h(\sigma_a(k_2\rho_2\omega_i + k_1\rho_1\omega_p) + (1 - \rho_1 - \rho_2)\omega_i\omega_p),$$

i levi sopstveni vektor (koji odgovara sopstvenoj vrednosti nula) $u = (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7)$, gde je

$$u_1 = u_6 = u_7 = 0, \quad u_2 = \kappa\rho_2\omega_h\omega_i, \quad u_3 = \beta\kappa\rho_2(l\gamma_a + \omega_h),$$

$$u_4 = \sigma_e\omega_h\omega_i - \beta\kappa\rho_1(l\gamma_a + \omega_h), \quad u_5 = l\beta\kappa\rho_2\omega_i.$$

Odnosno, važi

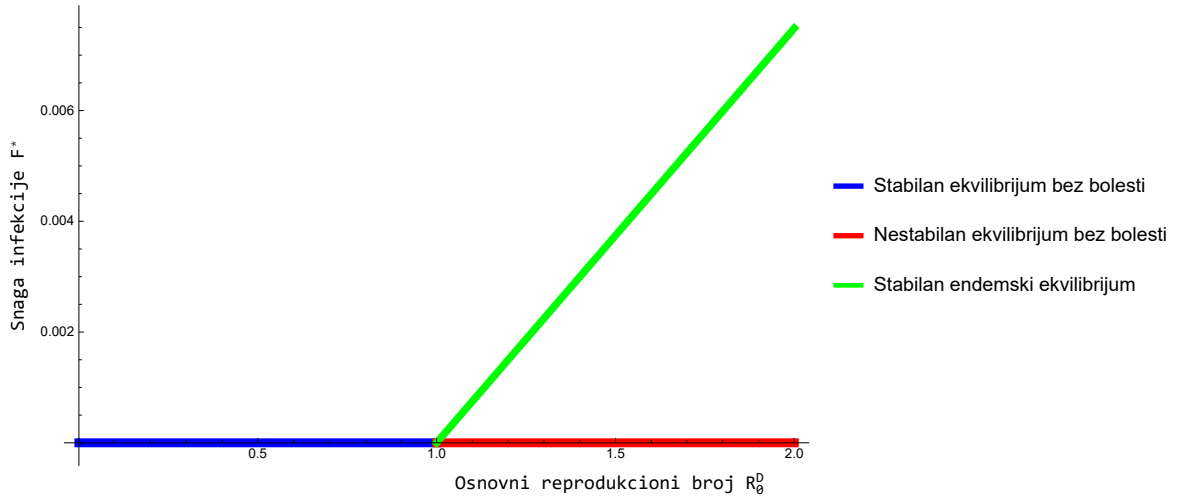
$$\begin{aligned}
 a &= \sum_{k,i,j=1}^7 u_k v_i v_j \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial x_j}(\varepsilon_0) \Big|_{\beta'=\beta'_c} \\
 &= -\frac{2\kappa\sigma_a\sigma_e\rho_2\mu^2\omega_h^2\omega_i^2\omega_p}{\Lambda} \\
 &\quad \times \left[\kappa\Omega + \kappa\sigma_a\mu(\gamma_a + \omega_h)(\rho_2\omega_i + \rho_1) + \mu\omega_h\omega_i\omega_p(\kappa(1 - \rho_1 - \rho_2) + \sigma_a) \right] < 0, \\
 b &= \sum_{k,i=1}^7 u_k v_i \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial \beta'}(\varepsilon_0) \Big|_{\beta'=\beta'_c} = \mu\sigma_a(\kappa\rho_2\omega_h\omega_i)^2 > 0.
 \end{aligned}$$

Primenom Teoreme 3.3 transkritična bifurkacija se dešava pri $R_0^D = 1$, a jedinstveni endemski ekvilibrijum je lokalno asimptotski stabilan za $R_0^D > 1$. $\triangle$

Rezultati Teoreme 3.5 numerički su ilustrovani simulacijom modela (3.1) koristeći sledeći skup parametarskih vrednosti

$$\begin{aligned}
 \rho_1 = 0.58; \quad \rho_2 = 0.001; \quad \gamma_a = 0.94; \quad \gamma_i = 0.27; \quad \delta_i = \delta_p = \delta_h = \frac{1}{23}; \\
 \gamma_r = 0.5; \quad k_1 = 0.85; \quad k_2 = 0.95; \quad \mu = 0.00714; \quad \kappa = 0.25.
 \end{aligned} \quad (3.19)$$

Dobijeni rezultat je prikazan na Slici 3.1, gde je prikazana snaga infekcije Covid-19 F^* kao funkcija osnovnog reproduktionog broja $R_0^D \in [0, 2]$.



Slika 3.1: Transkritična bifurkacija za snagu infekcije F^* u odnosu na osnovni reprodukcionni broj R_0^D modela (3.1), koristeći vrednosti parametara date u (3.19)

Uzimajući $l = 0.97$, dobija se da je $\beta_c = 0.802476$, i kako bi uslov (3.16) bio zadovoljen, neka je $\beta = 0.8$, što daje vrednost kritičnog bifurkacionog parametra $\beta'_c = 3.9353$. Tada je snaga infekcije Covid-19 F^* , kao funkcija koeficijenta prenosa superprenosioca $\beta' \in [3.6, 4.3]$, prikazana na Slici 3.2.

3.1.3 Dinamička analiza stohastičkog modela

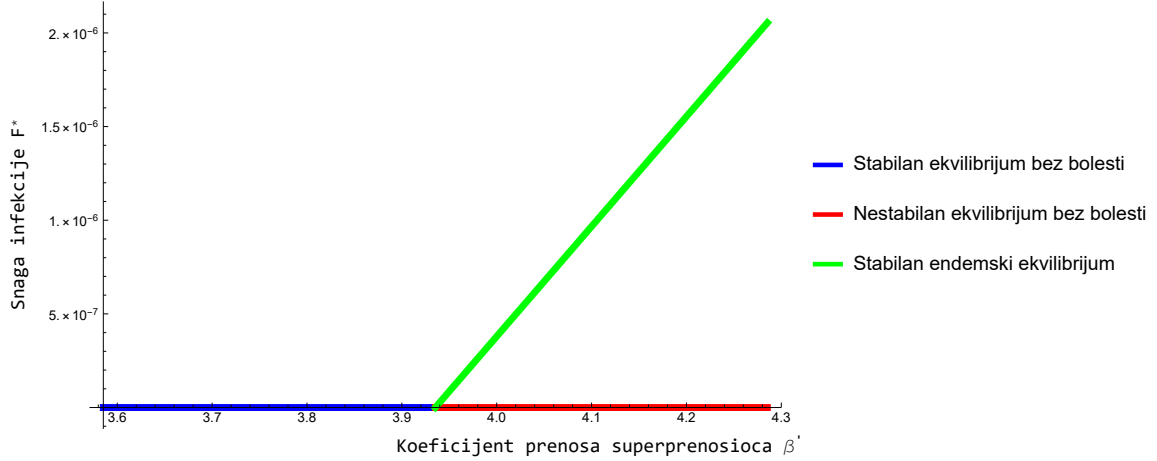
U ovom podpoglavlju će biti proučavana dinamika stohastičkog modela (3.2).

Najpre je sledećom teoremom pokazano da je rešenje sistema (3.2) globalno i pozitivno.

Neka je

$$\Gamma^* = \{(S(t), E(t), I(t), P(t), H(t), A(t), R(t)) :$$

$$S(t) > 0, E(t) > 0, I(t) > 0, P(t) > 0, H(t) > 0, A(t) > 0, R(t) > 0, N(t) \leq \Lambda/\mu\}$$



Slika 3.2: Transkritična bifurkacija za silu infekcije F^* u odnosu na koeficijent prenosa superprenosioca β' modela (3.1), koristeći vrednosti parametara (3.19) i $l = 0.97$, $\beta = 0.8$.

Teorema 3.6 Za proizvoljnu početnu vrednost $(S(0), E(0), I(0), P(0), H(0), A(0), R(0)) \in \Gamma^*$, sistem (3.2) ima jedinstveno globalno pozitivno rešenje $(S(t), E(t), I(t), P(t), H(t), A(t), R(t))$. Staviše, važi da je

$$\frac{\Lambda}{\mu + \delta} \leq N(t) \leq \frac{\Lambda}{\mu}, \quad t \geq 0.$$

Dokaz. Kako koeficijenti sistema (3.2) zadovoljavaju lokalni Lipschitzov uslov, to za proizvoljnu početnu vrednost $(S(0), E(0), I(0), P(0), H(0), A(0), R(0))$ postoji jedinstveno lokalno rešenje na $[0, \tau_e]$, gde je τ_e vreme eksplozije (Teorema 1.15). Da bi se pokazalo da je ovo rešenje globalno, potrebno je pokazati da je $\tau_e = \infty$ s.i. Neka je $k_0 > 0$ dovoljno veliko tako da su $S(0), E(0), I(0), P(0), H(0), A(0)$ i $R(0)$ unutar segmenta $[\frac{1}{k_0}, k_0]$. Za svako $k \geq k_0$, definiše se vreme zaustavljanja na sledeći način

$$\tau_k = \inf \left\{ t \in [0, \tau_e) : \min \{S(t), E(t), I(t), P(t), H(t), A(t), R(t)\} \leq \frac{1}{k} \text{ ili } \max \{S(t), E(t), I(t), P(t), H(t), A(t), R(t)\} \geq k \right\}.$$

Niz τ_k je rastući po k . Neka je $\tau_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} \tau_k$. Tada, $\tau_\infty \leq \tau_e$ s.i. Ako se pokaže $\tau_\infty = \infty$ s.i, tada je $\tau_e = \infty$, odnosno, $(S(t), E(t), I(t), P(t), H(t), A(t), R(t)) \in \mathbb{R}_+^7$, s.i. za svako $t \geq 0$. Ako ovo ne bi bilo zadovoljeno, tada postoji $T > 0$ i $\epsilon \in (0, 1)$ tako da $\mathbb{P}\{\tau_\infty \leq T\} > \epsilon$. Prema tome, postoji ceo broj $k_1 \geq k_0$ tako da $\mathbb{P}\{\tau_k \leq T\} \geq \epsilon$ za svako $k \geq k_1$.

Kako $N(t) = S(t) + E(t) + I(t) + P(t) + H(t) + A(t) + R(t)$, $t \geq 0$, označava ukupnu populaciju, sumiranjem jednačina sistema (3.2), dobija se diferencijalna jednačina

$$dN(t) = (\Lambda - \delta_i I(t) - \delta_p P(t) - \delta_h H(t) - \mu(S(t) + E(t) + A(t) + R(t)))dt.$$

Neka je $\delta = \max\{\delta_i, \delta_p, \delta_h\}$. Tada je

$$\begin{aligned} (\Lambda - (\mu + \delta)N(t))dt &\leq dN(t) \leq (\Lambda - \mu N(t))dt \\ \Leftrightarrow (\mu + \delta) \left(\frac{\Lambda}{\mu + \delta} - N(t) \right) dt &\leq dN(t) \leq \mu \left(\frac{\Lambda}{\mu} - N(t) \right) dt, \end{aligned}$$

za $t \in [0, \tau_k)$. Oдавde sledi

$$\begin{aligned} d\left(\frac{\Lambda}{\mu+\delta} - N(t)\right) + (\mu + \delta) \left(\frac{\Lambda}{\mu+\delta} - N(t)\right) dt &\leq 0, \\ d\left(\frac{\Lambda}{\mu} - N(t)\right) + \mu \left(\frac{\Lambda}{\mu} - N(t)\right) dt &\geq 0, \end{aligned}$$

za $t \in [0, \tau_k)$. Integracijom od 0 do t , $t \in [0, \tau_k)$, dobija se

$$\begin{aligned} \left(\frac{\Lambda}{\mu+\delta} - N(t)\right) &\leq \left(\frac{\Lambda}{\mu+\delta} - N(0)\right) e^{-\int_0^t (\mu+\delta) ds}, \\ \left(\frac{\Lambda}{\mu} - N(t)\right) &\geq \left(\frac{\Lambda}{\mu} - N(0)\right) e^{-\int_0^t \mu ds}. \end{aligned}$$

Na osnovu uslova teoreme, kako je $\frac{\Lambda}{\mu+\delta} \leq N(0) \leq \frac{\Lambda}{\mu}$, sledi

$$\frac{\Lambda}{\mu+\delta} \leq N(t) \leq \frac{\Lambda}{\mu}, \quad t \in [0, \tau_k).$$

Neka je $\mathbb{C}^2$ -funkcija $F : \mathbb{R}_+^7 \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ definisana na sledeći način

$$\begin{aligned} F(X(t)) &= F(S(t), E(t), I(t), P(t), H(t), A(t), R(t)) \\ &= S(t) - 1 - \ln S(t) + (E(t) - \ln(E(t) + 1)) + (I(t) - 1 - \ln I(t)) \\ &\quad + (P(t) - \ln(P(t) + 1)) + (H(t) - 1 - \ln H(t)) + (A(t) - 1 - \ln A(t)) \\ &\quad + (R(t) - 1 - \ln R(t)). \end{aligned} \tag{3.20}$$

Kako je $u - 1 - \ln u \geq 0$ za svako $u > 0$, to je $F(X(t))$ nenegativna funkcija. Neka je $k \geq k_0$ i $T > 0$ proizvoljno. Primenom Itôve formule (Teorema 1.12), dobija se

$$\begin{aligned} dF(X(t)) &= LF(X(t))dt + \sigma_1 \left(1 - \frac{S(t)}{E(t)+1}\right) \frac{I(t) + lH(t)}{N(t)} dB_1(t) \\ &\quad + \sigma_2 \left(1 - \frac{S(t)}{E(t)+1}\right) \frac{P(t)}{N(t)} dB_2(t), \end{aligned}$$

gde je $LF : \mathbb{R}_+^7 \rightarrow \mathbb{R}$ definisano sa

$$\begin{aligned} LF(X(t)) &= \left(1 - \frac{1}{S(t)}\right) \left(\Lambda - \left(\frac{\beta}{N(t)} (I(t) + lH(t)) + \frac{\beta'}{N(t)} P(t) + \mu\right) S(t)\right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sigma_1^2 \frac{(I(t) + lH(t))^2}{N^2(t)} + \frac{1}{2} \sigma_2^2 \frac{P^2(t)}{N^2(t)} \\ &\quad + \left(1 - \frac{1}{E(t)+1}\right) \left(\frac{\beta S(t)}{N(t)} (I(t) + lH(t)) + \frac{\beta' S(t)}{N(t)} P(t) - (\kappa + \mu) E(t)\right) \\ &\quad + \frac{\sigma_1^2}{2} \frac{(I(t) + lH(t))^2 S^2(t)}{(E(t)+1)^2 N^2(t)} + \frac{\sigma_2^2}{2} \frac{P^2(t) S^2(t)}{(E(t)+1)^2 N^2(t)} \\ &\quad + \left(1 - \frac{1}{I(t)}\right) (\kappa \rho_1 E(t) - (\gamma_a + k_1 \gamma_i + \delta_i) I(t)) \\ &\quad + \left(1 - \frac{1}{P(t)}\right) (\kappa \rho_2 E(t) - (\gamma_a + k_2 \gamma_i + \delta_p) P(t)) \\ &\quad + \left(1 - \frac{1}{H(t)}\right) (\gamma_a (I(t) + P(t)) - (\gamma_r + \delta_h) H(t)) \\ &\quad + \left(1 - \frac{1}{A(t)}\right) (\kappa (1 - \rho_1 - \rho_2) E(t) - (\gamma_i + \mu) A(t)) \\ &\quad + \left(1 - \frac{1}{R(t)}\right) (\gamma_i (A(t) + k_1 I(t) + k_2 P(t)) + \gamma_r H(t) - \mu R(t)) \\ &\leq C. \end{aligned}$$

Na osnovu poslednje dve relacije, dobija se

$$\begin{aligned} dF(X(t)) \leq & Cdt + \sigma_1 \left(1 - \frac{S(t)}{E(t)+1}\right) \frac{I(t) + lH(t)}{N(t)} dB_1(t) \\ & + \sigma_2 \left(1 - \frac{S(t)}{E(t)+1}\right) \frac{P(t)}{N(t)} dB_2(t). \end{aligned}$$

Integracijom poslednje nejednakosti od 0 do $\tau_k \wedge T = \min\{\tau_k, T\}$ i računanjem očekivanja, sledi

$$\mathbb{E}F(X(\tau_k \wedge T)) \leq C\mathbb{E}(\tau_k \wedge T) + F(X(0)) \leq CT + F(X(0)).$$

Neka je $\Omega_k = \{k \leq T\}$. Tada je $\mathbb{P}(\Omega_k) \geq \epsilon$. Za svako $\omega \in \Omega_k$, bar jedan od $S(\tau_k, \omega)$, $E(\tau_k, \omega)$, $I(\tau_k, \omega)$, $P(\tau_k, \omega)$, $H(\tau_k, \omega)$, $A(\tau_k, \omega)$ i $R(\tau_k, \omega)$ je jednak ili k ili $\frac{1}{k}$. Dakle, $F(S(\tau_k, \omega), E(\tau_k, \omega), I(\tau_k, \omega), P(\tau_k, \omega), H(\tau_k, \omega), A(\tau_k, \omega), R(\tau_k, \omega))$ nije manje ili od $k - 1 - \ln k$ ili od $\frac{1}{k} - 1 - \ln \frac{1}{k}$. Prema tome, važi

$$F(X(\tau_k \wedge T)) \geq \min \left\{ k - 1 - \ln k, \frac{1}{k} - 1 - \ln \frac{1}{k} \right\}.$$

Tada je

$$CT + F(X(0)) \geq \mathbb{E}[I_{\Omega_k} F(X(\tau_k \wedge T))] \geq \epsilon \min \left\{ k - 1 - \ln k, \frac{1}{k} - 1 - \ln \frac{1}{k} \right\},$$

gde je I_{Ω_k} indikator događaja Ω_k . Kada $k \rightarrow \infty$, dobija se

$$\infty > F(X(0)) + CT = \infty,$$

što je u suprotnosti sa pretpostavkom. Dakle, $\tau_\infty = \infty$ s.i, čime je dokaz kompletan. $\triangle$

Napomena 3.1 Skup Γ^* je pozitivno invarijantni skup sistema (3.2) za svako $t > 0$, odnosno, za početnu vrednost sistema (3.2) koja pripada skupu Γ^* , rešenje sistema (3.2) neće napustiti Γ^* .

Neka je

$$R_0^S = \frac{\beta h_1 + \beta' h_2}{\kappa + \mu + \frac{\sigma_1^2}{2} h_1^2 + \frac{\sigma_2^2}{2} h_2^2}, \quad (3.21)$$

gde su $\omega_i, \omega_p, \omega_h$ definisani izrazom (3.13), $h_1 := \left(1 + l \frac{\gamma_a}{\omega_h}\right) \frac{\kappa \rho_1}{\omega_i} + l \frac{\gamma_a}{\omega_h} \frac{\kappa \rho_2}{\omega_p}$ i $h_2 := \frac{\kappa \rho_2}{\omega_p}$.

3.1.3.1 Iskorenjivanje bolesti

Teorema 3.7 Za proizvoljnu početnu vrednost $(S(0), E(0), I(0), P(0), A(0), H(0), R(0)) \in \Gamma^*$ sistema (3.2), ako važi

$$\sigma_1^2 \leq \frac{\beta}{h_1}, \quad \sigma_2^2 \leq \frac{\beta'}{h_2} \quad i \quad R_0^S < 1,$$

gde je R_0^S definisano sa (3.21), tada dolazi do iskorenjivanja bolesti, odnosno,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (E(t) + I(t) + P(t) + H(t) + A(t) + R(t)) = 0 \quad s.i.$$

i

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} S(t) = \frac{\Lambda}{\mu} \quad s.i.$$

Dokaz. Neka je $\sigma_1^2 \leq \frac{\beta}{h_1}$, $\sigma_2^2 \leq \frac{\beta'}{h_2}$ i $R_0^S < 1$. Integracijom treće jednačine sistema (3.2), dobija se

$$I(t) - I(0) = \kappa\rho_1 \int_0^t E(s)ds - (\gamma_a + k_1\gamma_i + \delta_i) \int_0^t I(s)ds.$$

Kako je $0 < I(t), I(0) \leq \frac{\Lambda}{\mu}$, tada je

$$\begin{aligned} -\frac{\Lambda}{\mu} &\leq \kappa\rho_1 \int_0^t E(s)ds - (\gamma_a + k_1\gamma_i + \delta_i) \int_0^t I(s)ds \leq \frac{\Lambda}{\mu}, \\ 0 &\leq \kappa\rho_1 E(t) - (\gamma_a + k_1\gamma_i + \delta_i)I(t) \leq 0, \end{aligned}$$

što implicira

$$\frac{I(t)}{E(t)} = \frac{\kappa\rho_1}{\gamma_a + k_1\gamma_i + \delta_i} = \frac{\kappa\rho_1}{\omega_i}. \quad (3.22)$$

Slično, na osnovu četvrte i pete jednačine sistema (3.2), dobija se

$$\frac{P(t)}{E(t)} = \frac{\kappa\rho_2}{\omega_p} \quad \text{i} \quad \frac{H(t)}{I(t) + P(t)} = \frac{\gamma_a}{\omega_h}. \quad (3.23)$$

Na osnovu (3.22) i (3.23), sledi da je

$$\begin{aligned} \frac{(I(t) + lH(t))S(t)}{E(t)N(t)} &\leq \frac{I(t) + lH(t)}{E(t)} = \frac{\left(1 + l\frac{\gamma_a}{\omega_h}\right)I(t) + l\frac{\gamma_a}{\omega_h}P(t)}{E(t)} \\ &= \left(1 + l\frac{\gamma_a}{\omega_h}\right)\frac{\kappa\rho_1}{\omega_i} + l\frac{\gamma_a}{\omega_h}\frac{\kappa\rho_2}{\omega_p} = h_1, \\ \frac{P(t)S(t)}{E(t)N(t)} &\leq \frac{P(t)}{E(t)} = \frac{\kappa\rho_2}{\omega_p} = h_2. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Primenom formule Itôa (Teorema 1.12) na funkciju $\log E(t)$, dobija se

$$\begin{aligned} d(\log E(t)) &= \frac{1}{E(t)} \left(\frac{\beta}{N(t)} (I(t) + lH(t))S(t) + \frac{\beta'}{N(t)} P(t)S(t) - (\kappa + \mu)E(t) \right) dt \\ &\quad - \frac{S^2(t)}{2E^2(t)N^2(t)} (\sigma_1^2 (I(t) + lH(t))^2 + \sigma_2^2 P^2(t)) dt \\ &\quad + \frac{S(t)}{E(t)N(t)} (\sigma_1 (I(t) + lH(t))dB_1(t) + \sigma_2 P(t)dB_2(t)) \\ &\leq \left(\beta h_1 + \beta' h_2 - (\kappa + \mu) - \frac{\sigma_1^2}{2} h_1^2 - \frac{\sigma_2^2}{2} h_2^2 \right) dt \\ &\quad + \frac{S(t)}{E(t)N(t)} (\sigma_1 (I(t) + lH(t))dB_1(t) + \sigma_2 P(t)dB_2(t)) \\ &=: R^* dt + \sigma_1 \frac{S(t)(I(t) + lH(t))}{E(t)N(t)} dB_1(t) + \sigma_2 \frac{S(t)P(t)}{E(t)N(t)} dB_2(t), \end{aligned} \quad (3.25)$$

pri čemu je primenjena osobina da su funkcije $f_1(x) = \beta x - \frac{1}{2}\sigma_1^2 x^2$ (gde je $x = \frac{S(t)(I(t)+lH(t))}{E(t)N(t)}$) i $f_2(y) = \beta' y - \frac{1}{2}\sigma_2^2 y^2$ (gde je $y = \frac{S(t)P(t)}{E(t)N(t)}$) rastuće na segmentima $\left[0, \frac{\beta}{\sigma_1^2}\right]$ i $\left[0, \frac{\beta'}{\sigma_2^2}\right]$, redom, i ograničenost rešenja. Integracijom poslednje nejednakosti od 0 do t i deljenjem sa t , sledi

$$\frac{\log E(t) - \log E(0)}{t} \leq \frac{1}{t} \int_0^t R^* dt + \frac{M_1(t)}{t} + \frac{M_2(t)}{t}, \quad (3.26)$$

pri čemu su

$$M_1(t) = \sigma_1 \int_0^t \frac{S(s)(I(s) + lH(s))}{E(s)N(s)} dB_1(s), \quad M_2(t) = \sigma_2 \int_0^t \frac{S(s)P(s)}{E(s)N(s)} dB_2(s).$$

Na osnovu osobina Brownovog kretanja (Teorema 1.10), $M_1(t)$ i $M_2(t)$ su neprekidni martingali za koje važi $M_1(0) = 0, M_2(0) = 0$ i

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\langle M_1, M_1 \rangle_t}{t} \leq \sigma_1^2 h_1^2 < \infty, \quad \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\langle M_2, M_2 \rangle_t}{t} \leq \sigma_2^2 h_2^2 < \infty,$$

pri čemu je primenjena relacija (3.24). Na osnovu strogog zakona velikih brojeva za neprekidne martingale (Teorema 1.7), sledi

$$\frac{M_1(t)}{t} \rightarrow 0 \quad \text{i} \quad \frac{M_2(t)}{t} \rightarrow 0 \quad \text{s.i.} \quad \text{kada } t \rightarrow \infty. \quad (3.27)$$

Računanjem $\limsup$ kada $t \rightarrow \infty$ u (3.26) i primenom prethodne ocene, dobija se

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log E(t)}{t} &\leq \beta h_1 + \beta' h_2 - (\kappa + \mu) - \frac{\sigma_1^2}{2} h_1^2 - \frac{\sigma_2^2}{2} h_2^2 \\ &= \left(\kappa + \mu + \frac{\sigma_1^2}{2} h_1^2 + \frac{\sigma_2^2}{2} h_2^2 \right) (R_0^S - 1) < 0 \quad \text{s.i.}, \end{aligned}$$

odakle sledi

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E(t) = 0 \quad \text{s.i.} \quad (3.28)$$

EksPLICITNIM rešavanjem jednačina sistema (3.2), dobija se

$$\begin{aligned} I(t) &= e^{-(\gamma_a + k_1 \gamma_i + \delta_i)t} I(0) + \kappa \rho_1 \frac{1}{t} \int_0^t E(s) ds, \\ P(t) &= e^{-(\gamma_a + k_2 \gamma_i + \delta_p)t} P(0) + \kappa \rho_2 \frac{1}{t} \int_0^t E(s) ds, \\ H(t) &= e^{-(\gamma_r + \delta_h)t} H(0) + \gamma_a \frac{1}{t} \int_0^t (I(s) + P(s)) ds, \\ A(t) &= e^{-(\gamma_i + \mu)t} A(0) + \kappa (1 - \rho_1 - \rho_2) \frac{1}{t} \int_0^t E(s) ds, \\ R(t) &= e^{-\mu t} R(0) + \gamma_i \frac{1}{t} \int_0^t (I(s) + P(s) + A(s)) ds + \gamma_r \frac{1}{t} \int_0^t H(s) ds. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Računajući graničnu vrednost kada $t \rightarrow \infty$ u (3.29), primenom L'Hôpitalovog pravila i (3.28), sledi da je

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} I(t) &= 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} A(t) = 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} H(t) &= 0, \quad \text{i} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} R(t) = 0 \quad \text{s.i.} \end{aligned}$$

Kako je

$$N(t) = S(t) + E(t) + I(t) + P(t) + H(t) + A(t) + R(t),$$

i $\lim_{t \rightarrow \infty} (E(t) + I(t) + P(t) + H(t) + A(t) + R(t)) = 0$, na osnovu Teoreme 3.6, sledi da je

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} S(t) = \limsup_{t \rightarrow \infty} N(t) = \frac{\Lambda}{\mu}, \quad s.i.$$

Ovim je dokaz kompletan. $\triangle$

3.1.3.2 Perzistentnost u srednjem bolesti

Virus ostaje perzistentan u srednjem u populaciji ako bar jedna od klasa zaraženih (zaraženih sa simptomima I , zaraženih bez simptoma A , zaraženih koji su hospitalizovani H ili superkliconoša P) nije prazna. U matematičkim terminima, u skladu sa analizom u radu [1], sistem (3.2) je perzistentan u srednjem ako važi

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t (I(s) + P(s) + A(s) + H(s)) ds > 0 \quad s.i. \quad (3.30)$$

Uvodi se oznaka

$$\langle x(t) \rangle := \frac{1}{t} \int_0^t x(s) ds.$$

Teorema 3.8 *Neka je $(S(t), E(t), I(t), P(t), A(t), H(t), R(t)) \in \Gamma^*$, rešenje sistema (3.2) sa proizvoljnom početnom vrednošću $(S(0), E(0), I(0), P(0), A(0), H(0), R(0)) \in \Gamma^*$. Ako važi*

$$\sigma_1^2 \leq \frac{2\beta}{h_1}, \quad \sigma_2^2 \leq \frac{2\beta'}{h_2} \quad i \quad R_0^S > 1,$$

pri čemu je R_0^S definisano sa (3.21), tada je bolest perzistentna u srednjem, tj,

$$\begin{aligned} \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t E(t) dt &\geq C (R_0^S - 1) > 0 \quad s.i., \\ \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t I(t) dt &\geq \frac{\kappa \rho_1 C}{\gamma_a + k_1 \gamma_i + \delta_i} (R_0^S - 1) > 0 \quad s.i., \\ \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t P(t) dt &\geq \frac{\kappa \rho_2 C}{\gamma_a + k_2 \gamma_i + \delta_p} (R_0^S - 1) > 0 \quad s.i., \\ \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t H(t) dt &\geq \left(\frac{\kappa \rho_1}{\gamma_a + k_1 \gamma_i + \delta_i} + \frac{\kappa \rho_2}{\gamma_a + k_2 \gamma_i + \delta_p} \right) \frac{\gamma_a C}{\gamma_r + \delta_h} (R_0^S - 1) > 0 \quad s.i., \\ \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t A(t) dt &\geq \frac{\kappa (1 - \rho_1 - \rho_2) C}{\gamma_i + \mu} (R_0^S - 1) > 0 \quad s.i., \\ \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t R(t) dt &\geq \frac{C}{\mu} K_1 (R_0^S - 1) > 0 \quad s.i., \end{aligned}$$

gde je

$$\begin{aligned} K_1 &:= \left(\gamma_i k_1 + \frac{\gamma_a \gamma_r}{\gamma_r + \delta_h} \right) \frac{\kappa \rho_1}{\gamma_a + k_1 \gamma_i + \delta_i} + \left(\gamma_i k_2 + \frac{\gamma_a \gamma_r}{\gamma_r + \delta_h} \right) \frac{\kappa \rho_2}{\gamma_a + k_2 \gamma_i + \delta_p} \\ &\quad + \frac{\kappa (1 - \rho_1 - \rho_2) \gamma_i}{\gamma_i + \mu}, \\ C &:= \frac{\kappa + \mu + \frac{\sigma_1^2}{2} h_1^2 + \frac{\sigma_2^2}{2} h_2^2}{\left(\left(\beta - \frac{\sigma_1^2}{2} h_1 \right) \frac{1}{\Lambda} h_1 + \left(\beta' - \frac{\sigma_2^2}{2} h_2 \right) \frac{1}{\Lambda} h_2 \right) (\beta h_1 + \beta' h_2)}. \end{aligned}$$

Dokaz. Primenom Itôve formule (Teorema 1.12) na funkciju $\log E(t)$, dobija se

$$\begin{aligned} d(\log E(t)) &= \frac{1}{E(t)} \left(\frac{\beta}{N(t)} (I(t) + lH(t)) S(t) + \frac{\beta'}{N(t)} P(t) S(t) - (\kappa + \mu) E(t) \right) dt \\ &\quad - \frac{S^2(t)}{2E^2(t)N^2(t)} (\sigma_1^2 (I(t) + lH(t))^2 + \sigma_2^2 P^2(t)) dt \\ &\quad + \frac{S(t)}{E(t)N(t)} (\sigma_1 (I(t) + lH(t)) dB_1(t) + \sigma_2 P(t) dB_2(t)). \end{aligned}$$

Koristeći (3.24), sledi

$$\begin{aligned} d(\log E(t)) &\geq \left(\beta h_1 + \beta' h_2 - (\kappa + \mu) - \left(\beta - \frac{\sigma_1^2}{2} h_1 \right) \left(h_1 - \frac{(I(t) + lH(t)) S(t)}{E(t)N(t)} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\sigma_1^2}{2} h_1^2 - \left(\beta' - \frac{\sigma_2^2}{2} h_2 \right) \left(h_2 - \frac{P(t)S(t)}{E(t)N(t)} \right) - \frac{\sigma_2^2}{2} h_2^2 \right) dt \\ &\quad + \frac{S(t)}{E(t)N(t)} (\sigma_1 (I(t) + lH(t)) dB_1(t) + \sigma_2 P(t) dB_2(t)). \end{aligned} \quad (3.31)$$

Na osnovu prve jednačine sistema (3.2), dobija se ocena

$$\begin{aligned} dS(t) &= \left(\Lambda - \beta \frac{(I(t) + lH(t)) S(t)}{N(t)} - \beta' \frac{P(t)S(t)}{N(t)} - \mu S(t) \right) dt \\ &\quad - \frac{S(t)}{E(t)N(t)} (\sigma_1 (I(t) + lH(t)) dB_1(t) + \sigma_2 P(t) dB_2(t)) \\ &\geq \left(\frac{\Lambda}{h_2} \left(h_2 - \frac{P(t)S(t)}{E(t)N(t)} \right) - \beta h_1 E(t) - \beta' h_2 E(t) - \mu S(t) \left(1 - \frac{\Lambda}{\mu h_2} \frac{P(t)}{E(t)N(t)} \right) \right) dt \\ &\quad - \frac{S(t)}{E(t)N(t)} (\sigma_1 (I(t) + lH(t)) dB_1(t) + \sigma_2 P(t) dB_2(t)) \\ &\geq \left(\frac{\Lambda}{h_2} \left(h_2 - \frac{P(t)S(t)}{E(t)N(t)} \right) - \beta h_1 E(t) - \beta' h_2 E(t) \right) dt \\ &\quad - \frac{S(t)}{E(t)N(t)} (\sigma_1 (I(t) + lH(t)) dB_1(t) + \sigma_2 P(t) dB_2(t)), \end{aligned}$$

odakle sledi da je

$$\begin{aligned} - \left(h_2 - \frac{P(t)S(t)}{E(t)N(t)} \right) dt &\geq - \frac{h_2}{\Lambda} (\beta h_1 + \beta' h_2) E(t) dt - \frac{h_2}{\Lambda} dS(t) \\ &\quad - \frac{h_2}{\Lambda} \frac{S(t)}{E(t)N(t)} (\sigma_1 (I(t) + lH(t)) dB_1(t) + \sigma_2 P(t) dB_2(t)). \end{aligned} \quad (3.32)$$

Slično,

$$\begin{aligned} dS(t) &\geq \left(\frac{\Lambda}{h_1} \left(h_1 - \frac{(I(t) + lH(t)) S(t)}{E(t)N(t)} \right) - \beta h_1 E(t) - \mu S(t) \left(1 - \frac{\Lambda}{\mu h_1} \frac{I(t) + lH(t)}{E(t)N(t)} \right) \right. \\ &\quad \left. - \beta' h_2 E(t) \right) dt - \frac{S(t)}{E(t)N(t)} (\sigma_1 (I(t) + lH(t)) dB_1(t) + \sigma_2 P(t) dB_2(t)) \\ &\geq \left(\frac{\Lambda}{h_1} \left(h_1 - \frac{(I(t) + lH(t)) S(t)}{E(t)N(t)} \right) - \beta h_1 E(t) - \beta' h_2 E(t) \right) dt \\ &\quad - \frac{S(t)}{E(t)N(t)} (\sigma_1 (I(t) + lH(t)) dB_1(t) + \sigma_2 P(t) dB_2(t)), \end{aligned}$$

što implicira

$$\begin{aligned} - \left(h_1 - \frac{(I(t) + lH(t)) S(t)}{E(t)N(t)} \right) dt &\geq - \frac{h_1}{\Lambda} (\beta h_1 + \beta' h_2) E(t) dt - \frac{h_1}{\Lambda} dS(t) \\ &\quad - \frac{h_1}{\Lambda} \frac{S(t)}{E(t)N(t)} \sigma_1 (I(t) + lH(t)) dB_1(t) \\ &\quad - \frac{h_1}{\Lambda} \frac{S(t)}{E(t)N(t)} \sigma_2 P(t) dB_2(t), \end{aligned} \quad (3.33)$$

pri čemu je primenjena jednakost (3.23). Zamenom (3.32) i (3.33), u (3.31), dobija se

$$\begin{aligned}
 d(\log E(t)) \geq & \left(\beta h_1 - (\kappa + \mu) - \frac{\sigma_1^2}{2} h_1^2 - \left(\beta - \frac{\sigma_1^2}{2} h_1 \right) \frac{h_1}{\Lambda} (\beta h_1 + \beta' h_2) E(t) \right. \\
 & + \beta' h_2 - \frac{\sigma_2^2}{2} h_2^2 - \left(\beta' - \frac{\sigma_2^2}{2} h_2 \right) \frac{h_2}{\Lambda} (\beta h_1 + \beta' h_2) E(t) \Big) dt \\
 & - \left(\left(\beta - \frac{\sigma_1^2}{2} h_1 \right) h_1 + \left(\beta' - \frac{\sigma_2^2}{2} h_2 \right) h_2 \right) \\
 & \left(\frac{1}{\Lambda} dS(t) + \frac{\sigma_1}{\Lambda} \frac{(I(t) + lH(t)) S(t)}{E(t)N(t)} dB_1(t) + \frac{\sigma_2}{\Lambda} \frac{P(t)S(t)}{E(t)N(t)} dB_2(t) \right) \\
 & + \frac{S(t)}{E(t)N(t)} (\sigma_1 (I(t) + lH(t)) dB_1(t) + \sigma_2 P(t) dB_2(t)).
 \end{aligned}$$

Integracijom poslednje nejednakosti od 0 do t i deljenjem sa t , dobija se

$$\begin{aligned}
 \frac{\log E(t) - \log E(0)}{t} \geq & \beta h_1 + \beta' h_2 - (\kappa + \mu) - \frac{\sigma_1^2}{2} h_1^2 - \frac{\sigma_2^2}{2} h_2^2 \\
 & - \left(\left(\beta - \frac{\sigma_1^2}{2} h_1 \right) \frac{h_1}{\Lambda} + \left(\beta' - \frac{\sigma_2^2}{2} h_2 \right) \frac{h_2}{\Lambda} \right) (\beta h_1 + \beta' h_2) \langle E(t) \rangle \\
 & + \frac{1}{t} \varphi_1(t) + \frac{1}{t} \varphi_2(t) + \frac{1}{t} \varphi_3(t),
 \end{aligned} \tag{3.34}$$

gde je

$$\begin{aligned}
 \varphi_1(t) &= - \left(\left(\beta - \frac{\sigma_1^2}{2} h_1 \right) \frac{h_1}{\Lambda} + \left(\beta' - \frac{\sigma_2^2}{2} h_2 \right) \frac{h_2}{\Lambda} \right) (S(t) - S(0)), \\
 \varphi_2(t) &= \sigma_1 \left(1 - \frac{h_1}{\Lambda} \left(\beta - \frac{\sigma_1^2}{2} h_1 \right) - \frac{h_2}{\Lambda} \left(\beta' - \frac{\sigma_2^2}{2} h_2 \right) \right) \int_0^t \frac{(I(s) + lH(s)) S(s)}{E(s)N(s)} dB_1(s), \\
 \varphi_3(t) &= \sigma_2 \left(1 - \frac{h_1}{\Lambda} \left(\beta - \frac{\sigma_1^2}{2} h_1 \right) - \frac{h_2}{\Lambda} \left(\beta' - \frac{\sigma_2^2}{2} h_2 \right) \right) \int_0^t \frac{P(s)S(s)}{E(s)N(s)} dB_2(s).
 \end{aligned}$$

Na osnovu ograničenosti rešenja, sledi da je

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \varphi_1(t) = 0, \quad \text{ i } \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log E(t) - \log E(0)}{t} = 0. \tag{3.35}$$

Pored toga, na osnovu (3.24), sledi da je

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \varphi_2(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \varphi_3(t) = 0. \tag{3.36}$$

Koristeći (3.35) i (3.36), iz (3.34), sledi

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t E(s) ds \geq C (R_0^S - 1) > 0 \quad s.i., \tag{3.37}$$

gde je C definisano u formulaciji teoreme, s obzirom na to da važi uslov $R_0^S > 1$.

Integracijom treće jednačine sistema (3.2) od 0 do t i deljenjem sa t , dobija se

$$\frac{I(t) - I(0)}{t} = \frac{1}{t} \int_0^t \kappa \rho_1 E(t) dt - \frac{1}{t} \int_0^t (\gamma_a + k_1 \gamma_i + \delta_i) I(t) dt.$$

Računanjem granične vrednosti kada $t \rightarrow \infty$ u prethodnoj jednakosti i primenom (3.37), dobija se

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t I(t) dt \geq \frac{\kappa \rho_1}{\gamma_a + k_1 \gamma_i + \delta_i} C(R_0^S - 1) > 0 \text{ s.i.} \quad (3.38)$$

Slično, integracijom četvrte i šeste jednačine sistema (3.2) od 0 do t i deljenjem sa t , dobija se

$$\begin{aligned} \frac{P(t) - P(0)}{t} &= \frac{1}{t} \int_0^t \kappa \rho_2 E(t) dt - \frac{1}{t} \int_0^t (\gamma_a + k_2 \gamma_i + \delta_p) P(t) dt, \\ \frac{A(t) - A(0)}{t} &= \frac{1}{t} \int_0^t \kappa (1 - \rho_1 - \rho_2) E(t) dt - \frac{1}{t} \int_0^t (\gamma_i + \mu) A(t) dt. \end{aligned}$$

Primenom (3.37), iz prethodnih jednakosti sledi

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t P(t) dt \geq \frac{\kappa \rho_2}{\gamma_a + k_2 \gamma_i + \delta_p} C(R_0^S - 1) > 0 \text{ s.i.} \quad (3.39)$$

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t A(t) dt \geq \frac{\kappa (1 - \rho_1 - \rho_2)}{\gamma_i + \mu} C(R_0^S - 1) > 0 \text{ s.i.} \quad (3.40)$$

Kada su klase I i P perzistentne, može se pokazati da je i klasa H perzistentna. Integracijom pete jednačine sistema (3.2) od 0 do t i deljenjem sa t , dobija se

$$\frac{H(t) - H(0)}{t} = \frac{1}{t} \int_0^t \gamma_a (I(t) + P(t)) dt - \frac{1}{t} \int_0^t (\gamma_r + \delta_h) H(t) dt,$$

odakle, primenom (3.38) i (3.39), sledi

$$\begin{aligned} \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t H(t) dt &\geq \left(\frac{\kappa \rho_1}{\gamma_a + k_1 \gamma_i + \delta_i} + \frac{\kappa \rho_2}{\gamma_a + k_2 \gamma_i + \delta_p} \right) \frac{\gamma_a}{\gamma_r + \delta_h} C(R_0^S - 1) \\ &> 0 \text{ s.i.} \end{aligned} \quad (3.41)$$

Takođe, iz perzistentnosti klasa I, P, A , i H , sledi perzistentnost klase R . Integracijom sedme jednačine sistema (3.2) od 0 do t i deljenjem sa t , dobija se

$$\frac{R(t) - R(0)}{t} = \frac{1}{t} \int_0^t (\gamma_i (A(t) + k_1 I(t) + k_2 P(t)) + \gamma_r H(t)) dt - \frac{1}{t} \int_0^t \mu R(t) dt.$$

Računanjem granične vrednosti kada $t \rightarrow \infty$ u prethodnoj jednakosti i primenom (3.38), (3.39), (3.40) i (3.41), dobija se

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t R(t) dt \geq C \frac{1}{\mu} K_1 (R_0^S - 1) > 0 \text{ s.i.},$$

gde je K_1 definisano u formulaciji teoreme. Ovim je dokaz kompletan. $\triangle$

Napomena 3.2 Na osnovu Teorema 3.7 i 3.8, može se zaključiti da, pod uslovom $\sigma_1^2 \leq \frac{\beta}{h_1}$, $\sigma_2^2 \leq \frac{\beta'}{h_2}$ i $R_0^S < 1$, bolest će biti iskorenjena skoro izvesno dok pod uslovom $\sigma_1^2 \leq \frac{2\beta}{h_1}$, $\sigma_2^2 \leq \frac{2\beta'}{h_2}$ i $R_0^S > 1$, bolest će biti perzistentna u srednjem skoro izvesno. To znači da, u navedenom opsegu vrednosti intenziteta šumova σ_1 i σ_2 , veličina R_0^S predstavlja granični parametar koji određuje da li će infekcija biti iskorenjena ili opstati u populaciji. Dakle, R_0^S ima osobine osnovnog reprodukcionog broja pa se može smatrati osnovnim reprodukcionim brojem stohastičkog modela (3.2) za $\sigma_1^2 \leq \frac{\beta}{h_1}$ i $\sigma_2^2 \leq \frac{\beta'}{h_2}$.

3.1.4 Analiza osjetljivosti osnovnog reprodukcionog broja determinističkog i stohastičkog modela

U ovom podpoglavlju je prikazana analiza osjetljivosti osnovnog reprodukcionog broja R_0^D determinističkog modela (3.1) i R_0^S stohastičkog modela (3.2), koja je izvedena na osnovu vrednosti odgovarajućih normalizovanih forward indeksa osjetljivosti. *Normalizovani forward indeks osjetljivosti* meri relativnu promenu u osnovnim reprodukcionim brojevima R_0^i , $i \in \{D, S\}$, u odnosu na promenu vrednosti parametra i pruža sveobuhvatnu informaciju o robusnosti modela prema tim promenama. Pored toga, koristi se za identifikaciju parametara koji imaju najveći uticaj na osnovne reprodukционе brojeve, pa samim tim, i na dinamičko ponašanje širenja bolesti. Tačnije, normalizovani forward indeks osjetljivosti je odnos relativne promene u osnovnim reprodukcionim brojevima R_0^i prema relativnoj promeni u parametru θ , pod pretpostavkom da je R_0^i diferencijabilan u odnosu na taj parametar:

$$\Upsilon_{\theta}^{R_0^i} := \frac{dR_0^i}{d\theta} \frac{\theta}{R_0^i}, \quad i \in \{D, S\}, \quad (3.42)$$

pri čemu se R_0^i posmatra kao funkcija parametra θ . Kako su oba reprodukciona broja R_0^D i R_0^S racionalne funkcije parametara modela, normalizovani forward indeks osjetljivosti postoji za sve parametre modela koji se pojavljuju u eksplicitnoj formuli koja definiše ove osnovne reprodukционе brojeve.

Vrednosti indeksa osjetljivosti su izračunate pomoću vrednosti parametara iz Tabele 3.1 (koje su zasnovane na demografskim podacima Kine i epidemiološkim podacima iz Wuhana iz februara 2020 (videti [83], [88] i [89]) ili su racionalno pretpostavljene i označene sa [p]) i $\sigma_1 = 0.05$ i $\sigma_2 = 0.1$ i prikazane u Tabeli 3.2.

Parametar	Vrednost $\Upsilon_{\theta}^{R_0^D}$	Vrednost $\Upsilon_{\theta}^{R_0^S}$
β	0.9986	0.9986
l	0.7289	0.7275
β'	0.0014	0.0014
κ	0.0001	-0.0009
ρ_1	0.9974	0.9955
ρ_2	0.0026	0.0026
γ_a	-0.0459	-0.0459
γ_r	-0.6706	-0.6693
γ_i	-0.1892	-0.1889
k_1	-0.1887	-0.1883
k_2	-0.0005	-0.0005
δ_i	-0.0358	-0.0357
δ_p	-0.0001	-0.0001
δ_h	-0.0583	-0.0582
μ	-0.0001	-0.0001
σ_1	— —	-0.002
σ_2	— —	$-1.62425 \cdot 10^{-9}$

Tabela 3.2: Vrednosti indeksa osjetljivosti za R_0^D i R_0^S izračunate sa vrednostima parametara iz Tabele 3.1, $\sigma_1 = 0.05$ i $\sigma_2 = 0.1$.

Vrednosti osnovnog reprodukcionog broja determinističkog i stohastičkog modela za vrednosti parametara date u Tabeli 3.1, $\sigma_1 = 0.05$ i $\sigma_2 = 0.1$ su

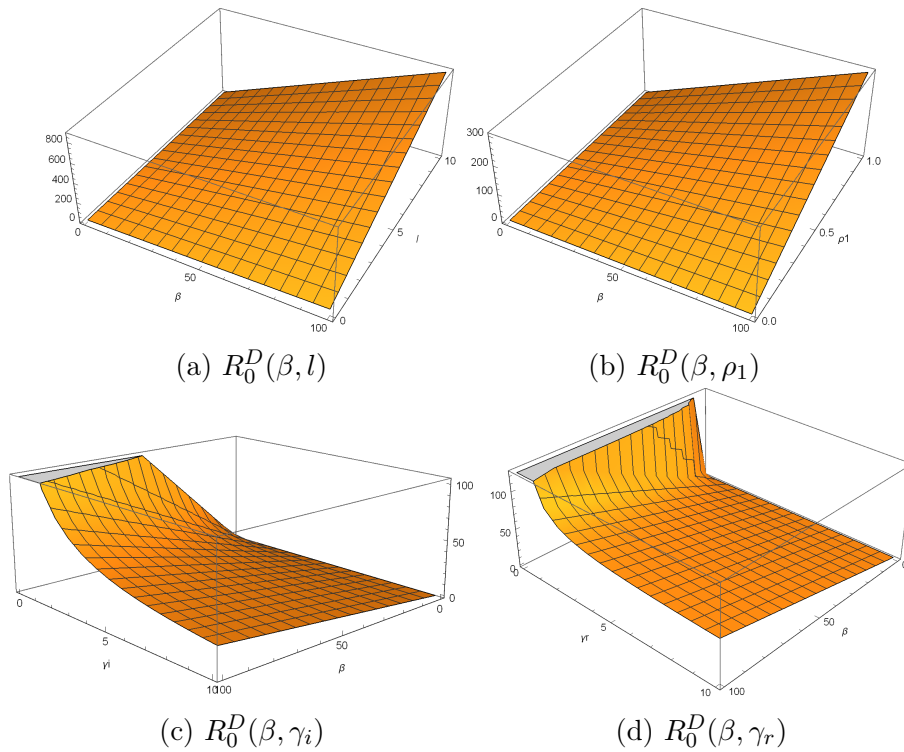
$$R_0^D = 4.5206, \quad R_0^S = 4.5162.$$

Na osnovu Tabele 3.2 zaključuje se da je osnovni reprodukциони broj R_0^D determinističkog modela najosetljiviji na promenu vrednosti parametara β , ρ_1 , l , γ_i i γ_r . Uticaj povećanja vrednosti jednog parametra za 10%, pri čemu su svi ostali parametri fiksirani, na vrednost R_0^D za ovih pet parametara prikazan je u Tabeli 3.3

Parametar	Vrednost R_0^D	Relativna promena veličine R_0^D (%)
β	4.9720	+9.98
ρ_1	4.9715	+9.97
l	4.8501	+7.29
γ_i	4.4366	-1.86
γ_r	4.2429	-6.14

Tabela 3.3: Promena vrednosti R_0^D pri povećanju vrednosti parametara β , ρ_1 , l , γ_i i γ_r za 10%.

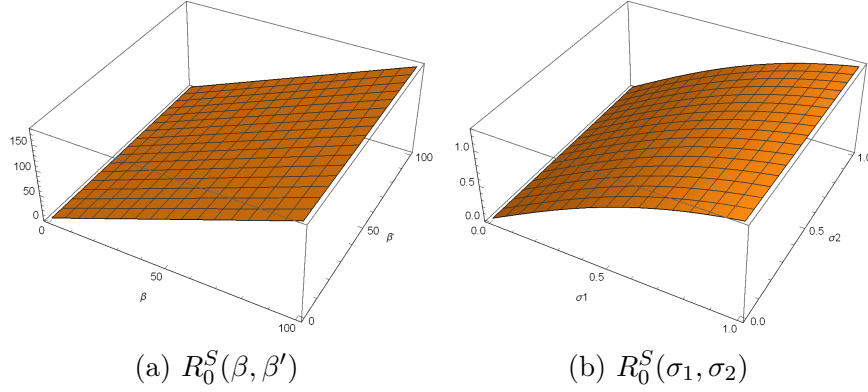
Znaci indeksa osjetljivosti za parametre koji imaju najveći uticaj na R_0^D su očekivani. Na primer, povećanje stope prenosa bolesti sa zaraženih osoba β za samo 10% dovodi do povećanja vrednosti R_0^D za 9.98%. Štaviše, povećanje stope oporavka za hospitalizovane osobe γ_r za 10% dovodi do smanjenja R_0^D za 6.14%, što se može tumačiti kao doprinos oporavljenih pojedinaca imunitetu populacije. Prethodno je prikazano na Slici 3.3



Slika 3.3: R_0^D kao funkcija parametara sa visokim indeksom osjetljivosti.

Iz Tabele 3.2 se vidi da su osnovni reprodukcionni brojevi determinističkog i stohastičkog modela R_0^D i R_0^S , najosetljiviji na promene u vrednostima parametara β , ρ_1 , l , γ_i i γ_r . Ponašanje R_0^S u odnosu na promenu vrednosti parametara sa visokim indeksom osetljivosti je isto kao i ponašanje R_0^D , s obzirom na to da imaju približno jednake vrednosti indeksa osetljivosti, što je prikazano na Slici 3.3.

Izračunavanjem indeksa osetljivosti u odnosu na stope prenosa β i β' se može uočiti da je $\Upsilon_\beta^s + \Upsilon_{\beta'}^s = 1$, bez obzira na vrednosti parametara β i β' . Ponašanje osnovnog reprodukcionog broja R_0^S u zavisnosti od parametara σ_1 i σ_2 , kao i od parametara β i β' , prikazano je na Slici 3.4.



Slika 3.4: R_0^S kao funkcija parametara β , β' , σ_1 i σ_2 .

Uticaj povećanja vrednosti jednog parametra za 10%, pri čemu su svi ostali parametri fiksirani, na vrednost R_0^S prikazan je u Tabeli 3.4.

Parametar	Vrednost R_0^S	Relativna promena R_0^S (%)
β	4.9672	+9.98
ρ_1	4.9656	+9.95
l	4.8447	+7.27
γ_i	4.4324	-1.85
γ_r	4.2393	-6.13

Tabela 3.4: Promena vrednosti R_0^S pri povećanju vrednosti parametara β , ρ_1 , l , γ_i i γ_r za 10%.

Poređenjem R_0^S sa R_0^D , može se zaključiti da je

$$R_0^S = \frac{\kappa + \mu}{\kappa + \mu + \frac{\sigma_1^2}{2} \left(\left(1 + l \frac{\gamma_a}{\omega_h} \right) \frac{\kappa \rho_1}{\omega_i} + l \frac{\gamma_a}{\omega_h} \frac{\kappa \rho_2}{\omega_p} \right)^2 + \frac{\sigma_2^2}{2} \left(\frac{\kappa \rho_2}{\omega_p} \right)^2} R_0^D \leq R_0^D.$$

Naime, kada su intenziteti šuma $\sigma_1 = 0, \sigma_2 = 0$, tada je $R_0^S = R_0^D$, a kada je $\sigma_1 > 0$ ili $\sigma_2 > 0$, tada je $R_0^S < R_0^D$. Ovo znači da su uslovi za iskorenjivanje bolesti u stohastičkom modelu slabiji od uslova odgovarajućeg determinističkog modela. Pored toga, s obzirom da je $R_0^S \leq R_0^D$, za odgovarajući izbor parametara modela može biti $R_0^S < 1 < R_0^D$, što znači da je bolest iskorenjena iz populacije u stohastičkom modelu, dok je perzistentna u njegovom determinističkom pandanu. Ovo implicira da prisustvo šuma može suzbiti bolest.

Primer 3.1. Razmatra se drugi soj virusa sa stopom prenosa virusa $\beta = 0.5615$. Vrednosti osnovnog reproduktionog broja determinističkog i stohastičkog modela izračunate za $\beta = 0.5615$, $\sigma_1 = 0.005$ i $\sigma_2 = 0.05$ i sa vrednostima ostalih parametara datim u Tabeli 3.1, su:

$$R_0^D = 1.00023 \quad \text{i} \quad R_0^S = 1.00022.$$

Na osnovu rezultata u Podpoglavljima 3.1.2 i 3.1.3 se može zaključiti da će i deterministički i stohastički model predviđati perzistentnost bolesti. Međutim, umereno povećanje intenziteta šumova (bilo σ_1 ili σ_2), dovodi do smanjenja vrednosti R_0^S . Zaista, ako su vrednosti intenziteta šumova $\sigma_1 = 0.05$ i $\sigma_2 = 0.1$, tada se R_0^D ne menja (budući da ne zavisi od šumova), dok je

$$R_0^S = 0.99925.$$

Iz Podpoglavlja 3.1.2 i 3.1.3, sledi da će, pri ovim vrednostima parametara i intenziteta šumova, deterministički model predviđati perzistentnost bolesti, dok će stohastički model predviđati iskorenjenje bolesti. Ova primer ilustruje važnost uključivanja slučajnih fluktuacija iz okruženja u epidemiološke modele.

Više detalja o ulozi slučajnosti u smanjenju osnovnog reproduktionog broja odeđenih modela prenosivih bolesti, mogu se naći u [6] i [7]. Analizu osetljivosti različitih stohastičkih modela sa kompartmentima za Covid-19 u odnosu na intenzitet šuma, može se naći u [93]. Ovi argumenti mogu se smatrati opravdanjem za upotrebu stohastičkih diferencijalnih modela u opisivanju i predviđanju toka epidemije.

Za slične pristupe analizi osetljivosti osnovnog reproduktionog broja u vezi sa različitim zaraznim bolestima, pogledati [94] i [95], a za Covid-19 [96] i [97].

3.2 Stacionarna raspodela stohastičkog modela širenja virusa SARS-CoV-2

Kako stacionarna raspodela stohastičkog sistema ima istu ulogu kao ekvilibrijum determinističkog sistema, u literaturi se za stohastičke modele razmatra postojanje jedinstvene ergodičke stacionarne raspodele. Postojanje stacionarne raspodele stohastičkih modela omogućava bolje razumevanje ponašanja rešenja u okolini endemskog ekvilibrijuma. Stoga je postojanje stacionarne raspodele stohastičkih modela izazvalo veliko interesovanje u literaturi. Postojanje stacionarne raspodele stohastičkog sistema ne znači samo njegovu slabu stabilnost, već takođe omogućava dublje razumevanje kako slučajnost iz okruženja utiče na endemski ekilibrijum. Mnogi autori su proučavali postojanje stacionarne raspodele epidemioloških modela koji uključuju beli šum (na primer, [4, 98–101]), beli i obojeni šum (na primer, [8, 102]), ili kombinaciju belog i obojenog šuma i Lévyjevih skokova (na primer, [103]).

U ovom poglavlju biće izvedeni dovoljni uslovi za postojanje stacionarne raspodele modela (3.2), primenom teorije date u [13]. Primena ove teorije je opravdana budući da sistem (3.2) sadrži slučajnost isključivo kroz Brownovo kretanje, i odgovara tipu jednačina analiziranom u [13].

Sledeća teorema daje dovoljne uslove za postojanje ergodičke stacionarne raspodele epidemiološkog modela (3.2).

Teorema 3.9 *Neka je $(S(t), E(t), I(t), P(t), H(t), A(t), R(t))$, $t \geq 0$ rešenje sistema (3.2) sa proizvoljnom početnom vrednošću $(S(0), E(0), I(0), P(0), H(0), A(0), R(0)) \in \Gamma^*$. Ako je*

$$R^* := \frac{\sqrt{\Lambda \mu \frac{\beta + \beta'}{\Lambda + \mu}}}{\Lambda - \Lambda \frac{\min\{\mu, \delta_i, \delta_p, \delta_h\}}{\max\{\mu, \delta_i, \delta_p, \delta_h\}} + (\beta + \beta') \left(1 + \frac{\Lambda}{\mu}\right) + \mu + \frac{1}{2} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2) \left(1 + \frac{\Lambda^2}{\mu^2}\right)} > 1, \quad (3.43)$$

tada stohastički model (3.2) ima jedinstvenu ergodičku stacionarnu raspodelu.

Dokaz. U dokazu teoreme, biće primenjena Lema 1.6. Sistem (3.2) se može napisati u matričnom obliku na sledeći način

$$X(t) = f(X(t), t)dt + g(X(t), t)dB(t),$$

pri čemu je

$$X(t) = (S(t), E(t), I(t), P(t), H(t), A(t), R(t))^T,$$

$$f(X(t), t) = \begin{pmatrix} \Lambda - \left(\frac{\beta}{N(t)} (I(t) + lH(t)) + \frac{\beta'}{N(t)} P(t) + \mu\right) S(t) \\ \frac{\beta}{N(t)} (I(t) + lH(t)) S(t) + \frac{\beta'}{N(t)} P(t) S(t) - (\kappa + \mu) E(t) \\ \kappa \rho_1 E(t) - (\gamma_a + k_1 \gamma_i + \delta_i) I(t) \\ \kappa \rho_2 E(t) - (\gamma_a + k_2 \gamma_i + \delta_p) P(t) \\ \gamma_a (I(t) + P(t)) - (\gamma_r + \delta_h) H(t) \\ \kappa (1 - \rho_1 - \rho_2) E(t) - (\gamma_i + \mu) A(t) \\ \gamma_i (A(t) + k_1 I(t) + k_2 P(t)) + \gamma_r H(t) - \mu R(t) \end{pmatrix}$$

i

$$g(X(t), t) = \begin{pmatrix} -\frac{\sigma_1}{N(t)} (I(t) + lH(t)) S(t) - \frac{\sigma_2}{N(t)} P(t) S(t) \\ \frac{\sigma_1}{N(t)} (I(t) + lH(t)) S(t) + \frac{\sigma_2}{N(t)} P(t) S(t) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Difuzionu matricu sistema (3.2) je oblika

$$G(X(t), t) = \begin{pmatrix} g_{11}(X(t), t) & g_{12}(X(t), t) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ g_{21}(X(t), t) & g_{22}(X(t), t) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

gde je

$$g_{11}(X(t), t) = g_{22}(X(t), t) = \frac{\sigma_1^2}{N^2(t)} (I(t) + lH(t))^2 S^2(t) + \frac{\sigma_2^2}{N^2(t)} P^2(t) S^2(t),$$

$$g_{12}(X(t), t) = g_{21}(X(t), t) = -\frac{\sigma_1^2}{N^2(t)} (I(t) + lH(t))^2 S^2(t) - \frac{\sigma_2^2}{N^2(t)} P^2(t) S^2(t).$$

Ako se definiše ograničen otvoren skup na sledeći način

$$D = \left\{ (S, E, I, P, H, A, R) \in \mathbb{R}_+^7 : \epsilon < S < \frac{\Lambda}{\mu} - \epsilon, \epsilon < E < \frac{\Lambda}{\mu} - \epsilon, \epsilon^2 < I < \frac{\Lambda}{\mu} - \epsilon^2, \right. \\ \left. \epsilon^2 < P < \frac{\Lambda}{\mu} - \epsilon^2, \epsilon^3 < H < \frac{\Lambda}{\mu} - \epsilon^3, \epsilon^2 < A < \frac{\Lambda}{\mu} - \epsilon^2, \epsilon^3 < R < \frac{\Lambda}{\mu} - \epsilon^3 \right\}$$

gde je $0 < \epsilon < 1$ konstanta, tada za svako $(S, E, I, P, H, A, R) \in \Gamma^*$, i, na primer, $i = 1$ važi

$$g_{11}(X(t), t) \geq \sigma_1^2(1+l)S^2(t) + \sigma_2^2S^2(t) > (\sigma_1^2(1+l) + \sigma_2^2)\epsilon^2.$$

Na osnovu Napomene [1.4](#), sledi da je uslov (B.1) Leme [1.6](#) zadovoljen. Da bi teorema bila dokazana, potrebno je još proveriti da li važi uslov (B.2) Leme [1.6](#).

Neka je $W(X(t)) = W(S(t), E(t), I(t), P(t), H(t), A(t), R(t)) : \mathbb{R}_+^7 \rightarrow \mathbb{R}$, definisana na sledeći način

$$W(X(t)) := M(S(t) + E(t) + I(t) + P(t) + H(t) + A(t) + R(t) - \ln(E(t) + 1) \\ - \ln S(t)) + \frac{1}{2}(S(t) + E(t) + I(t) + P(t) + H(t) + A(t) + R(t))^2 \\ - \ln S(t) - \ln I(t) - \ln P(t) - \ln H(t) - \ln A(t) - \ln R(t),$$

gde je $M > 0$ dovoljno velika pozitivna konstanta za koju važi

$$-M\psi_1 + A_1 \leq -2, \\ \psi_1 = \left(\Lambda - \Lambda \frac{\min\{\mu, \delta_i, \delta_p, \delta_h\}}{\max\{\mu, \delta_i, \delta_p, \delta_h\}} + (\beta + \beta') \left(1 + \frac{\Lambda}{\mu} \right) + \mu + \frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) \left(1 + \frac{\Lambda^2}{\mu^2} \right) \right) \\ \times (R^* - 1), \quad (3.44)$$

R^* je definisano izrazom [\(3.43\)](#), A_1 je oblika

$$A_1 = \sup_{X(t) \in \mathbb{R}_+^7} \left\{ -\frac{1}{2}\mu S^2(t) - \frac{1}{2}\mu E^2(t) - \frac{1}{2}\mu A^2(t) - \frac{1}{2}\delta_i I^2(t) - \frac{1}{2}\delta_p P^2(t) + 3\mu \right. \\ \left. - \frac{1}{2}\delta_h H^2(t) - \frac{1}{2}\mu R^2(t) + C + \frac{\beta}{N(t)}(I(t) + lH(t)) + \frac{\beta'}{N(t)}P(t) \right. \\ \left. + \frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) + 2\gamma_a + k_1\gamma_i + \delta_i + k_2\gamma_i + \delta_p + \gamma_r + \delta_h + \gamma_i \right\}, \quad (3.45)$$

i C je definisano na sledeći način

$$C = \max_{X(t) \in \mathbb{R}_+^7} \left\{ \Lambda(S(t) + E(t) + I(t) + P(t) + H(t) + A(t) + R(t)) - \frac{1}{2}\mu S^2(t) \right. \\ \left. - \frac{1}{2}\mu E^2(t) - \frac{1}{2}\mu A^2(t) - \frac{1}{2}\delta_i I^2(t) - \frac{1}{2}\delta_p P^2(t) - \frac{1}{2}\delta_h H^2(t) - \frac{1}{2}\mu R^2(t) \right\}.$$

Kako je $d^2W(X(t)) > 0$, sledi da postoji tačka $X(t_0)$ u unutrašnjosti $\mathbb{R}_+^7$ u kojoj funkcija $W(X(t))$ dostiže minimalnu vrednost. Tada se definiše nenegativna $\mathbb{C}^2$ -funkcija $\tilde{W}(X(t)) = \tilde{W}(S(t), E(t), I(t), P(t), H(t), A(t), R(t)) : \mathbb{R}_+^7 \rightarrow \mathbb{R}_+$ na sledeći način

$$\tilde{W}(X(t)) := M(S(t) + E(t) + I(t) + P(t) + H(t) + A(t) + R(t) - \ln(E(t) + 1) \\ - \ln S(t)) + \frac{1}{2}(S(t) + E(t) + I(t) + P(t) + H(t) + A(t) + R(t))^2 \\ - \ln S(t) - \ln I(t) - \ln P(t) - \ln H(t) - \ln A(t) - \ln R(t) \\ - W(S(t_0), E(t_0), I(t_0), P(t_0), H(t_0), A(t_0), R(t_0)).$$

Radi jednostavnijeg zapisa, biće korišćene oznake

$$\begin{aligned} W_1(X(t)) &:= S(t) + E(t) + I(t) + P(t) + H(t) + A(t) + R(t) - \ln S(t) \\ &\quad - \ln(E(t) + 1), \\ W_2(X(t)) &:= \frac{1}{2} (S(t) + E(t) + I(t) + P(t) + H(t) + A(t) + R(t))^2, \\ W_3(X(t)) &:= -\ln S(t) - \ln I(t) - \ln P(t) - \ln H(t) - \ln A(t) - \ln R(t). \end{aligned}$$

Primenom operatora $L(\cdot)$ definisanog sa (1.13) na funkciju $W_1(X(t))$, dobija se

$$\begin{aligned} LW_1(X(t)) &\leq \Lambda - \min\{\mu, \delta_i, \delta_p, \delta_h\}N(t) - \frac{\Lambda}{S(t)} + \frac{\beta}{N(t)}(I(t) + lH(t)) \\ &\quad + \frac{\beta'}{N(t)}P(t) + \mu - \frac{\beta}{N(t)(E(t)+1)}(I(t) + lH(t))S(t) \\ &\quad - \frac{\beta'}{N(t)(E(t)+1)}P(t)S(t) + (\kappa + \mu)\frac{E(t)}{E(t)+1} \\ &\quad + \frac{1}{2N^2(t)}(\sigma_1^2(I(t) + lH(t))^2 + \sigma_2^2P^2(t)) \\ &\quad + \frac{S^2(t)}{2(E(t)+1)^2N^2(t)}(\sigma_1^2(I(t) + lH(t))^2 + \sigma_2^2P^2(t)) \\ &\leq \Lambda - \min\{\mu, \delta_i, \delta_p, \delta_h\}N(t) - \frac{\Lambda}{S(t)} + (\beta + \beta')\left(1 + \frac{\Lambda}{\mu}\right) \\ &\quad + \mu - \frac{\beta + \beta'}{E(t)+1}S(t) + (\kappa + \mu)E(t) + \frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)\left(1 + \frac{\Lambda^2}{\mu^2}\right) \\ &\leq \Lambda - \Lambda \frac{\min\{\mu, \delta_i, \delta_p, \delta_h\}}{\max\{\mu, \delta_i, \delta_p, \delta_h\}} - \sqrt{\Lambda \frac{\beta + \beta'}{\frac{\Lambda}{\mu} + 1}} + (\beta + \beta')\left(1 + \frac{\Lambda}{\mu}\right) + \mu \\ &\quad + (\kappa + \mu)E(t) + \frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)\left(1 + \frac{\Lambda^2}{\mu^2}\right) \\ &\leq (\kappa + \mu)E(t) - \psi_1, \end{aligned} \tag{3.46}$$

gde je ψ_1 definisano sa (3.44).

Primenom operatora $L(\cdot)$ (1.13) na $W_2(X(t))$, sledi

$$\begin{aligned} LW_2(X(t)) &= (S(t) + E(t) + I(t) + P(t) + H(t) + A(t) + R(t)) \\ &\quad (\Lambda - \mu(S(t) + E(t) + A(t) + R(t)) - \delta_i I(t) - \delta_p P(t) \\ &\quad - \delta_h H(t)) + \frac{1}{2}(g_{11} + g_{12} + g_{21} + g_{22}) \\ &\leq \Lambda(S(t) + E(t) + I(t) + P(t) + H(t) + A(t) + R(t)) \\ &\quad - \mu S^2(t) - \mu E^2(t) - \mu A^2(t) - \delta_i I^2(t) - \delta_p P^2(t) \\ &\quad - \delta_h H^2(t) - \mu R^2(t) \\ &\leq C - \frac{1}{2}\mu S^2(t) - \frac{1}{2}\mu E^2(t) - \frac{1}{2}\mu A^2(t) - \frac{1}{2}\delta_i I^2(t) - \frac{1}{2}\delta_p P^2(t) \\ &\quad - \frac{1}{2}\delta_h H^2(t) - \frac{1}{2}\mu R^2(t). \end{aligned} \tag{3.47}$$

Primenom operatora $L(\cdot)$ (1.13) na $W_3(X(t))$, dobija se

$$\begin{aligned} LW_3(X(t)) &= -\frac{1}{S(t)}\left(\Lambda - \left(\frac{\beta}{N(t)}(I(t) + lH(t)) + \frac{\beta'}{N(t)}P(t) + \mu\right)S(t)\right) \\ &\quad + \frac{1}{2N^2(t)}(\sigma_1^2(I(t) + lH(t))^2 + \sigma_2^2P^2(t)) \\ &\quad - \frac{1}{I(t)}(\kappa\rho_1 E(t) - (\gamma_a + k_1\gamma_i + \delta_i)I(t)) \\ &\quad - \frac{1}{A(t)}(\kappa(1 - \rho_1 - \rho_2)E(t) - (\gamma_i + \mu)A(t)) \\ &\quad - \frac{1}{P(t)}(\kappa\rho_2 E(t) - (\gamma_a + k_2\gamma_i + \delta_p)P(t)) \\ &\quad - \frac{1}{H(t)}(\gamma_a(I(t) + P(t)) - (\gamma_r + \delta_h)H(t)) \\ &\quad - \frac{1}{R(t)}(\gamma_i(A(t) + k_1I(t) + k_2P(t)) + \gamma_r H(t) - \mu R(t)) \\ &\leq -\frac{\Lambda}{S(t)} + \left(\frac{\beta}{N(t)}(I(t) + lH(t)) + \frac{\beta'}{N(t)}P(t) + \mu\right) + \frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) \\ &\quad - \frac{E(t)}{I(t)}\kappa\rho_1 + (\gamma_a + k_1\gamma_i + \delta_i) \\ &\quad - \frac{E(t)}{P(t)}\kappa\rho_2 + (\gamma_a + k_2\gamma_i + \delta_p) - \frac{I(t)}{H(t)}\gamma_a + (\gamma_r + \delta_h) \\ &\quad - \frac{E(t)}{A(t)}\kappa(1 - \rho_1 - \rho_2) + (\gamma_i + \mu) - \frac{A(t)}{R(t)}\gamma_i + \mu. \end{aligned} \tag{3.48}$$

Tada, na osnovu (3.46), (3.47) i (3.48), sledi

$$\begin{aligned}
 LW(X(t)) \leq & M(-\psi_1 + (\kappa + \mu)E(t)) - \frac{1}{2}\mu S^2(t) - \frac{1}{2}\mu E^2(t) \\
 & - \frac{1}{2}\mu A^2(t) - \frac{1}{2}\delta_i I^2(t) - \frac{1}{2}\delta_p P^2(t) - \frac{1}{2}\delta_h H^2(t) - \frac{1}{2}\mu R^2(t) + C \\
 & - \frac{\Lambda}{S(t)} + \left(\frac{\beta}{N(t)} (I(t) + lH(t)) + \frac{\beta'}{N(t)} P(t) + \mu \right) + \frac{1}{2} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2) \\
 & - \frac{E(t)}{I(t)} \kappa \rho_1 + (\gamma_a + k_1 \gamma_i + \delta_i) \\
 & - \frac{E(t)}{P(t)} \kappa \rho_2 + (\gamma_a + k_2 \gamma_i + \delta_p) - \frac{I(t)}{H} \gamma_a + (\gamma_r + \delta_h) \\
 & - \frac{E(t)}{A(t)} \kappa (1 - \rho_1 - \rho_2) + (\gamma_i + \mu) - \frac{A(t)}{R(t)} \gamma_i + \mu.
 \end{aligned} \tag{3.49}$$

Kako je D otvoren skup, definisan sa (3.44), tada je $\bar{D} := D \cup \partial D$ kompaktan podskup skupa $\mathbb{R}_+^7$. Može se odabrati ϵ dovoljno malo tako da, za svako $X(t) = (S(t), E(t), I(t), P(t), H(t), A(t), R(t)) \in \mathbb{R}_+^7 \setminus \bar{D}$, važe sledeće nejednakosti

$$-\frac{\Lambda}{\epsilon} + A_2 \leq -1, \tag{3.50}$$

gde je

$$A_2 := \sup_{X(t) \in \mathbb{R}_+^7} \tilde{A}(X(t)), \tag{3.51}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{A}(X(t)) := & M(-\psi_1 + (\kappa + \mu)E(t)) - \frac{1}{2}\mu S^2(t) - \frac{1}{2}\mu E^2(t) - \frac{1}{2}\mu A^2(t) \\
 & - \frac{1}{2}\delta_i I^2(t) - \frac{1}{2}\delta_p P^2(t) - \frac{1}{2}\delta_h H^2(t) - \frac{1}{2}\mu R^2(t) + C \\
 & + \left(\frac{\beta}{N(t)} (I(t) + lH(t)) + \frac{\beta'}{N(t)} P(t) + \mu \right) + \frac{1}{2} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2) \\
 & + 2\gamma_a + k_1 \gamma_i + \delta_i + k_2 \gamma_i + \delta_p + \gamma_r + \delta_h + \gamma_i + 2\mu,
 \end{aligned}$$

$$-\psi_1 M + M(\kappa + \mu)\epsilon + A_1 \leq -1, \tag{3.52}$$

$$-\frac{\kappa \rho_1}{\epsilon} + A_2 \leq -1, \tag{3.53}$$

$$-\frac{\kappa \rho_2}{\epsilon} + A_2 \leq -1, \tag{3.54}$$

$$-\frac{\gamma_a}{\epsilon} + A_2 \leq -1, \tag{3.55}$$

$$-\frac{\kappa(1 - \rho_1 - \rho_2)}{\epsilon} + A_2 \leq -1, \tag{3.56}$$

$$-\frac{\gamma_i}{\epsilon} + A_2 \leq -1, \tag{3.57}$$

$$-\frac{\mu}{4\epsilon^2} + A_3 \leq -1, \tag{3.58}$$

$$A_3 = \sup_{X(t) \in \mathbb{R}_+^7} \left\{ \tilde{A}(X(t)) + \frac{1}{4}\mu S^2(t) \right\}, \tag{3.59}$$

$$-\frac{\mu}{4\epsilon^2} + A_4 \leq -1, \tag{3.60}$$

$$A_4 = \sup_{X(t) \in \mathbb{R}_+^7} \left\{ \tilde{A}(X(t)) + \frac{1}{4}\mu E^2(t) \right\}, \tag{3.61}$$

$$-\frac{\delta_i}{4\epsilon^4} + A_5 \leq -1, \quad (3.62)$$

$$A_5 = \sup_{X(t) \in \mathbb{R}_+^7} \left\{ \tilde{A}(X(t)) + \frac{1}{4}\delta_i I^2(t) \right\}, \quad (3.63)$$

$$-\frac{\delta_p}{4\epsilon^4} + A_6 \leq -1, \quad (3.64)$$

$$A_6 = \sup_{X(t) \in \mathbb{R}_+^7} \left\{ \tilde{A}(X(t)) + \frac{1}{4}\delta_p P^2(t) \right\}, \quad (3.65)$$

$$-\frac{\delta_h}{4\epsilon^6} + A_7 \leq -1, \quad (3.66)$$

$$A_7 = \sup_{X(t) \in \mathbb{R}_+^7} \left\{ \tilde{A}(X(t)) + \frac{1}{4}\delta_h H^2(t) \right\}, \quad (3.67)$$

$$-\frac{\mu}{4\epsilon^4} + A_8 \leq -1, \quad (3.68)$$

$$A_8 = \sup_{X(t) \in \mathbb{R}_+^7} \left\{ \tilde{A}(X(t)) + \frac{1}{4}\mu A^2(t) \right\}, \quad (3.69)$$

$$-\frac{\mu}{4\epsilon^6} + A_9 \leq -1, \quad (3.70)$$

i

$$A_9 = \sup_{X(t) \in \mathbb{R}_+^7} \left\{ \tilde{A}(X(t)) + \frac{1}{4}\mu R^2(t) \right\}. \quad (3.71)$$

Za dovoljno malo ϵ , uslov (3.52) je ispunjen jer važi (3.44). Neka je

$$\begin{aligned} D_1 &:= \{X(t) \in \mathbb{R}_+^7 : S(t) < \epsilon\}, & D_2 &:= \{X(t) \in \mathbb{R}_+^7 : E(t) < \epsilon\}, \\ D_3 &:= \{X(t) \in \mathbb{R}_+^7 : E(t) \geq \epsilon, I(t) < \epsilon^2\}, & D_4 &:= \{X(t) \in \mathbb{R}_+^7 : P(t) \geq \epsilon, I(t) < \epsilon^2\}, \\ D_5 &:= \{X(t) \in \mathbb{R}_+^7 : I(t) \geq \epsilon^2, H(t) < \epsilon^3\}, & D_6 &:= \{X(t) \in \mathbb{R}_+^7 : E(t) \geq \epsilon, A(t) < \epsilon^2\}, \\ D_7 &:= \{X(t) \in \mathbb{R}_+^7 : A(t) \geq \epsilon^2, R(t) < \epsilon^3\}, & D_8 &:= \{X(t) \in \mathbb{R}_+^7 : S(t) \geq \frac{1}{\epsilon}\}, \\ D_9 &:= \{X(t) \in \mathbb{R}_+^7 : E(t) \geq \frac{1}{\epsilon}\}, & D_{10} &:= \{X(t) \in \mathbb{R}_+^7 : I(t) > \frac{1}{\epsilon^2}\}, \\ D_{11} &:= \{X(t) \in \mathbb{R}_+^7 : P(t) > \frac{1}{\epsilon^2}\}, & D_{12} &:= \{X(t) \in \mathbb{R}_+^7 : H(t) > \frac{1}{\epsilon^3}\}, \\ D_{13} &:= \{X(t) \in \mathbb{R}_+^7 : A(t) > \frac{1}{\epsilon^2}\}, & D_{14} &:= \{X(t) \in \mathbb{R}_+^7 : R(t) > \frac{1}{\epsilon^3}\}. \end{aligned}$$

Tada je $\mathbb{R}_+^7 \setminus \bar{D} = \cup_{i=1}^{14} D_i$.

Kako važi (3.49), u nastavku će biti pokazano da je $LW(X(t)) \leq -1$ za svako $X(t) \in D_i, i \in \{1, 2, \dots, 14\}$, što je ekvivalentno sa $LW(X(t)) \leq -1$ za svako $X(t) \in \mathbb{R}_+^7 \setminus \bar{D}$.

Slučaj 1. Za svako $X(t) \in D_1$, važi da je

$$LW(X(t)) \leq -\frac{\Lambda}{S(t)} + A_2 \leq -\frac{\Lambda}{\epsilon} + A_2,$$

pri čemu je A_2 definisano izrazom (3.51). Na osnovu (3.50), sledi $LW(X(t)) \leq -1$.

Slučaj 2. Za svako $X(t) \in D_2$, važi

$$LW(X(t)) \leq M(-\psi_1 + (\kappa + \mu)E(t)) + A_1 \leq -M\psi_1 + M(\kappa + \mu)\epsilon + A_1,$$

gde je A_1 definisano izrazom (3.45). Na osnovu (3.52), dobija se $LW(X(t)) \leq -1$.

Slučaj 3. Za svako $X(t) \in D_3$, važi

$$LW(X(t)) \leq -\kappa\rho_1 \frac{E(t)}{I(t)} + A_2 \leq -\frac{\kappa\rho_1}{\epsilon} + A_2.$$

Iz (3.53), sledi $LW(X(t)) \leq -1$.

Slučaj 4. Za svako $X(t) \in D_4$, važi

$$LW(X(t)) \leq -\kappa\rho_2 \frac{E(t)}{P(t)} + A_2 \leq -\frac{\kappa\rho_2}{\epsilon} + A_2.$$

Iz (3.54), dobija se $LW(X(t)) \leq -1$.

Slučaj 5. Za svako $X(t) \in D_5$, važi

$$LW(X(t)) \leq -\gamma_a \frac{I(t)}{H(t)} + A_2 \leq -\frac{\gamma_a}{\epsilon} + A_2.$$

Iz (3.55), sledi $LW(X(t)) \leq -1$.

Slučaj 6. Za svako $X(t) \in D_6$, važi

$$LW(X(t)) \leq -\kappa(1 - \rho_1 - \rho_2) \frac{E(t)}{A(t)} + A_2 \leq -\frac{\kappa(1 - \rho_1 - \rho_2)}{\epsilon} + A_2.$$

Iz (3.56), dobija se $LW(X(t)) \leq -1$.

Slučaj 7. Za svako $X(t) \in D_7$, važi

$$LW(X(t)) \leq -\gamma_i \frac{A(t)}{R(t)} + A_2 \leq -\frac{\gamma_i}{\epsilon} + A_2.$$

Iz (3.57), sledi $LW(X(t)) \leq -1$.

Slučaj 8. Za svako $X(t) \in D_8$, važi

$$LW(X(t)) \leq -\frac{1}{4}\mu S^2(t) + A_3 \leq -\frac{\mu}{4\epsilon^2} + A_3,$$

pri čemu je A_3 definisano izrazom (3.59). Iz (3.58), dobija se $LW(X(t)) \leq -1$.

Slučaj 9. Za svako $X(t) \in D_9$, važi

$$LW(X(t)) \leq -\frac{1}{4}\mu E^2(t) + A_4 \leq -\frac{\mu}{4\epsilon^2} + A_4,$$

gde je A_4 definisano izrazom (3.61). Iz (3.60), sledi $LW(X(t)) \leq -1$.

Slučaj 10. Za svako $X(t) \in D_{10}$, važi

$$LW(X(t)) \leq -\frac{1}{4}\delta_i I^2(t) + A_5 \leq -\frac{\delta_i}{4\epsilon^4} + A_5,$$

gde je A_5 definisano izrazom (3.63). Iz (3.62), dobija se $LW(X(t)) \leq -1$.

Slučaj 11. Za svako $X(t) \in D_{11}$, važi

$$LW(X(t)) \leq -\frac{1}{4}\delta_p P^2(t) + A_6 \leq -\frac{\delta_p}{4\epsilon^4} + A_6,$$

gde je A_6 definisano izrazom (3.65). Iz (3.64), sledi $LW(X(t)) \leq -1$.

Slučaj 12. Za svako $X(t) \in D_{12}$, važi

$$LW(X(t)) \leq -\frac{1}{4}\delta_h H^2(t) + A_7 \leq -\frac{\delta_h}{4\epsilon^6} + A_7,$$

gde je A_7 definisano izrazom (3.67). Iz (3.66), dobija se $LW(X(t)) \leq -1$.

Slučaj 13. Za svako $X(t) \in D_{13}$, važi

$$LW(X(t)) \leq -\frac{1}{4}\mu A^2(t) + A_8 \leq -\frac{\mu}{4\epsilon^4} + A_8,$$

pri čemu je A_8 definisano izrazom (3.69). Iz (3.68), sledi $LW(X(t)) \leq -1$.

Slučaj 14. Za svako $X(t) \in D_{14}$, važi

$$LW(X(t)) \leq -\frac{1}{4}\mu R^2(t) + A_9 \leq -\frac{\mu}{4\epsilon^6} + A_9,$$

gde je A_9 definisano izrazom (3.71). Iz (3.70), sledi $LW(X(t)) \leq -1$.

Na osnovu prethodnih razmatranja, sledi da je

$$LW(X(t)) \leq -1, \quad \text{za svako } X(t) \in \mathbb{R}_+^7 \setminus \bar{D}. \quad (3.72)$$

Neka je $X_0 \in \mathbb{R}_+^7 \setminus \bar{D}$ proizvoljno i neka je $\tau_{\bar{D}}$ definisano sa $\tau_{\bar{D}} = \inf\{t \geq 0 : |X(t)| \in \bar{D}\}$. Pored toga, za svako $r > |X_0|$, neka je

$$\rho_r := \inf\{t \geq 0 : |X(t)| > r\}.$$

Tada, primenom Itôve formule (1.4) i računanjem očekivanja, dobija se

$$W(X(t \wedge \tau_{\bar{D}} \wedge \rho_r)) - W(X_0) \leq E \int_0^{t \wedge \tau_{\bar{D}} \wedge \rho_r} LW(X(s)) ds, \quad \forall t > 0.$$

Na osnovu nenegativnosti funkcije W i relacije (3.72), sledi da je

$$0 \leq W(X_0) - E(t \wedge \tau_{\bar{D}} \wedge \rho_r), \quad \forall t > 0.$$

Kada $r \rightarrow \infty$ i $t \rightarrow \infty$, dobija se

$$E(\tau_{\bar{D}}) \leq W(X_0), \quad \forall X_0 \in \mathbb{R}_+^7 \setminus \bar{D}.$$

Poslednje implicira da je uslov (B.2) Leme 1.6 zadovoljen. Dakle, na osnovu Leme 1.6, model (3.2) ima jedinstvenu stacionarnu raspodelu. Ovim je dokaz kompletan. $\triangle$

Na osnovu Teoreme 3.9 sledi da, ako je $R_0^S > 1$, tada stohastički sistem (3.2) ima ergodičko svojstvo, odnosno, netrivialno rešenje stohastičkog sistema oscilira oko endemskog ekvilibrijuma odgovarajućeg determinističkog sistema, tj. bolest je perzistentna u srednjem u populaciji.

Glava 4

Stohastički epidemiološki modeli koji uključuju vakcinaciju

Vakcinacija se smatra fundamentalnim elementom preventivne medicine, koja ne samo da štiti pojedinca, već i doprinosi opštem zdravlju zajednice. Ona predstavlja jednu od najefikasnijih intervencija za prevenciju zaraznih bolesti i očuvanje javnog zdravlja. Kroz primenu vakcina, imunološki sistem se priprema da prepozna i brani organizam od specifičnih patogena, poput virusa i bakterija, čime se značajno smanjuje rizik od oboljenja, komplikacija i smrtnosti. Vakcinacija direktno utiče na smanjenje broja podložnih osoba i povećanje kolektivnog (trajnog ili privremenog) imuniteta čime se usporava širenje bolesti.

Kod zaraznih bolesti za koje postoji razvijena vakcina, moguće je razmatrati model koji, pored klasa osetljivih (S), zaraženih (I) i oporavljenih (R) osoba, sadrži i klasu vakcinisanih osoba (V) i proučavati uticaj vakcinacije na kolektivni imunitet populacije i dinamiku širenja bolesti. Uključivanje klase vakcinisanih osoba u epidemiološke modele omogućava analizu efikasnosti vakcina i trajanja imuniteta kao i određivanje prioriteta za vakcinaciju. Tako modifikovani epidemiološki modeli, pored procene broja zaraženih, pomažu u oblikovanju strategija vakcinacije.

U Poglavlju 4.1 je analiziran problem optimalne kontrole stohastičkog SVIR modela s logističkim rastom populacije i prenosom bolesti opisanom funkcijom zasićenja (engleski naziv: saturated incidence function). Rezultati ovog poglavlja su objavljeni kao poglavlje u knjizi [14]. U Podpoglavlju 4.1.1 je opisana konstrukcija stohastičkog epidemiološkog modela. Podpoglavlje 4.1.2 sadrži analizu osetljivosti modela u odnosu na njegove parametare. U Podpoglavlju 4.1.3 opisan je problem optimalne kontrole, dok je u Podpoglavlju 4.1.4 analiziran problem optimalne kontrole modela bez ograničenja. Dve vrste budžetskih ograničenja za problem optimalne kontrole proučavaju se u Podpoglavlju 4.1.5. U Podpoglavlju 4.1.6 su prikazani brojni numerički primeri kako bi se ilustrovali teorijski rezultati. U Poglavlju 4.2 je konstruisan i analiziran stohastički SVIR epidemiološki model koji uključuje i uticaje iz okruženja koji se ne dešavaju često a imaju značajne efekte. Ovakvi uticaji se ne mogu modelirati Brownovim kretanjem već se za njihovo modeliranje primenjuju procesi Lévyja. Za tako konstruisani model, egzistencija globalnog pozitivnog rešenja je dokazana u Podpoglavlju 4.2.1. U Podpoglavljljima 4.2.2, 4.2.3 i 4.2.4 su izvedeni dovoljni uslovi za iskorenjivanje i perzistentnost bolesti i postojanje stacionarne raspodele modela, redom. Podpoglavlje 4.2.5 sadrži numeričke simulacije koje ilustruju rezultate dokazane u Poglavlju 4.2. Originalni rezultati Poglavlja 4.2 su objavljeni u radu [15].

4.1 Optimalna kontrola stohastičkog SVIR modela

U ovom poglavlju analiziran je problem optimalne kontrole sa i bez ograničenja za stohastički epidemiološki model sa logističkim rastom populacije i prenosom bolesti opisanom funkcijom zasićenja (engleski naziv: saturated incidence function) kada imunitet, stečen vakcinacijom ili prirodnim putem, nije trajan. Glavni cilj je definisanje strategija koje mogu doprineti smanjenju širenja bolesti.

Budući da se mehanizmi prenosa bolesti razlikuju od jedne do druge bolesti, u literaturi su predložene funkcije prenosa bolesti različitog oblika kako bi se on opisao na adekvatniji način. U većini epidemioloških modela, funkcija prenosa bolesti opisana funkcijom zasićenja obično ima bilinearnu formu βSI . Ova formulacija je zasnovana na pretpostavci homogenog mešanja i bazira se na činjenici da pojedinac iz klase osetljivih S postaje zaražen pri kontaktu sa zaraženim pojedincem iz klase I , gde $\beta > 0$ predstavlja stopu prenosa. Međutim, postoje brojni razlozi zbog kojih bi ova standardna bilinearna forma mogla zahtevati adaptaciju. Pre svega, pretpostavka homogenog mešanja nije primenljiva u svim scenarijima. Pored toga, efekti zasićenja mogu dovesti do toga da funkcije prenosa bolesti rastu sporije od linearne funkcije po I i S . Na primer, kada je broj zaraženih pojedinaca visok, verovatnoća izloženosti uzročniku bolesti je veoma velika, što uzrokuje da funkcija prenosa bolesti raste sporije od linearne funkcije po I . S druge strane, funkcije prenosa bolesti koje rastu brže od linearne funkcije po I mogu se javiti u različitim slučajevima, na primer, kada su potrebne višestruke izloženosti uzročniku bolesti pre nego što dođe do infekcije (videti [104]).

Ostale uobičajene funkcije prenosa bolesti opisane funkcijom zasićenja primenjivane u literaturi su:

- Standardna funkcija prenosa bolesti sa proporcionalnim mešanjem $\beta \frac{SI}{N}$ (videti [105], [106]) ili funkcija prenosa bolesti zavisna od učestanosti $\frac{\beta SI}{S+I}$ (videti [107], [108]), predstavlja bilinearnu funkciju prenosa bolesti normalizovanu ukupnim brojem pojedinaca, odnosno, ukupnim brojem podložnih i zaraženih pojedinaca, redom. Ove formulacije su posebno pogodne za velike populacije gde je kretanje pojedinaca sporo, što ograničava kontakte pojedinaca u jedinici vremena. Takve normalizovane funkcije prenosa bolesti pružaju precizniji opis dinamike prenosa bolesti u poređenju sa bilinearnom funkcijom prenosa.
- Nelinearna funkcija prenosa bolesti opisana funkcijom zasićenja $\beta S^p I^q$ (videti [109]) zasniva se na pretpostavci da stopa zaražavanja nije linearna funkcija po I i S . Na primer, funkcija prenosa bolesti sa sporijim rastom po I od linearne funkcije javlja se zbog efekata zasićenja kada je udeo zaraženih visok, što vodi ka velikoj verovatnoći izloženosti bolesti. Nasuprot tome, funkcija prenosa bolesti koja raste brže od linearne funkcije po I može se pojaviti kada je udeo zaraženih vrlo nizak ili kada je za infekciju potrebno višestruko izlaganje.
- Funkcije prenosa bolesti opisane funkcijama zasićenja kao što su $\frac{\beta SI}{1+\alpha S}$ (videti [110]) i $\frac{\beta SI}{1+\alpha I}$ (videti [4]), gde α predstavlja konstantu zasićenja koja odražava promene u ponašanju pojedinaca koje utiču na efektivni broj kontakata, su značajne u epidemiološkim modelima. Ove funkcije prenosa bolesti su važne jer uzimaju u obzir moguće efekte zasićenja u broju efektivnih kontakata između zaraženih i podložnih pojedinaca. Na primer, kada je broj zaraženih pojedinaca visok, funkcija prenosa bolesti $\frac{\beta SI}{1+\alpha I}$ postaje manja u poređenju sa bilinearnom funkcijom

prenosa bolesti. Ovo može odražavati psihološke efekte, gde porast broja zaraženih dovodi do smanjenja kontakata u populaciji po jedinici vremena, kao reakcija na visoku prevalenciju infekcije.

- Funkcija prenosa bolesti opisana funkcijom zasićenja $\frac{\beta SI^h}{1+\alpha I^h}$ (videti [111], [112]), gde kI^h meri snagu infekcije bolesti, a $1/(1 + \alpha I^h)$ kvantifikuje efekat izazvan promenom ponašanja podložnih pojedinaca u slučaju kada se broj podložnih ili zaraženih pojedinaca značajno povećava. Ova formulacija se smatra praktičnijom od $\beta I^p S^q$ jer uzima u obzir efekte ponašanja pojedinaca kada dolazi do značajnog rasta broja podložnih ili inficiranih osoba.
- Funkcija prenosa bolesti $\frac{\beta SI}{1+m_1 S+m_2 I}$ (videti [113], [114]) gde je $\beta > 0$ stopa prenosa i m_1, m_2 parametri koji mere inhibitorni mehanizam, slična je funkciji prenosa bolesti zavisnoj od učestanosti ali uključuje efekte inhibicije.
- Funkcija prenosa bolesti oblika $(\beta_1 - \frac{\beta_2 I}{m+I}) SI$ uključuje uticaj medijskog izveštavanja na dinamiku širenja bolesti (videti [115]), gde β_1 predstavlja stopu kontakata pre pojave medijskih upozorenja, dok član $\frac{\beta_2 I}{m+I}$ kvantifikuje smanjenje stope kontakata usled medijskog obaveštavanja o prisustvu zaraženih osoba. Pretpostavlja se da je $\beta_1 \geq \beta_2 > 0$, što znači da medijsko izveštavanje može smanjiti, ali ne i potpuno sprečiti širenje bolesti. Funkcija $\frac{I}{m+I}$, gde je $m > 0$ konstanta poluzasićenja, predstavlja ograničenu funkciju koja uzima u obzir efekat zasićenja bolesti (tj. da je već veliki broj ljudi zaražen ili imun) ili psihološke efekte.

U epidemiološkim modelima se često uvodi pretpostavka da je populacija konstantna, što nije uvek odgovarajuće za opisivanje veličina populacija sa većom mobilnošću lokalnog stanovništva. Takođe, česta pretpostavka je da populacija ima eksponencijalni rast sa konstantnom stopom rasta bez obzira na veličinu populacije, što dovodi do ubrzanog rasta populacije kako se ona širi. Kod ovog tipa rasta populacije su zanemarena ograničenja koja proizilaze iz dostupnosti resursa, što nije u skladu sa prirodnim zakonima po kojima su populacije ograničene kapacitetom sredine. Iz tih razloga su ovi oblici rasta populacije zamenjeni logističkim rastom (videti [4], [5], [116–120]). Kod logističkog rasta populacije, uzet je u obzir kapacitet sredine, koji predstavlja maksimalnu moguću veličinu populacije sa dostupnim resursima. Logistički rast populacije je oblika $\gamma S(t) \left(1 - \frac{S(t)}{K}\right)$, gde je γ stopa rasta, a K kapacitet sredine. Kod logističkog rasta, stopa rasta po glavi stanovnika postaje sve manja kako veličina populacije dostiže maksimum nametnut ograničenim resursima u okruženju.

Epidemiološki modeli sa optimalnom kontrolom su široko primenjivani kao moćan alat koji omogućava konstruisanje strategija za upravljanje dinamikom epidemija. Osnovni princip optimalne kontrole u epidemiologiji je identifikacija najefikasnije strategije među dostupnim opcijama, s ciljem minimiziranja broja infekcije uz optimizaciju troškova povezanih sa primenom terapija ili vakcina radi kontrole progresije bolesti.

Neki od radova koji se bave problemima optimalne kontrole širenja zaraznih bolesti uključuju analizu stohastičkog modela širenja AIDS-a (videti [121]), analizu stohastičkih modela širenja COVID-19 (videti [122] i [123]), analizu stohastičkog i determinističkog modela širenja hepatitisa B (videti [124]), analizu determinističkog SIR modela sa ograničenjem trajanja intervencije i strogim karantinom (videti [125]), analizu determinističkog epidemiološkog modela širenja COVID-19 (videti [126]), analizu

determinističkog epidemiološkog modela širenja ebole (videti [127]). Ovi modeli su ili deterministički ili stohastički koji zavise od konstantnih parametara modela.

U ovom poglavlju je proučavan problem optimalne kontrole stohastičkog SVIR epidemiološkog modela sa logističkim rastom populacije i funkcijom prenosa bolesti opisanom funkcijom zasićenja. Dobijeni teorijski rezultati postojanja procesa optimalne kontrole su potvrđeni na primeru prenosa virusa ebole, koja je retka, ali opasna bolest koja se može preneti kontaktom sa krvlju ili telesnim tečnostima inficiranog pacijenta. Trenutno ne postoji licencirani tretman ili vakcina za ebolu. Zbog mogućnosti izbijanja ozbiljnih epidemija, naročito u delovima Afrike, razvijaju se i testiraju potencijalne nove vakcine i terapije (videti [76]). Iz tih razloga, važno je analizirati uticaj vakcinacije na širenje virusa ebole i pronaći optimalan trend vakcinacije kako bi se spasili životi. S obzirom na visoku stopu smrtnosti od ebole i postojanje samo eksperimentalnih vakcina, analiziran je epidemiološki model za opisivanje širenja virusa ebole koji uključuje funkciju prenosa bolesti opisanu funkcijom zasićenja, uzimajući u obzir "psihološki efekat" ili svest pojedinaca o ozbiljnosti bolesti (videti [76], [127–129] i reference u njima). Pored toga, u model je uključen logistički rast populacije kao i slučajnost iz okruženja kako bi se bolje opisala realnost. U cilju proučavanja složene dinamike širenja bolesti kao i uticaja vakcinacije na širenje i kontrolu bolesti, prikazane su numeričke simulacije stohastičkog modela sa optimalnom kontrolom.

4.1.1 Konstrukcija stohastičkog epidemiološkog modela

U nastavku će biti predstavljen stohastički SVIR epidemiološki model sa funkcijom prenosa bolesti opisanom funkcijom zasićenja i logističkim rastom populacije proučavan u [4]. Naime, ukupna populacija je podeljena u četiri disjunktne klase: klasu osoba podložnih infekciji, klasu vakcinisanih, klasu inficiranih i klasu oporavljenih pojedinaca, gde $S(t)$, $V(t)$, $I(t)$ i $R(t)$ označavaju broj pojedinaca u svakoj od ovih klasa u trenutku $t \geq 0$, redom. Dinamika epidemiološkog modela je opisana sistemom diferencijalnih jednačina

$$\begin{aligned} dS(t) &= \left(\gamma S(t) \left(1 - \frac{S(t)}{K} \right) - \frac{\beta S(t)I(t)}{1+a_1 I(t)} - \zeta S(t) + vV(t) \right) dt, \\ dV(t) &= \left(\zeta S(t) - \frac{\beta V(t)I(t)}{1+a_2 I(t)} - vV(t) - \mu V(t) \right) dt, \\ dI(t) &= \left(\frac{\beta S(t)I(t)}{1+a_1 I(t)} + \frac{\beta V(t)I(t)}{1+a_2 I(t)} - (\tau + \mu + \delta) I(t) \right) dt, \\ dR(t) &= (\tau I(t) - \mu R(t)) dt, \end{aligned} \tag{4.1}$$

sa početnim uslovom $S(0) = S_0$, $V(0) = V_0$, $I(0) = I_0$, $R(0) = R_0$.

Parametri modela (4.1) imaju sledeće značenje:

- μ je prirodna stopa smrtnosti;
- stopa rasta populacije γ predstavlja razliku stope nataliteta b i prirodne stope smrtnosti ($\gamma = b - \mu > 0$);
- K je kapacitet sredine (lokalnog područja ili ekosistema);
- β je stopa prenosa bolesti;
- a_1 i a_2 označavaju konstante poluzasićenja koje uzimaju u obzir činjenicu da je verovatnoća da se vakcinisana osoba zarazi od inficiranog pojedinca manja od verovatnoće da se podložna osoba zarazi od inficiranog pojedinca, tj. važi $a_1 < a_2$;
- ζ je udeo podložnih osoba koje se vakcinišu;
- v je stopa gubitka imuniteta stečenog vakcinacijom;
- τ je stopa oporavka zaraženih;

o δ označava stopu smrtnosti od bolesti.

Pretpostavlja se da se virus širi kada podložna osoba dođe u kontakt sa inficiranom osobom, bez obzira na to da li je ta osoba vakcinisana ili ne, što je u modelu predstavljeno saturisanim funkcijama incidence oblika $\frac{\beta S(t)I(t)}{1+a_1 I(t)}$ i $\frac{\beta V(t)I(t)}{1+a_2 I(t)}$. Pored toga, rast populacije se odvija prema logističkom trendu opisanom članom $\gamma S(t) \left(1 - \frac{S(t)}{K}\right)$.

U radu [4], autori su na osnovu determinističkog modela (4.1) konstruisali odgovarajući stohastički model, pretpostavljajući da je slučajnost iz okoline direktno proporcionalna klasama $S(t), V(t), I(t), R(t), t \geq 0$.

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ prostor verovatnoće gde je Ω prostor ishoda, P verovatnosna mera, i $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}$ filtracija generisana Brownovim kretanjem $\{B(t) = (B_1(t), B_2(t), B_3(t), B_4(t))\}_{t \in [0, T]}$. U nastavku, pod adaptiranim procesima smatraće se procesi adaptirani u odnosu na ovu filtraciju.

Stohastički model analiziran u radu [4], ima sledeći oblik:

$$\begin{aligned} dS(t) &= \left(\gamma S(t) \left(1 - \frac{S(t)}{K}\right) - \frac{\beta S(t)I(t)}{1 + a_1 I(t)} - \zeta S(t) + vV(t) \right) dt + \sigma_1 S(t) dB_1(t), \\ dV(t) &= \left(\zeta S(t) - \frac{\beta V(t)I(t)}{1 + a_2 I(t)} - vV(t) - \mu V(t) \right) dt + \sigma_2 V(t) dB_2(t), \\ dI(t) &= \left(\frac{\beta S(t)I(t)}{1 + a_1 I(t)} + \frac{\beta V(t)I(t)}{1 + a_2 I(t)} - (\tau + \mu + \delta) I(t) \right) dt + \sigma_3 I(t) dB_3(t), \\ dR(t) &= (\tau I(t) - \mu R(t)) dt + \sigma_4 R(t) dB_4(t), \end{aligned} \quad (4.2)$$

sa početnim uslovom $S(0) = S_0, V(0) = V_0, I(0) = I_0, R(0) = R_0$, gde su $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ i σ_4 intenziteti belog šuma. Za model (4.2), autori su pretpostavili da je imunitet stečen nakon preležane bolesti trajan, dok imunitet nakon primanja vakeine nije trajan. Međutim, u realnosti, imunitet stečen u oba slučaja nije trajan kod većine bolesti. To je bila motivacija da se u ovom poglavlju blago modifikuje stohastički model (4.2), uvođenjem pretpostavke da imunitet stečen nakon preležane bolesti nije trajan, već se gubi nakon određenog vremena. Ovo je opisano u modelu stopom r , koja označava stopu gubitka imuniteta za oporavljene osobe. Modifikovani stohastički model ima sledeći oblik

$$\begin{aligned} dS(t) &= \left(\gamma S(t) \left(1 - \frac{S(t)}{K}\right) - \frac{\beta S(t)I(t)}{1 + a_1 I(t)} - \zeta S(t) + vV(t) + rR(t) \right) dt \\ &\quad + \sigma_1 S(t) dB_1(t), \\ dV(t) &= \left(\zeta S(t) - \frac{\beta V(t)I(t)}{1 + a_2 I(t)} - vV(t) - \mu V(t) \right) dt + \sigma_2 V(t) dB_2(t), \\ dI(t) &= \left(\frac{\beta S(t)I(t)}{1 + a_1 I(t)} + \frac{\beta V(t)I(t)}{1 + a_2 I(t)} - (\tau + \mu + \delta) I(t) \right) dt + \sigma_3 I(t) dB_3(t), \\ dR(t) &= (\tau I(t) - (r + \mu) R(t)) dt + \sigma_4 R(t) dB_4(t), \end{aligned} \quad (4.3)$$

sa početnim uslovom $S(0) = S_0, V(0) = V_0, I(0) = I_0, R(0) = R_0$. Ostali parametri modela imaju isto značenje kao što je prethodno opisano.

4.1.2 Analiza osetljivosti stohastičkog epidemiološkog modela na stopu vakcinacije

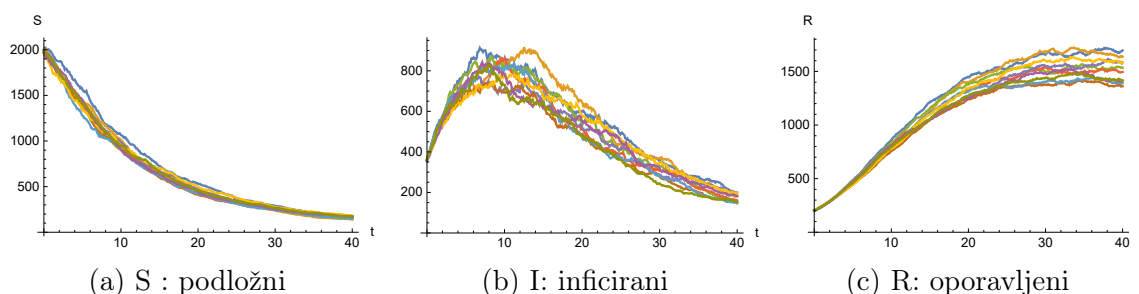
Cilj je ispitati uticaj vakcinacije u praktičnim scenarijima širenja bolesti ebola. Numeričke simulacije razmatranog stohastičkog modela (4.3) su prikazane na Slikama 4.1, 4.2 i 4.3 kako bi se ilustrovao uticaj vakcinacije na širenje bolesti ebola. Kao što je pomenuto u uvodu, trenutno ne postoji licenciran tretman ili vakcina za bolest virusa ebola, ali se potencijalne nove vakcine i lekovi razvijaju i testiraju (videti [76]).

Uticaj različitih stopa vakcinacije na progresiju bolesti je prikazan na graficima Slika 4.1, 4.2 i 4.3 gde su odabrane konstantne vrednosti stope vakcinacije $\zeta \in \{0, 0.1, 0.5\}$ tokom vremena. Simulacije su dobijene na osnovu realističnih vrednosti parametara za širenje bolesti izazvane virusom ebola, koje su dobijene različitim statističkim metodama u radovima [127–130], na osnovu podataka Svetske zdravstvene organizacije [76] ili racionalno pretpostavljene (p). Vrednosti parametara date su u Tabeli 4.1. U primerima se pretpostavlja da su početne vrednosti $S(0) = 2000$, $V(0) = 0$, $I(0) = 350$, $R(0) = 200$ i kapacitet sredine $K = 12000$.

Simbol	Opis	Vrednost	Reference
γ	stopa rasta populacije	0.015	[76]
β	stopa prenosa	0.0025	[76], [127–130]
v	stopa gubljenja imuniteta vakcinisanih	0.00025	(p)
r	stopa gubljenja imuniteta oporavljenih	0.00025	(p)
a_1	saturaciona konstanta podložnih	0.01	(p)
a_2	saturaciona konstanta vakcinisanih	1	(p)
ρ	stopa oporavka	0.1	[76], [127–130]
δ	stopa smrtnosti od bolesti	0.25	[76], [127–130]
μ	prirodna stopa smrtnosti	0.015	[76]

Tabela 4.1: Vrednosti parametara modela (4.3)

Na Slici 4.1 je prikazano deset trajektorija rešenja modela (4.3) za $\zeta = 0$, što predstavlja scenario u kojem nema vakcinacije. Grafici prikazuju smanjenje broja podložnih osoba, dok broj oporavljenih osoba raste. Takođe, dolazi do naglog povećanja broja zaraženih osoba pre nego što on počne da opada i stabilizuje se. Međutim, varijabilnost unutar klase zaraženih je značajna.

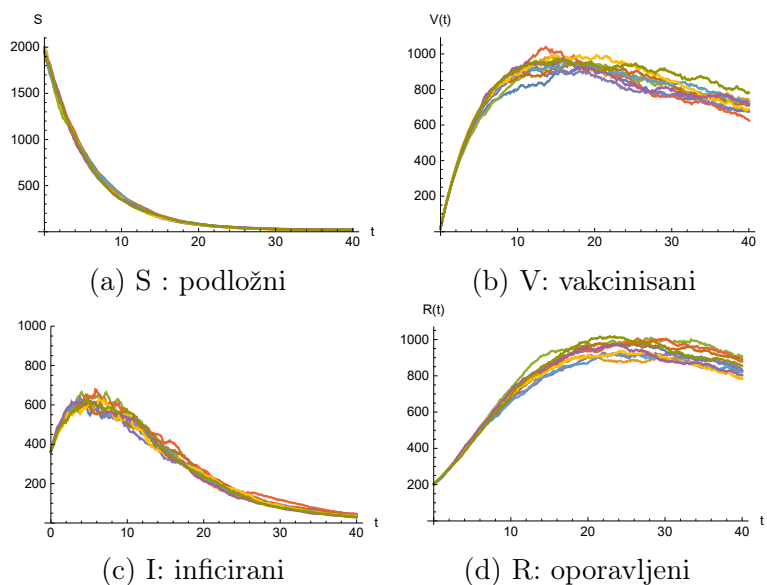


Slika 4.1: 10 trajektorija rešenja modela (4.3) bez vakcinacije.

Na Slikama 4.2 i 4.3 prikazano je deset trajektorija rešenja modela (4.3) sa različitim stopama vakcinacije. Ove slike ilustruju kako različite stope vakcinacije utiču na

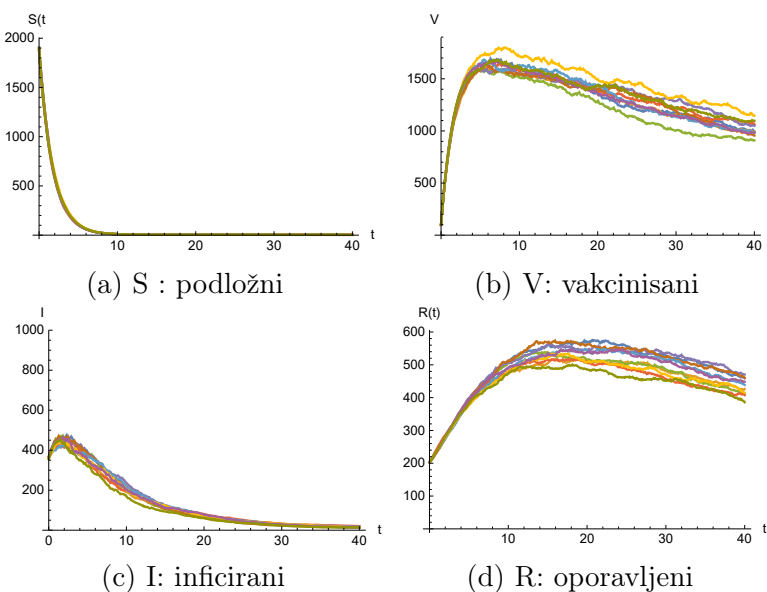
maksimum koji kriva zaraženih osoba dostiže.

Na Slici 4.2, trajektorije rešenja su dobijene kada je stopa vakcinacije $\zeta = 0.1$, što znači da 10% podložnih osoba dobija vakcinu. Ova slika pokazuje da broj zaraženih osoba sporije raste i dostiže nižu maksimalnu vrednost u poređenju sa maksimumom koji broj zaraženih osoba dostiže na Slici 4.1, gde nema vakcinacije. Pored toga, broj podložnih osoba opada kao na Slici 4.1, dok broj vakcinisanih i oporavljenih osoba u početku raste, a zatim opada. Disperzija u klasi zaraženih osoba je manja na Slici 4.2 nego na Slici 4.1.



Slika 4.2: 10 trajektorija rešenja modela (4.3) sa vakcinacijom podložnih od 10%.

Na Slici 4.3 prikazano je deset trajektorija rešenja modela (4.3), pri čemu je stopa vakcinacije $\zeta = 0.5$, što znači da 50% podložnih osoba prima vakcinu.



Slika 4.3: 10 trajektorija rešenja modela (4.3) sa vakcinacijom podložnih od 50%.

Ova slika pokazuje da broj zaraženih osoba raste sporije i dostiže nižu maksimalnu vrednost u poređenju sa maksimalnom vrednošću koju dostiže broj zaraženih osoba na Slikama 4.1 i 4.2. Takođe, disperzija u klasi zaraženih osoba na Slici 4.3 značajno je manja nego disperzija u klasi zaraženih osoba na Slikama 4.1 i 4.2. Kao i na Slici 4.2, na Slici 4.3 broj osetljivih osoba ima opadajući trend, dok broj vakcinisanih i oporavljenih osoba u početku ima rastući trend, a potom opadajući.

Poređenjem grafika zaraženih osoba na ovim slikama, može se zaključiti da kako se procenat vakcinisanih osoba povećava, i vrh krive i varijabilnost zaraženih osoba postaju manji. Ovo pokazuje efikasnost vakcinacije u kontroli bolesti. Međutim, kako bi se izbegli nepotrebni troškovi vakcinacije populacije, potrebno je optimizovati stopu vakcinacije.

4.1.3 Optimalna kontrola stohastičkog epidemiološkog SVIR modela

Neka je T konačno vreme (krajnji trenutak vremenskog intervala od interesa) i neka je $\{u(t)\}_{t \in [0, T]}$ stohastički proces kontrole, gde $u(t, \omega)$ označava procenat vakcinisanih osoba u trenutku t u scenariju $\omega \in \Omega$, tako da je $u(t) = u(t, \omega) \in [0, 1]$ za svako $t \in [0, T]$. Za funkciju kontrole se pretpostavlja da pripada skupu dopustivih kontrola

$$\mathcal{A} := \{u(t, \omega) \in \mathcal{L}^\infty([0, T], \Omega) : 0 \leq u(t, \omega) \leq 1, \text{ s.i.}, \omega \in \Omega, t \in [0, T], u(t, \omega) \text{ adaptiran}\}. \quad (4.4)$$

U nastavku je formulisan problem optimalne kontrole uvođenjem kontrolnog procesa koji opisuje stopu vakcinacije u oznaci $u(t)$ u model (4.3). Cilj uvođenja ovog kontrolnog procesa je minimizacija broja inficiranih osoba i troškova vakcinacije.

Dobijeni model je dat sledećim sistemom SDJ

$$\begin{aligned} dS(t) &= \left(\gamma S(t) \left(1 - \frac{S(t)}{K} \right) - \frac{\beta S(t)I(t)}{1 + a_1 I(t)} - u(t)S(t) + vV(t) + rR(t) \right) dt \\ &\quad + \sigma_1 S(t) dB_1(t), \\ dV(t) &= \left(u(t)S(t) - \frac{\beta V(t)I(t)}{1 + a_2 I(t)} - (\mu + v)V(t) \right) dt + \sigma_2 V(t) dB_2(t), \\ dI(t) &= \left(\frac{\beta S(t)I(t)}{1 + a_1 I(t)} + \frac{\beta V(t)I(t)}{1 + a_2 I(t)} - (\tau + \mu + \delta) I(t) \right) dt + \sigma_3 I(t) dB_3(t), \\ dR(t) &= (\tau I(t) - (\mu + r)R(t)) dt + \sigma_4 R(t) dB_4(t), \end{aligned} \quad (4.5)$$

sa početnim uslovom $S(0) = S_0, V(0) = V_0, I(0) = I_0, R(0) = R_0$.

Poređenjem modela (4.3) i (4.5), uočava se da je konstanta ζ u modelu (4.3) zamenjena procesom $u(\cdot)$ u modelu (4.5). Na taj način, stopa vakcinacije postaje proces zavisian od vremena i scenarija, odražavajući slučajnost okruženja u svakom trenutku.

4.1.4 Problem stohastičke optimalne kontrole bez ograničenja

Najpre će biti analiziran stohastički model sa optimalnom kontrolom bez ograničenja. To podrazumeva uvođenje funkcije performansi definisanu očekivanjem integrala ponderisane sume dva člana, jednog koji zavisi od broja zaraženih osoba i drugog koji

zavisi od procenta vakcinisanih osoba:

$$J(u) := \mathbb{E} \left[\int_0^T (k_1 I(t) + k_2 u^2(t)) dt \right], \quad (4.6)$$

pri čemu su k_1, k_2 težinski koeficijenti.

Napomena 4.1 Izbor funkcije performansi je u skladu sa standardima u literaturi. U ovom slučaju je primenjena kvadratna funkcija kako bi se obuhvatili nelinearni efekti vakcinacije populacije (više detalja je dostupno u [7,8,15,16]). Ipak, mogu se definisati i drugi oblici funkcija performansi, poput logaritamskih ili eksponencijalnih.

Da bi se identifikovala optimalna kontrola za posmatrani sistem, potrebno je da se identifikuje strategija $\{u(t)\}_{t \in [0, T]}$ koja minimizira funkciju performansi. Dakle, cilj je pronalaženje optimalne kontrole $u(\cdot)$, tako da je

$$\min_{u \in \mathcal{A}} J(u) = \min_{u \in \mathcal{A}} \mathbb{E} \left[\int_0^T (k_1 I(t) + k_2 u^2(t)) dt \right]. \quad (4.7)$$

Radi jednostavnijeg zapisa, uvode se oznake

$$X(t) = (X_1(t), X_2(t), X_3(t), X_4(t)) = (S(t), V(t), I(t), R(t)),$$

sa početnim uslovom $x(0) = (x_1(0), x_2(0), x_3(0), x_4(0))$. Pored toga, neka je

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & v & 0 & r \\ 0 & -(v + \mu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(\mu + \delta + \tau) & 0 \\ 0 & 0 & \tau & -(\mu + r) \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$f(X(t)) = \left(\gamma S(t) \left(1 - \frac{S(t)}{K} \right) - \beta \frac{S(t)I(t)}{1 + a_1 I(t)}, -\beta \frac{V(t)I(t)}{1 + a_2 I(t)}, \right. \\ \left. \beta \frac{S(t)I(t)}{1 + a_1 I(t)} + \beta \frac{V(t)I(t)}{1 + a_1 I(t)}, 0, 0 \right)', \quad (4.8)$$

$$g(X(t)) = (\sigma_1 S(t), \sigma_2 V(t), \sigma_3 I(t), \sigma_4 R(t))'. \quad (4.9)$$

Tada, sistem (4.5) može biti predstavljen u matričnoj formi na sledeći način

$$\begin{aligned} dX(t) &= [f(X(t)) + A_1 X(t) + A_2 X(t)u(t)] dt + g(X(t))dW(t) \\ &= b(X(t), u(t))dt + \sigma(X(t))dB(t), \end{aligned} \quad (4.10)$$

gde je

$$\begin{aligned} b(X(t), u(t)) &:= f(X(t)) + A_1 X(t) + A_2 X(t)u(t), \\ \sigma(X(t)) &:= g(X(t)). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Problem optimalne kontrole bez ograničenja stohastičkog sistema (4.10) je

$$\begin{cases} \min_{u \in \mathcal{A}} J_{x(0)}(u), \\ dX(t) = b(X(t), u(t))dt + \sigma(X(t))dB(t). \end{cases} \quad (4.12)$$

Ovo je problem optimalne kontrole stohastičkog modela standardnog oblika, koji je opisan u [131], u Poglavlju 11. Da bi se odredilo rešenje za problem optimalne kontrole (4.7), primenjuje se princip maksimuma (videti [132-134], Poglavlje 3.2 u [135]). Princip maksimuma će biti ukratko predstavljen u nastavku.

Neka su $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ i $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ date, neprekidno-diferencijabilne funkcije. Razmatra se stohastički problem optimalne kontrole

$$\begin{cases} \min_{u(t) \in \mathcal{A}} \mathbb{E} \left[\int_0^T f(t, X(t), u(t)) dt + g(X(T)) \right], \\ dX(t) = b(t, X(t), u(t)) dt + \sigma(t, X(t)) dB(t), \\ X(0) = x, \end{cases} \quad (4.13)$$

pri čemu je $U \subset \mathbb{R}$ dati skup, $b : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times U \rightarrow \mathbb{R}$ i $\sigma : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times U \rightarrow \mathbb{R}$, b'_x, σ'_x ograničene i b, σ, f'_x i g'_x ograničene sa $C(1 + |x| + |u|)$, $C \in \mathbb{R}_+$. Kontrolni proces $u(t) = u(t, \omega) : \mathbb{R}_+ \times \Omega \rightarrow U$ je iz skupa dopustivih kontrola $u \in \mathcal{A}$, dinamika od X ima jedinstveno, strogo rešenje za svako $x \in \mathbb{R}^n$ i $E^x \left[\int_0^T f(t, X(t), u(t)) dt + g(X(T)) \right] < \infty$.

Funkcija $\mathcal{H} : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times U \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n \times m} \rightarrow \mathbb{R}$ je Hamiltonijan (videti [134]), definisan sa

$$\mathcal{H}(t, x, u, p, q) = f(t, x, u) + b^T(t, x, u)p + \text{tr}(\sigma^T q).$$

Teorema 4.1 (Princip dovoljnog maksimuma, [134]) *Ako je $(\hat{u}, \hat{X})$ rešenje problema optimalne kontrole (4.13), tada postoji rešenje $(\hat{p}(t), \hat{q}(t))$ odgovarajuće pridružene jednačine*

$$\begin{aligned} dp(t) &= -\nabla_x \mathcal{H}(t, X(t), u(t), p(t), q(t)) + q(t) dB(t), \quad t < T, \\ p(T) &= \nabla g(X(T)), \end{aligned} \quad (4.14)$$

tako da, za svako t , važi

$$\mathcal{H}(t, \hat{X}(t), \hat{u}(t), \hat{p}(t), \hat{q}(t)) \leq \mathcal{H}(t, \hat{X}(t), \nu, \hat{p}(t), \hat{q}(t)), \quad \nu \in \mathcal{A}. \quad (4.15)$$

Napomena 4.2 *Uslov (4.15) Teoreme 4.1 ima ovakav oblik jer koeficijent difuzije $\sigma(t, X(t))$ ne sadrži kontrolni proces $u(t)$.*

Hamiltonijan $\mathcal{H} : [0, T] \times \mathbb{R}^4 \times [0, 1] \times \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4$ koji se odnosi na kontrolni sistem (4.12) je definisan na sledeći način

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(t, x(t), u(t), p(t), q(t)) &:= k_1 x_3(t) + k_2 u^2(t) + b(x(t), u(t))p(t) + \sigma(x(t))q(t) \\ &= k_1 x_3(t) + k_2 u^2(t) + f(X(t))p(t) + A_1 X(t)p(t) \\ &\quad + A_2 X(t)u(t)p(t) + g(x(t))q(t), \end{aligned} \quad (4.16)$$

gde je pridruženi proces

$$p(t) = (p_1(t), p_2(t), p_3(t), p_4(t)), \quad q(t) = (q_1(t), q_2(t), q_3(t), q_4(t)), \quad t \in [0, T],$$

rešenje sistema backward stohastičkih diferencijalnih jednačina (BSDJ):

$$\begin{cases} dp(t) &= -\nabla_x \mathcal{H}(t) dt + q(t) dB(t), \\ p(T) &= 0. \end{cases} \quad (4.17)$$

Ovaj sistem u matričnoj formi je ekvivalentan sistemu

$$\begin{aligned}
dp_1(t) &= - \left[\left(\gamma - \frac{2\gamma}{K} x_1(t) - \beta \frac{x_3(t)}{1 + a_1 x_3(t)} \right) p_1(t) + \beta \frac{x_3(t)}{1 + a_1 x_3(t)} p_3(t) - u(t) p_1(t) \right. \\
&\quad \left. + u(t) p_2(t) + \sigma_1 q_1(t) \right] dt + q_1(t) dB_1(t), \\
dp_2(t) &= - \left[- \beta \frac{x_3(t)}{1 + a_2 x_3(t)} p_2(t) + \beta \frac{x_3(t)}{1 + a_2 x_3(t)} p_3(t) + v p_1(t) - (v + \mu) p_2(t) \right. \\
&\quad \left. + \sigma_2 q_2(t) \right] dt + q_2(t) dB_2(t), \\
dp_3(t) &= - \left[w_1 - \beta \frac{x_1(t)}{(1 + a_1 x_3(t))^2} p_1(t) - \beta \frac{x_2(t)}{(1 + a_2 x_3(t))^2} p_2(t) \right. \\
&\quad \left. + \beta \frac{x_1(t)}{(1 + a_1 x_3(t))^2} p_1(t) + \beta \frac{x_2(t)}{(1 + a_2 x_3(t))^2} p_2(t) - (\mu + \delta + \tau) p_3(t) \right. \\
&\quad \left. + \tau p_4(t) + \sigma_3 q_3(t) \right] dt + q_3(t) dB_3(t), \\
dp_4(t) &= - [r p_1(t) - (r + \mu) p_4(t) + \sigma_4 q_4(t)] dt + q_4(t) dB_4(t), \\
p_i(T) &= 0, \quad i = 1, 2, 3, 4,
\end{aligned} \tag{4.18}$$

sa zadatim konačnim uslovom (funkcija performansi $J_{x(0)}(u)$ ne sadrži komponentu konačnog vremena).

U nastavku je navedena teorema koja garantuje postojanje rešenja linearne BSDJ.

Teorema 4.2 ([136]) *Neka su $\alpha(\cdot), \beta(\cdot)$, predvidivi ograničeni procesi, $y_T \in L^2(\mathcal{F}_T)$, $\varphi(t)$ predvidiv proces za koji važi $\mathbb{E}[\int_0^T \varphi^2(t) dt] < \infty$. Jedinstveno rešenje $(Y(t), Z(t))$ linearne BSDJ*

$$\begin{aligned}
dY(t) &= -(\varphi(t) + \alpha(t)Y(t) + \beta(t)Z(t)) dt + Z(t)dB(t), \\
Y(T) &= y_T,
\end{aligned}$$

dato je sa

$$Y(t) = \mathbb{E} \left[y_T \frac{\Gamma_T}{\Gamma_t} + \int_t^T \frac{\Gamma_s}{\Gamma_t} \varphi(s) ds | \mathcal{F}_t \right], \quad 0 \leq t \leq T,$$

gde je

$$\begin{aligned}
d\Gamma(t) &= \Gamma(t^-) (\alpha(t) dz + \beta(t) dB(t)), \quad t \geq 0, \\
\Gamma(0) &= 1.
\end{aligned}$$

Kako je sistem BSDJ (4.18) linearan, na osnovu Teoreme 4.2 postoji jedinstveno rešenje $(p(t), q(t)), t \in [0, T]$ za sistem pridruženih BSDJ.

Dakle, na osnovu principa dovoljnog maksimuma (Teorema 4.1), važi

$$\frac{\partial \mathcal{H}(t, x, u, p, q)}{\partial u} = 0,$$

odnosno,

$$2k_2 u(t) - x_1(t) p_1(t) + x_1(t) p_2(t) = 0.$$

Rešavanjem ove jednačine po $u(t)$, dobija se

$$u(t) = \frac{S(t)(p_1(t) - p_2(t))}{2k_2},$$

gde su $p_1(t), p_2(t)$ rešenja pridruženog sistema BSDJ (4.18).

Proces $u(t)$ ne mora da pripada skupu dopustivih kontrola $\mathcal{A}$, jer nema garancija da je $u(t) = \frac{S(t)(p_1(t) - p_2(t))}{2k_2} \in [0, 1]$, za $t \in [0, T]$, s.i. Međutim, ako se definiše

$$u^*(t) := \min \left\{ \max \left\{ 0, \frac{S(t)(p_1(t) - p_2(t))}{2k_2} \right\}, 1 \right\},$$

tada, $u^*(t)$ zadovoljava uslove principa maksimuma. Tada je, $\{u^*(t)\}_{t \in [0, T]}$ proces optimalne stohastičke kontrole. Ova razmatranja su sumirana u sledećoj teoremi.

Teorema 4.3 *Proces optimalne kontrole $u^*(t), t \geq 0$, koji odgovara problemu optimalne kontrole bez budžetskih ograničenja (4.7) koji se odnosi na sistem SDJ (4.5) je dat sa*

$$u^*(t) = \min \left\{ \max \left\{ 0, \frac{S(t)(p_1(t) - p_2(t))}{2k_2} \right\}, 1 \right\}, \quad t \in [0, T]. \quad (4.19)$$

4.1.5 Problem optimalne kontrole sa ograničenjem troškova

U ovom delu će biti predstavljen problem stohastičke optimalne kontrole sa ograničenjem troškova i metod za njegovo rešavanje. Osnovni cilj je utvrditi optimalnu strategiju vakcinacije koja minimizira broj zaraženih osoba uz minimalne troškove vakcinacije.

Neka je $c(t), t \in [0, T]$ data funkcija troškova potrebnih za vakcinaciju jedne osobe u trenutku t . Razmatraće se dva tipa ograničenja

$$\text{Ograničenje A:} \quad \mathbb{E} \left[\int_0^T S(t)u(t)c(t) dt \right] \leq \mathcal{V}. \quad (4.20)$$

i

$$\text{Ograničenje B:} \quad \int_0^T S(t)u(t)c(t) dt \leq \mathcal{V}, \quad \text{s.i.} \quad (4.21)$$

gde je $\mathcal{V} \in \mathbb{R}_+$ data vrednost kojom se ograničavaju troškovi.

Ograničenje A omogućuje da očekivani ukupni trošak vakcinacije tokom celog perioda ne premašuje unapred određenu vrednost $\mathcal{V}$, dok ograničenje B, osigurava da ukupni trošak vakcinacije tokom celog perioda skoro izvesno ne premaši $\mathcal{V}$. Treba napomenuti da je ograničenje B strože od ograničenja A, jer ako je uslov (4.21) zadovoljen, tada je zadovoljen i uslov (4.20).

U rešavanju problema stohastičke optimalne kontrole sa oba budžetska ograničenja biće primenjen pristup koji uključuje primenu metoda generalizovanih Lagrangeovih multiplikatora u kombinaciji sa tehnikama stohastičke optimalne kontrole (videti Poglavlje 11.3 u [131], [135] i Poglavlje 5 u [121]).

U nastavku će ukratko biti predstavljen metod Lagrangeovih multiplikatora, opisan u Poglavlju 11.3 u [131].

Razmatra se problem pronalaženja $\Phi(x)$ i $u^*(x)$ tako da je

$$\Phi(x) = \sup_{u \in U} J^u(x) = J^{u^*}(x), \quad (4.22)$$

gde je

$$J^u(x) = \mathbb{E}^x \left[\int_0^T F^u(X^u(t)) dt + K(X^u(T)) \right]$$

i U prostor kontrolnih procesa $u : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow U \subset \mathbb{R}^k$ tako da je

$$\mathbb{E}^x[M_i(X^u(T))] = 0, \quad i = 1, 2, \dots, l, \quad (4.23)$$

pri čemu je $M = (M_1, \dots, M_l) : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^l$ data neprekidna funkcija,

$$\mathbb{E}^x[|M(X^u(T))|] < 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, u \in U.$$

Problem optimalne kontrole bez ograničenja je definisan na sledeći način.

- Za svako $\lambda \in \mathbb{R}^l$ i $u \in U$ neka je

$$J_\lambda^u(x) = \mathbb{E}^x \left[\int_0^T F^u(X^u(t)) dt + K(X^u(T)) + \lambda \cdot M(X^u(T)) \right], \quad (4.24)$$

gde $\cdot$ označava unutrašnji proizvod u $\mathbb{R}^l$. Neka su $\Phi_\lambda(x)$ i $u_\lambda^*(x)$ takvi da važi

$$\Phi_\lambda(x) = \sup_{u \in U} J_\lambda^u(x) = J_\lambda^{u_\lambda^*}(x) \quad (4.25)$$

bez terminalnih uslova.

Teorema 4.4 ([131]) *Za svako $\lambda \in \Lambda \subset \mathbb{R}^l$, neka procesi $\Phi_\lambda(x)$ i u_λ^* zadovoljavaju problem optimalne kontrole bez ograničenja (4.24), (4.25). Pored toga, neka postoji $\lambda_0 \in \Lambda$ tako da je*

$$\mathbb{E}^x[M(X^{u_{\lambda_0}^*}(T))] = 0.$$

Tada su $\Phi(x) := \Phi_{\lambda_0}(x)$ i $u^ := u_{\lambda_0}^*$ rešenja problema optimalne kontrole sa ograničenjem (4.22), (4.23).*

Ograničenje A.

Neka je $\lambda \geq 0$ deterministički Lagrangeov multiplikator. Lagrangeova verzija problema optimalne kontrole sa ograničenjem je

$$\begin{cases} \min_{u \in \mathcal{A}} \mathbb{E}^{x(0)} \left[\int_0^T k_1 I(t) + k_2 u^2(t) dt + \lambda \int_0^T S(t) u(t) c(t) dt \right] \\ dX(t) = b(X(t), u(t)) dt + \sigma(X(t)) dB(t). \end{cases} \quad (4.26)$$

Konačni član funkcije performansi je nula. Oznaka $E^{x(0)}[\cdot]$ je korišćena za uslovno očekivanje pod uslovom da proces $\{X(t)\}_{t \in [0, T]}$ počinje u $x(0)$.

Da bi se rešio problem optimalne kontrole sa ograničenjima A, biće primenjena Teorema 4.4 (videti takođe Teoremu 5.1 u [121]).

Hamiltonijan $\mathcal{H} : [0, T] \times \mathbb{R}^4 \times [0, 1] \times \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4$ koji se odnosi na problem optimalne kontrole (4.26) je

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(t, x, u, p, q) &:= k_1 x_3(t) + k_2 u^2(t) + \lambda x_1(t) u(t) c(t) + b(x(t), u(t)) p(t) \\ &\quad + \sigma(x(t)) q(t) \\ &= k_1 x_3(t) + k_2 u^2(t) + \lambda x_1(t) u(t) c(t) \\ &\quad + (f(X(t)) + A_1 X(t) + A_2 X(t) u(t)) p(t) + g(x(t)) q(t), \end{aligned} \quad (4.27)$$

gde su pridruženi procesi

$$p(t) = (p_1(t), p_2(t), p_3(t), p_4(t)), \quad q(t) = (q_1(t), q_2(t), q_3(t), q_4(t)), \quad t \in [0, T]$$

rešenja sledećeg sistema BSDJ:

$$\begin{aligned} dp(t) &= -\nabla_x \mathcal{H}(t) dt + q(t) dB(t), \\ p(T) &= 0. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Ovaj sistem u matričnoj formi je ekvivalentan sistemu

$$\begin{aligned} dp_1(t) &= - \left[\lambda u(t) c(t) + \left(\gamma - \frac{2\gamma}{K} x_1(t) - \beta \frac{x_3(t)}{1+a_1 x_3(t)} \right) p_1(t) + \beta \frac{x_3(t)}{1+a_1 x_3(t)} p_3(t) \right. \\ &\quad \left. - u(t) p_1(t) + u(t) p_2(t) + \sigma_1 q_1(t) \right] dt + q_1(t) dB_1(t), \\ dp_2(t) &= - \left[- \beta \frac{x_3(t)}{1+a_2 x_3(t)} p_2(t) + \beta \frac{x_3(t)}{1+a_2 x_3(t)} p_3(t) + v p_1(t) - (v + \mu) p_2(t) \right. \\ &\quad \left. + \sigma_2 q_2(t) \right] dt + q_2(t) dB_2(t), \\ dp_3(t) &= - \left[k_1 - \beta \frac{x_1(t)}{(1+a_1 x_3(t))^2} p_1(t) - \beta \frac{x_2(t)}{(1+a_2 x_3(t))^2} p_2(t) + \beta \frac{x_1(t)}{(1+a_1 x_3(t))^2} p_1(t) \right. \\ &\quad \left. + \beta \frac{x_2(t)}{(1+a_2 x_3(t))^2} p_2(t) - (\mu + \delta + \tau) p_3(t) + \tau p_4(t) + \sigma_3 q_3(t) \right] dt \\ &\quad + q_3(t) dB_3(t), \\ dp_4(t) &= - [r p_1(t) - (r + \mu) p_4(t) + \sigma_4 q_4(t)] dt + q_4(t) dB_4(t), \\ p_i(T) &= 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, \end{aligned} \quad (4.29)$$

pri čemu je konačni uslov $p_i(T) = 0$, $i = 1, 2, 3, 4$, jer funkcija performansi $J_{x(0)}(u)$ ne sadrži komponentu za terminalno vreme.

Ovaj sistem BSDJ je linearan. Na osnovu Teoreme 4.2 postoji jedinstveno rešenje $(p(t), q(t))$, $t \in [0, T]$ sistema pridruženih BSDJ, a ista teorema daje i eksplicitno rešenje ovog sistema.

Uslov principa dovoljnog maksimuma (Teorema 4.1) koji se primenjuje u određivanju procesa optimalne kontrole je:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{H}(t, x, u, p, q)}{\partial u} &= 0, \\ 2k_2 u(t) - x_1(t) p_1(t) + x_1(t) p_2(t) + \lambda x_1(t) c(t) &= 0. \end{aligned}$$

Rešavanjem ove jednačine po $u(t)$, dobija se

$$u(t) = \frac{S(t) (p_1(t) - p_2(t) - \lambda c(t))}{2k_2}, \quad (4.30)$$

pri čemu se $p_1(t), p_2(t)$ dobijaju rešavanjem pridruženog sistema BSDJ (4.29).

Kako $u(t) = \frac{S(t)(p_1(t)-p_2(t)-\lambda c(t))}{2k_2}$ ne mora da pripada segmentu $[0, 1]$ za svako $t \in [0, T]$, s.i. $u(t)$ ne mora pripadati skupu $\mathcal{A}$. Iz tog razloga se definiše

$$u^*(t) := \min \left\{ \max \left\{ 0, \frac{S(t) (p_1(t) - p_2(t) - \lambda c(t))}{2k_2} \right\}, 1 \right\}, \quad (4.31)$$

koji zadovoljava uslove principa dovoljnog maksimuma (Teorema 4.1). Dakle, na osnovu Teoreme 4.4 (ili Teoreme 5.1 u [121]) i principa dovoljnog maksimuma, sledi da je $\{u^*(t)\}_{t \in [0, T]}$ proces stohastičke optimalne kontrole ako postoji $\lambda_0 \geq 0$ tako da

$$\mathbb{E} \left[\int_0^T S_{u_{\lambda_0}^*}(t) u_{\lambda_0}^*(t) c(t) dt \right] - \mathcal{V} = 0. \quad (4.32)$$

Na osnovu [121], za određivanje takvog λ_0 u praksi, potrebno je uvesti $u_{\lambda_0}^*$ u sistem SDJ, kako bi se izračunala vrednost $S_{u_{\lambda_0}^*}$, a zatim rešiti (4.32) pomoću metode Monte Karlo [137].

Ograničenje B.

Formulacija problema optimalne kontrole sa ograničenjem B je slična formulaciji problema optimalne kontrole sa ograničenjem A. Razlikuju se u stohastičkoj prirodi Lagrangeovog multiplikatora Λ . Sličnim proračunom kao u slučaju ograničenja A, dobija se

$$u^*(t) = \min \left\{ \max \left\{ 0, \frac{S(t) (p_1(t) - p_2(t) - \Lambda c(t))}{2k_2} \right\}, 1 \right\}. \quad (4.33)$$

Prema tome, $u^*(t)$ zadovoljava uslove principa maksimuma. Na osnovu Teoreme 4.1 (videti, takođe, Teoremu 5.2 u [121]), $\{u^*(t)\}_{t \in [0, T]}$ je proces stohastičke optimalne kontrole ako postoji $\Lambda_0 \geq 0$ s.i. tako da važi

$$\int_0^T S_{u_{\Lambda_0}^*}(t) u_{\Lambda_0}^*(t) c(t) dt - \mathcal{V} = 0, \quad \text{s.i.} \quad (4.34)$$

Na osnovu [121], za određivanje takvog Λ_0 u praksi, potrebno je inkorporirati $u_{\Lambda_0}^*$ u sistem SDJ kako bi se izračunala vrednost $S_{u_{\Lambda_0}^*}$, a zatim rešiti (4.34) metodom Monte Karla.

4.1.6 Numeričke simulacije

U nastavku su prikazane numeričke simulacije problema optimalne kontrole bez ograničenja (4.12) kako bi se ispitala složena dinamika i uticaj vakcinacije na prenošenje i kontrolu bolesti.

Vrednosti parametara korišćene u simulacijama su date u Tabeli 4.1 koja sadrži realistične vrednosti parametara modela širenja virusa ebole, koje su dobijene na osnovu podataka Svetske zdravstvene organizacije [76], ocenjene različitim statističkim metodama u naučnim radovima [127–130] ili racionalno pretpostavljene (p).

Numeričke aproksimacije problema optimalne kontrole bez ograničenja (4.12) su dobijene primenom iterativnog metoda, koji je opisan u radu [121]. Ovaj iterativni metod sastoji se od nekoliko koraka:

- Prvi korak je određivanje aproksimativnog rešenja stohastičkog sistema (4.5) primenom Eulerove numeričke šeme. Iz tog razloga, definisani su početni uslovi $S(0), V(0), I(0), R(0)$ i početna stopa vakcinacije $u(0)$. Na ovaj način se može odrediti numeričko rešenje stohastičkog sistema (4.5).

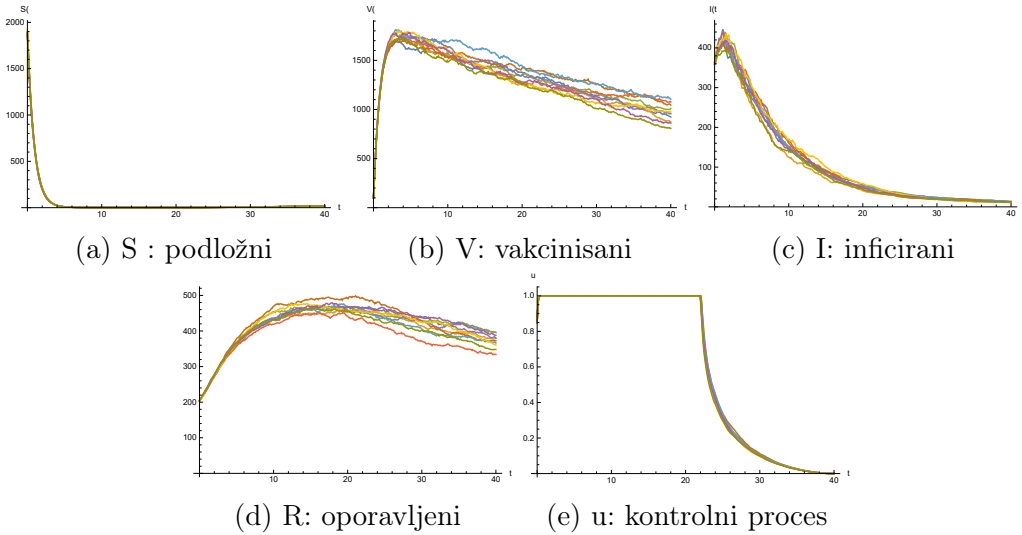
- Zatim, na osnovu numeričkog rešenja jednačine (4.5) dobijenog u prethodnom koraku, dobijeno je aproksimativno rešenje pridruženog backward sistema (4.18) primenom backward Eulerove šeme.
- Sledeći korak je redefinisavanje kontrole $u(\cdot)$. Na taj način, kontrola postaje jednaka konveksnoj kombinaciji prethodne iteracije kontrole sa novo izračunatom kontrolom izvedenom iz formule (4.19) u Teoremi 4.3. U i -toj iterativnoj petlji, kontrola uzima sledeću vrednost:

$$u_i = \lambda_{old} u_i^{old} + \lambda_{new} u_i^{new},$$

gde je u_i^{old} kontrola dobijena u prethodnom iterativnoj petlji, a u_i^{new} je izračunata pomoću formule (4.19).

- Iteracija se zaustavlja kada je razlika između numeričkog rešenja $(\tilde{S}, \tilde{V}, \tilde{I}, \tilde{R}, \tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3, \tilde{p}_4, \tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \tilde{q}_3, \tilde{q}_4)$ dobijenog u trenutnoj i prethodnoj iteraciji dovoljno mala, za sve procese. Na ovaj način je unapred definisana apsolutna greška konvergencije numeričkog rešenja.

Primer 1. Na Slici 4.4 prikazano je deset trajektorija sistema (4.12) dobijenih primenom Teoreme 1. Početne vrednosti odabrane u simulacijama su $S(0) = 2000$, $V(0) = 0$, $I(0) = 350$, $R(0) = 350$, $N(0) = 2550$ i $u(0) = 0.5$ a terminalno vreme je 40 godina. Neka koeficijenti k_1 , k_2 koji figurišu u funkciji performansi (4.6), imaju vrednosti $k_1 = 20$, $k_2 = 0.3 \cdot N(0)$, kapacitet sredine $K = 12000$ i intenziteti $\sigma_1^1 = 0.02$, $\sigma_2^1 = 0.015$, $\sigma_3^1 = 0.035$ i $\sigma_4^1 = 0.01$.

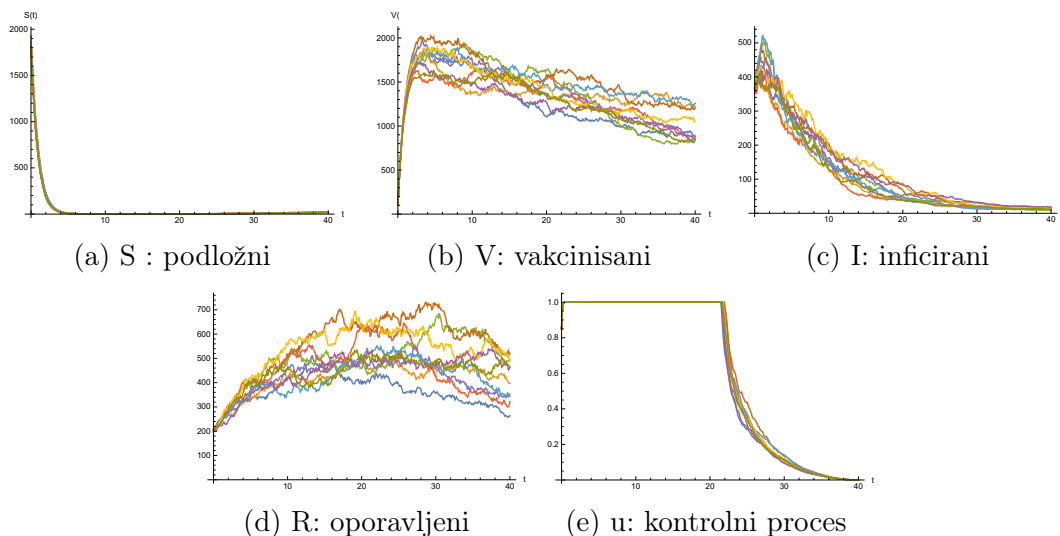


Slika 4.4: 10 trajektorija rešenja modela (4.12).

Prema ovim graphicima, optimalna stopa vakcinacije vrlo brzo dostiže maksimalnu vrednost (u ovom slučaju, maksimalnu dozvoljenu stopu vakcinacije). Nakon određenog vremena, optimalna stopa vakcinacija brzo opada i dostiže nulu u konačnom trenutku.

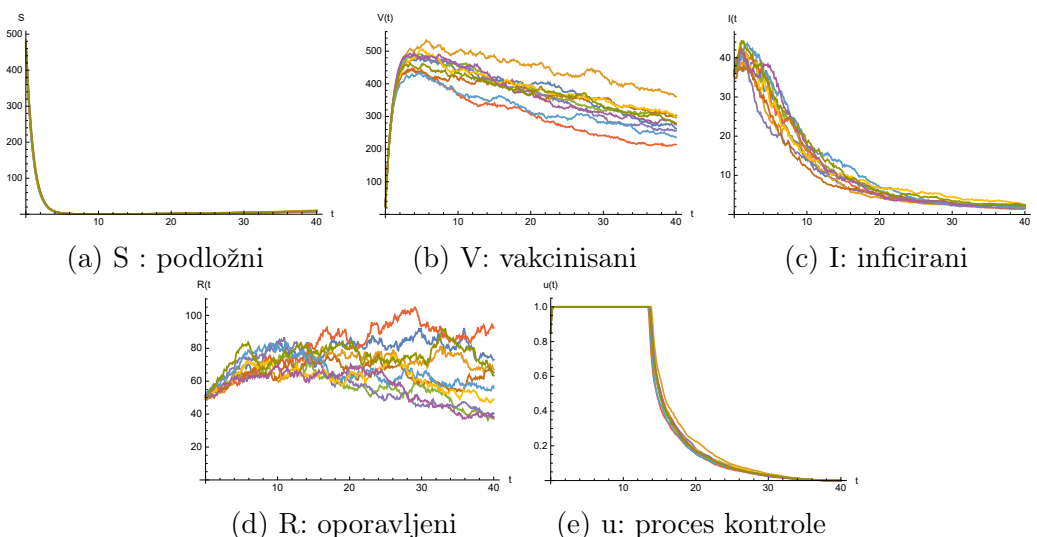
Primer 2. Primenom Teoreme 4.3 na Slici 4.5 je prikazano 10 trajektorija sistema (4.12). Vrednosti parametara modela su odabrane kao u Primeru 1. Jedina promena u vrednostima parametara modela u poređenju sa Primerom 1 su veće vrednosti intenziteta šumova, odnosno, $\sigma_1^2 = 0.06$, $\sigma_2^2 = 0.03$, $\sigma_3^2 = 0.08$ i $\sigma_4^2 = 0.05$. Sa Slike 4.5 se

može uočiti da povećanje intenziteta šumova u odnosu na Primer 1 prouzrokuje veću disperziju trajektorija, dok trend procesa stohastičke optimalne kontrole ostaje isti.



Slika 4.5: 10 trajektorija rešenja sistema SDJ (4.12).

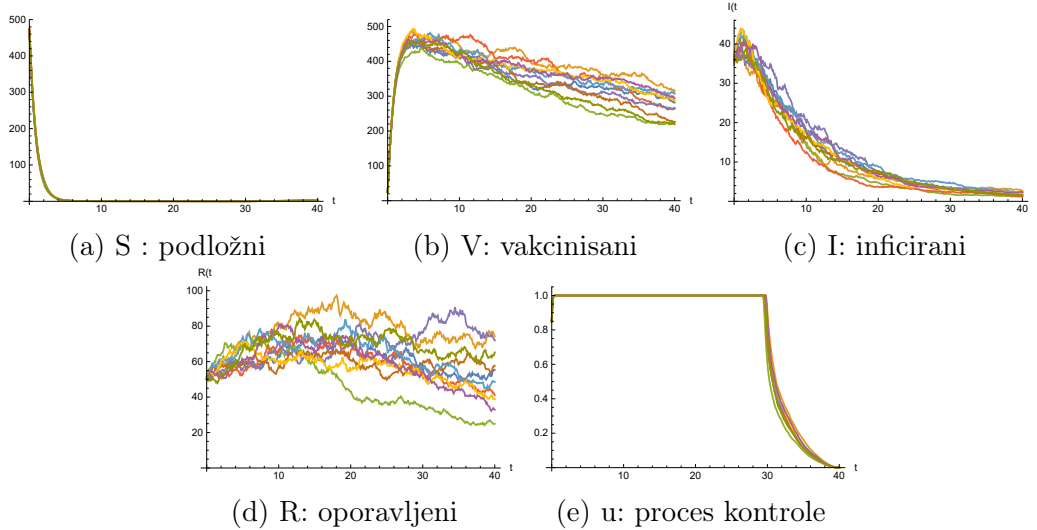
Primer 3. Na Slici 4.6 je prikazano deset trajektorija procesa s različitim početnim vrednostima u odnosu na prethodne primere. Početne vrednosti, odabrane u ovom primeru, su $S(0) = 500$, $V(0) = 0$, $I(0) = 35$, $R(0) = 50$, $N(0) = 585$, kapacitet populacije je $K = 1200$ i intenziteti šumova su $\sigma_1^3 = 0.03$, $\sigma_2^3 = 0.02$, $\sigma_3^3 = 0.06$, $\sigma_4^3 = 0.05$. Terminalno vreme modela je 40 godina, početna vrednost procesa kontrole $u(0) = 0.5$ a težinski koeficijenti funkcije performanse (4.6) su $k_1 = 20$, $k_2 = 0.3 \cdot N(0)$, kao u Primerima 1 i 2.



Slika 4.6: Deset trajektorija rešenja modela (4.12).

Poredeći Primer 3 s Primerima 1 i 2, uočava se da u Primeru 3 optimalna stopa vakcinacije počinje da opada ranije nego u Primerima 1 i 2, zbog različitih početnih vrednosti i parametra K , koji je deset puta manji u Primeru 3.

Primer 4. Ispituje se uticaj vrednosti koeficijenta k_2 koji se pojavljuje u funkciji performansi, na optimalnu stopu vakcinacije. Iz tog razloga, na Slici 4.7 je prikazano 10 trajektorija modela, s istim izborom parametara modela kao u Primeru 3, osim koeficijenta k_2 koji je $k_2 = 0.3 \cdot N(0)$.



Slika 4.7: Deset trajektorija rešenja sistema (4.12).

Na Slikama 4.6 i 4.7 se uočava da se opadajući trend optimalne stope vakcinacije na Slici 4.7 javlja znatno kasnije u odnosu na isti na Slici 4.6. Ovakva dinamika optimalne stope vakcinacije je očekivana, ako se uzme u obzir definicija funkcije performansi data jednačinom (4.6).

4.1.7 Zaključak

U ovom poglavlju razmatran je problem optimalne kontrole za stohastički model sa logističkim rastom i funkcijom prenosa bolesti opisanom funkcijom zasićenja. Stopa vakcinacije predstavljena je funkcijom kontrole. Fokus je bio na identifikaciji najefikasnije strategije među dostupnim za minimizaciju broja inficiranih, uz optimizaciju troškova vakcinacije koja se koristi za suzbijanje širenja bolesti. Izvedeni su potrebni uslovi za postojanje optimalne kontrole primenom principa maksimuma. Pored toga, dobijeni teorijski rezultati su potvrđeni numeričkim simulacijama.

4.2 Dinamička analiza i stacionarna raspodela stohastičkog modela sa kašnjenjem i Lévyjevim skokovima

Zarazne bolesti poput side, ebole, zike, gripa, hepatitisa B, Covid-19 i drugih, predstavljaju globalni rizik po javno zdravlje. One imaju značajan uticaj na javno zdravlje, društveni i ekonomski razvoj, pa čak i na ljudski život (videti [138–140]). Da bi se bolje razumeli mehanizmi prenosa zaraznih bolesti i došlo do efikasnih strategija za njihovu prevenciju i kontrolu, matematičari su predložili brojne matematičke modele kako bi proučavali dinamiku širenja zaraznih bolesti (videti, na primer, [139], [141], [142]).

Različite pojave u prirodi, poput interakcija između ljudi i okruženja, kontakti između ljudi, efikasnost vakcinacije, i druge, prirodno su izložene slučajnom uticaju iz okruženja (videti [143], [144] i reference u njima). Mao i saradnici su u radovima [145] i [146] pokazali da beli šum, koji odražava slučajnost, ima snažan destabilizujući efekat na širenje bolesti i evoluciju vrsta, sugerišući da stohastički modeli mogu pružiti dodatnu dozu realizma u poređenju sa njihovim determinističkim pandanima.

Iznenadni značajni uticaji iz životne sredine, kao što su epidemije, zemljotresi i uragani, mogu dovesti do značajnog smanjenja populacije. Ovi uticaji se ne mogu modelirati belim šumom. Zbog toga je za opisivanje ovih iznenadnih uticaja iz okruženja primenjivan Lévyjev proces. U epidemiologiji, Lévyjevi procesi omogućavaju opis iznenadnih promena u dinamici, poput neočekivanog povećanja broja inficiranih zbog masovnih okupljanja ili migracija. Pored toga, može doći do naglog smanjenja broja inficiranih usled redukcije kontakata ili masovne vakcinacije populacije. Uključivanje Lévyjevog šuma u epidemiološke modele omogućava realističniju reprezentaciju okruženja i ima značajan doprinos u opisivanju širenja bolesti (videti, na primer, [147–154]).

U poslednje vreme je posebna pažnja posvećena proučavanju dinamike epidemioloških modela sa vremenskim kašnjenjem. Konstantno vremensko kašnjenje je razmatrano u radovima [54] i [155], dok je kašnjenje koje ima neki tip neprekidne raspodele analizirano od strane Ma i saradnika u radu [156]. Kašnjenje kod epidemioloških modela može da opisuje gubljenje imuniteta (videti [157–159]), vreme koje je potrebno da vakcina počne da deluje (videti [160, 161]) ili period inkubacije ([54], [155]). Pokazano je da su vremenska kašnjenja od značaja u proučavanju dinamičkih svojstava širenja bolesti.

U radu [99], autori su razmatrali stohastički SIRS epidemiološki model koji sadrži slučajnost tipa belog šuma, i utvrdili uslove za iskorenjivanje i perzistentnost u srednjem bolesti, kao i dovoljne uslove za postojanje jedinstvene ergodične stacionarne raspodele. U radu [101], autori su proučavali stohastički SIR epidemiološki model koji sadrži slučajnost tipa belog šuma, sa kašnjenjem koje ima neprekidnu raspodelu i sa degenerisanom difuzijom. Korišćenjem teorije Markovljevih polugrupa dokazano je postojanje i jedinstvenost stacionarne raspodele. U radu [8] je analiziran stohastički SIS epidemiološki model sa vakcinacijom, koji uključuje beli i obojeni šum. Za ovaj model, dovoljni uslovi za postojanje jedinstvene ergodične stacionarne raspodele utvrđeni su konstrukcijom funkcija Lyapunova.

Cilj u ovom poglavlju je analizirati dinamiku stohastičkog SVIR modela sa kašnjenjem koje ima gama raspodelu kod kog je uključen logistički rast populacije i funkcija prenosa bolesti opisana funkcijom zasićenja. Kašnjenje, koje se javlja u ovom modelu, odražava vreme potrebno da se nakon kontakta infekcija razvije i osoba postane zarazna.

4.2.1 Konstrukcija stohastičkog epidemiološkog modela sa kašnjenjem i Lévyjevim skokovima

U ovom poglavlju je fokus na konstrukciji stohastičkog epidemiološkog modela sa saturisanim funkcijama incidence i logističkim rastom populacije, na osnovu determinističkog modela (4.1), koji je opisan u Podpoglavljju 4.1.1. Za razliku od stohastičkog modela razmatranog u prethodnom poglavlju, u kojem je slučajnost iz okruženja opisana Brownovim kretanjem, u ovom poglavlju će, pored Brownovog kretanja, biti korišćen i Lévyjev proces za opisivanje slučajnosti.

Najpre je deterministički epidemiološki model (4.1) modifikovan na sledeći način.

Funkcije prenosa bolesti opisane funkcijama zasićenja $\frac{\beta S(t)I(t)}{1+a_1 I(t)}$ i $\frac{\beta V(t)I(t)}{1+a_2 I(t)}$ koje se javljaju u modelu (4.1) i uzimaju u obzir efekat značajnog povećanja broja inficiranih zamenjene su funkcijama prenosa bolesti $\frac{\beta S(t)I(t)}{1+m_1 S(t)}$ i $\frac{\beta V(t)I(t)}{1+m_2 V(t)}$, koje uzimaju u obzir odgovarajuće preventivne mere preduzete od strane podložnih ili vakcinisanih pojedinaca u cilju kontrole širenja epidemije. Pored toga, prateći pristup iz [162], u deterministički model je uvedeno kašnjenje sa jezgrom $g(s)$. Na taj način je dobijen sistem od četiri diferencijalne jednačine prikazan u nastavku:

$$\begin{aligned}\frac{dS(t)}{dt} &= \gamma S(t) \left(1 - \frac{S(t)}{K}\right) - \frac{\beta S(t)}{1+m_1 S(t)} \int_{-\infty}^t g(t-\tau) I(\tau) d\tau - vS(t) + v_1 V(t), \\ \frac{dV(t)}{dt} &= vS(t) - \frac{\beta V(t)}{1+m_2 V(t)} \int_{-\infty}^t g(t-\tau) I(\tau) d\tau - vV(t) - \mu V(t), \\ \frac{dI(t)}{dt} &= \frac{\beta S(t)}{1+m_1 S(t)} \int_{-\infty}^t g(t-\tau) I(\tau) d\tau + \frac{\beta V(t)}{1+m_2 V(t)} \int_{-\infty}^t g(t-\tau) I(\tau) d\tau \\ &\quad - (\rho + \mu + \delta) I(t), \\ \frac{dR(t)}{dt} &= \rho I(t) - (r + \mu) R(t),\end{aligned}\tag{4.35}$$

sa početnim uslovom $S(0) = S_0, V(0) = V_0, I(0) = \varphi, R(0) = R_0, \theta \in [-\infty, 0]$.

Jezgro kašnjenja $g : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ je L^1 -funkcija, koja zadovoljava $\int_0^\infty g(s) ds = 1$. Veličina $\varrho = \int_0^\infty sg(s) ds$ je poznata kao prosečno (očekivano) kašnjenje za jezgro g . U modeliranju bioloških sistema, najčešće se primenjuje jezgro kašnjenja koje ima Gama raspodelu $g(s) = \frac{s^n \xi^{n+1} e^{-\xi s}}{n!}$, $s > 0$, gde je $\xi > 0$ parametar koji označava eksponencijalno slabljenje pamćenja, poznato i kao efekat retrogradacije prošlih sećanja, dok je n nenegativan ceo broj (videti [163]). Za ovu vrstu jezgra kašnjenja, može se dokazati da je prosečno kašnjenje $\varrho = \frac{n+1}{\xi}$. U literaturi, jezgro $g(s) = \xi e^{-\xi s}, s > 0$ za $n = 0$, se naziva slabim jezgrom i ono se najčešće primenjuje u modeliranju epidemija. U ovom poglavlju je analiziran epidemiološki model sa slabim jezgrom kašnjenja. Zamenom izraza $g(s)$ za $n = 0$ u sistem (4.35), dobija se sistem oblika:

$$\begin{aligned}\frac{dS(t)}{dt} &= \gamma S(t) \left(1 - \frac{S(t)}{K}\right) - \frac{\beta S(t)}{1+m_1 S(t)} \int_{-\infty}^t \xi e^{-\xi(t-\tau)} I(\tau) d\tau - vS(t) + v_1 V(t), \\ \frac{dV(t)}{dt} &= vS(t) - \frac{\beta V(t)}{1+m_2 V(t)} \int_{-\infty}^t \xi e^{-\xi(t-\tau)} I(\tau) d\tau - vV(t) - \mu V(t), \\ \frac{dI(t)}{dt} &= \frac{\beta S(t)}{1+m_1 S(t)} \int_{-\infty}^t \xi e^{-\xi(t-\tau)} I(\tau) d\tau + \frac{\beta V(t)}{1+m_2 V(t)} \int_{-\infty}^t \xi e^{-\xi(t-\tau)} I(\tau) d\tau \\ &\quad - (\rho + \mu + \delta) I(t), \\ \frac{dR(t)}{dt} &= \rho I(t) - (r + \mu) R(t),\end{aligned}\tag{4.36}$$

sa početnim uslovom $S(0) = S_0, V(0) = V_0, I(0) = \varphi, R(0) = R_0, \theta \in [-\infty, 0]$. Uvođenjem smene $X(t) = \int_{-\infty}^t \xi e^{-\xi(t-\tau)} I(\tau) d\tau$, sistem (4.36) se može transformisati u sledeći ekvivalentan sistem

$$\begin{aligned}dS(t) &= \left(\gamma S(t) \left(1 - \frac{S(t)}{K}\right) - \frac{\beta S(t)X(t)}{1+m_1 S(t)} - vS(t) + v_1 V(t) \right) dt, \\ dV(t) &= \left(vS(t) - \frac{\beta V(t)X(t)}{1+m_2 V(t)} - vV(t) - \mu V(t) \right) dt,\end{aligned}\tag{4.37}$$

$$\begin{aligned}
dI(t) &= \left(\frac{\beta S(t)X(t)}{1+m_1S(t)} + \frac{\beta V(t)X(t)}{1+m_2V(t)} - (\rho + \mu + \delta) I(t) \right) dt, \\
dR(t) &= (\rho I(t) - (r + \mu) R(t)) dt, \\
dX(t) &= \xi (I(t) - X(t)) dt,
\end{aligned}$$

sa početnim uslovom $S(0) = S_0, V(0) = V_0, I(0) = I_0, R(0) = R_0, X(0) = X_0$. Na osnovu determinističkog epidemiološkog modela (4.37), konstruisan je odgovarajući stohastički model pod pretpostavkom da se neprekidne fluktuacije iz životne sredine mogu opisati Brownovim kretanjem, a nagli i značajni uticaji koji se ne dešavaju često procesom Lévyja. Smatra se da su ovi uticaji direktno proporcionalni klasama S, V, I, R i X .

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ kompletan prostor verovatnoće sa prirodnom filtracijom $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$, koja je neprekidna sa desna i sadrži sve skupove mere nula. Neka su $B_i(t)$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$, nezavisna standardna Brownova kretanja, i $\bar{N}$ Poissonov proces prebrojavanja koji je nezavisan od B_i , $i = 1, 2, 3, 4, 5$, i definisan na datom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathbf{P})$. $\tilde{N}(dt, du) = \bar{N}(dt, du) - \lambda(du)dt$ je kompenzator procesa $\bar{N}$, a karakteristična mera λ je definisana na merljivom podskupu Y skupa $(0, +\infty)$ koji zadovoljava $\lambda(Y) < +\infty$. Stohastički epidemiološki model ima sledeći oblik:

$$\begin{aligned}
dS(t) &= \left(\gamma S(t) \left(1 - \frac{S(t)}{K} \right) - \frac{\beta S(t)X(t)}{1+m_1S(t)} - vS(t) + v_1V(t) + r_1R(t) \right) dt \\
&\quad + \sigma_1 S(t) dB_1(t) + \int_Y \eta_1(u) S(t^-) \tilde{N}(dt, du), \\
dV(t) &= \left(vS(t) - \frac{\beta V(t)X(t)}{1+m_2V(t)} - v_1V(t) - \mu V(t) \right) dt + \sigma_2 V(t) dB_2(t) \\
&\quad + \int_Y \eta_2(u) V(t^-) \tilde{N}(dt, du), \\
dI(t) &= \left(\frac{\beta S(t)X(t)}{1+m_1S(t)} + \frac{\beta V(t)X(t)}{1+m_2V(t)} - (\rho + \mu + \delta) I(t) \right) dt + \sigma_3 I(t) dB_3(t) \\
&\quad + \int_Y \eta_3(u) I(t^-) \tilde{N}(dt, du), \\
dR(t) &= (\rho I(t) - (r_1 + \mu) R(t)) dt + \sigma_4 R(t) dB_4(t) + \int_Y \eta_4(u) R(t^-) \tilde{N}(dt, du), \\
dX(t) &= \xi (I(t) - X(t)) dt + \sigma_5 X(t) dB_5(t) + \int_Y \eta_5(u) X(t^-) \tilde{N}(dt, du), \quad (4.38)
\end{aligned}$$

sa početnim uslovom $S(0) = S_0, V(0) = V_0, I(0) = I_0, R(0) = R_0, X(0) = X_0$, pri čemu su sa $S(t^-), V(t^-), I(t^-), R(t^-), X(t^-)$ označene granične vrednosti sa leva od $S(t), V(t), I(t), R(t), X(t)$, redom, i $\eta_i : Y \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, 2, 3, 4, 5$, su ograničene, neprekidne i $\mathcal{B}(Y) \times \mathcal{F}_t$ -merljive, gde je $\mathcal{B}(Y)$, σ -algebra generisana sa Y . Neka je sa $N(t) = S(t) + V(t) + I(t) + R(t)$, $t \geq 0$, označena ukupna populacija.

Da bi se proučilo dugoročno ponašanje rešenja modela (4.38), neophodno je uvesti sledeće pretpostavke.

- ($\mathcal{H}1$): Intenziteti skokova $\eta_i(u)$ zadovoljavaju $\int_Y \eta_i^2(u) \lambda(du) < \infty$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5$).
- ($\mathcal{H}2$): $1 + \eta_i(u) > 0$ i $\int_Y (\eta_i(u) - \ln(1 + \eta_i(u))) \lambda(du) < \infty$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5$).

- $(\mathcal{H}3)$: za $p \in \mathbb{N}, p > 2, l = \int_Y \max\{[1 + \check{\eta}(u)]^p - 1 - p\check{\eta}(u), [1 + \hat{\eta}(u)]^p - 1 - p\hat{\eta}(u)\} \lambda(du)$, $\check{\eta}(u) = \max_{i \in \{1,2,3,4,5\}} \{\check{\eta}_i(u)\}$, $\hat{\eta}(u) = \min_{i \in \{1,2,3,4,5\}} \{\hat{\eta}_i(u)\}$, $\bar{\eta}_i(u) = \eta_i(u)$, $\bar{\sigma}_i = \sigma_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, $\bar{\eta}_5(u) := \frac{\mu+\delta}{\xi} \eta_5(u)$, $\bar{\sigma}_5 := \frac{\mu+\delta}{\xi} \sigma_5$, važi

$$b = \min\{\mu, \mu + \delta - \xi, \xi\} - \frac{p-1}{2} \max_{i \in \{1,2,3,4,5\}} \{\bar{\sigma}_i^2\} - \frac{1}{p} l \geq 0.$$

Teorema 4.5 Neka važe pretpostavke $(\mathcal{H}1)$ i $(\mathcal{H}2)$. Za svaku početnu vrednost $(S(0), V(0), I(0), R(0), X(0)) \in \mathbb{R}_+^5$, postoji jedinstveno strogo rešenje $(S(t), V(t), I(t), R(t), X(t))$, $t \geq 0$ sistema SDJ (4.38), koje ostaje u $\mathbb{R}_+^5$ sa verovatnoćom jedan.

Dokaz. Kako su koeficijenti sistema (4.38) lokalno Lipschitz neprekidni, na osnovu Teoreme 1.33 sledi da za svaku početnu vrednost $(S(0), V(0), I(0), R(0), X(0)) \in \mathbb{R}_+^5$ postoji jedinstveno lokalno rešenje na $[0, \tau_e]$, gde je τ_e vreme eksplozije. Da bi se pokazalo da je ovo rešenje globalno, potrebno je dokazati da je $\tau_e = \infty$ s.i. Neka je $k_0 > 0$ tako da se $S(0), V(0), I(0), R(0)$ i $X(0)$ nalaze unutar segmenta $[\frac{1}{k_0}, k_0]$. Za svaki ceo broj $k \geq k_0$ definiše se vreme zaustavljanja na sledeći način

$$\tau_k = \inf \left\{ t \in [0, \tau_e) : \min \{S(t), V(t), I(t), R(t), X(t)\} \leq \frac{1}{k} \text{ ili } \max \{S(t), V(t), I(t), R(t), X(t)\} \geq k \right\}.$$

Niz $\{\tau_k\}_k$ je rastući kada $k \rightarrow \infty$. Definiše se τ_∞ na sledeći način $\tau_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} \tau_k$. Tada je $\tau_\infty \leq \tau_e$ s.i. Ako se pokaže da je $\tau_\infty = \infty$ s.i, tada je $\tau_e = \infty$, što znači da je $(S(t), V(t), I(t), R(t), X(t)) \in \mathbb{R}$ s.i. za sve $t \geq 0$. Pod pretpostavkom da ova tvrdnja nije tačna, postoje konstante $T > 0$ i $\epsilon \in (0, 1)$ tako da je $\mathbb{P}\{\tau_\infty \leq T\} > \epsilon$. Tada postoji ceo broj $k_1 \geq k_0$ tako da je $\mathbb{P}\{\tau_{k_1} \leq T\} > \epsilon$, odnosno,

$$\mathbb{P}\{\tau_k \leq T\} \geq \epsilon,$$

za svako $k \geq k_1$.

Neka je nenegativna C^2 funkcija $F : \mathbb{R}_+^5 \rightarrow \mathbb{R}_+$ definisana na sledeći način

$$\begin{aligned} F(S, V, I, R, X) = & \left(S - a - a \ln \frac{S}{a} \right) + \left(V - a - \ln \frac{V}{a} \right) + (I - 1 - \ln I) \\ & + (R - 1 - \ln R) + \frac{\mu + \delta}{\xi} (X - 1 - \ln X), \end{aligned}$$

pri čemu je a pozitivna konstanta koja će kasnije biti određena. Neka je

$$\max_{S \in \mathbb{R}_+} \left\{ \gamma(S - a) \left(1 - \frac{S}{K} \right) \right\} \leq C_1,$$

gde je $C_1 \in \mathbb{R}_+$. Primenom uopštene Itôve formule (Teorema 1.30) na funkciju F , dobija se

$$\begin{aligned} dF(S, V, I, R, X) = & LF(S, V, I, R, X)dt + \sigma_1 (S(t) - a) dB_1(t) \\ & + a \int_Y (\eta_1(u)S(t^-) - \ln(1 + \eta_1(u))) \tilde{N}(dt, du) \\ & + \sigma_2 (V(t) - a) dB_2(t) + \sigma_3 (I(t) - 1) dB_3(t) \\ & + a \int_Y (\eta_2(u)V(t^-) - \ln(1 + \eta_2(u))) \tilde{N}(dt, du) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_Y (\eta_3(u)I(t^-) - \ln(1 + \eta_3(u))) \tilde{N}(dt, du) \\
& + \sigma_4 (R(t) - 1) dB_4(t) + \sigma_5 \frac{\mu + \delta}{\xi} (X(t) - 1) dB_5(t) \\
& + \int_Y (\eta_4(u)R(t^-) - \ln(1 + \eta_4(u))) \tilde{N}(dt, du) \\
& + \frac{\mu + \delta}{\xi} \int_Y (\eta_5(u)X(t^-) - \ln(1 + \eta_5(u))) \tilde{N}(dt, du),
\end{aligned}$$

pri čemu se LF može ograničiti na sledeći način

$$\begin{aligned}
LF(S, V, I, R, X) & \leq \gamma S \left(1 - \frac{S}{K}\right) - \mu V - (\mu + \delta)I - \mu R + \frac{\mu + \delta}{\xi} \xi (I - X) + 3\mu \\
& - a\gamma \left(1 - \frac{S}{K}\right) + a \frac{\beta X}{1 + m_1 S} + av + a \frac{\beta X}{1 + m_2 V} + a(v_1 + \mu) \\
& + 2\delta + \frac{a\sigma_1^2}{2} + \frac{a\sigma_2^2}{2} + \sum_{i=1}^2 \int_Y a(\eta_i(u) - \ln(1 + \eta_i(u)))\lambda(du) \\
& + r_1 + \rho + \frac{\sigma_3^2}{2} + \frac{\sigma_4^2}{2} + \sum_{i=3}^4 \int_Y (\eta_i(u) - \ln(1 + \eta_i(u)))\lambda(du) \\
& + \frac{\mu + \delta}{\xi} \frac{\sigma_5^2}{2} + \frac{\mu + \delta}{\xi} \int_Y (\eta_i(u) - \ln(1 + \eta_i(u)))\lambda(du) \\
& \leq \gamma(S - a) \left(1 - \frac{S}{K}\right) + (2a\beta - (\mu + \delta))X + C_2 \leq C_1 + C_2 =: C,
\end{aligned}$$

i a se bira tako da se vrednost izraza u zagradi uz X anulira, tj. $a = \frac{\mu + \delta}{2\beta}$. Na osnovu poslednje dve relacije, važi

$$\begin{aligned}
dF(S, V, I, R, X) & \leq C dt + \sigma_1 (S(t) - a) dB_1(t) + \sigma_2 (V(t) - a) dB_2(t) \\
& + a \int_Y (\eta_1(u)S(t^-) - \ln(1 + \eta_1(u))) \tilde{N}(dt, du) \\
& + \sigma_2 (V(t) - a) dB_2(t) + \sigma_3 (I(t) - 1) dB_3(t) \\
& + a \int_Y (\eta_2(u)V(t^-) - \ln(1 + \eta_2(u))) \tilde{N}(dt, du) \\
& + \int_Y (\eta_3(u)I(t^-) - \ln(1 + \eta_3(u))) \tilde{N}(dt, du) \\
& + \sigma_4 (R(t) - 1) dB_4(t) + \sigma_5 \frac{\mu + \delta}{\xi} (X(t) - 1) dB_5(t) \\
& + \int_Y (\eta_4(u)R(t^-) - \ln(1 + \eta_4(u))) \tilde{N}(dt, du) \\
& + \frac{\mu + \delta}{\xi} \int_Y (\eta_5(u)X(t^-) - \ln(1 + \eta_5(u))) \tilde{N}(dt, du).
\end{aligned}$$

Integracijom poslednje nejednakosti od 0 do $\tau_k \wedge T$ i računanjem očekivanja, dobija se

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}F(S(\tau_k \wedge T), V(\tau_k \wedge T), I(\tau_k \wedge T), R(\tau_k \wedge T), X(\tau_k \wedge T)) \\
& \leq F(S(0), V(0), I(0), R(0), X(0)) + C\mathbb{E}(\tau_k \wedge T) \\
& \leq F(S(0), V(0), I(0), R(0), X(0)) + CT.
\end{aligned}$$

Neka je $\Omega_k = \{\tau_k \leq T\}$. Tada je $\mathbb{P}(\Omega_k) \geq \epsilon$. Za svako $\omega \in \Omega_k$, bar jedan od $S(\tau_k, \omega)$, $V(\tau_k, \omega)$, $I(\tau_k, \omega)$, $R(\tau_k, \omega)$ ili $X(\tau_k, \omega)$ je jednak k ili $\frac{1}{k}$. Dakle, $F(S(\tau_k, \omega), V(\tau_k, \omega), I(\tau_k, \omega), R(\tau_k, \omega), X(\tau_k, \omega))$ nije manje ili od $k - 1 - \ln k$ ili od $\frac{1}{k} - 1 - \ln \frac{1}{k}$. Na osnovu toga je

$$\begin{aligned} & F(S(\tau_k \wedge T), V(\tau_k \wedge T), I(\tau_k \wedge T), R(\tau_k \wedge T), X(\tau_k \wedge T)) \\ & \geq \min \left\{ k - 1 - \ln k, \frac{1}{k} - 1 - \ln \frac{1}{k} \right\}. \end{aligned}$$

Dakle,

$$\begin{aligned} & F(S(0), V(0), I(0), R(0), X(0)) + CT \\ & \geq \mathbb{E}[I_{\Omega_k} F(S(\tau_k \wedge T), V(\tau_k \wedge T), I(\tau_k \wedge T), R(\tau_k \wedge T), X(\tau_k \wedge T))] \\ & \geq \epsilon \min \left\{ k - 1 - \ln k, \frac{1}{k} - 1 - \ln \frac{1}{k} \right\}, \end{aligned}$$

pri čemu je I_{Ω_k} indikator događaja Ω_k . Kada $k \rightarrow \infty$, dobija se

$$\infty > F(S(0), V(0), I(0), R(0), X(0)) + CT = \infty,$$

što je kontradikcija. Na osnovu toga se zaključuje da je $\tau_\infty = \infty$ s.i, čime je dokaz kompletan. $\triangle$

4.2.2 Iskorenjivanje bolesti

U ovom poglavlju biće izvedeni dovoljni uslovi za iskorenjivanje bolesti iz populacije. Uvodi se sledeća oznaka:

$$\langle A(t) \rangle := \frac{1}{t} \int_0^t A(s) ds, \quad t \geq 0, \quad \text{za proizvoljan proces } A(t).$$

Lema 4.1 *Neka važe pretpostavke $(\mathcal{H}1)$, $(\mathcal{H}2)$ i $(\mathcal{H}3)$ i neka je $(S(t), V(t), I(t), R(t), X(t))$ rešenje sistema (4.38) za proizvoljnu početnu vrednost $(S(0), V(0), I(0), R(0), X(0)) \in \mathbb{R}_+^5$. Tada je*

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{S(t)}{t} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{V(t)}{t} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{I(t)}{t} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{R(t)}{t} = 0, \\ & \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{X(t)}{t} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t S(s) dB_1(s) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t V(s) dB_2(s) = 0, \\ & \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t I(s) dB_3(s) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t R(s) dB_4(s) = 0, \\ & \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t X(s) dB_5(s) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \int_Y \eta_1(u) S(s) \tilde{N}(ds, du) = 0, \\ & \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \int_Y \eta_2(u) V(s) \tilde{N}(ds, du) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \int_Y \eta_3(u) I(s) \tilde{N}(ds, du) = 0, \\ & \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \int_Y \eta_4(u) R(s) \tilde{N}(ds, du) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \int_Y \eta_5(u) X(s) \tilde{N}(ds, du) = 0. \end{aligned}$$

Dokaz. Najpre će biti analizirana sledeća SDJ sa skokovima

$$\begin{aligned} dZ(t) &= (\Lambda - \mu_1 Z(t)) dt + \bar{\mathcal{P}}_1(S(t), V(t), I(t), R(t), X(t)) \\ &\quad + \bar{\mathcal{P}}_2(S(t), V(t), I(t), R(t), X(t)), \\ Z(0) &= z_o \in \mathbb{R}_+, \end{aligned} \tag{4.39}$$

pri čemu je $\max_{S(t) \in \mathbb{R}_+} \left\{ \gamma S(t) \left(1 - \frac{S(t)}{K} \right) \right\} \leq \frac{\gamma K}{4} = \Lambda$, $\mu_1 = \mu + \delta$,

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{P}}_1(S(t), V(t), I(t), R(t), X(t)) &:= \sigma_1 S(t) dB_1(t) + \sigma_2 V(t) dB_2(t) + \sigma_3 I(t) dB_3(t) \\ &\quad + \sigma_4 R(t) dB_4(t) + \frac{\mu + \delta}{\xi} \sigma_5 X(t) dB_5(t), \\ \bar{\mathcal{P}}_2(S(t), V(t), I(t), R(t), X(t)) &:= \int_Y \eta_1(u) S(t^-) \tilde{N}(dt, du) + \int_Y \eta_2(u) V(t^-) \tilde{N}(dt, du) \\ &\quad + \int_Y \eta_3(u) I(t^-) \tilde{N}(dt, du) + \int_Y \eta_4(u) R(t^-) \tilde{N}(dt, du) \\ &\quad + \frac{\mu + \delta}{\xi} \int_Y \eta_5(u) X(t^-) \tilde{N}(dt, du). \end{aligned}$$

Korak 1. Primenom uopštene formule Itôa (Teorema 1.30) na $G(t) = Z^p(t)$, dobija se

$$\begin{aligned} dZ^p(t) &= L(Z^p(t))dt + pZ^{p-1}(t) (\sigma_1 S(t)dB_1(t) + \sigma_2 V(t)dB_2(t) + \sigma_3 I(t)dB_3(t) \\ &\quad + \sigma_4 R(t)dB_4(t) + \bar{\sigma}_5 X(t)dB_5(t)) + \int_Y ((1 + \check{\eta}(u))^p - 1) Z^p(t^-) \tilde{N}(dt, du), \end{aligned}$$

gde je

$$\begin{aligned} L(Z^p(t)) &\leq pZ^{p-1}(\Lambda - \mu Z(t) - \delta I(t)) + \frac{p(p-1)}{2} Z^{p-2}(t) (\sigma_1^2 S^2(t) + \sigma_2^2 V^2(t) \\ &\quad + \sigma_3^2 I^2(t) + \sigma_4^2 R^2(t) + \bar{\sigma}_5^2 X^2(t)) \\ &\quad + \int_Y ((1 + \check{\eta}(u))^p - 1) Z^p(t^-) \lambda(du) \\ &\leq pZ^{p-2}(t) \left(\Lambda Z(t) - \left(\mu - \frac{p-1}{2} \check{\sigma} - \frac{1}{p} l_p \right) Z^2(t) \right), \end{aligned}$$

$\check{\sigma} = \max_{i \in \{1,2,3,4,5\}} \{\bar{\sigma}_i\}$, $\bar{\sigma}_i = \sigma_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, $\bar{\sigma}_5 = \frac{\mu + \delta}{\xi} \sigma_5$. Neka je $p > 1$, takvo da je $\Gamma_p = \mu - \frac{p-1}{2} \check{\sigma} - \frac{1}{p} l_p > 0$. Tada

$$\begin{aligned} dZ^p(t) &\leq pZ^{p-2}(t) (\Lambda Z(t) - \Gamma_p Z^2(t)) dt \\ &\quad + pZ^{p-1}(t) (\sigma_1 S(t)dB_1(t) + \sigma_2 V(t)dB_2(t) + \sigma_3 I(t)dB_3(t) \\ &\quad + \sigma_4 R(t)dB_4(t) + \bar{\sigma}_5 X(t)dB_5(t)) \\ &\quad + \int_Y ((1 + \check{\eta}(u))^p - 1) Z^p(t^-) \tilde{N}(dt, du), \end{aligned} \tag{4.40}$$

Za svaku konstantu k za koju je $k \in (0, p\Gamma_p)$, važi

$$\begin{aligned} d(e^{kt} Z^p(t)) &\leq L(e^{kt} Z^p(t)) dt \\ &\quad + p e^{kt} Z^{p-1}(t) (\sigma_1 S(t)dB_1(t) + \sigma_2 V(t)dB_2(t) \\ &\quad + \sigma_3 I(t)dB_3(t) + \sigma_4 R(t)dB_4(t) + \bar{\sigma}_5 X(t)dB_5(t)) \\ &\quad + e^{kt} \int_Y ((1 + \check{\eta}(u))^p - 1) Z^p(t^-) \tilde{N}(dt, du). \end{aligned}$$

Integracijom obe strane poslednje nejednakosti od 0 do t , dobija se

$$\begin{aligned} \int_0^t d(e^{ks} Z^p(s)) &\leq \int_0^t (k e^{ks} Z^p(s) + e^{ks} L(Z^p(s))) ds \\ &\quad + p \int_0^t e^{ks} Z^{p-1}(s) (\sigma_1 S(s)dB_1(s) + \sigma_2 V(s)dB_2(s) + \sigma_3 I(s)dB_3(s) \\ &\quad + \sigma_4 R(s)dB_4(s) + \bar{\sigma}_5 X(s)dB_5(s)) \\ &\quad + \int_0^t e^{ks} \int_Y ((1 + \check{\eta}(u))^p - 1) Z^p(s^-) \tilde{N}(ds, du). \end{aligned}$$

Izračunavanjem očekivanja obe strane prethodne nejednakosti dobija se

$$E e^{kt} Z^p(t) \leq Z^p(0) + E \left\{ \int_0^t (k e^{ks} Z^p(s) + e^{ks} L(Z^p(s))) ds \right\}.$$

Na osnovu (4.40), sledi

$$ke^{kt}Z^p(s) + e^{kt}L(Z^p(s)) \leq pe^{kt}\bar{H},$$

gde je $\bar{H} = \sup_{Z(t)>0} \left\{ Z^{p-2}(t) \left[-\left(\Gamma_p - \frac{k}{p} \right) Z^2(t) + \Lambda Z(t) \right] + 1 \right\}$. Tada je

$$Ee^{kt}Z^p(t) \leq Z^p(0) + \frac{p\bar{H}}{k}e^{kt},$$

odnosno

$$EZ^p(t) \leq \frac{Z^p(0)}{e^{kt}} + \frac{p\bar{H}}{k}.$$

Tada važi

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} EZ^p(t) \leq \frac{p\bar{H}}{k}, \quad s.i.$$

Prema tome, postoji pozitivna konstanta $\bar{M}$ takva da za sve $t \geq 0$,

$$EZ^p(t) \leq \bar{M}. \quad (4.41)$$

Primenom Burkholder-Davis-Gundyjeve nejednakosti (Teorema 1.50) i integracijom od 0 do t , sledi da je za proizvoljno $z > 0, k = 1, 2, \dots$,

$$E[\sup_{kz \leq t \leq (k+1)z} Z^p(t)] \leq E[Z^p(kz)] + \left(c_1 z + c_2 z^{\frac{1}{2}} \left(p\check{\sigma} + \int_Y ((1 + \check{\eta}(u))^p - 1)^2 \lambda(du) \right) \right) \times [\sup_{kz \leq t \leq (k+1)z} Z^p(t)],$$

gde su c_1 i c_2 pozitivne konstante. Specijalno, neka je $z > 0$ tako da

$$c_1 z + c_2 z^{\frac{1}{2}} \left(p\check{\sigma} + \int_Y ((1 + \check{\eta}(u))^p - 1)^2 \lambda(du) \right) \leq \frac{1}{2}.$$

Tada je

$$E[\sup_{kz \leq t \leq (k+1)z} Z^p(t)] \leq 2\bar{M}.$$

Neka je $\epsilon' > 0$ proizvoljno. Primenom Chebishevljeve nejednakosti (Teorema 1.49), dobija se

$$P \left\{ \sup_{kz \leq t \leq (k+1)z} Z^p(t) > (kz)^{1+\epsilon'} \right\} \leq \frac{E[\sup_{kz \leq t \leq (k+1)z} Z^p(t)]}{(kz)^{1+\epsilon'}} \leq \frac{2\bar{M}}{(kz)^{1+\epsilon'}}.$$

Odavde, na osnovu Borel-Cantellijeve leme (Lema 1.2) sledi da za skoro sve $\omega \in \Omega$ važi da je

$$\sup_{kz \leq t \leq (k+1)z} Z^p(t) \leq (kz)^{1+\epsilon'}, \quad (4.42)$$

za sve ali konačno mnogo $k \in \mathbb{N}$. Prema tome, postoji pozitivna konstanta $k_0(\omega)$ tako da je $k_0 \leq k$ i (4.42) važi za skoro sve $\omega \in \Omega$. Drugim rečima, za skoro svako $\omega \in \Omega$, ako je $k_0 \leq k$ i $kz \leq t \leq (k+1)z$,

$$\frac{\ln Z^p(t)}{\ln t} \leq \frac{(1 + \epsilon') \ln(kz)}{\ln(kz)} = 1 + \epsilon',$$

Kako je ϵ' proizvoljno malo, tada

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln Z(s)}{\ln t} \leq \frac{1}{p}, \quad s.i.$$

Prema tome, za svako $\epsilon'' \in (0, 1 - \frac{1}{p})$, postoji konstanta $\bar{T}$, tako da, za svako $t \geq \bar{T}$

$$\ln Z(t) \leq \left(\frac{1}{p} + \epsilon'' \right) \ln t.$$

Dakle,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{Z(t)}{t} \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{t^{\frac{1}{p} + \epsilon''}}{t} = 0.$$

Odavde, na osnovu pozitivnosti rešenja, sledi

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{Z(t)}{t} = 0, \text{ s.i.}$$

Pozitivnost rešenja $(S(t), V(t), I(t), R(t), X(t))$ sistema (4.38) i $Z(t)$ sistema (4.39), zajedno sa Teoremom 1.38 poređenja rešenja za stohastičke diferencijalne jednačine, implicira $S(t) + V(t) + I(t) + R(t) + \frac{\mu + \delta}{\xi} X(t) \leq Z(t)$ s.i, odakle sledi

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{S(t)}{t} &= 0, & \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{V(t)}{t} &= 0, & \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{I(t)}{t} &= 0, \\ \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{R(t)}{t} &= 0, & \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{X(t)}{t} &= 0, & \text{s.i.} \end{aligned}$$

Korak 2. Neka je

$$\begin{aligned} Z_1(t) &= \int_0^t S(s) dB_1(s), & Z_2(t) &= \int_0^t V(s) dB_2(s), & Z_3(t) &= \int_0^t I(s) dB_3(s), \\ Z_4(t) &= \int_0^t R(s) dB_4(s), & Z_5(t) &= \int_0^t X(s) dB_5(s), \\ Z_6(t) &= \int_0^t \int_Y \eta_1(u) S(s) \tilde{N}(ds, du), & Z_7(t) &= \int_0^t \int_Y \eta_2(u) V(s) \tilde{N}(ds, du), \\ Z_8(t) &= \int_0^t \int_Y \eta_3(u) I(s) \tilde{N}(ds, du), & Z_9(t) &= \int_0^t \int_Y \eta_4(u) R(s) \tilde{N}(ds, du), \\ Z_{10}(t) &= \int_0^t \int_Y \eta_5(u) S(s) \tilde{N}(ds, du). \end{aligned}$$

Na osnovu Burkholder–Davis–Gundyjeve nejednakosti (Teorema 1.50) i Hölderove nejednakosti (Teorema 1.48), sledi da za $p > 2$ važi

$$\begin{aligned} E\left[\sup_{k \leq t \leq (k+1)} |Z_1(t)|^p\right] &\leq c_3 E\left[\int_0^t S^2(s) ds\right]^{\frac{p}{2}} \leq c_3 [E \int_0^t S^2(s) ds]^{\frac{p}{2}} \\ &\leq c_3 [E \int_0^t |S^2(s)| ds]^{\frac{p}{2}}, \\ E\left[\sup_{k \leq t \leq (k+1)} |Z_2(t)|^p\right] &\leq c_3 E\left[\int_0^t V^2(s) ds\right]^{\frac{p}{2}} \leq c_3 [E \int_0^t V^2(s) ds]^{\frac{p}{2}} \\ &\leq c_3 [E \int_0^t |V^2(s)| ds]^{\frac{p}{2}}, \\ E\left[\sup_{k \leq t \leq (k+1)} |Z_3(t)|^p\right] &\leq c_3 E\left[\int_0^t I^2(s) ds\right]^{\frac{p}{2}} \leq c_3 [E \int_0^t I^2(s) ds]^{\frac{p}{2}} \end{aligned} \tag{4.43}$$

$$\begin{aligned}
&\leq c_3 [E \int_0^t |I^2(s)| ds]^{\frac{p}{2}}, \\
E[\sup_{k \leq t \leq (k+1)} |Z_4(t)|^p] &\leq c_3 E[\int_0^t R^2(s) ds]^{\frac{p}{2}} \leq c_3 [E \int_0^t R^2(s) ds]^{\frac{p}{2}} \\
&\leq c_3 [E \int_0^t |R^2(s)| ds]^{\frac{p}{2}}, \\
E[\sup_{k \leq t \leq (k+1)} |Z_5(t)|^p] &\leq c_3 E[\int_0^t X^2(s) ds]^{\frac{p}{2}} \leq c_3 [E \int_0^t X^2(s) ds]^{\frac{p}{2}} \\
&\leq c_3 [E \int_0^t |X^2(s)| ds]^{\frac{p}{2}},
\end{aligned}$$

gde je $c_3 = [\frac{p^{p+1}}{2(p-1)^{p-1}}]^{\frac{p}{2}}$ pozitivna konstanta. Slično, važi:

$$\begin{aligned}
E[\sup_{k \leq t \leq (k+1)} |Z_6(t)|^p] &\leq c_3 E[\int_0^t \int_Y \eta_1^2(u) S^2(s) \tilde{N}(ds, du)]^{\frac{p}{2}} \\
&\leq c_3 \left(\int_Y \eta_1^2(u) du \right)^{\frac{p}{2}} E[\int_0^t S^2(s) \tilde{N}(ds, du)]^{\frac{p}{2}} \\
&\leq c_3 \left(\int_Y \eta_1^2(u) du \right)^{\frac{p}{2}} [E \int_0^t S^2(s) ds]^{\frac{p}{2}}, \\
E[\sup_{k \leq t \leq (k+1)} |Z_7(t)|^p] &\leq c_3 \left(\int_Y \eta_2^2(u) du \right)^{\frac{p}{2}} [E \int_0^t V^2(s) ds]^{\frac{p}{2}}, \\
E[\sup_{k \leq t \leq (k+1)} |Z_8(t)|^p] &\leq c_3 \left(\int_Y \eta_3^2(u) du \right)^{\frac{p}{2}} [E \int_0^t I^2(s) ds]^{\frac{p}{2}}, \\
E[\sup_{k \leq t \leq (k+1)} |Z_9(t)|^p] &\leq c_3 \left(\int_Y \eta_4^2(u) du \right)^{\frac{p}{2}} [E \int_0^t R^2(s) ds]^{\frac{p}{2}}, \\
E[\sup_{k \leq t \leq (k+1)} |Z_{10}(t)|^p] &\leq c_3 \left(\int_Y \eta_5^2(u) du \right)^{\frac{p}{2}} [E \int_0^t X^2(s) ds]^{\frac{p}{2}}.
\end{aligned}$$

Na osnovu (4.41) i (4.43), dobija se

$$E[\sup_{k \leq t \leq (k+1)} |Z_1(t)|^p] \leq 2\bar{M}c_3 t^{\frac{p}{2}}.$$

Neka je $\epsilon_1 > 0$ proizvoljno. Primenom Chebyshevljeve nejednakosti (Teorema 1.49), dobija se

$$P\{\sup_{k \leq t \leq (k+1)} |Z_1(t)|^p > k^{1+\epsilon_1+\frac{p}{2}}\} \leq \frac{E[\sup_{k \leq t \leq (k+1)} |Z_1(t)|^p]}{k^{1+\epsilon_1+\frac{p}{2}}} \leq \frac{2\bar{M}c_3(k+1)^{\frac{p}{2}}}{k^{1+\epsilon_1+\frac{p}{2}}}.$$

Na osnovu Borel–Cantellijeve leme (Lema 1.2), sledi da postoji k_0 tako da za skoro sve $\omega \in \Omega$, ako je $k \geq k_0$ i $k \leq t \leq k+1$, tada $\sup_{k \leq t \leq k+1} |Z_1^p(t)| \leq k^{1+\epsilon_1+\frac{p}{2}}$. Odnosno

$$\frac{\ln |Z_1(t)|^p}{\ln t} \leq \frac{(1 + \epsilon_1 + \frac{p}{2}) \ln k}{\ln k} = 1 + \epsilon_1 + \frac{p}{2}.$$

Dakle,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln |Z_1(t)|}{\ln t} \leq \frac{1 + \epsilon_1 + \frac{p}{2}}{p}, \text{ s.i.}$$

Neka $\epsilon_1 \rightarrow 0$. Tada

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln |Z_1(t)|}{\ln t} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{p}, \quad s.i.$$

Tada, za proizvoljno $0 < \epsilon_2 < \frac{1}{2} - \frac{1}{p}$ postoji konstanta T tako da za $t \geq T$,

$$\ln |Z_1(t)| \leq \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{p} + \epsilon_2 \right) \ln t,$$

odnosno,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{|Z_1(t)|}{t} \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{t^{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{p} + \epsilon_2\right)}}{t} = 0.$$

Pored toga, važi

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{|Z_1(t)|}{t} \geq 0, \quad s.i.$$

Na osnovu poslednje dve relacije, sledi

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|Z_1(t)|}{t} = 0, \quad s.i.$$

Odavde je

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{Z_1(t)}{t} = \frac{\int_0^t S(s) dB_1(s)}{t} = 0, \quad s.i.$$

Slično se pokazuje da važi

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{Z_2(t)}{t} &= 0, & \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{Z_3(t)}{t} &= 0, & \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{Z_4(t)}{t} &= 0, \\ \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{Z_5(t)}{t} &= 0, & \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{Z_6(t)}{t} &= 0, & \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{Z_7(t)}{t} &= 0, \\ \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{Z_8(t)}{t} &= 0, & \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{Z_9(t)}{t} &= 0, & \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{Z_{10}(t)}{t} &= 0, \quad s.i. \end{aligned}$$

Ovim je dokaz kompletan. $\triangle$

Teorema 4.6 *Neka važe pretpostavke $(\mathcal{H}1)$, $(\mathcal{H}2)$ i $(\mathcal{H}3)$ i neka je $(S(t), V(t), I(t), R(t), X(t))$, $t \geq 0$ rešenje sistema (4.38) sa proizvoljnom početnom vrednošću $(S(0), V(0), I(0), R(0), X(0)) \in \mathbb{R}_+^5$. Ako važi:*

1.

$$R^* := \frac{(1+\sigma_3^2)\left(\frac{\beta}{m_1} + \frac{\beta}{m_2}\right)}{\rho + \mu + \delta} < 1, \quad (4.44)$$

$$2. \quad \frac{a\beta}{bm_1} + \frac{a\beta}{bm_2} - \frac{\min\{\frac{1}{2}a^2\sigma_3^2, b^2(\xi + \frac{1}{2}\sigma_5^2)\}}{2 \max\{a^2, b^2\}} < 0, \text{ pri čemu je } a = \xi, b = \rho + \mu + \delta,$$

tada dolazi do iskorenjivanja bolesti sa verovatnoćom jedan, odnosno,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = 0, \quad s.i.$$

Pored toga, važi

$$\lim_{t \rightarrow \infty} R(t) = 0, \quad i \quad \lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = 0, \quad s.i.$$

Dokaz. 1. Primenom uopštene formule Itôa (Teorema 1.30) na funkciju $I(t) + \sigma_3^2 \ln(I(t) + 1)$, dobija se

$$\begin{aligned}
d(I(t) + \sigma_3^2 \ln(I(t) + 1)) &\leq \left(\frac{\beta S(t)X(t)}{1+m_1S(t)} + \frac{\beta V(t)X(t)}{1+m_2V(t)} - (\rho + \mu + \delta) I(t) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\sigma_3^2}{I(t)+1} \left(\frac{\beta S(t)X(t)}{1+m_1S(t)} + \frac{\beta V(t)X(t)}{1+m_2V(t)} \right) \right. \\
&\quad \left. + \int_Y \left(\ln \left(1 + \eta_3(u) \frac{I(s)}{I(s)+1} \right) - \eta_3(u) \frac{I(s)}{I(s)+1} \right) \lambda(du) \right) dt \\
&\quad + \sigma_3(1 + I(t))dB_3(t) \\
&\quad + \int_Y \eta_3(u)I(t) + \ln \left(1 + \eta_3(u) \frac{I(t)}{I(t)+1} \right) \tilde{N}(dt, du) \\
&\leq \left((1 + \sigma_3^2) \left(\frac{\beta}{m_1} + \frac{\beta}{m_2} \right) X(t) - (\rho + \mu + \delta) I(t) \right) dt \\
&\quad + \sigma_3(1 + I(t))dB_3(t) \\
&\quad + \int_Y \eta_3(u)I(t) + \ln \left(1 + \eta_3(u) \frac{I(t)}{I(t)+1} \right) \tilde{N}(dt, du).
\end{aligned}$$

Integracijom obe strane prethodnog izraza i deljenjem sa t , dobija se

$$\begin{aligned}
&\frac{I(t) - I(0) + \sigma_3^2(\ln(I(t) + 1) - \ln(I(0) + 1))}{t} \\
&\leq \frac{1}{t}(1 + \sigma_3^2) \left(\frac{\beta}{m_1} + \frac{\beta}{m_2} \right) \int_0^t X(s)ds - \frac{1}{t}(\rho + \mu + \delta) \int_0^t I(s)ds \\
&\quad + \frac{1}{t} \int_0^t \sigma_3(1 + I(s))dB_3(s) \\
&\quad + \frac{1}{t} \int_0^t \left(\int_Y \eta_3(u)I(s) + \ln \left(1 + \eta_3(u) \frac{I(s)}{I(s)+1} \right) \right) \tilde{N}(ds, du).
\end{aligned} \tag{4.45}$$

Na osnovu osobina Brownovog kretanja (Teorema 1.10), $M_1(t) = \int_0^t \sigma_3 dB_3(s)$ je neprekidan martingal, za koji važi $M_1(0) = 0$ i

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\langle M_1, M_1 \rangle_t}{t} = \sigma_3^2 < \infty.$$

Na osnovu osobina Lévyjevog procesa (1.28), $M_2(t) = \int_0^t \int_Y \ln \left(1 + \eta_3(u) \frac{I(s)}{I(s)+1} \right) \tilde{N}(ds, du)$ je lokalni martingal. Pritom važi $M_2(0) = 0$, i

$$\langle M_2, M_2 \rangle_t = \int_0^t \int_Y \left(\ln \left(1 + \eta_3(u) \frac{I(s)}{I(s)+1} \right) \right)^2 \lambda(du)ds.$$

Primenom Pretpostavke ($\mathcal{H}1$), dobija se

$$\begin{aligned}
\rho_{M_2}(t) &:= \int_0^t \frac{d\langle M_2, M_2 \rangle_s}{(1+s)^2} = \int_0^t \frac{\int_Y \left(\ln \left(1 + \eta_3(u) \frac{I(s)}{I(s)+1} \right) \right)^2 \lambda(du)}{(1+s)^2} ds \\
&\leq \int_0^t \frac{\int_Y (\ln(1 + |\eta_3(u)|))^2 \lambda(du)}{(1+s)^2} ds < \infty.
\end{aligned}$$

Primenom strogih zakona velikih brojeva za neprekidne martingale i lokalne martingale (Teorema 1.7 i Teorema 1.8), dobija se

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} M_1(t) = 0 \quad \text{ i } \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} M_2(t) = 0, \quad (4.46)$$

dok na osnovu Leme 4.1, sledi

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \sigma_3 I(s) dB_3(s) = 0 \quad \text{ i } \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \int_Y \eta_3(u) I(s) \tilde{N}(ds, du) = 0. \quad (4.47)$$

Integracijom pete jednačine sistema (4.38) od 0 do t i deljenjem sa t , dobija se

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} (X(t) - X(0)) &= \xi \langle I(t) \rangle - \xi \langle X(t) \rangle + \frac{1}{t} \int_0^t \sigma_5 X(s) dB_5(s) \\ &+ \frac{1}{t} \int_0^t \int_Y \eta_5(u) X(s) \tilde{N}(ds, du). \end{aligned} \quad (4.48)$$

Neka je $\phi_1(t, X) = \frac{1}{t} \int_0^t \sigma_5 X(s) dB_5(s) + \frac{1}{t} \int_0^t \int_Y \eta_5(u) X(s) \tilde{N}(ds, du) - \frac{1}{t} (X(t) - X(0))$.

Na osnovu Leme 4.1, sledi da je

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_1(t, X) = 0.$$

Izračunavanjem granične vrednosti u (4.48) kada $t \rightarrow \infty$, dobija se

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle X(t) \rangle = \lim_{t \rightarrow \infty} \langle I(t) \rangle. \quad (4.49)$$

Slično, integracijom prve četiri jednačine sistema (4.38) od 0 do t , njihovim sumiranjem i deljenjem sa t dobija se

$$\begin{aligned} &\frac{1}{t} (S(t) - S(0)) + \frac{1}{t} (V(t) - V(0)) + \frac{1}{t} (I(t) - I(0)) + \frac{1}{t} (R(t) - R(0)) \\ &= \left\langle \gamma S(t) \left(1 - \frac{S(t)}{K} \right) \right\rangle - \mu \langle V(t) \rangle - (\mu + \delta) \langle I(t) \rangle - \mu \langle R(t) \rangle \\ &+ \frac{1}{t} \int_0^t \sigma_1 S(s) dB_1(s) + \frac{1}{t} \int_0^t \int_Y \eta_1(u) S(s) \tilde{N}(ds, du) \\ &+ \frac{1}{t} \int_0^t \sigma_2 V(s) dB_2(s) + \frac{1}{t} \int_0^t \int_Y \eta_2(u) V(s) \tilde{N}(ds, du) \\ &+ \frac{1}{t} \int_0^t \sigma_3 I(s) dB_3(s) + \frac{1}{t} \int_0^t \int_Y \eta_3(u) I(s) \tilde{N}(ds, du) \\ &+ \frac{1}{t} \int_0^t \sigma_4 R(s) dB_4(s) + \frac{1}{t} \int_0^t \int_Y \eta_4(u) R(s) \tilde{N}(ds, du). \end{aligned} \quad (4.50)$$

Kako je

$$\max_{S(t) \in \mathbb{R}_+} \left\{ \gamma S(t) \left(1 - \frac{S(t)}{K} \right) \right\} \leq \frac{\gamma K}{4}, \quad (4.51)$$

na osnovu poslednje dve relacije sledi

$$\langle I(t) \rangle \leq \frac{1}{\mu + \delta} \frac{\gamma K}{4} + \frac{1}{\mu + \delta} \phi_2(t, S, V, I, R), \quad (4.52)$$

gde je

$$\begin{aligned}
 \phi_2(t, S, V, I, R) = & \frac{1}{t} \int_0^t \sigma_1 S(s) dB_1(s) + \frac{1}{t} \int_0^t \int_Y \eta_1(u) S(s) \tilde{N}(ds, du) - \frac{1}{t} (S(t) - S(0)) \\
 & + \frac{1}{t} \int_0^t \sigma_2 V(s) dB_2(s) + \frac{1}{t} \int_0^t \int_Y \eta_2(u) V(s) \tilde{N}(ds, du) - \frac{1}{t} (V(t) - V(0)) \\
 & + \frac{1}{t} \int_0^t \sigma_3 I(s) dB_3(s) + \frac{1}{t} \int_0^t \int_Y \eta_3(u) I(s) \tilde{N}(ds, du) - \frac{1}{t} (I(t) - I(0)) \\
 & + \frac{1}{t} \int_0^t \sigma_4 R(s) dB_4(s) + \frac{1}{t} \int_0^t \int_Y \eta_4(u) R(s) \tilde{N}(ds, du) - \frac{1}{t} (R(t) - R(0)).
 \end{aligned} \tag{4.53}$$

Na osnovu Leme [4.1](#), sledi da je

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \phi_2(t, S, V, I, R) = 0.$$

Računanjem granične vrednosti kada $t \rightarrow \infty$ u [\(4.52\)](#), dobija se

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \langle I(t) \rangle \leq \frac{1}{\mu + \delta} \frac{\gamma K}{4}. \tag{4.54}$$

Na osnovu [\(4.49\)](#) i [\(4.54\)](#), sledi da je

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \langle X(t) \rangle \leq \frac{1}{\mu + \delta} \frac{\gamma K}{4}. \tag{4.55}$$

Računanjem granične vrednosti kada $t \rightarrow \infty$ u [\(4.45\)](#) i primenom relacija [\(4.46\)](#), [\(4.47\)](#) i [\(4.55\)](#), dobija se

$$\begin{aligned}
 \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{I(t) + \sigma_3^2 \ln I(t)}{t} & \leq \left((1 + \sigma_3^2) \left(\frac{\beta}{m_1} + \frac{\beta}{m_2} \right) - (\rho + \mu + \delta) \right) \frac{\gamma K}{4(\mu + \delta)} \\
 & \leq (\rho + \mu + \delta) (R^* - 1) \frac{\gamma K}{4(\mu + \delta)} < 0, \quad s.i.,
 \end{aligned}$$

odnosno,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\sigma_3^2 \ln I(t)}{t} \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{I(t) + \sigma_3^2 \ln I(t)}{t} \leq (\rho + \mu + \delta) (R^* - 1) \frac{\gamma K}{4(\mu + \delta)} < 0, \quad s.i.,$$

na osnovu uslova teoreme i činjenice da je $(S(t), V(t), I(t), R(t), X(t)) \in \mathbb{R}_+^5$. Tada je

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln I(t)}{t} < 0 \quad \text{odakle sledi} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = 0, \quad s.i.$$

Na osnovu poslednje relacije i [\(4.49\)](#), sledi

$$\lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = 0 \quad s.i.$$

Pored toga, integracijom četvrte jednačine sistema [\(4.38\)](#) od 0 do t , deljenjem sa t i računanjem granične vrednosti kada $t \rightarrow \infty$, dobija se

$$\lim_{t \rightarrow \infty} R(t) = 0 \quad s.i.,$$

pri čemu je primenjeno L'Hospitalovo pravilo i Teorema [4.1](#)

2. Primenom uopštene formule Itôa (Teorema 1.30) na funkciju $\ln(aI(t) + bX(t))$, gde je $a = \xi$, $b = \rho + \mu + \delta$, dobija se

$$\begin{aligned}
& d(\ln(aI(t) + bX(t))) \\
& \leq \left(\frac{1}{aI(t) + bX(t)} \left(a \left(\frac{\beta S(t)X(t)}{1+m_1S(t)} + \frac{\beta V(t)X(t)}{1+m_2V(t)} - (\rho + \mu + \delta) I(t) \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + b(\xi I(t) - \xi X(t)) \right) - \frac{1}{2(aI(t) + bX(t))^2} (a^2\sigma_3^2 I^2(t) + b^2\sigma_5^2 X^2(t)) \right) dt \\
& \quad + \int_Y \left(\ln \left(1 + \eta_3(u) \frac{I(s)}{aI(t) + bX(t)} \right) - \eta_3(u) \frac{I(s)}{aI(t) + bX(t)} \right) \lambda(du) dt \\
& \quad + \int_Y \left(\ln \left(1 + \eta_5(u) \frac{X(s)}{aI(t) + bX(t)} \right) - \eta_5(u) \frac{X(s)}{aI(t) + bX(t)} \right) \lambda(du) dt \\
& \quad + \frac{a\sigma_3 I(t)}{aI(t) + bX(t)} dB_3(t) + \int_Y \ln \left(1 + \eta_3(u) \frac{I(t)}{aI(t) + bX(t)} \right) \tilde{N}(dt, du) \\
& \quad + \frac{b\sigma_5 X(t)}{aI(t) + bX(t)} dB_5(t) + \int_Y \ln \left(1 + \eta_5(u) \frac{X(t)}{aI(t) + bX(t)} \right) \tilde{N}(dt, du) \\
& \leq \left(\frac{a}{b} \left(\frac{\beta S(t)}{1+m_1S(t)} + \frac{\beta V(t)}{1+m_2V(t)} \right) - \frac{b}{aI(t) + bX(t)} \xi X(t) \right) dt \\
& \quad - \frac{1}{2(aI(t) + bX(t))^2} (a^2\sigma_3^2 I^2(t) + b^2\sigma_5^2 X^2(t)) dt \\
& \quad + \frac{a\sigma_3 I(t)}{aI(t) + bX(t)} dB_3(t) + \int_Y \ln \left(1 + \eta_3(u) \frac{I(t)}{aI(t) + bX(t)} \right) \tilde{N}(dt, du) \\
& \quad + \frac{b\sigma_5 X(t)}{aI(t) + bX(t)} dB_5(t) + \int_Y \ln \left(1 + \eta_5(u) \frac{X(t)}{aI(t) + bX(t)} \right) \tilde{N}(dt, du) \\
& \leq \left(\frac{a\beta}{bm_1} + \frac{a\beta}{bm_2} - \frac{1}{(aI(t) + bX(t))^2} \left(\frac{1}{2} a^2 \sigma_3^2 I^2(t) + (b^2 \xi + \frac{1}{2} b^2 \sigma_5^2) X^2(t) \right) \right) dt \\
& \quad + \frac{a\sigma_3 I(t)}{aI(t) + bX(t)} dB_3(t) + \int_Y \ln \left(1 + \eta_3(u) \frac{I(t)}{aI(t) + bX(t)} \right) \tilde{N}(dt, du) \\
& \quad + \frac{b\sigma_5 X(t)}{aI(t) + bX(t)} dB_5(t) + \int_Y \ln \left(1 + \eta_5(u) \frac{X(t)}{aI(t) + bX(t)} \right) \tilde{N}(dt, du) \\
& \leq \left(\frac{a\beta}{bm_1} + \frac{a\beta}{bm_2} - \frac{\min\{\frac{1}{2} a^2 \sigma_3^2, b^2(\xi + \frac{1}{2} \sigma_5^2)\}}{2 \max\{a^2, b^2\} (I^2(t) + X^2(t))} (I^2(t) + X^2(t)) \right) dt \\
& \quad + \frac{a\sigma_3 I(t)}{aI(t) + bX(t)} dB_3(t) + \int_Y \ln \left(1 + \eta_3(u) \frac{I(t)}{aI(t) + bX(t)} \right) \tilde{N}(dt, du) \\
& \quad + \frac{b\sigma_5 X(t)}{aI(t) + bX(t)} dB_5(t) + \int_Y \ln \left(1 + \eta_5(u) \frac{X(t)}{aI(t) + bX(t)} \right) \tilde{N}(dt, du) \\
& \leq \left(\frac{a\beta}{bm_1} + \frac{a\beta}{bm_2} - \frac{\min\{\frac{1}{2} a^2 \sigma_3^2, b^2(\xi + \frac{1}{2} \sigma_5^2)\}}{2 \max\{a^2, b^2\}} \right) dt \\
& \quad + \frac{a\sigma_3 I(t)}{aI(t) + bX(t)} dB_3(t) + \int_Y \ln \left(1 + \eta_3(u) \frac{I(t)}{aI(t) + bX(t)} \right) \tilde{N}(dt, du) \\
& \quad + \frac{b\sigma_5 X(t)}{aI(t) + bX(t)} dB_5(t) + \int_Y \ln \left(1 + \eta_5(u) \frac{X(t)}{aI(t) + bX(t)} \right) \tilde{N}(dt, du).
\end{aligned}$$

Integracijom obe strane prethodnog izraza od 0 do t i deljenjem sa t , dobija se

$$\begin{aligned}
\frac{\ln(aI(t) + bX(t)) - \ln(aI(0) + bX(0))}{t} & \leq \frac{a\beta}{bm_1} + \frac{a\beta}{bm_2} - \frac{\min\{\frac{1}{2} a^2 \sigma_3^2, b^2(\xi + \frac{1}{2} \sigma_5^2)\}}{2 \max\{a^2, b^2\}} \\
& \quad + \int_0^t \frac{a\sigma_3 I(s)}{aI(s) + bX(s)} dB_3(s) + \int_0^t \frac{b\sigma_5 X(s)}{aI(s) + bX(s)} dB_5(s) \\
& \quad + \int_0^t \int_Y \ln \left(1 + \eta_3(u) \frac{I(s)}{aI(s) + bX(s)} \right) \tilde{N}(ds, du) \\
& \quad + \int_0^t \int_Y \ln \left(1 + \eta_5(u) \frac{X(s)}{aI(s) + bX(s)} \right) \tilde{N}(ds, du).
\end{aligned} \tag{4.56}$$

Na osnovu osobina Brownovog kretanja (Teorema 1.10), $M_3(t) = \int_0^t \frac{a\sigma_3 I(s)}{aI(s) + bX(s)} dB_3(s)$ i

$M_4(t) = \int_0^t \frac{b\sigma_5 X(s)}{aI(s)+bX(s)} dB_5(s)$ su neprekidni martingali, za koje je $M_3(0) = 0$, $M_4(0) = 0$,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\langle M_3, M_3 \rangle_t}{t} = \sigma_3^2 < \infty, \quad \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\langle M_4, M_4 \rangle_t}{t} = \sigma_5^2 < \infty.$$

Na osnovu osobine Lévyjevog procesa (1.28), $M_5(t) = \int_0^t \int_Y \ln \left(1 + \eta_3(u) \frac{I(s)}{aI(s)+bX(s)} \right) \tilde{N}(ds, du)$ i $M_6(t) = \int_0^t \int_Y \ln \left(1 + \eta_5(u) \frac{X(s)}{aI(s)+bX(s)} \right) \tilde{N}(ds, du)$ su martingali za koje važi $M_5(0) = 0$, $M_6(0) = 0$, i

$$\langle M_5, M_5 \rangle_t = \int_0^t \int_Y \left(\ln \left(1 + \eta_3(u) \frac{I(s)}{aI(s)+bX(s)} \right) \right)^2 \lambda(du) ds,$$

$$\langle M_6, M_6 \rangle_t = \int_0^t \int_Y \left(\ln \left(1 + \eta_5(u) \frac{X(s)}{aI(s)+bX(s)} \right) \right)^2 \lambda(du) ds.$$

Primenom Pretpostavke ($\mathcal{H}1$), slično kao u prvom delu dokaza, zaključuje se da je

$$\rho_{M_5}(t) := \int_0^t \frac{d \langle M_5, M_5 \rangle_s}{(1+s)^2} < \infty, \quad \rho_{M_6}(t) := \int_0^t \frac{d \langle M_6, M_6 \rangle_s}{(1+s)^2} < \infty.$$

Primenom strogih zakona velikih brojeva za neprekidne martingale i lokalne martingale (Teorema 1.7 i Teorema 1.8), sledi da je

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} M_3(t) &= 0, & \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} M_4(t) &= 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} M_5(t) &= 0 \quad \text{i} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} M_6(t) &= 0. \end{aligned} \quad (4.57)$$

Računanjem granične vrednosti kada $t \rightarrow \infty$ u (4.56) i primenom (4.57), dobija se

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln(aI(t) + bX(t))}{t} \leq \frac{a\beta}{bm_1} + \frac{a\beta}{bm_2} - \frac{\min\{\frac{1}{2}a^2\sigma_3^2, b^2(\xi + \frac{1}{2}\sigma_5^2)\}}{2 \max\{a^2, b^2\}} < 0, \quad s.i.,$$

na osnovu uslova teoreme i činjenice da je $(S(t), V(t), I(t), R(t), X(t)) \in \mathbb{R}_+^5$. Tada je

$$\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = 0, \quad \text{i} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = 0, \quad s.i.$$

Pored toga, integracijom četvrte jednačine sistema (4.38) od 0 do t , deljenjem sa t i računanjem granične vrednosti kada $t \rightarrow \infty$, sledi da je

$$\lim_{t \rightarrow \infty} R(t) = 0 \quad s.i.,$$

pri čemu je primenjeno L'Hospitalovo pravilo i Teorema 4.1. Time je dokaz kompletan. $\triangle$

4.2.3 Perzistentnost u srednjem bolesti

U ovom poglavlju, fokus istraživanja je na utvrđivanju uslova pod kojima je bolest perzistentna u populaciji. Stohastička perzistentnost se može neformalno shvatiti kao svojstvo koje ukazuje da određena populaciona grupa neće izumreti tokom vremena sa verovatnoćom jedan i u slučaju perzistentnosti bolesti, to se odnosi na populaciju zaraženih osoba. U nastavku će biti izvedeni dovoljni uslovi za strogu perzistentnost u srednjem bolesti u populaciji.

Definicija 4.1 *Bolest je strogo perzistentna u srednjem u populaciji ako je*

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t I(s) ds > 0 \quad s.i.$$

Neka je

$$R_0^S := \frac{\gamma + 2\sqrt{v_1 v} - \frac{1}{2}\sigma_1^2 - \frac{1}{2}\sigma_2^2 - \sum_{i=1}^2 \int_Y (\eta_i(u) - \ln(1 + \eta_i(u))) \lambda(du)}{\left(\frac{\beta}{m_2} \frac{1}{\mu + \delta} + \frac{v_1 + \mu}{\mu}\right) \frac{\gamma^2}{4v} + v + \mu + v_1}. \quad (4.58)$$

Teorema 4.7 *Neka važe pretpostavke $(\mathcal{H}1)$, $(\mathcal{H}2)$, i $(\mathcal{H}3)$ i neka je $(S(t), V(t), I(t), R(t), X(t))$, $t \geq 0$, rešenje sistema (4.38) sa proizvoljnom početnom vrednošću $(S(0), V(0), I(0), R(0), X(0)) \in \mathbb{R}_+^5$. Ako je $R_0^S > 1$, tada važi*

$$\begin{aligned} \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t I(s) ds &\geq \frac{\left(\left(\frac{\beta}{m_2} \frac{1}{\mu + \delta} + \frac{v_1 + \mu}{\mu}\right) \frac{\gamma^2}{4v} + v + \mu + v_1\right)(R_0^S - 1)}{2\beta} > 0 \quad s.i., \\ \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t R(s) ds &\geq \frac{\rho}{r_1 + \mu} \frac{\left(\left(\frac{\beta}{m_2} \frac{1}{\mu + \delta} + \frac{v_1 + \mu}{\mu}\right) \frac{\gamma^2}{4v} + v + \mu + v_1\right)(R_0^S - 1)}{2\beta} > 0 \quad s.i., \\ \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t X(s) ds &\geq \frac{\left(\left(\frac{\beta}{m_2} \frac{1}{\mu + \delta} + \frac{v_1 + \mu}{\mu}\right) \frac{\gamma^2}{4v} + v + \mu + v_1\right)(R_0^S - 1)}{2\beta} > 0 \quad s.i., \end{aligned}$$

odnosno, bolest je strogo perzistentna u srednjem.

Dokaz. Na osnovu druge jednačine sistema (4.38), sledi

$$\begin{aligned} d(-V(t)) &\leq \left(-vS(t) + \frac{\beta}{m_2}X(t) + (v_1 + \mu)V(t)\right) dt - \sigma_2 V(t) dB(t) \\ &\quad - \int_Y \eta_2(u) V(t) \tilde{N}(dt, du). \end{aligned}$$

Integracijom prethodne nejednakosti od 0 to t , i deljenjem sa t , dobija se

$$\begin{aligned} \frac{1}{t}(-V(t) + V(0)) &\leq -v \langle S(t) \rangle + \frac{\beta}{m_2} \langle X(t) \rangle + (v_1 + \mu) \langle V(t) \rangle - \frac{1}{t} \int_0^t \sigma_2 V(s) dB(s) \\ &\quad - \frac{1}{t} \int_0^t \int_Y \eta_2(u) V(s) \tilde{N}(ds, du). \end{aligned}$$

Neka je $\phi_3(t, V) := \frac{1}{t}(V(t) - V(0)) - \frac{1}{t} \int_0^t \sigma_2 V(s) dB(s) - \frac{1}{t} \int_0^t \int_Y \eta_2(u) V(s) \tilde{N}(ds, du)$.

Tada je

$$\langle S(t) \rangle \leq \frac{\beta}{m_2 v} \langle X(t) \rangle + \frac{v_1 + \mu}{v} \langle V(t) \rangle + \frac{1}{v} \phi_3(t, V). \quad (4.59)$$

Na osnovu Leme 4.1 sledi da je

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_3(t, V) = 0.$$

Izračunavanjem $\limsup$ kada $t \rightarrow \infty$ u (4.59), važi da je

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \langle S(t) \rangle \leq \frac{\beta}{m_2 v} \limsup_{t \rightarrow \infty} \langle X(t) \rangle + \frac{v_1 + \mu}{v} \limsup_{t \rightarrow \infty} \langle V(t) \rangle. \quad (4.60)$$

Kako važe relacije (4.51) i (4.53), izračunavanjem granične vrednosti kada $t \rightarrow \infty$ u (4.50), sledi

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \langle V(t) \rangle \leq \frac{1}{\mu} \frac{\gamma K}{4}. \quad (4.61)$$

Zamenom (4.55) i (4.61) u (4.60), zaključuje se da je

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \langle S(t) \rangle \leq \left(\frac{\beta}{m_2 v} \frac{1}{\mu + \delta} + \frac{(v_1 + \mu)}{v} \frac{1}{\mu} \right) \frac{\gamma K}{4}. \quad (4.62)$$

Primenom operatora L (1.34) na funkciju $(-\ln S(t) - \ln V(t))$, sledi

$$\begin{aligned} L(-\ln S(t) - \ln V(t)) &= -\gamma + \frac{\gamma S(t)}{K} + \frac{\beta X(t)}{1 + m_1 S(t)} + v - v_1 \frac{V(t)}{S(t)} - r_1 \frac{R(t)}{S(t)} \\ &\quad - v \frac{S(t)}{V(t)} + \frac{\beta X(t)}{1 + m_2 V(t)} + \mu + v_1 + \frac{1}{2} \sigma_1^2 + \frac{1}{2} \sigma_2^2 \\ &\quad + \sum_{i=1}^2 \int_Y (\eta_i - \ln(1 + \eta_i(u))) \lambda(du) \\ &\leq -\gamma + \frac{\gamma}{K} S(t) + 2\beta X(t) + v - v_1 \frac{V(t)}{S(t)} - v \frac{S(t)}{V(t)} \\ &\quad + \mu + v_1 + \frac{1}{2} \sigma_1^2 + \frac{1}{2} \sigma_2^2 \\ &\quad + \sum_{i=1}^2 \int_Y (\eta_i - \ln(1 + \eta_i(u))) \lambda(du) \\ &\leq -\gamma + \frac{\gamma}{K} S(t) + 2\beta X(t) + v - 2\sqrt{v_1 v} + \mu + v_1 \\ &\quad + \frac{1}{2} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2) + \sum_{i=1}^2 \int_Y (\eta_i(u) - \ln(1 + \eta_i(u))) \lambda(du). \end{aligned} \quad (4.63)$$

Primenom uopštene formule Itôa (Teorema 1.30) na $(-\ln S(t) - \ln V(t))$ i prethodne nejednakosti, a potom deljenjem sa t , dobija se

$$\begin{aligned} &\frac{-\ln S(t) + \ln S(0) - \ln V(t) + \ln V(0)}{t} \\ &\leq L(-\ln S(t) - \ln V(t)) dt - \frac{1}{t} \int_0^t \sigma_1 dB_1(s) - \frac{1}{t} \int_0^t \sigma_2 dB_2(s) \\ &\quad + \frac{1}{t} \sum_{i=1}^2 \int_0^t \int_Y \ln(1 + \eta_i(u)) \tilde{N}(ds, du) \\ &\leq -\gamma + \frac{\gamma}{K} \langle S(t) \rangle + 2\beta \langle X(t) \rangle + v - 2\sqrt{v_1 v} + \mu + v_1 + \frac{1}{2} \sigma_1^2 + \frac{1}{2} \sigma_2^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{i=1}^2 \int_Y (\eta_i(u) - \ln(1 + \eta_i(u))) \lambda(du) - \frac{1}{t} \int_0^t \sigma_1 dB_1(s) \\
 & - \frac{1}{t} \int_0^t \sigma_2 dB_2(s) + \frac{1}{t} \sum_{i=1}^2 \int_0^t \int_Y \ln(1 + \eta_i(u)) \tilde{N}(ds, du).
 \end{aligned}$$

Neka je $\phi_4(t, S, V) := \frac{1}{t} (\ln S(0) - \ln S(t) + \ln V(0) - \ln V(t))$, $\phi_5(t) := \frac{1}{t} \int_0^t \sigma_1 dB_1(s) + \frac{1}{t} \int_0^t \sigma_2 dB_2(s) - \frac{1}{t} \int_0^t \int_Y \ln(1 + \eta_1(u)) \tilde{N}(ds, du) - \frac{1}{t} \int_0^t \int_Y \ln(1 + \eta_2(u)) \tilde{N}(ds, du)$. Tada je

$$\begin{aligned}
 2\beta \langle X(t) \rangle & \geq \gamma - \frac{\gamma}{K} \langle S(t) \rangle - \sum_{i=1}^2 \int_Y (\eta_i(u) - \ln(1 + \eta_i(u))) \lambda(du) \\
 & -v + 2\sqrt{v_1 v} - \mu - v_1 - \frac{1}{2} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2) + \phi_4(t, S, V) + \phi_5(t).
 \end{aligned} \tag{4.64}$$

Kako je $\phi_4(t, S, V) \geq \frac{1}{t} (\ln S(0) - S(t) + \ln V(0) - V(t))$, na osnovu Leme 4.1 sledi da je $\liminf_{t \rightarrow \infty} \phi_4(t, S, V) \geq 0$. Na osnovu istih argumenata kao pri zaključivanju (4.46), sledi da je

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_5(t) = 0.$$

Izračunavanjem $\liminf_{t \rightarrow \infty}$ u (4.64), dobija se

$$\begin{aligned}
 2\beta \liminf_{t \rightarrow \infty} \langle X(t) \rangle & \geq \gamma - \left(\frac{\beta}{m_2 \mu + \delta} + \frac{v_1 + \mu}{\mu} \right) \frac{\gamma^2}{4v} - v + 2\sqrt{v_1 v} - \mu - v_1 - \frac{1}{2} \sigma_1^2 \\
 & - \frac{1}{2} \sigma_2^2 - \sum_{i=1}^2 \int_Y (\eta_i(u) - \ln(1 + \eta_i(u))) \lambda(du) \\
 & = \left(\left(\frac{\beta}{m_2 \mu + \delta} + \frac{v_1 + \mu}{\mu} \right) \frac{\gamma^2}{4v} + v + \mu + v_1 \right) (R_0^S - 1),
 \end{aligned}$$

gde je korišćena relacija (4.62) i R_0^S je definisano sa (4.58). Prema tome

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t X(s) ds \geq \frac{1}{2\beta} \left(\left(\frac{\beta}{m_2 \mu + \delta} + \frac{v_1 + \mu}{\mu} \right) \frac{\gamma^2}{4v} + v + \mu + v_1 \right) (R_0^S - 1) > 0 \quad s.i.,$$

na osnovu uslova teoreme. Na osnovu poslednje relacije i (4.49), sledi

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t I(s) ds \geq \frac{1}{2\beta} \left(\left(\frac{\beta}{m_2 \mu + \delta} + \frac{v_1 + \mu}{\mu} \right) \frac{\gamma^2}{4v} + v + \mu + v_1 \right) (R_0^S - 1) > 0 \quad s.i.$$

Dakle, kada važi $R_0^S > 1$, infekcija opstaje u populaciji u beskonačnom vremenskom domenu.

Pored toga, integracijom četvrte jednačine sistema (4.38) od 0 do t , deljenjem sa t i računanjem granične vrednosti kada $t \rightarrow \infty$, dobija se

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t R(s) ds \geq \frac{\rho}{(r_1 + \mu)2\beta} \left(\left(\frac{\beta}{m_2 \mu + \delta} + \frac{v_1 + \mu}{\mu} \right) \frac{\gamma^2}{4v} + v + \mu + v_1 \right) (R_0^S - 1) > 0 \quad s.i.$$

Time je dokaz kompletan. $\triangle$

4.2.4 Stacionarna raspodela

Sledeća teorema pruža dovoljne uslove pod kojima stohastički model (4.38), koji sadrži slučajnost kroz Brownovo kretanje i Poissonove skokove, ima jedinstvenu stacionarnu raspodelu. U dokazu postojanja stacionarne raspodele modela (4.38) ne može se primeniti teorija iz [13], jer se ona odnosi na stohastičke diferencijalne jednačine koje uključuju samo Brownovo kretanje. Iz tog razloga je ovde primenjen drugi pristup. Naime, najpre je pokazano da je rešenje sistema (4.38) proces Feller, a potom je primenjena Lema 1.9.

Teorema 4.8 *Neka važe pretpostavke $(\mathcal{H}1)$, $(\mathcal{H}2)$ i $(\mathcal{H}3)$ i neka je $(S(t), V(t), I(t), R(t), X(t))$, $t \geq 0$, rešenje sistema (4.38) sa proizvoljnom početnom vrednošću $(S(0), V(0), I(0), R(0), X(0)) \in \mathbb{R}_+^5$. Ako je $R_0^S > 1$, tada stohastički model (4.38) ima jedinstvenu ergodičku stacionarnu raspodelu.*

Dokaz. Na osnovu Teoreme 1.34 sledi da je (4.38) proces Markova.

Neka je dat sistem

$$\begin{aligned} dS^0(t) &= \left(\gamma S^0(t) \left(1 - \frac{S^0(t)}{K} \right) - \frac{\beta S^0(t) X^0(t)}{1 + m_1 S^0(t)} - v S^0(t) + v_1 V^0(t) + r_1 R^0(t) \right) dt \\ &\quad + \sigma_1 S^0(t) dB_1(t), \\ dV^0(t) &= \left(v S^0(t) - \frac{\beta V^0(t) X^0(t)}{1 + m_2 V^0(t)} - v_1 V^0(t) - \mu V^0(t) \right) dt + \sigma_2 V^0(t) dB_2(t), \\ dI^0(t) &= \left(\frac{\beta S^0(t) X^0(t)}{1 + m_1 S^0(t)} + \frac{\beta V^0(t) X^0(t)}{1 + m_2 V^0(t)} - (\rho + \mu + \delta) I^0(t) \right) dt + \sigma_3 I^0(t) dB_3(t), \\ dR^0(t) &= (\rho I^0(t) - (r_1 + \mu) R^0(t)) dt + \sigma_4 R^0(t) dB_4(t), \\ dX^0(t) &= \xi (I^0(t) - X^0(t)) dt + \sigma_5 X^0(t) dB_5(t), \end{aligned} \quad (4.65)$$

sa početnom vrednošću $(S^0(0), V^0(0), I^0(0), R^0(0), X^0(0)) \in \mathbb{R}_+^5$, pri čemu svi parametri modela (4.65) imaju prethodno definisano značenje. Na osnovu Teoreme 4.5, sistem (4.65) ima jedinstveno globalno rešenje. Uvodeći smenu $x_1^0(t) = \ln S^0(t)$, $x_2^0(t) = \ln V^0(t)$, $x_3^0(t) = \ln I^0(t)$, $x_4^0(t) = \ln R^0(t)$, $x_5^0(t) = \ln X^0(t)$, $t \geq 0$, primenom Itôve formule (Teorema 1.12) sistem (4.65) se transformiše u ekvivalentan sistem

$$\begin{aligned} dx_1^0(t) &= \left(\gamma \left(1 - \frac{e^{x_1^0(t)}}{K} \right) - \frac{\beta e^{x_5^0(t)}}{1 + m_1 e^{x_1^0(t)}} - v + v_1 e^{x_2^0(t) - x_1^0(t)} + r_1 e^{x_4^0(t) - x_1^0(t)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\sigma_1^2}{2} \right) dt + \sigma_1 dB_1(t), \\ dx_2^0(t) &= \left(v e^{x_1^0(t) - x_2^0(t)} - \frac{\beta e^{x_5^0(t)}}{1 + m_2 e^{x_2^0(t)}} - v_1 - \mu - \frac{\sigma_2^2}{2} \right) dt + \sigma_2 dB_2(t), \\ dx_3^0(t) &= \left(\frac{\beta e^{x_1^0(t) + x_5^0(t) - x_3^0(t)}}{1 + m_1 e^{x_1^0(t)}} + \frac{\beta e^{x_2^0(t) + x_5^0(t) - x_3^0(t)}}{1 + m_2 e^{x_2^0(t)}} - \rho - \mu - \delta - \frac{\sigma_3^2}{2} \right) dt \\ &\quad + \sigma_3 dB_3(t), \\ dx_4^0(t) &= \left(\rho e^{x_3^0(t) - x_4^0(t)} - r_1 - \mu - \frac{\sigma_4^2}{2} \right) dt + \sigma_4 dB_4(t), \\ dx_5^0(t) &= \xi \left(e^{x_3^0(t) - x_5^0(t)} - 1 - \frac{\sigma_5^2}{2} \right) dt + \sigma_5 dB_5(t). \end{aligned} \quad (4.66)$$

Difuzionu matricu sistema (4.66) je oblika

$$G(x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0, x_5^0) = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1\sigma_2 & \sigma_1\sigma_3 & \sigma_1\sigma_4 & \sigma_1\sigma_5 \\ \sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 & \sigma_2\sigma_3 & \sigma_2\sigma_4 & \sigma_2\sigma_5 \\ \sigma_1\sigma_3 & \sigma_2\sigma_3 & \sigma_3^2 & \sigma_3\sigma_4 & \sigma_3\sigma_5 \\ \sigma_1\sigma_4 & \sigma_2\sigma_4 & \sigma_3\sigma_4 & \sigma_4^2 & \sigma_4\sigma_5 \\ \sigma_1\sigma_5 & \sigma_2\sigma_5 & \sigma_3\sigma_5 & \sigma_4\sigma_5 & \sigma_5^2 \end{pmatrix}$$

i uniformno je pozitivna. Stoga, na osnovu Napomene 1.5, sistem (4.66) ima strogo svojstvo Felleru i pozitivnu gustinu verovatnoća prelaza, a samim tim i njemu ekvivalentan sistem (4.65) ima te osobine. Prema Teoremi 1.8 sledi da (4.38) $(S(t), V(t), I(t), R(t), X(t))$ ima strogo svojstvo Felleru.

U nastavku će biti konstruisan kompaktan skup D za koji je

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{P}(s, (S, V, I, R, X), D) ds > 0, \quad \text{s.i.},$$

gde je $\mathbb{P}(t, (S, V, I, R, X), D)$ verovatnoća da (S, V, I, R, X) pripada skupu D , što, na osnovu Leme 1.9 implicira da (S, V, I, R, X) ima jedinstvenu ergodičku stacionarnu raspodelu. Neka je $\mathbb{C}^2$ -funkcija $\tilde{W}(S, V, I, R, X) : \mathbb{R}_+^5 \rightarrow \mathbb{R}$ definisana na sledeći način

$$\begin{aligned} \tilde{W}(S, V, I, R, X) &:= M \left(-\ln S - \ln V + \frac{2\beta}{\rho + \mu + \delta} \left(V + I + \frac{\rho + \mu + \delta}{\xi} X \right) \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} (S + V + I + R)^2 + \frac{1}{2\xi} X^2 - \ln V - \ln I - \ln R, \end{aligned}$$

gde je $M > 0$ konstanta koja će biti određena u nastavku. Kako je $d^2 \tilde{W}(S, V, I, R, X) > 0$, funkcija $\tilde{W}(S, V, I, R, X)$ ima minimum, koji se dostiže u nekoj tački $t_0 \in \mathbb{R}^5$. Neka je nenegativna, $\mathbb{C}^2$ -funkcija $W(S, V, I, R, X) : \mathbb{R}_+^5 \rightarrow \mathbb{R}$ definisana sa

$$\begin{aligned} W(S, V, I, R, X) &:= M \left(-\ln S - \ln V + \frac{2\beta}{\rho + \mu + \delta} \left(V + I + \frac{\rho + \mu + \delta}{\xi} X \right) \right) \\ &\quad + \frac{1}{2\xi} X^2 + \frac{1}{2} (S + V + I + R)^2 - \ln V - \ln I - \ln R \\ &\quad - \tilde{W}(S(t_0), V(t_0), I(t_0), R(t_0), X(t_0)). \end{aligned}$$

Pored toga, radi jednostavnijeg zapisivanja, uvode se oznake

$$\begin{aligned} W_1(S, V, I, R, X) &:= -\ln S - \ln V + \frac{2\beta}{\rho + \mu + \delta} \left(V + I + \frac{\rho + \mu + \delta}{\xi} X \right), \\ W_2(S, V, I, R, X) &:= \frac{1}{2} (S + V + I + R)^2 + \frac{1}{2\xi} X^2, \\ W_3(S, V, I, R, X) &:= -\ln V - \ln I - \ln R. \end{aligned}$$

Primenom operatora $L(\cdot)$ (1.34) na funkciju $W_1(S, V, I, R, X)$, dobija se

$$\begin{aligned} LW_1(S, V, I, R, X) &\leq 2\beta X + \frac{\gamma}{K} S - \left(\frac{\beta}{m_2} \frac{1}{\mu + \delta} + \frac{v_1 + \mu}{\mu} \right) \frac{\gamma^2}{4v} \\ &\quad - \left(\left(\frac{\beta}{m_2} \frac{1}{\mu + \delta} + \frac{v_1 + \mu}{\mu} \right) \frac{\gamma^2}{4v} + v + \mu + v_1 \right) (R_0^S - 1) \\ &\quad + \frac{2\beta}{\rho + \mu + \delta} \left(vS + \beta \frac{SX}{1 + m_1 S} - (\rho + \mu + \delta) X \right) \\ &=: \left(\frac{\gamma}{K} + \frac{2\beta v}{\rho + \mu + \delta} \right) S + \frac{2\beta^2 SX}{(\rho + \mu + \delta)(1 + m_1 S)} - \psi_1, \end{aligned} \tag{4.67}$$

gde je korišćena relacija (4.63) i R_0^S je definisano sa (4.58). Primenom operatora $L(\cdot)$ (1.34) na funkciju $W_2(S, V, I, R, X)$, dobija se

$$\begin{aligned}
LW_2(S, V, I, R, X) &= (S + V + I + R) \left(\gamma S \left(1 - \frac{S}{K} \right) - \mu V - (\mu + \delta) I - \mu R \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} (\sigma_1^2 S^2 + \sigma_2^2 V^2 + \sigma_3^2 I^2 + \sigma_4^2 R^2) \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_Y S(t) (\eta_1(u) - \ln(1 + \eta_1(u))) \lambda(du) \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_Y V(t) (\eta_2(u) - \ln(1 + \eta_2(u))) \lambda(du) \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_Y I(t) (\eta_3(u) - \ln(1 + \eta_3(u))) \lambda(du) \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_Y R(t) (\eta_4(u) - \ln(1 + \eta_4(u))) \lambda(du) + X(I - X) \\
&\quad + \frac{1}{2\xi} \sigma_5^2 X^2 + \frac{1}{2\xi} \int_Y X(t) (\eta_5(u) - \ln(1 + \eta_5(u))) \lambda(du) \\
&\leq \gamma S(S + V + I + R) - \frac{\gamma}{K} S^3 - \mu V^2 - (\mu + \delta) I^2 - \mu R^2 \\
&\quad + \frac{1}{2} \max \{ \sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2, \sigma_4^2 \} (S^2 + V^2 + I^2 + R^2) \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_Y S(t) (\eta_1(u) - \ln(1 + \eta_1(u))) \lambda(du) \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_Y V(t) (\eta_2(u) - \ln(1 + \eta_2(u))) \lambda(du) \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_Y I(t) (\eta_3(u) - \ln(1 + \eta_3(u))) \lambda(du) \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_Y R(t) (\eta_4(u) - \ln(1 + \eta_4(u))) \lambda(du) - X^2 + IX \\
&\quad + \frac{1}{2\xi} \sigma_5^2 X^2 + \frac{1}{2\xi} \int_Y X(t) (\eta_5(u) - \ln(1 + \eta_5(u))) \lambda(du) \\
&\leq -\frac{\gamma}{2K} S^3 - \frac{1}{2} \mu V^2 - \frac{1}{2} (\mu + \delta) I^2 - \frac{1}{2} \mu R^2 - \frac{1}{2} X^2 + C, \quad (4.68)
\end{aligned}$$

pri čemu je

$$\begin{aligned}
C &= \max_{(S, V, I, R, X) \in \mathbb{R}_+^5} \left\{ \gamma S(S + V + I + R) + \frac{1}{2} \int_Y S(t) (\eta_1(u) - \ln(1 + \eta_1(u))) \lambda(du) \right. \\
&\quad - \frac{\gamma}{2K} S^3 + \frac{1}{2} \max \{ \sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2, \sigma_4^2, \sigma_5^2 \} \left(S^2 + V^2 + I^2 + R^2 + \frac{X^2}{\xi} \right) \\
&\quad - \frac{1}{2} \mu V^2 + \frac{1}{2} \int_Y V(t) (\eta_2(u) - \ln(1 + \eta_2(u))) \lambda(du) \\
&\quad - \frac{1}{2} (\mu + \delta) I^2 + \frac{1}{2} \int_Y I(t) (\eta_3(u) - \ln(1 + \eta_3(u))) \lambda(du) \\
&\quad - \frac{1}{2} \mu R^2 + \frac{1}{2} \int_Y R(t) (\eta_4(u) - \ln(1 + \eta_4(u))) \lambda(du) \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} X^2 + IX + \frac{1}{2\xi} \int_Y X(t) (\eta_5(u) - \ln(1 + \eta_5(u))) \lambda(du) \right\}.
\end{aligned}$$

Primenom operatora $L(\cdot)$ (1.34) na $W_3(S, V, I, R, X)$, dobija se

$$\begin{aligned} LW_3(S, V, I, R, X) &= -v\frac{S}{V} + \frac{\beta X}{1+m_2V} + v + \mu + \frac{1}{2}\sigma_2^2 - \frac{\beta SX}{(1+m_1S)I} \\ &\quad - \frac{\beta VX}{(1+m_2V)I} + \rho + \mu + \delta + \frac{1}{2}\sigma_3^2 - \rho\frac{I}{R} + r_1 + \mu \\ &\quad + \frac{1}{2}\sigma_4^2 + \sum_{i=2}^4 \int_Y (\eta_i(u) - \ln(1 + \eta_i(u))) \lambda(du) \\ &\leq -\frac{vS}{V} - \frac{\beta XS}{(1+m_1S)I} - \frac{\rho I}{R} + q, \end{aligned} \quad (4.69)$$

pri čemu je primenjen uslov ($\mathcal{H}2$) i $q = v + 3\mu + \delta + \rho + \frac{1}{2}\sigma_2^2 + \frac{1}{2}\sigma_3^2 + r_1 + \frac{1}{2}\sigma_4^2 + 3\alpha$. Tada, na osnovu (4.67), (4.68) i (4.69) sledi da je

$$\begin{aligned} LW(S, V, I, R, X) &\leq M \left(\left(\frac{\gamma}{K} + \frac{2\beta v}{\rho + \mu + \delta} \right) S + \frac{2\beta^2 SX}{(\rho + \mu + \delta)(1+m_1S)} - \psi_1 \right) - \frac{\gamma}{2K} S^3 \\ &\quad - \frac{1}{2}\mu V^2 - \frac{1}{2}(\mu + \delta)I^2 - \frac{1}{2}\mu R^2 - \frac{1}{2}X^2 + C \\ &\quad - \frac{vS}{V} - \frac{\beta SX}{(1+m_1S)I} - \frac{\rho I}{R} + q. \end{aligned} \quad (4.70)$$

Neka je $M > 0$ dovoljno velika pozitivna konstanta za koju važi

$$-M\psi_1 + A_1 \leq -2, \quad (4.71)$$

gde je

$$A_1 = \sup_{(S, V, I, R, X) \in \mathbb{R}_+^5} \left\{ -\frac{\gamma}{2K} S^3 - \frac{\mu}{2} V^2 - \frac{\mu + \delta}{2} I^2 - \frac{\mu}{2} R^2 - \frac{1}{4} X^2 + C + q \right\}. \quad (4.72)$$

Neka je D ograničen zatvoren skup definisan na sledeći način

$$\begin{aligned} D &= \left\{ (S, V, I, R, X) \in \mathbb{R}_+^5 : \epsilon \leq S \leq \frac{1}{\epsilon}, \epsilon^2 \leq V \leq \frac{1}{\epsilon^2}, \epsilon \leq I \leq \frac{1}{\epsilon}, \epsilon^2 \leq R \leq \frac{1}{\epsilon^2}, \right. \\ &\quad \left. \epsilon \leq X \leq \frac{1}{\epsilon} \right\}, \end{aligned}$$

pri čemu je ϵ takvo da je $0 < \epsilon < 1$ i važe sledeći uslovi

$$M \left(\frac{\gamma}{K} + \frac{2\beta v}{\rho + \mu + \delta} \right) \epsilon + \sup_{X \in \mathbb{R}_+} \left\{ M \frac{2\beta^2 \epsilon X}{\rho + \mu + \delta} - \frac{1}{4} X^2 \right\} - M\psi_1 + A_1 \leq -1, \quad (4.73)$$

$$-\frac{v}{\epsilon} + A_2 \leq -1, \quad (4.74)$$

$$\begin{aligned} A_2 &= \sup_{(S, V, I, R, X) \in \mathbb{R}_+^5} \left\{ M \left(\left(\frac{\gamma}{K} + \frac{2\beta v}{\rho + \mu + \delta} \right) S + \frac{2\beta^2 SX}{(\rho + \mu + \delta)(1+m_1S)} - \psi_1 \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\gamma}{2K} S^3 - \frac{1}{2}\mu V^2 - \frac{1}{2}(\mu + \delta)I^2 - \frac{1}{2}\mu R^2 - \frac{1}{2}X^2 + C + q \right\}, \end{aligned} \quad (4.75)$$

$$\frac{2M\beta^2}{\rho + \mu + \delta} \epsilon + \sup_{S \in \mathbb{R}_+} \left\{ \left(\frac{\gamma}{K} + \frac{2\beta v}{\rho + \mu + \delta} \right) MS - \frac{\gamma}{4K} S^3 \right\} - M\psi_1 + A_3 \leq -1, \quad (4.76)$$

$$A_3 = \sup_{(S, V, I, R, X) \in \mathbb{R}_+^5} \left\{ -\frac{\gamma}{4K} S^3 - \frac{\mu}{2} V^2 - \frac{\mu + \delta}{2} I^2 - \frac{\mu}{2} R^2 - \frac{1}{2} X^2 + C + q \right\}, \quad (4.77)$$

$$-\frac{\beta}{(1+m_1\epsilon)\epsilon} + A_2 \leq -1, \quad (4.78)$$

$$-\frac{\rho}{\epsilon} + A_2 \leq -1, \quad (4.79)$$

$$-\frac{\gamma}{4K} \frac{1}{\epsilon^9} + A_4 \leq -1, \quad (4.80)$$

$$A_4 = \sup_{(S,V,I,R,X) \in \mathbb{R}_+^5} \left\{ M \left(\left(\frac{\gamma}{K} + \frac{2\beta v}{\rho + \mu + \delta} \right) S + \frac{2\beta^2 SX}{(\rho + \mu + \delta)(1+m_1S)} - \psi_1 \right) - \frac{\gamma}{4K} S^3 - \frac{1}{2} \mu V^2 - \frac{1}{2} (\mu + \delta) I^2 - \frac{1}{2} \mu R^2 - \frac{1}{2} X^2 + C + q \right\}, \quad (4.81)$$

$$-\frac{1}{4} \mu \frac{1}{\epsilon^8} + A_5 \leq -1, \quad (4.82)$$

$$A_5 = \sup_{(S,V,I,R,X) \in \mathbb{R}_+^5} \left\{ M \left(\left(\frac{\gamma}{K} + \frac{2\beta v}{\rho + \mu + \delta} \right) S + \frac{2\beta^2 SX}{(\rho + \mu + \delta)(1+m_1S)} - \psi_1 \right) - \frac{\gamma}{2K} S^3 - \frac{1}{4} \mu V^2 - \frac{1}{2} (\mu + \delta) I^2 - \frac{1}{2} \mu R^2 - \frac{1}{2} X^2 + C + q \right\}, \quad (4.83)$$

$$-\frac{1}{4} (\mu + \delta) \frac{1}{\epsilon^2} + A_6 \leq -1, \quad (4.84)$$

$$A_6 = \sup_{(S,V,I,R,X) \in \mathbb{R}_+^5} \left\{ M \left(\left(\frac{\gamma}{K} + \frac{2\beta v}{\rho + \mu + \delta} \right) S + \frac{2\beta^2 SX}{(\rho + \mu + \delta)(1+m_1S)} - \psi_1 \right) - \frac{\gamma}{2K} S^3 - \frac{1}{2} \mu V^2 - \frac{1}{4} (\mu + \delta) I^2 - \frac{1}{2} \mu R^2 - \frac{1}{2} X^2 + C + q \right\}, \quad (4.85)$$

$$-\frac{1}{4} \mu \frac{1}{\epsilon^4} + A_7 \leq -1, \quad (4.86)$$

$$A_7 = \sup_{(S,V,I,R,X) \in \mathbb{R}_+^5} \left\{ M \left(\left(\frac{\gamma}{K} + \frac{2\beta v}{\rho + \mu + \delta} \right) S + \frac{2\beta^2 SX}{(\rho + \mu + \delta)(1+m_1S)} - \psi_1 \right) - \frac{\gamma}{2K} S^3 - \frac{1}{2} \mu V^2 - \frac{1}{2} (\mu + \delta) I^2 - \frac{1}{4} \mu R^2 - \frac{1}{2} X^2 + C + q \right\}, \quad (4.87)$$

$$-\frac{1}{4} \frac{1}{\epsilon^2} + A_8 \leq -1, \quad (4.88)$$

$$A_8 = \sup_{(S,V,I,R,X) \in \mathbb{R}_+^5} \left\{ M \left(\left(\frac{\gamma}{K} + \frac{2\beta v}{\rho + \mu + \delta} \right) S + \frac{2\beta^2 SX}{(\rho + \mu + \delta)(1+m_1S)} - \psi_1 \right) - \frac{\gamma}{2K} S^3 - \frac{1}{2} \mu V^2 - \frac{1}{2} (\mu + \delta) I^2 - \frac{1}{2} \mu R^2 - \frac{1}{4} X^2 + C + q \right\}. \quad (4.89)$$

Za dovoljno malo ϵ , uslovi (4.73) i (4.76) su dobro definisani budući da važi uslov (4.71). Neka je

$$\begin{aligned} D_1 &:= \{(S, V, I, R, X) \in \mathbb{R}_+^5 : S < \epsilon\}, \quad D_2 := \{(S, V, I, R, X) \in \mathbb{R}_+^5 : S \geq \epsilon, V < \epsilon^2\}, \\ D_3 &:= \{(S, V, I, R, X) \in \mathbb{R}_+^5 : X < \epsilon\}, \quad D_4 := \{(S, V, I, R, X) \in \mathbb{R}_+^5 : S, X \geq \epsilon, I < \epsilon^3\}, \\ D_5 &:= \{(S, V, I, R, X) \in \mathbb{R}_+^5 : I \geq \epsilon^3, R < \epsilon^4\}, \quad D_6 := \{(S, V, I, R, X) \in \mathbb{R}_+^5 : S > \frac{1}{\epsilon}\}, \\ D_7 &:= \{(S, V, I, R, X) \in \mathbb{R}_+^5 : V > \frac{1}{\epsilon^2}\}, \quad D_8 := \{(S, V, I, R, X) \in \mathbb{R}_+^5 : I > \frac{1}{\epsilon}\}, \\ D_9 &:= \{(S, V, I, R, X) \in \mathbb{R}_+^5 : R > \frac{1}{\epsilon^2}\}, \quad D_{10} := \{(S, V, I, R, X) \in \mathbb{R}_+^5 : X > \frac{1}{\epsilon}\}. \end{aligned}$$

Tada je $\mathbb{R}_+^5 \setminus D = \bigcup_{i=1}^{10} D_i$. U nastavku će biti pokazano da je $LW(S, V, I, R, X) \leq -1$ za svako $(S, V, I, R, X) \in \mathbb{R}_+^5 \setminus D$, što je ekvivalentno sa $LW(S, V, I, R, X) \leq -1$ za svako $(S, V, I, R, X) \in D_i, i \in \{1, 2, \dots, 10\}$.

Slučaj 1. Na osnovu (4.70), za svako $(S, V, I, R, X) \in D_1$, važi

$$\begin{aligned} LW(S, V, I, R, X) &\leq M \left(\frac{\gamma}{K} + \frac{2\beta v}{\rho + \mu + \delta} \right) S + M \frac{2\beta^2 SX}{\rho + \mu + \delta} - M\psi_1 - \frac{1}{4} X^2 + A_1 \\ &\leq M \left(\frac{\gamma}{K} + \frac{2\beta v}{\rho + \mu + \delta} \right) \epsilon + M \frac{2\beta^2 \epsilon X}{\rho + \mu + \delta} - M\psi_1 - \frac{1}{4} X^2 + A_1 \\ &\leq M \left(\frac{\gamma}{K} + \frac{2\beta v}{\rho + \mu + \delta} \right) \epsilon + \sup_{X \in \mathbb{R}_+} \left\{ M \frac{2\beta^2 \epsilon X}{\rho + \mu + \delta} - \frac{1}{4} X^2 \right\} \\ &\quad - M\psi_1 + A_1, \end{aligned}$$

gde je A_1 definisano sa (4.72). Primenom (4.73), dobija se $LW(S, V, I, R, X) \leq -1$.
Slučaj 2. Za svako $(S, V, I, R, X) \in D_2$, važi

$$LW(S, V, I, R, X) \leq -\frac{vS}{V} + A_2 \leq -\frac{v}{\epsilon} + A_2,$$

gde je A_2 definisano sa (4.75). Primenom (4.74), dobija se $LW(S, V, I, R, X) \leq -1$.
Slučaj 3. Za svako $(S, V, I, R, X) \in D_3$, važi

$$\begin{aligned} LW(S, V, I, R, X) &\leq M \left(\frac{\gamma}{K} + \frac{2\beta v}{\rho + \mu + \delta} \right) S + M \frac{2\beta^2 X}{(\rho + \mu + \delta)} - M\psi_1 \\ &\quad - \frac{\gamma}{4K} S^3 + A_3 \\ &\leq \frac{2M\beta^2}{\rho + \mu + \delta} \epsilon + \sup_{S \in \mathbb{R}_+} \left\{ \left(\frac{\gamma}{K} + \frac{2\beta v}{\rho + \mu + \delta} \right) MS - \frac{\gamma}{4K} S^3 \right\} \\ &\quad - M\psi_1 + A_3, \end{aligned}$$

pri čemu je A_3 definisano sa (4.77). Primenom (4.76), dobija se $LW(S, V, I, R, X) \leq -1$.
Slučaj 4. Za svako $(S, V, I, R, X) \in D_4$, važi

$$LW(S, V, I, R, X) \leq -\frac{\beta SX}{(1 + m_1 S)I} + A_2 \leq -\frac{\beta}{(1 + m_1 \epsilon)\epsilon} + A_2.$$

Primenom (4.78), dobija se $LW(S, V, I, R, X) \leq -1$.
Slučaj 5. Za svako $(S, V, I, R, X) \in D_5$, važi

$$LW(S, V, I, R, X) \leq -\frac{\rho I}{R} + A_2 \leq -\frac{\rho}{\epsilon} + A_2.$$

Primenom (4.79), dobija se $LW(S, V, I, R, X) \leq -1$.
Slučaj 6. Za svako $(S, V, I, R, X) \in D_6$, važi

$$LW(S, V, I, R, X) \leq -\frac{\gamma}{4K} S^3 + A_4 \leq -\frac{\gamma}{4K} \frac{1}{\epsilon^9} + A_4,$$

gde je A_4 definisano sa (4.81). Primenom (4.80), dobija se $LW(S, V, I, R, X) \leq -1$.
Slučaj 7. Za svako $(S, V, I, R, X) \in D_7$, važi

$$LW(S, V, I, R, X) \leq -\frac{1}{4} \mu V^2 + A_5 \leq -\frac{\mu}{4} \frac{1}{\epsilon^8} + A_5,$$

gde je A_5 definisano sa (4.83). Primenom (4.82), dobija se $LW(S, V, I, R, X) \leq -1$.
Slučaj 8. Za svako $(S, V, I, R, X) \in D_8$, važi

$$LW(S, V, I, R, X) \leq -\frac{\mu + \delta}{4} I^2 + A_6 \leq -\frac{\mu + \delta}{4} \frac{1}{\epsilon^2} + A_6,$$

gde je A_6 definisano sa (4.85). Primenom (4.84), dobija se $LW(S, V, I, R, X) \leq -1$.
Slučaj 9. Za svako $(S, V, I, R, X) \in D_9$, važi

$$LW(S, V, I, R, X) \leq -\frac{1}{4} \mu R^2 + A_7 \leq -\frac{\mu}{4} \frac{1}{\epsilon^4} + A_7,$$

gde je A_7 definisano sa (4.87). Primenom (4.86), dobija se $LW(S, V, I, R, X) \leq -1$.
Slučaj 10. Za svako $(S, V, I, R, X) \in D_{10}$, važi

$$LW(S, V, I, R, X) \leq -\frac{1}{4}X^2 + A_8 \leq -\frac{1}{4}\frac{1}{\epsilon^2} + A_8,$$

gde je A_8 definisano sa (4.89). Primenom (4.88), sledi $LW(S, V, I, R, X) \leq -1$.
 Na osnovu prethodnih razmatranja, sledi da je

$$LW(S, V, I, R, X) \leq -1, \quad \text{za svako } (S, V, I, R, X) \in \mathbb{R}_+^5 \setminus D.$$

Pored toga, važi

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{1}{t}EW(S(t), V(t), I(t), R(t), X(t)) \\ &= \frac{1}{t}EW(S(0), V(0), I(0), R(0), X(0)) \\ &\quad + \frac{1}{t} \int_0^t E(LW(S(s), V(s), I(s), R(s), X(s))) ds \\ &= \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t E(LW(S(s), V(s), I(s), R(s), X(s))) ds \\ &= \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t E(LW(S(s), V(s), I(s), R(s), X(s))) 1_{\{(S(s), V(s), I(s), R(s), X(s)) \in \mathbb{R}_+^5 \setminus D\}} ds \\ &\quad + \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t E(LW(S(s), V(s), I(s), R(s), X(s))) 1_{\{(S(s), V(s), I(s), R(s), X(s)) \in D\}} ds \\ &\leq K \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t 1_{\{(S(s), V(s), I(s), R(s), X(s)) \in D\}} ds \\ &\quad - \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t 1_{\{(S(s), V(s), I(s), R(s), X(s)) \in \mathbb{R}_+^5 \setminus D\}} ds \\ &\leq (K + 1) \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t 1_{\{(S(s), V(s), I(s), R(s), X(s)) \in D\}} ds - 1, \end{aligned}$$

gde je $K = \sup_{(S(s), V(s), I(s), R(s), X(s)) \in \mathbb{R}_+^5} LW(S(s), V(s), I(s), R(s), X(s))$. Tada je

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t 1_{\{(S(s), V(s), I(s), R(s), X(s)) \in D\}} ds \geq \frac{1}{K + 1} > 0, \quad \text{s.i.}$$

Kako je sa $P(t, (S(t), V(t), I(t), R(t), X(t)), D)$ označena verovatnoća da $(S(t), V(t), I(t), R(t), X(t)) \in D$, na osnovu Fatouove leme (Lema 1.10), sledi da je

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t P(s, (S(s), V(s), I(s), R(s), X(s)), D) ds \geq \frac{1}{K + 1} > 0, \quad \text{s.i.}$$

Na osnovu Leme 1.9, može se zaključiti da model (4.38) ima jedinstvenu ergodičku stacionarnu raspodelu. Time je dokaz kompletan. $\triangle$

4.2.5 Numeričke simulacije

U nastavku su ilustrovani teorijski rezultati Poglavlja 4.2 na primeru bolesti izazvane virusom ebole. Infekcija ebolom je i dalje značajan zdravstveni problem u mnogim delovima sveta, naročito u siromašnim regijama, gde ima razorne posledice. Njeno suzbijanje je cilj brojnih studija u poslednjim godinama.

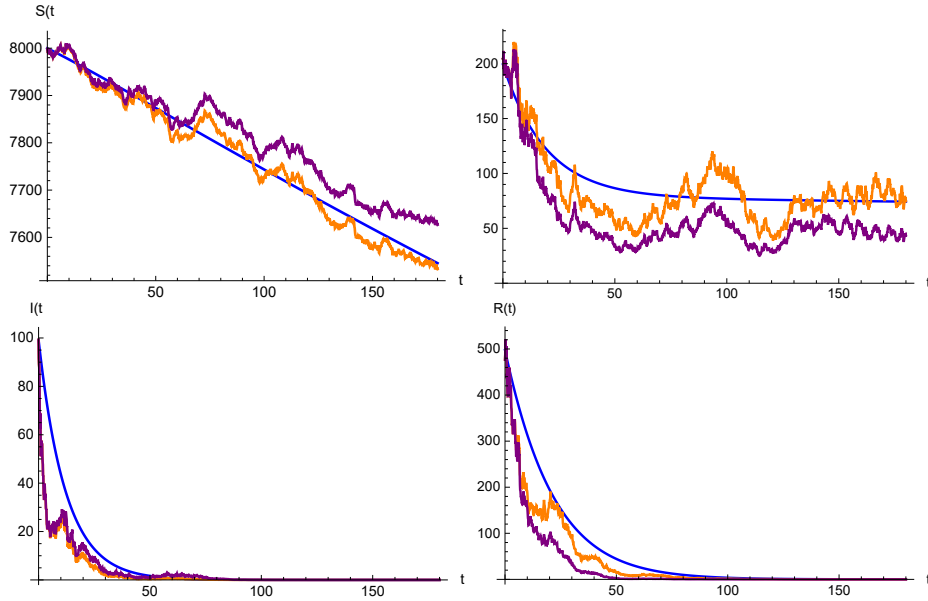
U Tabeli 4.2 su date realistične vrednosti parametara za širenje bolesti izazvane virusom ebole, koji su korišćeni u simulacijama. Ove vrednosti parametara su izvedene na osnovu podataka Svetske zdravstvene organizacije [76], preuzete iz postojećih studija u kojima su procenjene različitim statističkim metodama (videti [127], [164], [130] i reference u njima) ili su racionalno pretpostavljene (p). Simulacije su dobijene primenom Balance Implicit numeričke metode (videti [165], Teorema 2.1), s obzirom da koeficijenti sistema (4.38) ispunjavaju uslove za njenu primenu.

	γ	K	β	v_1	r_1	m_1	m_2	ρ
Iskorenjivanje	0.0007	10000	0.0015	0.0011	0.0011	1	1.4	0.03
Perzistentnost	0.35	120	0.01	0.005345	0.0011	0.01	0.1	0.1
	v	δ	μ	ξ				
Iskorenjivanje	0.0005	0.25	0.05	0.03				
Perzistentnost	0.07	0.45	0.1	0.1				

Tabela 4.2: Vrednosti parametara modela korišćene u simulacijama.

Na Slici 4.8 su prikazane trajektorije stohastičkog modela (4.38) i njegovog determinističkog pandana (bez šumova), dobijene korišćenjem vrednosti parametara iz Tabele 4.2. Pritom je pretpostavljeno da su intenziteti šumova $\sigma_1 = 0.001, \sigma_2 = 0.1, \sigma_3 = 0.2, \sigma_4 = 0.12, \sigma_5 = 0.1, \eta_1 = 0.00025, \eta_2 = -0.1, \eta_3 = 0.08, \eta_4 = -0.15, \eta_5 = 0.05$ i početni uslovi $S(0) = 8000, V(0) = 200, I(0) = 100, R(0) = 500$.

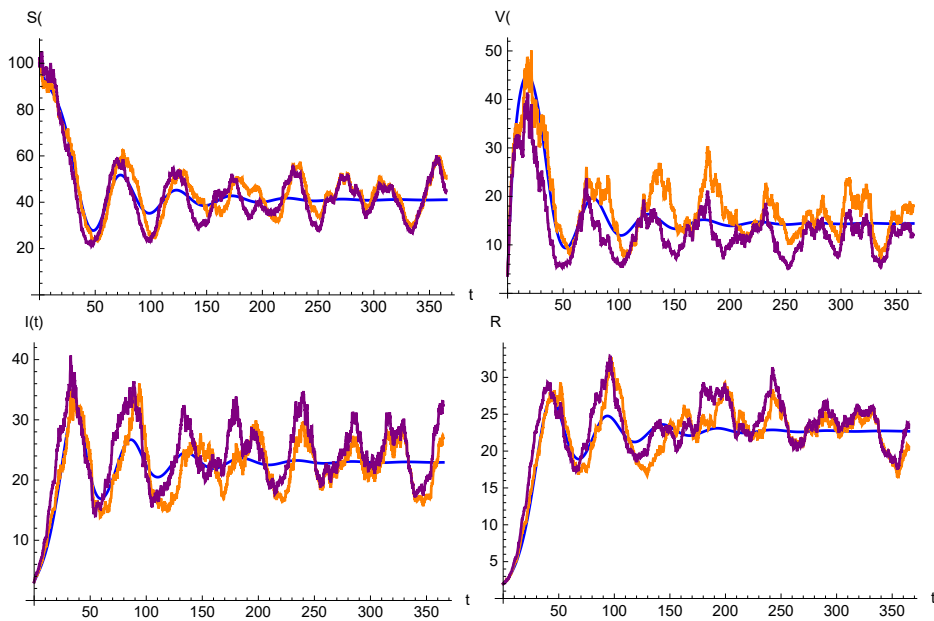
Parametri korišćeni u simulacijama prikazanim na Slici 4.8 zadovoljavaju uslov Teoreme 4.6. Sa grafika sa Slike 4.8 se može uočiti da dolazi do iskorenjivanja bolesti, što ilustruje teorijski rezultat.



Slika 4.8: Iskorenjivanje bolesti: determinističke i stohastičke trajektorije modela (4.38).

Na Slici 4.9 su prikazane trajektorije stohastičkog modela (4.38) i njegovog determinističkog pandana (bez šumova), dobijene korišćenjem vrednosti parametara iz Tabele 4.2. Pritom je pretpostavljeno da su intenziteti šumova $\sigma_1 = 0.03, \sigma_2 = 0.08, \sigma_3 = 0.05, \sigma_4 = 0.025, \sigma_5 = 0.02, \eta_1 = 0.05, \eta_2 = -0.1, \eta_3 = 0.03, \eta_4 = -0.015, \eta_5 = 0.025$ i početne vrednosti $S(0) = 100, V(0) = 3, I(0) = 3, R(0) = 2$. Ovakav izbor parametara

zadovoljava uslov Teorema 4.7 i 4.8. Na osnovu Teorema 4.7 i 4.8, sledi da je bolest perzistentna u srednjem i da postoji stacionarna raspodela sistema (4.38). Numeričke simulacije prikazane na Slici 4.9 ilustruju teorijske rezultate.



Slika 4.9: Perzistentnost bolesti: determinističke i stohastičke trajektorije modela (4.38).

4.2.6 Zaključak

U ovom poglavlju konstruisan je stohastički epidemiološki model sa kašnjenjem, logističkim rastom populacije i funkcijama prenosa bolesti opisanim funkcijama zasićenja. Kašnjenje u modelu opisuje period inkubacije i pretpostavlja se da ima gama raspodelu. Pretpostavlja se da na širenje epidemije utiču neprekidne fluktuacije koje su modelirane Gausovim belim šumom i iznenadne ali značajne fluktuacije koje su modelirane procesom Lévyja. Za dobijeni model izvedeni su dovoljni uslovi za iskorenjivanje i perzistentnost bolesti, kao i uslovi za postojanje ergodične stacionarne raspodele. Konkretno, analiza je pokazala da će bolest biti iskorenjena ako je $R^* < 1$, dok je bolest perzistentna u populaciji i postoji ergodična stacionarna raspodela ako je $R_0^S > 1$. Na osnovu oblika izraza za R_0^S može se zaključiti da Gaussov beli šum i proces Lévyja pozitivno utiču na kontrolu progresije bolesti. Drugim rečima, veći intenziteti Gaussovog belog šuma i procesa Lévyja vode ka smanjenju broja inficiranih osoba i iskorenjivanju bolesti.

Glava 5

Stohastički epidemiološki model koji uključuje preventivne mere

U cilju kontrole širenja bolesti i sprečavanja potencijalnog preopterećenja zdravstvenog sistema, uvode se različite preventivne mere. Preventivne mere uključuju fizičko distanciranje, nošenje maski, higijenske mere, zatvaranje škola, javnih prostora i ograničavanje kretanja, karantin i izolaciju određenih populacionih grupa, testiranje i praćenje kontakata, edukaciju populacije i komunikaciju informacija od značaja, i druge. Preventivne mere mogu značajno uticati na brzinu širenja bolesti i trajanje epidemije. Ove mere imaju za cilj da smanje broj inficiranih osoba, zaštite ranjive grupe i održe kapacitete zdravstvenog sistema.

Sa druge strane, preterano restriktivne preventivne mere mogu izazvati ekonomske, socijalne i psihološke posledice. Balansiranje između efikasnosti preventivnih mera i minimizacije njihovih negativnih posledica na društvo ključno je za uspešno upravljanje epidemijama. Da bi se postigao ovaj balans, neophodno je pažljivo planiranje i prilagođavanje mera na osnovu trenutnog epidemiološkog stanja, kapaciteta zdravstvenog sistema i potreba zajednice.

Integracija preventivnih mera u epidemiološke modele omogućava preciznije predviđanje toka bolesti i procenu efikasnosti pojedinačnih mera. Stoga, ovi modeli pružaju naučne osnove za donošenje ključnih odluka, poput uvođenja ili ukidanja restriktivnih mera. Pored toga, oni se koriste za procenu ekonomskih posledica epidemija, kao što su troškovi zdravstvene zaštite, gubici u produktivnosti i uticaj na globalne tokove. Prema tome, ovako modifikovani modeli pomažu u razvoju optimalnih strategija i donošenju informisanih odluka o tome koje mere implementirati i kada, kako bi se kontrolisala epidemija uz minimizaciju negativnih posledica na društvo. Njihova primena doprinosi boljoj pripremljenosti društva i donošenju odluka zasnovanih na naučnim dokazima, čime se smanjuje negativan uticaj zaraznih bolesti na zdravlje ljudi, društvo i ekonomiju.

U Poglavlju 5.1 je predstavljena dinamička analiza stohastičkog modela širenja bolesti COVID-19. Rezultati ovog poglavlja su publikovani u radu [16]. Stohastički model koji je razmatran u ovoj glavi, je konstruisan uvođenjem slučajnosti u deterministički model proučavan u [166]. Motivacija za konstrukciju stohastičkog modela je data u Podpoglavlju 5.1.1 dok je detaljan opis njegove konstrukcije dat je u Podpoglavlju 5.1.2. Za tako konstruisani model, najpre je dokazano postojanje i jedinstvenost globalnog pozitivnog rešenja u Podpoglavlju 5.1.3. Podpoglavlja 5.1.4 i 5.1.5 su posvećena dobijanju dovoljnih uslova pod kojima dolazi do iskorenjivanja bolesti odnosno ona perzistira u

populaciji, respektivno. U Podpoglavlju 5.1.6 su prikazane numeričke simulacije koje ilustruju teorijske rezultate. U Poglavlju 5.2 su izvedeni dovoljni uslovi za postojanje stacionarne raspodele stohastičkog modela.

5.1 Dinamička analiza stohastičkog epidemiološkog modela sa skokovima Lévyja, kašnjenjem i promenama režima

U ovom poglavlju je proučavan epidemiološki model koji se može primeniti za opisivanje prenosa virusa SARS-CoV-2 u stohastičkom okviru. Fokus je na konstrukciji stohastičkog modela koji integriše više vrsta slučajnosti, čime se postiže veći nivo realističnosti u odnosu na stohastičke modele kod kojih je slučajnost opisana samo pomoću Gaussovog belog šuma. Cilj je proučiti kako kombinacija različitih vrsta slučajnosti utiče na dinamiku modela. Ipak, ovaj model se može primeniti i u simulaciji širenja zaraznih bolesti koje imaju slične karakteristike i načine prenošenja.

5.1.1 Uvod i motivacija

Kao što je već pomenuto, stanovništvo je izloženo neprekidnom uticaju slučajnosti iz okruženja koje se mogu uvesti u epidemiološke modele na više načina. Prema prvom pristupu, slučajni šum se uvodi u sisteme DJ proporcionalno udaljenosti klasa od njihovog ravnotežnog stanja (videti [54]) ili perturbacijom određenog parametra modela (npr. stopa prenosa, stopa smrtnosti, itd.) belim šumom, koji je u determinističkim modelima konstantan ili dat u obliku determinističke funkcije zavisne od vremena t (videti [2], [3]). Drugi pristup podrazumeva da parametri modela zadovoljavaju stohastičke mean-reverting procese. U radovima [6] i [7], autori su pretpostavili da fluktuacije okruženja uglavnom utiču na parametre modela što rezultira modeliranjem parametara modela odgovarajućim stohastičkim difuzionim procesima, konkretno, pretpostavili su da se stopa smrtnosti može modelirati pomoću Ornstein-Uhlenbeckovog (OU) procesa.

Slučajnost iz okruženja može uzrokovati promenu intenziteta različitih pojava što se može izraziti kao prebacivanje iz jednog režima okruženja u drugi. U matematici se ovaj prelaz iz jednog stanja u drugo često opisuje telegrafskim šumom, takođe poznatim kao obojeni šum. U radovima [8] i [9], autori su analizirali stohastičke epidemiološke modele koji uključuju i beli i telegrafski šum. U [10] autori su ispitali dinamiku stohastičkog epidemiološkog modela prenosa bolseti Covid-19, koji sadrži opštu funkciju incidence i promene režima.

U poslednje vreme, stohastički epidemiološki modeli s vremenskim kašnjenjem privlače pažnju brojnih autora (videti, na primer [167] i [168]). Kašnjenje u epidemiološkim modelima ima značajnu ulogu u opisivanju perioda privremenog imuniteta (videti [157–159]) i vremena koje je potrebno za delovanje vakcine (videti [160], [161]). Pored toga, period između kontakta sa infekcijom i razvoja virusa, koji se naziva period inkubacije, u stohastičkim epidemiološkim modelima se opisuje vremenskim kašnjenjem (videti [54], [155]). Zbog takve prirode zaraznih bolesti, epidemiološki modeli sa kašnjenjem koji se sastoje od diferencijalnih jednačina sa kašnjenjem igraju vrlo važnu ulogu u analizi širenja i kontroli zaraznih bolesti.

U realnosti se mogu desiti iznenadne ekološke katastrofe, kao što su zemljotresi, poplave, suše itd. Ovi faktori mogu imati značajne posledice na epidemiološke siste-

me. Kao rezultat toga, sistemi postaju prilično komplikovani i trajektorije modela su prekidne. Te pojave se ne mogu tačno opisati diferencijalnim sistemima sa Brownovim kretanjem. Da bi objasnili te fenomene, autori uključuju procese sa skokovima (Lévyjeve procese) u modele. Važnost uvođenja Lévyjevih procesa u opisivanje dinamike epidemija je opisana, na primer, u radovima [147–154] i referencama u njima. U radovima [147] i [148], autori analiziraju perzistentnost i iskorenjivanje bolesti kod stohastičkog SIR modela sa kašnjenjem i Lévyjevim skokovima, gde kašnjenje predstavlja period imuniteta vakcinisanih ili oporavljenih, ali bez telegrafskog šuma.

U ovom poglavlju je predstavljen stohastički epidemiološki model, koji se može primeniti za predviđanje širenja bolesti Covid-19 nakon kalibracije, konstruisan na osnovu determinističkog modela uvođenjem slučajnosti iz okruženja, kako bi bio realističniji. Pre svega, u model su uključene fluktuacije iz okoline prateći rezultate iz [17], odnosno, za modeliranje stope prenosa odabran je mean-reverting OU proces koji, iako može poprimiti negativne vrednosti, ima stohastičku diferencijalnu jednačinu sa eksplisnim rešenjem. U konkretnim problemima, kada se koristi za opisivanje nenegativnog biološkog procesa kao što je stopa transmisije, odgovarajuće vrednosti parametara mogu osigurati postojanje nenegativne trajektorije na dovoljno dugom vremenskom intervalu. Pritom, ovaj način uvođenja slučajnosti se razlikuje od radova [6] i [7] gde se pretpostavlja da stopa mortaliteta zadovoljava Ornstein-Uhlenbeck proces. Pored toga, za modeliranje iznenadnih i značajnih uticaja okoline primenjen je Lévyjev proces. Takođe, ovaj model sadrži neprekidan lanac Markova sa konačnim brojem stanja kojim je opisan prelazak vrednosti parametara modela iz jednog stanja u drugo. Na kraju, period inkubacije bolesti je uključen u model kroz konstantno vremensko kašnjenje. Ovaj model ima bogatiju dinamičku analizu u odnosu na postojeće modele.

Deterministički epidemiološki model

U radu [166] autori su predstavili nekoliko determinističkih epidemioloških modela za opisivanje progresije korona virusa SARS-CoV-2. Ovde će biti predstavljen jedan od njih, koji je konstruisan tako da uključuje nekoliko preventivnih i sigurnosnih mera, poput socijalnog distanciranja i karantina. Model je konstruisan pod pretpostavkom da je ljudska populacija podeljena u pet međusobno disjunktne klase:

- S - klasa podložnih pojedinaca,
- L - klasa koja sadrži samo podložne osobe sa ograničenim kretanjem u cilju smanjenja mogućnosti da dođu u kontakt sa virusom (takve osobe postaju sklone infekciji kada se premeste iz svojih ograničenih zona (lockdown) u kategoriju podložnih),
- I - zaraženi pojedinci,
- Q - osobe koje su pozitivne na virus i fizički su izolovane (imaju ograničeno kretanje kako ne bi širile virus),
- R - oporavljeni pojedinci.

Dinamika širenja virusa SARS-CoV-2 opisana je sledećim sistemom običnih diferencijalnih jednačina:

$$\begin{aligned}
 dS(t) &= (\eta N(t) - \beta I(t)S(t) - (\mu + l)S(t) + l_1 L(t))dt, \\
 dL(t) &= (lS(t) - (\mu + l_1)L(t))dt, \\
 dI(t) &= (\beta I(t)S(t) - (\mu + \alpha + \rho_i)I(t))dt, \\
 dQ(t) &= (\alpha I(t) - (\mu + \rho_q)Q(t))dt, \\
 dR(t) &= (\rho_i I(t) + \rho_q Q(t) - \mu R(t))dt,
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

sa početnim uslovom $S(0) = S_0, L(0) = L_0, I(0) = I_0, Q(0) = Q_0, R(0) = R_0$. U ovoj formulaciji, η predstavlja stopu nataliteta, koeficijent transmisije koji opisuje prenos virusa između ljudi usled kontakta sa zaraženim pojedincima označen je sa β , dok je prirodna stopa smrtnosti predstavljena sa μ . Ovde prirodna stopa smrtnosti uključuje smrtne slučajeve usled bolesti izazvane koronavirusom. Parametri ρ_i i ρ_q označavaju stope oporavka za zaražene i pojedince u karantinu, respektivno. Parametri l i l_1 predstavljaju stope prelaska podložnih pojedinaca u klasu podložnih osoba u izolaciji i obrnuto. Stopa po kojoj zaraženi pojedinci postaju izolovani označena je sa α .

Očigledno, ako je $l = l_1 = 0$ u sistemu (5.1), dobija se model bez mere socijalnog distanciranja, tj, bez klase podložnih osoba u izolaciji. Kada je određen procenat populacije vakcinisan, prirodno je očekivati manji procenat podložnih osoba u izolaciji.

5.1.2 Konstrukcija stohastičkog epidemiološkog modela sa skokovima Lévyja, promenama režima i kašnjenjem

U ovom delu je fokus na konstrukciji stohastičkog modela koji se može primeniti za opisivanje širenja virusa SARS-CoV-2 nakon kalibracije. Stohastički model je konstruisan na osnovu determinističkog modela konstruisanog u radu [166].

Najpre je epidemiološki model (5.1) blago modifikovan. Uvedena je klasa vakcinisanih osoba (V). Stopa vakcinacije je označena sa v , dok je stopa vakcinisanih pojedinaca koji gube imunitet označena sa v_1 . Pored toga, uvedena je stopa smrtnosti zaražene populacije od bolesti δ . Takođe, izraz $\eta N(t)$ iz determinističkog modela je zamenjen parametrom Λ , koji predstavlja očekivani broj novih podložnih pojedinaca na određenoj teritoriji, posmatran u odgovarajućim jedinicama (npr. godišnje, po milion ljudi, itd.), i uvedena je pretpostavka da oporavljeni pojedinci na kraju gube imunitet po stopi r_1 . Za sve parametre modela se pretpostavlja da su nenegativni.

Stohastički model je konstruisan pod pretpostavkom da koeficijent prenosa $\beta = (\beta(t), t \geq 0)$ zadovoljava mean-reverting Ornstein-Uhlenbeckovu SDJ

$$d\beta(t) = \theta (\beta_e - \beta(t)) dt + \xi dB(t), \quad t \geq 0, \quad (5.2)$$

gde je β_e srednja vrednost stacionarne Gaussove raspodele sa disperzijom $\xi/\sqrt{2\theta}$. Parametar $\theta > 0$ određuje brzinu srednje reverzije, dok je ξ intenzitet volatilnosti, a $B = (B(t), t \geq 0)$ je Brownovo kretanje. Više detalja o mean-reverting Ornstein-Uhlenbeckovoj SDJ se mogu pronaći u [18].

Prema [18], strana 306, eksplicitno rešenje SDJ (5.2) ima sledeći oblik

$$\beta(t) = \beta_e + (\beta(0) - \beta_e) e^{-\theta t} + \xi \int_0^t e^{-\theta(t-s)} dB_s. \quad (5.3)$$

Očekivana vrednost za $\beta(t)$ je

$$E[\beta(t)] = \beta_e + (\beta(0) - \beta_e) e^{-\theta t}, \quad (5.4)$$

a njena disperzija

$$\text{Var}(\beta(t)) = \frac{\xi^2}{2\theta} (1 - e^{-2\theta t}). \quad (5.5)$$

Iz eksplicitnog oblika rešenja (5.3), u kombinaciji sa rezultatima koji se odnose na očekivanje (5.4) i disperziju (5.5) za $\beta(t)$, sledi da $\xi \int_0^t e^{-\theta(t-s)} dB_s \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{\xi^2}{2\theta} (1 - e^{-2\theta t})\right)$,

što implicira da $\xi \int_0^t e^{-\theta(t-s)} dB_s$ i $\frac{\xi}{\sqrt{2\theta}} \sqrt{1 - e^{-2\theta t}} \frac{dB(t)}{dt}$ imaju istu raspodelu. Na osnovu toga sledi da se eksplisito rešenje (5.3) može modelirati sa

$$\beta(t) = \beta_e + (\beta(0) - \beta_e) e^{-\theta t} + \sigma(t) \frac{dB(t)}{dt}, \quad (5.6)$$

gde je

$$\sigma(t) = \frac{\xi}{\sqrt{2\theta}} \sqrt{1 - e^{-2\theta t}}.$$

Ovi diferencijali ne postoje u običnom (jakom) smislu, ali kako su preslikavanja $t \rightarrow B_i(t, \omega)$, $i = 1, 2$, neprekidna za skoro svako ω , ona su slabo diferencijabilna za skoro svako ω , i mogu se interpretirati u slabom smislu (videti [29], Poglavlje 2), odnosno, ukoliko se posmatra u integralni oblik (5.6)

$$\int_0^t \beta(t) dt = \int_0^t b(t) dt + \int_0^t \sigma(t) \frac{dB(t)}{dt} dt = \int_0^t b(t) dt + \int_0^t \sigma(t) dB(t), \quad s.i.$$

Poslednji integral je Itôv integral koji se može zapisati u diferencijalnoj formi na sledeći način

$$\beta(t) dt = b(t) dt + \sigma(t) dB(t), \quad s.i.$$

S druge strane, iznenadne i značajne promene u okruženju, poput većih promena u vremenskim uslovima, okupljanja velikog broja ljudi, ekonomskih kriza i drugih, mogu dovesti do značajnog porasta u broju zaraženih. Inspirisani ovim, u ovom radu je primenjen Poissonov proces kao proces koji opisuje nagle skokove u broju zaraženih. Neka $\tilde{N}$ označava Poissonov proces prebrojavanja sa srednjom merom λ koja je definisana na konačnom merljivom podskupu Y skupa $(0, \infty)$ sa $\lambda(Y) < +\infty$. Neka $\tilde{N}$ označava kompenzovanu slučajnu meru definisanu sa $\tilde{N}(dt, du) = \tilde{N}(dt, du) - \lambda(du)dt$.

Pored već uvedenih pretpostavki, neka τ označava inkubacioni period, odnosno, period od trenutka kontakta podložne osobe sa zaraženom osobom do trenutka kada ona postaje infektivna.

Koeficijent prenosa β je modeliran OU procesom i uveden je proces skoka u model (5.1) i na taj način dobijen stohastički model oblika

$$\begin{aligned} dS(t) &= \left(\Lambda - \frac{\beta_e + (\beta(0) - \beta_e) e^{-\theta t}}{N(t)} I(t - \tau) S(t) - (\mu + l + v) S(t) + l_1 L(t) \right. \\ &\quad \left. + v_1 V(t) + r_1 R(t) \right) dt - \frac{\sigma(t)}{N(t)} I(t - \tau) S(t) dB(t) \\ &\quad - \frac{S(t^-) I((t - \tau)^-)}{N(t^-)} \int_Y \eta(u) \tilde{N}(dt, du), \\ dL(t) &= (l S(t) - (\mu + l_1) L(t)) dt, \\ dV(t) &= (v S(t) - (\mu + v_1) V(t)) dt, \\ dI(t) &= \left(\frac{\beta_e + (\beta(0) - \beta_e) e^{-\theta t}}{N(t)} I(t - \tau) S(t) - (\mu + \alpha + \rho_i + \delta) I(t) \right) dt \\ &\quad + \frac{\sigma(t)}{N(t)} I(t - \tau) S(t) dB(t) + \frac{S(t^-) I((t - \tau)^-)}{N(t^-)} \int_Y \eta(u) \tilde{N}(dt, du), \\ dQ(t) &= (\alpha I(t) - (\mu + \rho_q) Q(t)) dt, \\ dR(t) &= (\rho_i I(t) + \rho_q Q(t) - (\mu + r_1) R(t)) dt, \end{aligned} \quad (5.7)$$

pri čemu su $S(t^-)$, $I((t - \tau)^-)$ i $N(t^-)$ granične vrednosti sleva za $S(t)$, $I(t - \tau)$ i $N(t)$, redom, i $\eta : Y \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ograničena i $\mathcal{B}(Y) \times \mathcal{F}_t$ -merljiva, gde je $\mathcal{B}(Y)$, σ -algebra generisana skupom Y .

Pored toga, slučajnost iz okruženja može izazvati promenu u intenzitetu manifestacije različitih fenomena. Ovo se može prikazati kao prelazak iz jednog u drugi podrežim. U matematici se ovaj prelaz iz jednog stanja u drugo često opisuje telegrafskim šumom, poznatim i kao obojeni šum. Na primer, u kontekstu vremenskih prilika telegrafski šum može opisati promenu iz kišnog u sušni period i obrnuto, u industriji promenu parametara podešavanja mašina itd. Posebno, primenom telegrafskog šuma u modeliranju širenja bolesti Covid-19, među ostalim pojavama, može se opisati slučajno kretanje ljudi i vremenske prilike. Promena režima obično ima svojstvo odsustva memorije, a period između dva prelaza ima eksponencijalnu raspodelu (videti [19]). Stoga se promena režima može modelirati lancem Markova $(a(t), t \geq 0)$ sa vrednostima u konačnom skupu stanja $A = \{1, \dots, n\}$. Neka važi pretpostavka da svi parametri modela zavise od stanja lanca Markova čija je generatorska matrica $\Upsilon = (\gamma_{ij})_{n \times n}$ data sa

$$\mathbb{P}\{a(t + \Delta t) = j \mid a(t) = i\} = \begin{cases} \gamma_{ij}\Delta + o(\Delta), & i \neq j, \\ 1 + \gamma_{ii}\Delta + o(\Delta), & i = j, \end{cases}$$

gde je $\Delta t > 0$ i $\gamma_{ij} \geq 0$ su gustine prelaza iz stanja i u stanje j za $i \neq j$, $\gamma_{ii} \leq 0$ tako da je $\sum_{i=1}^n \gamma_{ij} = 0$. Pored toga, pretpostavlja se da je lanac Markova ireducibilan tj. da su sva stanja lanca Markova dostižna. Na osnovu ireducibilnosti lanca Markova, sledi da on ima jedinstvenu stacionarnu raspodelu $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_n)$ koja se može odrediti iz uslova

$$\pi \Upsilon = \mathbf{0}_{1 \times n} = (0, 0, \dots, 0),$$

gde je

$$\sum_{i=1}^n \pi_i = 1, \quad \pi_i > 0, \quad i \in A.$$

Sistem (5.7) sa promenama režima se može predstaviti u obliku

$$\begin{aligned} dS(t) &= \left(\Lambda(a(t)) - \frac{\beta_e(a(t)) + (\beta(0) - \beta_e(a(t))) e^{-\theta(a(t))t}}{N(t)} I(t - \tau) S(t) - l(a(t)) S(t) \right. \\ &\quad \left. - (v(a(t)) + \mu(a(t))) S(t) + l_1(a(t)) L(t) + v_1(a(t)) V(t) + r_1(a(t)) R(t) \right) dt \\ &\quad - \frac{\sigma(a(t), t)}{N(t)} I(t - \tau) S(t) dB(t) - \frac{S(t^-) I((t - \tau)^-)}{N(t^-)} \int_Y \eta(a(t), u) \tilde{N}(dt, du), \\ dL(t) &= (l(a(t)) S(t) - (\mu(a(t)) + l_1(a(t))) L(t)) dt, \\ dV(t) &= (v(a(t)) S(t) - (\mu(a(t)) + v_1(a(t))) V(t)) dt, \\ dI(t) &= \left(\frac{\beta_e(a(t)) + (\beta(0) - \beta_e(a(t))) e^{-\theta(a(t))t}}{N(t)} I(t - \tau) S(t) - \alpha(a(t)) I(t) \right. \\ &\quad \left. - (\rho_i(a(t)) \mu(a(t)) + \delta(a(t))) I(t) \right) dt + \frac{\sigma(a(t), t)}{N(t)} I(t - \tau) S(t) dB(t) \\ &\quad + \frac{S(t^-) I((t - \tau)^-)}{N(t^-)} \int_Y \eta(a(t), u) \tilde{N}(dt, du), \\ dQ(t) &= (\alpha(a(t)) I(t) - (\mu(a(t)) + \rho_q(a(t))) Q(t)) dt, \\ dR(t) &= (\rho_i(a(t)) I(t) + \rho_q(a(t)) Q(t) - (\mu(a(t)) + r_1(a(t))) R(t)) dt, \end{aligned} \tag{5.8}$$

sa početnom vrednošću

$$\begin{aligned} S(\zeta) &= \varphi_1(\zeta) > 0, \quad L(\zeta) = \varphi_2(\zeta) > 0, \quad V(\zeta) = \varphi_3(\zeta) > 0, \\ I(\zeta) &= \varphi_4(\zeta) > 0, \quad Q(\zeta) = \varphi_5(\zeta) > 0, \quad R(\zeta) = \varphi_6(\zeta) > 0, \quad \zeta \in [-\tau, 0], \\ a(0) &= i, \end{aligned} \quad (5.9)$$

pri čemu je $(\varphi_1(\zeta), \varphi_2(\zeta), \varphi_3(\zeta), \varphi_4(\zeta), \varphi_5(\zeta), \varphi_6(\zeta)) \in \mathcal{L}^1([-\tau, 0], \mathbb{R}_+^6)$ familije Lebesgueovih integrabilnih funkcija koje preslikavaju segment $[-\tau, 0]$ u $\mathbb{R}_+^6 = \{(x_1, \dots, x_6) \in \mathbb{R}^6 : x_i > 0, i = 1, \dots, 6\}$. Za svako fiksno stanje $k \in A$, svi parametri $\Lambda(k), \beta_e(k), l(k), v(k), \mu(k), l_1(k), v_1(k), r_1(k), \alpha(k), \rho_i(k), \rho_q(k), \delta(k)$ modela (5.8) su pozitivne konstante i imaju isto značenje koje je ranije uvedeno. Takođe, važi da su brzina srednje reverzije $\theta(k)$ i intenzitet volatilnosti $\xi(k)$ pozitivne za svako $k \in A$. Veličina ukupne populacije u trenutku t je

$$N(t) = S(t) + V(t) + L(t) + I(t) + Q(t) + R(t), \quad t \geq -\tau.$$

Radi jednostavnijeg zapisa, uvode se sledeće notacije

$$\hat{g} := \min_{k \in A} \{g(k)\} \quad \text{ i } \quad \check{g} := \max_{k \in A} \{g(k)\},$$

za svaki vektor $g = (g(1), \dots, g(n))$.

Sistem (5.7) je specijalan slučaj sistema (5.8) s jednim stanjem režima. Dakle, postojanje i jedinstvenost pozitivnog globalnog rešenja sistema (5.7) sledi iz postojanja i jedinstvenosti pozitivnog globalnog rešenja sistema (5.8).

5.1.3 Egzistencija i jedinstvenost globalnog pozitivnog rešenja

U ovom podpoglavlju je dokazano postojanje i jedinstvenost globalnog pozitivnog rešenja sistema stohastičkih diferencijalnih jednačina (5.8).

Neka je

$$\Gamma = \{(S(t), L(t), V(t), I(t), Q(t), R(t)) \in \mathbb{R}_+^6 :$$

$$\left. \frac{\hat{\Lambda}}{\check{\mu} + \check{\delta}} \leq S(t) + L(t) + V(t) + I(t) + Q(t) + R(t) \leq \frac{\check{\Lambda}}{\hat{\mu}}, \quad t \geq -\tau \right\}.$$

Da bi se ograničio intenzitet skokova u modelu (5.8), uvodi se sledeća pretpostavka.

Pretpostavka 1 Postoji pozitivna konstanta $0 < h < 1$ tako da za $t \geq -\tau$ važi:

$$\begin{aligned} \circ \quad |\eta(a(t), u)| &\leq h \frac{\sup_{0 \leq s \leq t} \mu(a(s))}{\inf_{0 \leq s \leq t} \Lambda(a(s))}, \\ \circ \quad a(t) &\in A. \end{aligned}$$

Teorema 5.1 Neka važi Pretpostavka 1. Tada postoji jedinstveno rešenje $(S(t), L(t), V(t), I(t), Q(t), R(t), a(t))$, $t \geq -\tau$, sistema SDJ (5.8), koje ostaje u skupu $\Gamma \times A$ sa verovatnoćom 1, za proizvoljnu početnu vrednost $(S(\zeta), L(\zeta), V(\zeta), I(\zeta), Q(\zeta), R(\zeta), a(\zeta)) \in \mathcal{L}^1([-\tau, 0], \Gamma \times A)$. Pored toga,

$$\frac{\hat{\Lambda}}{\check{\mu} + \check{\delta}} \leq N(t) \leq \frac{\check{\Lambda}}{\hat{\mu}}, \quad t \geq -\tau. \quad (5.10)$$

Dokaz. Kako koeficijenti sistema (5.8) zadovoljavaju lokalni Lipschitzov uslov, na osnovu Teoreme 1.44 sledi da za svaku početnu vrednost $(S(\zeta), L(\zeta), V(\zeta), I(\zeta), Q(\zeta), R(\zeta), a(\zeta)) \in \mathcal{L}^1([-\tau, 0], \Gamma \times A)$ postoji jedinstveno lokalno rešenje na segmentu $[-\tau, \tau_e]$, gde je τ_e vreme eksplozije. Da bi se pokazalo da je ovo rešenje globalno, potrebno je dokazati da je $\tau_e = \infty$ s.i. Neka je $k_0 > 0$ tako da se $S(\zeta), L(\zeta), V(\zeta), I(\zeta), Q(\zeta)$ i $R(\zeta)$ za $\zeta \in [-\tau, 0]$ nalaze unutar segmenta $[\frac{1}{k_0}, k_0]$. Za svaki ceo broj $k \geq k_0$ definiše se vreme zaustavljanja na sledeći način

$$\tau_k = \inf \left\{ t \in [-\tau, \tau_e) : \min \{S(t), L(t), V(t), I(t), Q(t), R(t)\} \leq \frac{1}{k} \text{ ili } \max \{S(t), L(t), V(t), I(t), Q(t), R(t)\} \geq k \right\}.$$

Niz $\{\tau_k\}_k$ je rastući kada $k \rightarrow \infty$. Definiše se τ_∞ na sledeći način $\tau_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} \tau_k$. Tada je $\tau_\infty \leq \tau_e$ s.i. Ako se pokaže da je $\tau_\infty = \infty$ s.i, tada je $\tau_e = \infty$, što znači da je $(S(t), L(t), V(t), I(t), Q(t), R(t), a(t)) \in \Gamma \times A$ s.i. za sve $t \geq -\tau$. Pod pretpostavkom da ova tvrdnja nije tačna, postoje konstante $T > 0$ i $\epsilon \in (0, 1)$ tako da je $\mathbb{P}\{\tau_\infty \leq T\} > \epsilon$. Tada postoji ceo broj $k_1 \geq k_0$ tako da je $\mathbb{P}\{\tau_{k_1} \leq T\} > \epsilon$, odnosno,

$$\mathbb{P}\{\tau_k \leq T\} \geq \epsilon,$$

za svako $k \geq k_1$.

Imajući u vidu da je $N(t) = S(t) + L(t) + V(t) + I(t) + Q(t) + R(t)$, $t \geq -\tau$, sabiranjem jednačina sistema (5.8), dobija se

$$dN(t) = (\Lambda(a(t)) - \mu(a(t))N(t) - \delta(a(t))I(t)) dt.$$

Odavde sledi

$$\begin{aligned} &(\Lambda(a(t)) - (\mu(a(t)) + \delta(a(t)))N(t)) dt \leq dN(t) \leq (\Lambda(a(t)) - \mu(a(t))N(t)) dt \\ &\Leftrightarrow (\mu(a(t)) + \delta(a(t))) \left(\frac{\hat{\Lambda}}{\check{\mu} + \check{\delta}} - N(t) \right) dt \leq dN(t) \leq \mu(a(t)) \left(\frac{\hat{\Lambda}}{\check{\mu}} - N(t) \right) dt, \end{aligned}$$

za $t \in [0, \tau_k)$. Tada je

$$\begin{aligned} &d \left(\frac{\hat{\Lambda}}{\check{\mu} + \check{\delta}} - N(t) \right) + (\mu(a(t)) + \delta(a(t))) \left(\frac{\hat{\Lambda}}{\check{\mu} + \check{\delta}} - N(t) \right) dt \leq 0, \\ &d \left(\frac{\hat{\Lambda}}{\check{\mu}} - N(t) \right) + \mu(a(t)) \left(\frac{\hat{\Lambda}}{\check{\mu}} - N(t) \right) dt \geq 0, \end{aligned}$$

za $t \in [0, \tau_k)$. Integracijom od 0 do t , $t \in [0, \tau_k)$, dobija se

$$\begin{aligned} \left(\frac{\hat{\Lambda}}{\check{\mu} + \check{\delta}} - N(t) \right) &\leq \left(\frac{\hat{\Lambda}}{\check{\mu} + \check{\delta}} - N(0) \right) e^{-\int_0^t (\mu(a(s)) + \delta(a(s))) ds}, \\ \left(\frac{\hat{\Lambda}}{\check{\mu}} - N(t) \right) &\geq \left(\frac{\hat{\Lambda}}{\check{\mu}} - N(0) \right) e^{-\int_0^t \mu(a(s)) ds}. \end{aligned}$$

Na osnovu uslova teoreme, kako $\frac{\hat{\Lambda}}{\check{\mu} + \check{\delta}} \leq N(0) \leq \frac{\hat{\Lambda}}{\check{\mu}}$, sledi

$$\frac{\hat{\Lambda}}{\check{\mu} + \check{\delta}} \leq N(t) \leq \frac{\hat{\Lambda}}{\check{\mu}}, \quad t \in [0, \tau_k).$$

Neka je $F : [0, +\infty) \times \mathbb{R}_+^6 \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$, $\mathbf{C}^2$ -funkcija definisana na sledeći način

$$\begin{aligned} &F(t, S(t), L(t), V(t), I(t), Q(t), R(t)) \\ &= (S(t) - a_1 - a_1 \ln S(t)) + (L(t) - 1 - \ln L(t)) + (V(t) - 1 - \ln V(t)) \\ &\quad + (I(t) - \ln(I(t) + 1)) + (Q(t) - 1 - \ln Q(t)) + (R(t) - 1 - \ln R(t)) \\ &\quad + a_2 \int_{t-\tau}^t I(s) ds + a_3 \int_{t-\tau}^t I^2(s) ds, \end{aligned}$$

pri čemu su a_1, a_2 i a_3 pozitivne konstante koje će biti određene u nastavku. Kako je, $u - 1 - \ln u \geq 0$ i $u - \ln(u + 1) \geq 0$ za svako $u > 0$, to je funkcija F nenegativna. Neka su $k \geq k_0$ i $T > 0$ proizvoljni. Primenom uopštene Itôve formule (Teorema 1.45) sledi da je

$$\begin{aligned} dF(t, S(t), L(t), V(t), I(t), Q(t), R(t)) \\ = & LF(t, S(t), L(t), V(t), I(t), Q(t), R(t)) dt - a_1 \sigma(a(t), t) \frac{I(t - \tau)}{N(t)} dB(t) \\ & + \sigma(a(t), t) \frac{S(t)I(t - \tau)}{N(t)(I(t) + 1)} dB(t) \\ & - \int_Y \ln \left(1 + \frac{S(t^-)I((t - \tau)^-)}{N(t^-)(I(t) + 1)} \eta(a(t), u) \right) \tilde{N}(dt, du) \\ & - a_1 \int_Y \ln \left(1 - \frac{I((t - \tau)^-)}{N(t^-)} \eta(a(t), u) \right) \tilde{N}(dt, du), \end{aligned}$$

pri čemu je

$$\begin{aligned} dF(t, S(t), L(t), V(t), I(t), Q(t), R(t)) \\ = & \left(\Lambda(a(t)) - \frac{\beta_e(a(t)) + (\beta(0) - \beta_e(a(t))) e^{-\theta(a(t))t}}{N(t)} I(t - \tau) S(t) \right) \left(1 - \frac{a_1}{S(t)} \right) \\ & + (l_1(a(t))L(t) - (\mu(a(t)) + l(a(t)) + v(a(t))) S(t)) \left(1 - \frac{a_1}{S(t)} \right) \\ & + (v_1(a(t))V(t) + r_1(a(t))R(t)) \left(1 - \frac{a_1}{S(t)} \right) \\ & - a_1 \int_Y \frac{I((t - \tau)^-)}{N(t^-)} \eta(a(t), u) + \ln \left(1 - \frac{I((t - \tau)^-)}{N(t^-)} \eta(a(t), u) \right) \lambda(du) \\ & + (l(a(t))S(t) - (\mu(a(t)) + l_1(a(t)))L(t)) \left(1 - \frac{1}{L(t)} \right) \\ & + (v(a(t))S(t) - (\mu(a(t)) + v_1(a(t)))V(t)) \left(1 - \frac{1}{V(t)} \right) \\ & + \frac{\beta_e(a(t)) + (\beta(0) - \beta_e(a(t))) e^{-\theta(a(t))t}}{N(t)} I(t - \tau) S(t) \left(1 - \frac{1}{I(t) + 1} \right) \\ & - (\mu(a(t)) + \alpha(a(t)) + \rho_i(a(t)) + \delta(a(t)))I(t) \left(1 - \frac{1}{I(t) + 1} \right) \\ & + \int_Y \left(\frac{S(t^-)}{N(t^-)} \frac{I((t - \tau)^-)}{I(t)} \eta(a(t), u) - \ln \left(1 + \frac{S(t^-)}{N(t^-)} \frac{I((t - \tau)^-)}{I(t)} \eta(a(t), u) \right) \right) \lambda(du) \\ & + (\alpha(a(t))I(t) - (\mu(a(t)) + \rho_q(a(t)))Q(t)) \left(1 - \frac{1}{Q(t)} \right) \\ & + (\rho_i(a(t))I(t) + \rho_q(a(t))Q(t) - (\mu(a(t)) + r_1(a(t)))R(t)) \left(1 - \frac{1}{R(t)} \right) \\ & + a_2 (I(t) - I(t - \tau)) + a_3 (I^2(t) - I^2(t - \tau)) \\ & + \frac{1}{2} \frac{\sigma^2(a(t), t)}{N^2(t)} I^2(t - \tau) S^2(t) \frac{a_1}{S^2(t)} + \frac{1}{2} \frac{\sigma^2(a(t), t)}{N^2(t)} I^2(t - \tau) S^2(t) \frac{1}{(I(t) + 1)^2} \\ \leq & K_1 + \left(a_2 - \hat{\delta} \right) I(t) - (a_2 - a_1 \max \{ \check{\beta}_e, \beta(0) \}) I(t - \tau) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{1}{2} \frac{\check{\xi}^2}{2\hat{\theta}} \left(\frac{a_1(\check{\mu} + \check{\delta})}{\hat{\Lambda}} + 1 \right) - a_3 \right) I^2(t - \tau) + a_3 I^2(t) - a_1 Y_1 + Y_2 \\
& \leq K_1 + a_3 \frac{\check{\Lambda}^2}{\check{\mu}^2} - a_1 Y_1 + Y_2,
\end{aligned}$$

gde je

$$\begin{aligned}
Y_1 &= \int_Y \left(\frac{I((t - \tau)^-)}{N(t^-)} \eta(a(t), u) + \ln(1 - \frac{I((t - \tau)^-)}{N(t^-)} \eta(a(t), u)) \right) \lambda(du) \\
Y_2 &= \int_Y \left(\frac{S(t^-)}{N(t^-)} \frac{I((t - \tau)^-)}{I(t) + 1} \eta(a(t), u) - \ln(1 + \frac{S(t^-)}{N(t^-)} \frac{I((t - \tau)^-)}{I(t) + 1} \eta(a(t), u)) \right) \lambda(du).
\end{aligned}$$

Neka je $a_1 = \frac{\hat{\delta}}{\max\{\hat{\beta}_e, \beta(0)\}}$, $a_2 = \hat{\delta}$, $a_3 = \frac{1}{2} \frac{\check{\xi}^2}{2\hat{\theta}} \left(\frac{\hat{\delta}(\check{\mu} + \check{\delta})}{\hat{\Lambda} \max\{\hat{\beta}_e, \beta(0)\}} + 1 \right)$.

Kako važi Pretpostavka [1](#), primenom Tejlorove formule na funkciju $\ln(1 - x)$ (gde je $x = \frac{I(t - \tau^-)}{N(t^-)} \eta(a(t), u)$), dobija se

$$\begin{aligned}
Y_1 &= \int_Y \left(\frac{I((t - \tau)^-)}{N(t^-)} \eta(a(t), u) + \ln(1 - \frac{I((t - \tau)^-)}{N(t^-)} \eta(a(t), u)) \right) \lambda(du) \\
&= \int_Y \frac{\left(\frac{I((t - \tau)^-)}{N(t^-)} \eta(a(t), u) \right)^2}{2 \left(1 - \kappa \left(\frac{I((t - \tau)^-)}{N(t^-)} \eta(a(t), u) \right) \right)^2} \lambda(du) \\
&\leq \frac{\left(\frac{I((t - \tau)^-)}{N(t^-)} \eta(a(t), u) \right)^2}{2 \left(1 - \kappa \left(\frac{I((t - \tau)^-)}{N(t^-)} \eta(a(t), u) \right) \right)^2} \leq \frac{h^2}{2(1 - h)^2},
\end{aligned}$$

gde je $\kappa \in (0, 1)$ proizvoljno. Slično se dobija

$$\begin{aligned}
Y_2 &= \int_Y \left(\frac{S(t^-)}{N(t^-)} \frac{I((t - \tau)^-)}{I(t) + 1} \eta(a(t), u) - \ln(1 + \frac{S(t^-)}{N(t^-)} \frac{I((t - \tau)^-)}{I(t) + 1} \eta(a(t), u)) \right) \lambda(du) \\
&\leq \int_Y \frac{\left(\frac{S(t^-)}{N(t^-)} \frac{I((t - \tau)^-)}{I(t) + 1} \eta(a(t), u) \right)^2}{2 \left(1 - \kappa \left(\frac{S(t^-)}{N(t^-)} \frac{I((t - \tau)^-)}{I(t) + 1} \eta(a(t), u) \right) \right)^2} \lambda(du) \\
&\leq \frac{\left(\frac{S(t^-)}{N(t^-)} \frac{I((t - \tau)^-)}{I(t) + 1} \eta(a(t), u) \right)^2}{2 \left(1 - \kappa \left(\frac{S(t^-)}{N(t^-)} \frac{I((t - \tau)^-)}{I(t) + 1} \eta(a(t), u) \right) \right)^2} \leq \frac{h^2}{2(1 - h)^2}.
\end{aligned}$$

Tada je

$$LF(t, S(t), L(t), V(t), I(t), Q(t), R(t)) \leq K_1 + a_3 \frac{\check{\Lambda}^2}{\check{\mu}^2} + (1 + a_1) \frac{h^2}{2(1 - h)^2} =: C.$$

Prema tome, važi

$$\begin{aligned}
& dF(t, S(t), L(t), V(t), I(t), Q(t), R(t)) \\
& \leq C dt - \frac{\sigma(a(t), t)}{N(t)} I(t - \tau) \left(a_1 - \frac{S(t)}{I(t) + 1} \right) dB(t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_Y \ln(1 + \frac{S(t^-)}{N(t^-)} \frac{I((t-\tau)^-)}{(I(t)+1)} \eta(a(t), u)) \tilde{N}(dt, du) \\
& + a_1 \int_Y \ln(1 - \frac{I((t-\tau)^-)}{N(t^-)} \eta(a(t), u)) \tilde{N}(dt, du).
\end{aligned}$$

Integracijom poslednje nejednakosti od 0 do $\tau_k \wedge T$ i računanjem očekivanja, dobija se

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}F(\tau_k \wedge T, S(\tau_k \wedge T), L(\tau_k \wedge T), V(\tau_k \wedge T), I(\tau_k \wedge T), Q(\tau_k \wedge T), R(\tau_k \wedge T)) \\
& \leq F(0, S(0), L(0), V(0), I(0), Q(0), R(0)) + C\mathbb{E}(\tau_k \wedge T) \\
& \leq F(0, S(0), L(0), V(0), I(0), Q(0), R(0)) + CT.
\end{aligned}$$

Neka je $\Omega_k = \{\tau_k \leq T\}$. Tada je $\mathbb{P}(\Omega_k) \geq \epsilon$. Za svako $\omega \in \Omega_k$, bar jedan od $S(\tau_k, \omega)$, $L(\tau_k, \omega)$, $V(\tau_k, \omega)$, $I(\tau_k, \omega)$, $Q(\tau_k, \omega)$ ili $R(\tau_k, \omega)$ je jednak k ili $\frac{1}{k}$. Dakle, $F(S(\tau_k, \omega), L(\tau_k, \omega), V(\tau_k, \omega), I(\tau_k, \omega), Q(\tau_k, \omega), R(\tau_k, \omega))$ nije manje ili od $k - 1 - \ln k$ ili od $\frac{1}{k} - 1 - \ln \frac{1}{k}$. Na osnovu toga je

$$\begin{aligned}
& F(\tau_k \wedge T, S(\tau_k \wedge T), L(\tau_k \wedge T), V(\tau_k \wedge T), I(\tau_k \wedge T), Q(\tau_k \wedge T), R(\tau_k \wedge T)) \\
& \geq \min \left\{ k - 1 - \ln k, \frac{1}{k} - 1 - \ln \frac{1}{k} \right\}.
\end{aligned}$$

Dakle,

$$\begin{aligned}
& F(0, S(0), L(0), V(0), I(0), Q(0), R(0)) + CT \\
& \geq \mathbb{E}[I_{\Omega_k} F(\tau_k \wedge T, S(\tau_k \wedge T), L(\tau_k \wedge T), V(\tau_k \wedge T), I(\tau_k \wedge T), Q(\tau_k \wedge T), R(\tau_k \wedge T))] \\
& \geq \epsilon \min \left\{ k - 1 - \ln k, \frac{1}{k} - 1 - \ln \frac{1}{k} \right\},
\end{aligned}$$

pri čemu je I_{Ω_k} indikator događaja Ω_k . Kada $k \rightarrow \infty$, dobija se

$$\infty > F(0, S(0), L(0), V(0), I(0), Q(0), R(0)) + CT = \infty,$$

što je kontradikcija. Na osnovu toga se zaključuje da je $\tau_\infty = \infty$ s.i, čime je dokaz kompletan.

Napomena 5.1 Skup Γ je skoro izvesno pozitivno invarijantni skup sistema (5.8) za svako $t \geq -\tau$, tj. ako sistem krene iz Γ , on nikada neće napustiti Γ . Zbog toga, će u nastavku važiti pretpostavka da je početna vrednost

$$(S(\zeta), L(\zeta), V(\zeta), I(\zeta), Q(\zeta), R(\zeta), a(\zeta)) \in \Gamma \times A, \zeta \in [-\tau, 0].$$

5.1.4 Iskorenjivanje bolesti

U ovom poglavlju biće izvedeni dovoljni uslovi, koje treba da zadovoljavaju parametri modela, koji dovode do iskorenjivanja bolesti iz populacije.

Neka je

$$\bar{\sigma}(k) := \frac{\xi(k)}{\sqrt{2\theta(k)}}, \quad k \in A.$$

Tada je $\sigma(k, t) = \bar{\sigma}(k)\sqrt{1 - e^{-2\theta(k)t}}$, $k \in A$, $t \geq 0$. Očigledno važi da je $\sigma(k, t) \leq \bar{\sigma}(k)$, $k \in A$, $t \geq 0$. U nastavku će biti korišćene oznake

$$\check{\sigma} := \max \bar{\sigma}(k), \quad \hat{\sigma} := \min \bar{\sigma}(k), \quad k \in A,$$

$$\langle x(t) \rangle := \frac{1}{t} \int_0^t x(s) ds, \quad t \geq 0.$$

Teorema 5.2 *Neka važi Pretpostavka 1 i neka je $(S(t), L(t), V(t), I(t), Q(t), R(t), a(t))$, $t \geq -\tau$ rešenje sistema (5.8) za proizvoljnu početnu vrednost $(S(\zeta), L(\zeta), V(\zeta), I(\zeta), Q(\zeta), R(\zeta), a(\zeta)) \in \mathcal{L}^1([-\tau, 0], \Gamma \times A)$. Ako je*

$$R_1^* = \frac{(\max\{\check{\beta}_e, \beta_0\})^2}{2\hat{\sigma}^2(\hat{\mu} + \hat{\alpha} + \hat{\rho}_i + \hat{\delta})} < 1, \quad (5.11)$$

tada je

$$\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = 0, \quad s.i.,$$

odnosno, bolest će biti iskorenjena. Pored toga, važi

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} R(t) = 0, \quad s.i.$$

i

$$\frac{\hat{\Lambda}}{\check{\mu} + \check{\delta}} \leq \lim_{t \rightarrow \infty} [S(t) + L(t) + V(t)] \leq \frac{\check{\Lambda}}{\hat{\mu}}, \quad s.i.$$

Dokaz. Primenom uopštene Itôve formule (Teorema 1.45) na $\ln I(t)$, sledi

$$\begin{aligned} d \ln I(t) = & \left((\beta_e(k) + (\beta_0 - \beta_e(k)) e^{-\theta(k)t}) \frac{I(t-\tau)S(t)}{I(t)N(t)} - \mu(k) - \alpha(k) - \rho_i(k) \right. \\ & - \delta(k) + \int_Y \ln \left(1 + \eta(k, u) \frac{I((t-\tau)^-)S(t^-)}{I(t)N(t^-)} \right) \lambda(du) \\ & - \int_Y \eta(k, u) \frac{I((t-\tau)^-)S(t^-)}{I(t)N(t^-)} \lambda(du) - \frac{\sigma^2(k, t)}{2} \frac{I^2(t-\tau)S^2(t)}{I^2(t)N^2(t)} \Big) dt \\ & + \sigma(k, t) \frac{I(t-\tau)S(t)}{I(t)N(t)} dB(t) \\ & + \int_Y \left(\ln \left(1 + \eta(k, u) \frac{I((t-\tau)^-)S(t^-)}{I(t)N(t^-)} \right) \right) \tilde{N}(ds, du). \end{aligned}$$

Integracijom obe strane prethodne nejednakosti od $z > 0$ do t , ($0 < z < t$) i deljenjem sa t , dobija se

$$\begin{aligned} \frac{\ln I(t) - \ln I(z)}{t} = & \frac{1}{t} \int_z^t \left((\beta_e(k) + (\beta_0 - \beta_e(k)) e^{-\theta(k)s}) \frac{I(s-\tau)S(s)}{I(s)N(s)} - \mu(k) \right. \\ & - \alpha(k) - \rho_i(k) - \delta(k) - \frac{\sigma^2(k, s)}{2} \frac{I^2(s-\tau)S^2(s)}{I^2(s)N^2(s)} \\ & + \int_Y \ln \left(1 + \eta(k, u) \frac{I((s-\tau)^-)S(s^-)}{I(s)N(s^-)} \right) \lambda(du) \\ & \left. - \int_Y \eta(k, u) \frac{I((s-\tau)^-)S(s^-)}{I(s)N(s^-)} \lambda(du) \right) ds + \frac{1}{t} M_1, \end{aligned} \quad (5.12)$$

gde je

$$\begin{aligned} M_1(t) = & \int_z^t \sigma(k, s) \frac{I(s-\tau)S(s)}{I(s)N(s)} dB(s) \\ & + \int_z^t \int_Y \left(\ln \left(1 + \eta(k, u) \frac{I((s-\tau)^-)S(s^-)}{I(s)N(s^-)} \right) \right) \tilde{N}(ds, du). \end{aligned} \quad (5.13)$$

Na osnovu osobina Brownovog kretanja i Lévyjevog procesa (Teorema 1.10 i osobina (1.28)), $M_1(t)$ je martingal. Da bi se odredila gornja granica martingala $M_1(t)$ biće primenjena eksponencijalna martingalna nejednakost (Lema 1.52)

$$P \left\{ \sup_{z \leq t \leq n} \left[M_1(t) - \frac{\alpha}{2} \int_z^t \left(\sigma(k, s) \frac{I(s-\tau)S(s)}{I(s)N(s)} \right)^2 ds \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{\alpha} \int_z^t \int_Y \left(\left(\eta(k, u) \frac{I((s-\tau)^-)S(s^-)}{I(s)N(s^-)} + 1 \right)^\alpha - 1 \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - \alpha \ln \left(1 + \eta(k, u) \frac{I((s-\tau)^-)S(s^-)}{I(s)N(s^-)} \right) \right) \lambda(du) ds \right] > \beta \right\} \leq e^{-\alpha\beta},$$

gde je $n > 1$ proizvoljan ceo broj i α i β proizvoljni brojevi koji će biti izabrani u nastavku. Neka je $\epsilon \in (0, 1)$ proizvoljno. Ako se odabere $\alpha = \epsilon$ i $\beta = \frac{2 \ln n}{\epsilon}$, tada je

$$P \left\{ \sup_{z \leq t \leq n} \left[M_1(t) - \frac{\epsilon}{2} \int_z^t \left(\sigma(k, s) \frac{I(s-\tau)S(s)}{I(s)N(s)} \right)^2 ds \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{\epsilon} \int_z^t \int_Y \left(\left(\eta(k, u) \frac{I((s-\tau)^-)S(s^-)}{I(s)N(s^-)} + 1 \right)^\epsilon - 1 \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - \epsilon \ln \left(1 + \eta(k, u) \frac{I((s-\tau)^-)S(s^-)}{I(s)N(s^-)} \right) \right) \lambda(du) ds \right] > \frac{2 \ln n}{\epsilon} \right\} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Kako red $\sum_1^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergira, na osnovu Borel-Cantellijeve leme (Lema 1.2), sledi da postoji $\Omega_0 \subset \Omega$ za koji je $P(\Omega_0) = 1$, tako da za svako $\omega \in \Omega_0$ postoji nenegativan ceo broj $n_0(\omega)$, tako da za $n \geq n_0(\omega)$ i $t \in [n-1, n]$, važi

$$\sup_{z \leq t \leq n} \left[M_1(t) - \frac{\epsilon}{2} \int_z^t \left(\sigma(k, s) \frac{I(s-\tau)S(s)}{I(s)N(s)} \right)^2 ds \right. \\ \left. - \frac{1}{\epsilon} \int_z^t \int_Y \left(\left(\eta(k, u) \frac{I((s-\tau)^-)S(s^-)}{I(s)N(s^-)} + 1 \right)^\epsilon - 1 \right. \right. \\ \left. \left. - \epsilon \ln \left(1 + \eta(k, u) \frac{I((s-\tau)^-)S(s^-)}{I(s)N(s^-)} \right) \right) \lambda(du) ds \right] \leq \frac{2 \ln n}{\epsilon}.$$

Dakle,

$$M_1(t) \leq \frac{\epsilon}{2} \int_z^t \left(\sigma(k, s) \frac{I(s-\tau)S(s)}{I(s)N(s)} \right)^2 ds \\ + \frac{1}{\epsilon} \int_z^t \int_Y \left(\left(\eta(k, u) \frac{I((s-\tau)^-)S(s^-)}{I(s)N(s^-)} + 1 \right)^\epsilon - 1 \right. \\ \left. - \epsilon \ln \left(1 + \eta(k, u) \frac{I((s-\tau)^-)S(s^-)}{I(s)N(s^-)} \right) \right) \lambda(du) ds + \frac{2 \ln n}{\epsilon}. \quad (5.14)$$

Zamenom (5.14) u (5.12), dobija se,

$$\frac{\ln I(t) - \ln I(z)}{t} \leq \frac{1}{t} \int_z^t \left((\beta_e(k) + (\beta_0 - \beta_e(k)) e^{-\theta(k)s}) \frac{I(s-\tau)S(s)}{I(s)N(s)} - \mu(k) \right. \\ \left. - \alpha(k) - \rho_i(k) - \delta(k) - \frac{(1-\epsilon)\sigma^2(k, s)}{2} \frac{I^2(s-\tau)S^2(s)}{I^2(s)N^2(s)} \right) ds$$

$$+ \frac{1}{t} \int_z^t \int_Y \left(\frac{1}{\epsilon} \left(\eta(k, u) \frac{I((s-\tau)^-)S(s^-)}{I(s)N(s^-)} + 1 \right)^\epsilon - \frac{1}{\epsilon} \right. \\ \left. - \eta(k, u) \frac{I((s-\tau)^-)S(s^-)}{I(s)N(s^-)} \right) \lambda(du) ds + \frac{2 \ln n}{t\epsilon}.$$

Kako je drugi izvod funkcije $f_1(x) = \frac{1}{\epsilon}x^\epsilon - \frac{1}{\epsilon} - x + 1$ jednak $f_1''(x) = (\epsilon - 1)x^{\epsilon-2} < 0$, za $0 < \epsilon < 1$ i $x > 0$, to ona dostiže maksimalnu vrednost jednaku 0 u tački 1. Tada je $\int_Y \left(\frac{1}{\epsilon} \left(\eta(k, u) \frac{I((s-\tau)^-)S(s^-)}{I(s)N(s^-)} + 1 \right)^\epsilon - \frac{1}{\epsilon} - \eta(k, u) \frac{I((s-\tau)^-)S(s^-)}{I(s)N(s^-)} \right) \lambda(du) < 0$, za $0 < \epsilon < 1, x > 0$. Pored toga, funkcija $f_2(x) = \beta x - \frac{(1-\epsilon)\sigma^2}{2}x^2$ dostiže maksimalnu vrednost $\frac{\beta^2}{2(1-\epsilon)\sigma^2}$ za $x = \frac{\beta}{(1-\epsilon)\sigma^2}$. To implicira da je

$$\begin{aligned} \frac{\ln I(t)}{t} &\leq \frac{\ln I(z)}{t} - (\mu(k) + \alpha(k) + \rho_i(k) + \delta(k)) \frac{t-z}{t} \\ &\quad + \frac{1}{t} \int_z^t \frac{(\beta_e(k) + (\beta_0 - \beta_e(k))e^{-\theta(k)s})^2}{2(1-\epsilon)\sigma^2(k, s)} ds + \frac{2 \ln n}{t\epsilon} \\ &\leq \frac{\ln I(z)}{t} - (\hat{\mu} + \hat{\alpha} + \hat{\rho}_i + \hat{\delta}) \frac{t-z}{t} + \frac{(\max\{\beta_e(k), \beta_0\})^2 (t-z)}{2(1-\epsilon)\hat{\sigma}^2(k)(1-e^{-2\theta(k)z})t} + \frac{2 \ln n}{t\epsilon} \\ &\leq \frac{\ln I(z)}{t} - (\hat{\mu} + \hat{\alpha} + \hat{\rho}_i + \hat{\delta}) \frac{t-z}{t} + \frac{t-z}{t} \frac{(\max\{\check{\beta}_e, \beta_0\})^2}{2(1-\epsilon)\hat{\sigma}^2(1-e^{-2\hat{\theta}z})} + \frac{2 \ln n}{t\epsilon}. \end{aligned}$$

Izračunavanjem granične vrednosti leve i desne strane poslednje nejednakosti kada $t \rightarrow \infty$, dobija se da je

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln I(t)}{t} \leq (\hat{\mu} + \hat{\alpha} + \hat{\rho}_i + \hat{\delta}) \left(\frac{(\max\{\check{\beta}_e, \beta_0\})^2}{2(1-\epsilon)\hat{\sigma}^2(1-e^{-2\hat{\theta}z})(\hat{\mu} + \hat{\alpha} + \hat{\rho}_i + \hat{\delta})} - 1 \right),$$

za svako $\epsilon \in (0, 1)$, i $z > 0$. Neka je niz $\{\epsilon_k\}_k$, takav da je $\epsilon_k \in (0, 1)$ za svako k i $\lim_{k \rightarrow \infty} \epsilon_k = 0$. Tada, za svako k važi

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln I(t)}{t} \leq (\hat{\mu} + \hat{\alpha} + \hat{\rho}_i + \hat{\delta}) \left(\frac{(\max\{\check{\beta}_e, \beta_0\})^2}{2(1-\epsilon_k)\hat{\sigma}^2(1-e^{-2\hat{\theta}z})(\hat{\mu} + \hat{\alpha} + \hat{\rho}_i + \hat{\delta})} - 1 \right).$$

Izračunavanjem granične vrednosti leve i desne strane poslednje nejednakosti kada $k \rightarrow \infty$, dobija se da je

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln I(t)}{t} \leq (\hat{\mu} + \hat{\alpha} + \hat{\rho}_i + \hat{\delta}) \left(\frac{(\max\{\check{\beta}_e, \beta_0\})^2}{2\hat{\sigma}^2(1-e^{-2\hat{\theta}z})(\hat{\mu} + \hat{\alpha} + \hat{\rho}_i + \hat{\delta})} - 1 \right),$$

za svako $z > 0$. Neka je niz $\{z_m\}_m$, takav da je $z_m > 0$, za svako m i $\lim_{m \rightarrow \infty} z_m = \infty$. Tada, za svako m važi

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln I(t)}{t} \leq (\hat{\mu} + \hat{\alpha} + \hat{\rho}_i + \hat{\delta}) \left(\frac{(\max\{\check{\beta}_e, \beta_0\})^2}{2\hat{\sigma}^2(1-e^{-2\hat{\theta}z_m})(\hat{\mu} + \hat{\alpha} + \hat{\rho}_i + \hat{\delta})} - 1 \right).$$

Izračunavanjem granične vrednosti leve i desne strane poslednje nejednakosti kada $m \rightarrow \infty$, dobija se da je

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln I(t)}{t} \leq (\hat{\mu} + \hat{\alpha} + \hat{\rho}_i + \hat{\delta}) \left(\frac{(\max\{\check{\beta}_e, \beta_0\})^2}{2\hat{\sigma}^2(\hat{\mu} + \hat{\alpha} + \hat{\rho}_i + \hat{\delta})} - 1 \right) < 0,$$

na osnovu uslova (5.11). Tada je

$$\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = 0, \text{ s.i.} \quad (5.15)$$

Štaviše, integracijom obe strane pete jednačine sistema (5.8) i deljenjem sa t , dobija se

$$\frac{Q(t) - Q(0)}{t} = \frac{1}{t} \int_0^t \alpha(k) I(s) ds - \frac{1}{t} \int_0^t (\mu(k) + \rho_q(k)) Q(s) ds.$$

Izračunavanjem granične vrednosti obe strane prethodne jednakosti kada $t \rightarrow \infty$ i primenom L'Hospitalovog pravila, (5.15) i ograničenosti $Q(t), Q(0)$, sledi

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q(t) = 0, \text{ s.i.} \quad (5.16)$$

Takođe, integracijom obe strane šeste jednačine sistema (5.8) i zatim deljenjem sa t , dobija se

$$\frac{R(t) - R(0)}{t} = \frac{1}{t} \int_0^t \rho_i(k) I(s) ds + \frac{1}{t} \int_0^t \rho_q(k) Q(s) ds - \frac{1}{t} \int_0^t (\mu(k) + r_1(k)) R(s) ds.$$

Izračunavanjem granične vrednosti obe strane prethodne jednakosti kada $t \rightarrow \infty$ i primenom L'Hospitalovog pravila, (5.15), (5.16) i ograničenosti $R(t), R(0)$, sledi da je

$$\lim_{t \rightarrow \infty} R(t) = 0, \text{ s.i.} \quad (5.17)$$

Kako je $N(t) = S(t) + L(t) + V(t) + I(t) + Q(t) + R(t)$, $\frac{\hat{\Lambda}}{\check{\mu} + \delta} \leq N(t) \leq \frac{\hat{\Lambda}}{\check{\mu}}$, $t \geq -\tau$, na osnovu (5.15), (5.16) i (5.17), dobija se

$$\frac{\hat{\Lambda}}{\check{\mu} + \delta} \leq \lim_{t \rightarrow \infty} [S(t) + L(t) + V(t)] \leq \frac{\hat{\Lambda}}{\check{\mu}}, \text{ s.i.}$$

Time je dokaz kompletan. $\triangle$

Napomena 5.2 *Kako obavezna izolacija podložnih osoba predstavlja meru za suzbijanje bolesti čije uvođenje donosi državna vlast u zavisnosti od trenutnog broja zaraženih osoba, u slučaju značajnog smanjenja broja zaraženih ili iskorenjavanja bolesti, ta mera će biti ukinuta. Dakle, kao posledica iskorenjivanja bolesti, u modelu (5.8) koeficijenti koji opisuju izolaciju podložnih osoba postaće nula, odnosno $l = 0$.*

Na osnovu Napomene 5.2 proizilazi sledeća posledica.

Posledica 5.1 *Neka važi Pretpostavka 1 i neka je $(S(t), L(t), V(t), I(t), Q(t), R(t), a(t))$, $t \geq -\tau$ rešenje sistema (5.8) sa proizvoljnom početnom vrednošću $(S(\zeta), L(\zeta), V(\zeta), I(\zeta), Q(\zeta), R(\zeta), a(\zeta)) \in \mathcal{L}^1([-\tau, 0], \Gamma \times A)$. Neka važi uslov Teoreme 5.2. Ako je $l(a(t)) = 0$, za $t \geq t_1$, gde je $t_1 \geq 0$, tada rešenje sistema (5.8) ima osobinu*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} L(t) = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} Q(t) = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} R(t) = 0, \text{ s.i.}$$

i

$$\frac{\hat{\Lambda}}{\check{\mu} + \delta} \leq \lim_{t \rightarrow \infty} [S(t) + V(t)] \leq \frac{\hat{\Lambda}}{\check{\mu}}, \text{ s.i.}$$

Dokaz. Rešavanjem druge jednačine sistema (5.8) eksplicitno, dobija se

$$L(t) = e^{-(\mu(a(t))+l_1(a(t)))t} \left[L(0) + \int_0^t l(a(s))S(s)e^{(\mu(a(s))+l_1(a(s)))s} ds \right].$$

Kako je $l(a(t)) = 0, t \geq t_1$, izračunavanjem granične vrednosti kada $t \rightarrow \infty$ u poslednjoj jednakosti dobija se

$$\lim_{t \rightarrow \infty} L(t) = 0, \text{ s.i.},$$

gde je primenjeno L'Hospitalovo pravilo. Odavde i na osnovu Teoreme 5.2 sledi da je

$$\frac{\hat{\Lambda}}{\check{\mu} + \check{\delta}} \leq \lim_{t \rightarrow \infty} [S(t) + V(t)] \leq \frac{\check{\Lambda}}{\hat{\mu}}, \text{ s.i.} \quad \Delta$$

5.1.5 Perzistentnost u srednjem bolesti

U ovom poglavlju, u fokusu istraživanja je određivanje dovoljnih uslova pod kojima je bolest perzistentna u populaciji.

Definicija 5.1 *Bolest je strogo perzistentna u srednjem u populaciji ako važi bar jedan od sledećih uslova*

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t I(s) ds > 0, \text{ s.i.} \quad \text{ili} \quad \liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t Q(s) ds > 0, \text{ s.i.}$$

Neka je

$$R_0^S = \frac{\sum_{k=1}^n \pi(k) \left(3 \sqrt{\min\{\beta_e(k), \beta(0)\} \frac{\Lambda^2(k)}{\mu(k)+\delta(k)} \frac{\mu^2(k)}{\Lambda(k)+\mu(k)} + 2\sqrt{l(k)l_1(k)} + 2\sqrt{v(k)v_1(k)} \right)}{\sum_{k=1}^n \pi(k) \varpi(k)}.$$

Teorema 5.3 *Neka važi Pretpostavka 1 i neka je $(S(t), L(t), V(t), I(t), Q(t), R(t), a(t))$, $t \geq -\tau$ rešenje sistema (5.8) sa proizvoljnom početnom vrednošću $(S(\zeta), L(\zeta), V(\zeta), I(\zeta), Q(\zeta), R(\zeta), a(\zeta)) \in \mathcal{L}^1([-\tau, 0], \Gamma \times A)$. Ako je:*

1. $R_0^S > 1$, tada je

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t I(s) ds \geq \frac{\sum_{k=1}^n \pi(k) \varpi(k) (R_0^S - 1)}{\max\{\beta(0), \check{\beta}_e\} \frac{\check{\mu} + \check{\delta}}{\hat{\Lambda}}} > 0, \text{ s.i.},$$

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t Q(s) ds \geq \frac{\hat{\alpha} \sum_{k=1}^n \pi(k) \varpi(k) (R_0^S - 1)}{(\check{\mu} + \check{\rho}_q) \max\{\beta(0), \check{\beta}_e\} \frac{\check{\mu} + \check{\delta}}{\hat{\Lambda}}} > 0, \text{ s.i.},$$

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t R(s) ds \geq \frac{\left(\hat{\rho}_i + \hat{\rho}_q \frac{\hat{\alpha}}{\check{\mu} + \check{\rho}_q} \right) \sum_{k=1}^n \pi(k) \varpi(k) (R_0^S - 1)}{(\check{\mu} + \check{r}_1) \max\{\beta(0), \check{\beta}_e\} \frac{\check{\mu} + \check{\delta}}{\hat{\Lambda}}} > 0, \text{ s.i.},$$

pri čemu je $\varpi(k) := \Lambda(k) + 4\mu(k) + \alpha(k) + \rho_i(k) + \delta(k) + l(k) + v(k) + l_1(k) + v_1(k) + \min\{\beta_e(k), \beta(0)\} \frac{\Lambda(k)}{\mu(k)} + \frac{\bar{\sigma}^2(k)}{2} \left(\frac{\Lambda^2(k)}{\mu^2(k)} + \frac{(\mu(k)+\delta(k))^2}{\mu(k)^2} \right) + \int_Y \frac{1}{2} \eta^2(k, u) \frac{\Lambda^2(k)}{\mu^2(k)} \lambda(du)$,

$$2. R_0^{S*} = \frac{3\sqrt[3]{\min\{\hat{\beta}_e, \beta(0)\} \frac{\hat{\Lambda}^2}{\hat{\mu} + \delta} \frac{\hat{\mu}^2}{\hat{\Lambda} + \hat{\mu}} + 2\sqrt{\hat{u}_1 + 2\sqrt{\hat{v}\hat{v}_1}}}{\tilde{\omega}} > 1, \text{ tada je}$$

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t I(s) ds \geq \frac{\tilde{\omega} (R_0^{S*} - 1)}{\max\{\beta(0), \check{\beta}_e\} \frac{\hat{\mu} + \delta}{\hat{\Lambda}}} > 0, \text{ s.i.},$$

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t Q(s) ds \geq \frac{\hat{\alpha} \tilde{\omega} (R_0^{S*} - 1)}{(\hat{\mu} + \hat{\rho}_q) \max\{\beta(0), \check{\beta}_e\} \frac{\hat{\mu} + \delta}{\hat{\Lambda}}} > 0, \text{ s.i.},$$

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t R(s) ds \geq \frac{\left(\hat{\rho}_i + \hat{\rho}_q \frac{\hat{\alpha}}{\hat{\mu} + \hat{\rho}_q}\right) \tilde{\omega} (R_0^{S*} - 1)}{(\hat{\mu} + \hat{r}_1) \max\{\beta(0), \check{\beta}_e\} \frac{\hat{\mu} + \delta}{\hat{\Lambda}}} > 0, \text{ s.i.},$$

odnosno, bolest je strogo perzistentna u srednjem u populaciji.

Dokaz. 1. Primenom operatora $L(\cdot)$ (1.45) na funkciju $U_1(S, L, V, I, Q, R) = S(t) + L(t) + V(t) + I(t) + Q(t) + R(t) - \ln(I(t) + 1) - \ln S(t) - \ln L(t) - \ln V(t)$, dobija se

$$\begin{aligned} & L(U_1(S, L, V, I, Q, R)) \\ &= \Lambda(k) - \mu(k)N(t) - \delta(k)I(t) - (\beta_e(k) + (\beta(0) - \beta_e(k))e^{-\theta(k)t}) \frac{I(t - \tau)S(t)}{(I(t) + 1)N(t)} \\ &+ (\mu(k) + \alpha(k) + \rho_i(k) + \delta(k)) \frac{I(t)}{I(t) + 1} + \frac{1}{2} \sigma^2(t, k) \frac{I^2(t - \tau)S^2(t)}{(I(t) + 1)^2 N^2(t)} \\ &- \int_Y \left(\ln \left(1 + \eta(k, u) \frac{I((t - \tau)^-)S(t^-)}{(I(t) + 1)N(t^-)} \right) - \eta(k, u) \frac{I((t - \tau)^-)S(t^-)}{(I(t) + 1)N(t^-)} \right) \lambda(du) \\ &- \frac{\Lambda(k)}{S(t)} + (\beta_e(k) + (\beta(0) - \beta_e(k))e^{-\theta(k)t}) \frac{I(t - \tau)}{N(t)} + \mu(k) + l(k) + v(k) \\ &- l_1(k) \frac{L(t)}{S(t)} - v_1(k) \frac{V(t)}{S(t)} - r_1(k) \frac{R(t)}{S(t)} + \frac{\sigma^2(t, k)}{2} \frac{I^2(t - \tau)}{N^2(t)} \\ &- \int_Y \left(-\ln \left(1 + \eta(k, u) \frac{I((t - \tau)^-)}{N(t^-)} \right) + \eta(k, u) \frac{I((t - \tau)^-)}{N(t^-)} \right) \lambda(du) \\ &- l(k) \frac{S(k)}{L(t)} + \mu(k) + l_1(k) - v(k) \frac{S(k)}{V(t)} + \mu(k) + v_1(k) \\ &\leq -\frac{\Lambda(k)}{S(t)} - \mu(k)N(t) - \min\{\beta_e(k), \beta(0)\} \frac{\Lambda(k)}{\mu(k) + \delta(k)} \frac{S(t)}{(I(t) + 1)N(t)} \\ &+ \Lambda(k) + 4\mu(k) + \alpha(k) + \rho_i(k) + \delta(k) + l(k) + v(k) + l_1(k) + v_1(k) \\ &+ \min\{\beta_e(k), \beta(0)\} \frac{\Lambda(k)}{\mu(k)} + \frac{\bar{\sigma}^2(k)}{2} \left(\frac{\Lambda^2(k)}{\mu^2(k)} + \frac{(\mu(k) + \delta(k))^2}{\mu(k)^2} \right) \\ &+ \int_Y \frac{1}{2} \eta^2(k, u) \frac{\Lambda^2(k)}{\mu^2(k)} \lambda(du) + \max\{\beta_e(k), \beta(0)\} \frac{\mu(k) + \delta(k)}{\Lambda(k)} I(t - \tau) \\ &- l_1(k) \frac{L(t)}{S(t)} - v_1(k) \frac{V(t)}{S(t)} - l(k) \frac{S(k)}{L(t)} - v(k) \frac{S(k)}{V(t)}, \end{aligned}$$

gde je primenjena Taylorova formula na funkciju $\ln(1 + x)$.

Neka je $U : [0, \infty) \times \Gamma \times A \rightarrow \mathbb{R}$, definisana sa

$$U(t, S, L, V, I, Q, R, k) := U_1(t, S, L, V, I, Q, R, k) + \max\{\beta_e(k), \beta(0)\} \frac{\mu(k) + \delta(k)}{\Lambda(k)} \int_{t-\tau}^t I(s) ds + \omega(k),$$

pri čemu će $\omega(k), k \in A$ biti određen u nastavku. Primenom operatora $L(\cdot)$ (1.45) na U , dobija se

$$\begin{aligned} LU(S, L, V, I, Q, R, k) &= LU_1(S, L, V, I, Q, R, k) - \sum_{j=1}^n \gamma_{ij} \omega(j) \\ &\quad + \max\{\beta_e(k), \beta(0)\} \frac{\mu(k) + \delta(k)}{\Lambda(k)} (I(t) - I(t - \tau)) \\ &\leq -\mu(k)N(t) - \min\{\beta_e(k), \beta(0)\} \frac{\Lambda(k)}{\mu(k) + \delta(k)} \frac{S(t)}{(I(t) + 1)N(t)} \\ &\quad - \frac{\Lambda(k)}{S(t)} + \Lambda(k) + 4\mu(k) + \alpha(k) + \rho_i(k) + \delta(k) + l(k) + v(k) \\ &\quad + l_1(k) + v_1(k) - l_1(k) \frac{L(t)}{S(t)} + \min\{\beta_e(k), \beta(0)\} \frac{\Lambda(k)}{\mu(k)} \\ &\quad - v_1(k) \frac{V(t)}{S(t)} + \frac{\bar{\sigma}^2(k)}{2} \left(\frac{\Lambda^2(k)}{\mu^2(k)} + \frac{(\mu(k) + \delta(k))^2}{\mu(k)^2} \right) \quad (5.18) \\ &\quad + \int_Y \frac{1}{2} \eta^2(k, u) \frac{\Lambda^2(k)}{\mu^2(k)} \lambda(du) - l(k) \frac{S(k)}{L(t)} - v(k) \frac{S(k)}{V(t)} \\ &\quad + \max\{\beta_e(k), \beta(0)\} \frac{\mu(k) + \delta(k)}{\Lambda(k)} I(t) - \sum_{j=1}^n \gamma_{ij} \omega(j) \\ &\leq -3 \sqrt[3]{\min\{\beta_e(k), \beta(0)\} \frac{\Lambda^2(k)}{\mu(k) + \delta(k)} \frac{\mu^2(k)}{\Lambda(k) + \mu(k)}} \\ &\quad - 2\sqrt{l(k)l_1(k)} - 2\sqrt{v(k)v_1(k)} \\ &\quad + \varpi(k) + \max\{\beta_e(k), \beta(0)\} \frac{\mu(k) + \delta(k)}{\Lambda(k)} I(t) - \sum_{j=1}^n \gamma_{ij} \omega(j) \\ &= -R^*(k) + \max\{\beta_e(k), \beta(0)\} \frac{\mu(k) + \delta(k)}{\Lambda(k)} I(t) - \sum_{j=1}^n \gamma_{ij} \omega(j), \end{aligned}$$

gde je $R^*(k) := 3 \sqrt[3]{\min\{\beta_e(k), \beta(0)\} \frac{\Lambda^2(k)}{\mu(k) + \delta(k)} \frac{\mu^2(k)}{\Lambda(k) + \mu(k)}} + 2\sqrt{l(k)l_1(k)} + 2\sqrt{v(k)v_1(k)} - \varpi(k), \forall k \in \mathbb{A}$. Kako je lanac Markova A ireducibilan, to za $R^* = (R^*(1), \dots, R^*(n))^T$, postoji $\omega = (\omega(1), \dots, \omega(n))^T$ tako da je zadovoljen sledeći Poissonov sistem

$$\Upsilon \omega = \sum_{i=1}^n \pi(i) R^*(i) (1, 1, \dots, 1)^T - R^*,$$

odakle sledi da

$$-\sum_{j=1}^n \gamma(kj) \omega(j) - R^*(k) = -\sum_{j=1}^n \pi(j) R^*(j), \quad k \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Zamenom poslednje jednakosti u (5.18), dobija se

$$\begin{aligned} LU(t, S, L, V, I, Q, R, k) &\leq - \sum_{k=1}^n \pi(k) R^*(k) + \max \{ \beta(0), \check{\beta}_e \} \frac{\check{\mu} + \check{\delta}}{\hat{\Lambda}} I(t) \\ &\leq - \sum_{k=1}^n \pi(k) \varpi(k) (R_0^S - 1) + \max \{ \beta(0), \check{\beta}_e \} \frac{\check{\mu} + \check{\delta}}{\hat{\Lambda}} I(t). \end{aligned} \quad (5.19)$$

Integracijom poslednje nejednakosti od 0 do t i deljenjem sa t , dobija se

$$\begin{aligned} &\frac{U(t, S, L, V, I, Q, R, k) - U(0, S, L, V, I, Q, R, k_0)}{t} \\ &\leq - \sum_{k=1}^n \pi(k) \varpi(k) (R_0^S - 1) + \max \{ \beta(0), \check{\beta}_e \} \frac{\check{\mu} + \check{\delta}}{\hat{\Lambda}} \langle I(t) \rangle \\ &\quad - \frac{1}{t} M_1(t) + \frac{1}{t} M_2(t) - \frac{1}{t} M_3(t) + \frac{1}{t} M_4(t) \end{aligned} \quad (5.20)$$

gde su uvedene oznake

$$M_1(t) = \int_0^t \sigma(k, s) \frac{S(s)I(s-\tau)}{(I(s)+1)N(s)} dB(s), \quad M_2(t) = \frac{1}{t} \int_0^t \sigma(k, s) \frac{I(s-\tau)}{N(s)} dB(s),$$

$$M_3(t) = \int_0^t \int_Y \left(\ln \left(1 + \eta(k, u) \frac{S(s^-)I((s-\tau)^-)}{(I(s^-)+1)N(s^-)} \right) \right) \tilde{N}(ds, du)$$

i

$$M_4(t) = \int_0^t \int_Y \left(\ln \left(1 + \eta(k, u) \frac{I((s-\tau)^-)}{N(s^-)} \right) \right) \tilde{N}(ds, du).$$

Na osnovu osobina Brownovog kretanja (Teorema 1.10), $M_1(t)$ i $M_2(t)$ su neprekidni martingali. Pritom važi $M_1(0) = 0$ i

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\langle M_1, M_1 \rangle_t}{t} = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_0^t \sigma^2(k, s) \frac{I^2(s-\tau)S^2(s)}{(I(s)+1)^2 N^2(s)} ds}{t} \leq \check{\sigma} \frac{\check{\Lambda}^2}{\check{\mu}^2} < \infty.$$

Primenom Leme 1.7, sledi

$$\frac{M_1(t)}{t} \rightarrow 0 \text{ s.i. kada } t \rightarrow \infty. \quad (5.21)$$

Na osnovu osobina Lévyjevog procesa (1.28), $M_3(t)$ i $M_4(t)$ su martingali. Pored toga, $M_3(0) = 0$ i

$$\langle M_3, M_3 \rangle_t = \int_0^t \int_Y \left(\ln \left(1 + \eta(k, u) \frac{I((s-\tau)^-)S(s^-)}{(I(s)+1)N(s^-)} \right) \right)^2 \lambda(du) ds.$$

Primenom Pretpostavke 1, dobija se

$$\begin{aligned} \rho_{M_3}(t) &:= \int_0^t \frac{d \langle M_3, M_3 \rangle_s}{(1+s)^2} = \int_0^t \frac{\int_Y \left(\ln \left(1 + \eta(k, u) \frac{I((s-\tau)^-)S(s^-)}{(I(s)+1)N(s^-)} \right) \right)^2 \lambda(du)}{(1+s)^2} ds \\ &\leq \int_0^t \frac{\left(\ln \left(1 + h \frac{\check{\mu}}{\hat{\Lambda}} \frac{\check{\Lambda}}{\check{\mu}} \right) \right)^2 \int_Y \lambda(du)}{(1+s)^2} ds < \infty. \end{aligned}$$

Na osnovu Leme (1.8), sledi

$$\frac{M_3(t)}{t} \rightarrow 0, \text{ s.i. kada } t \rightarrow \infty. \quad (5.22)$$

Na osnovu istih argumenata kao u (5.21) i (5.22), zaključuje se da važi

$$\frac{M_2(t)}{t} \rightarrow 0, \quad \frac{M_4(t)}{t} \rightarrow 0, \quad \text{s.i. kada } t \rightarrow \infty.$$

Kako je $\frac{\hat{\Lambda}}{\hat{\mu}+\delta} \leq S(t) + L(t) + V(t) + I(t) + Q(t) + R(t) \leq \frac{\check{\Lambda}}{\hat{\mu}}, t \geq -\tau$, to je

$$\begin{aligned} U(S, L, V, I, Q, R, k) &\geq -\ln(I(t) + 1) - \ln S(t) - \ln L(t) - \ln V(t) - \omega(k) \\ &\geq -4 \ln \left(\frac{\check{\Lambda}}{\hat{\mu}} + 1 \right) - \check{\omega} := M > -\infty. \end{aligned}$$

Izračunavanjem granične vrednosti obe strane nejednakosti (5.20) kada $t \rightarrow \infty$ i primenom prethodnih relacija, važi

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t I(s) ds \geq \frac{\sum_{k=1}^n \pi(k) \varpi(k) (R_0^S - 1)}{\max \{ \beta(0), \check{\beta}_e \} \frac{\check{\mu} + \delta}{\hat{\Lambda}}}, \quad \text{s.i.} \quad (5.23)$$

Tada, na osnovu uslova $R_0^S > 1$, može se zaključiti da je

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t I(s) ds > 0 \text{ s.i.}$$

Integracijom obe strane pete jednačine sistema (5.8) i deljenjem sa t , dobija se

$$\frac{Q(t) - Q(0)}{t} = \frac{1}{t} \int_0^t \alpha(k) I(s) ds - \frac{1}{t} \int_0^t (\mu(k) + \rho_q(k)) Q(s) ds.$$

Izračunavanjem granične vrednosti obe strane prethodne jednakosti kada $t \rightarrow \infty$ i primenom (5.23) i ograničenosti $Q(t), Q(0)$, sledi

$$\begin{aligned} \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t Q(s) ds &\geq \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{(\check{\mu} + \rho_q)t} \int_0^t (\mu(k) + \rho_q(k)) Q(s) ds \\ &= \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{(\check{\mu} + \rho_q)t} \int_0^t \alpha(k) I(s) ds \\ &\geq \frac{\hat{\alpha}}{(\check{\mu} + \rho_q)t} \liminf_{t \rightarrow \infty} \int_0^t I(s) ds \\ &\geq \frac{\hat{\alpha} \sum_{k=1}^n \pi(k) \varpi(k) (R_0^S - 1)}{(\check{\mu} + \rho_q) \left(\max \{ \beta(0), \check{\beta}_e \} \frac{\check{\mu} + \delta}{\hat{\Lambda}} \right)} > 0, \quad \text{s.i.} \end{aligned} \quad (5.24)$$

Slično, kada su klase I i Q perzistentne u srednjem s.i, tada će klasa R takođe biti perzistentna u srednjem s.i. Zaista, integracijom obe strane šeste jednačine sistema (5.8) i zatim deljenjem sa t , dobija se da

$$\frac{R(t) - R(0)}{t} = \frac{1}{t} \int_0^t \rho_i(k) I(s) ds + \frac{1}{t} \int_0^t \rho_q(k) Q(s) ds - \frac{1}{t} \int_0^t (\mu(k) + r_1(k)) R(s) ds.$$

Izračunavanjem granične vrednosti obe strane prethodne jednakosti kada $t \rightarrow \infty$ i primenom (5.23) i (5.24) i ograničenosti rešenja, sledi

$$\begin{aligned} \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t R(s) ds &\geq \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{(\bar{\mu} + r_1)t} \int_0^t (\mu(k) + r_1(k)) R(s) ds \\ &\geq \frac{(\hat{\rho}_i + \hat{\rho}_q \frac{\hat{\alpha}}{\bar{\mu} + \hat{\rho}_q}) \sum_{k=1}^n \pi(k) \varpi(k) (R_0^S - 1)}{(\bar{\mu} + r_1) \max\{\beta(0), \beta_e\} \frac{\bar{\mu} + \delta}{\Lambda}} > 0, \end{aligned}$$

s.i. čime je dokaz prvog dela kompletan.

2. Dokaz drugog dela teoreme je sličan dokazu prvog dela, pa je izostavljen. $\triangle$

Napomena 5.3 Pod uslovima Teoreme (5.3), kako važi

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t I(s) ds \leq \frac{\check{\Lambda}}{\hat{\mu}}, \quad \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t Q(s) ds \leq \frac{\check{\Lambda}}{\hat{\mu}}, \quad \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t R(s) ds \leq \frac{\check{\Lambda}}{\hat{\mu}}, \quad s.i.,$$

na osnovu Definicije 1.50 se može zaključiti da je bolest čija je dinamika opisana sistemom (5.8) stohastički postojana.

5.1.6 Numeričke simulacije

Kako bi se ilustrovali teorijski rezultati Teorema 5.2 i 5.3 u ovom podpoglavlju su prikazane numeričke simulacije urađene na osnovu podataka iz realnog života.

U Tabeli 5.1 su prikazane realne vrednosti parametara modela širenja virusa SARS-CoV-2 koje su izvedene na osnovu podataka Svetske zdravstvene organizacije (videti [76]), preuzete iz literature gde su procenjene različitim statističkim metodama (videti [169–179]) ili racionalno pretpostavljene.

Simbol	Opis	Rang
Λ	broj novorođenih	$(0, \infty)$
β	stopa transmisije	$(0.2, 1.5)$
θ	brzina reverzije	$(0, \infty)$
l	stopa prelaza iz S u L klasu	$(0, 1)$
l_1	stopa prelaza iz L u S klasu	$(0, 1)$
v	stopa vakcinacije	$(0, 0.24)$
v_1	stopa gubljenja imuniteta dobijenog vakcinacijom	$(1/1825, 1/90)$
r_1	stopa gubljenja imuniteta dobijenog nakon bolesti	$(1/1825, 1/90)$
α	stopa prelaza iz S u L klasu	$(0, 1)$
ρ_i	stopa oporavka za inficirane osobe	$(1/30, 1/3)$
ρ_q	stopa oporavka za osobe u karantinu	$(1/30, 1/3)$
δ	stopa smrtnosti od bolesti	$(0.0001, 0.1)$
μ	prirodna stopa smrtnosti	$(0.033, 0.77)$
τ	inkubacioni period	$(2, 14)$

Tabela 5.1: Rang vrednosti parametara modela (5.8)

Rezultati dokazani u Teoremama 5.2 i 5.3 ilustrovani su za vrednosti parametara i početne vrednosti date u Tabeli 5.2. Sve simulacije su izvedene pod pretpostavkom

dnevne skale i veličine populacije date u milionima. Ovde je fokus bio na stopi prenoša modela (5.8), za čiju se srednju vrednost β_e pretpostavlja da može imati različite vrednosti podrežima jer je u stvarnosti osetljivija na fluktuacije u okruženju od ostalih parametara. U simulacijama smo pretpostavili da svi parametri modela, osim stope prenoša, imaju iste vrednosti u svim podrežimima, koje su date u Tabeli 5.2

	Λ	θ	μ	l	l_1	v	v_1	r_1
Iskorenjivanje bolesti	0.05	0.01	0.045		0.8	0.015	0.007	0.005
Perzistentnost bolesti	0.05	0.01	0.05	0.02	0.8	0.015	0.011	0.011
	α	ρ_i	ρ_q	δ				
Iskorenjivanje bolesti	0.55	0.025	0.025	0.005				
Perzistentnost bolesti	0.3	0.03	0.03	0.0005				
	$S(0)$	$L(0)$	$V(0)$	$I(0)$	$Q(0)$	$R(0)$	$\beta(0)$	
Iskorenjivanje bolesti	0.7	0.025	0.05	0.1	0.07	0.055	0.48	
Perzistentnost bolesti	1	0.0002	0.2	0.003	0.001	0.3	0.7	

Tabela 5.2: Vrednosti parametara i početne vrednosti modela uzete u simulacijama

Na Slici 5.1 je ilustrovan je rezultat dokazan u Teoremi 5.2 s parametrima modela i početnim uslovima datim u Tabeli 5.2. Ovde važi pretpostavka da je $a(t)$ neprekidan zdesna lanac Markova koji ima vrednosti u konačnom prostoru stanja $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Stanja režima srednje vrednosti stope transmisije β_e , parametra l i intenziteta šumova odabrane su na sledeći način:

1. $\beta_e(1) = 0.4$, $\bar{\sigma}(1) = 0.1$, $\eta(1) = 0.2$, $l(1) = 0.07$;
2. $\beta_e(2) = 0.6$, $\bar{\sigma}(2) = 0.25$, $\eta(2) = 0.45$, $l(2) = 0.1$;
3. $\beta_e(3) = 0.45$, $\bar{\sigma}(3) = 0.25$, $\eta(3) = 0.2$, $l(3) = 0.08$;
4. $\beta_e(4) = 0.4$, $\bar{\sigma}(4) = 0.15$, $\eta(4) = 0.25$, $l(4) = 0.04$;
5. $\beta_e(5) = 0.35$, $\bar{\sigma}(5) = 0.2$, $\eta(5) = 0.15$, $l(5) = 0$.

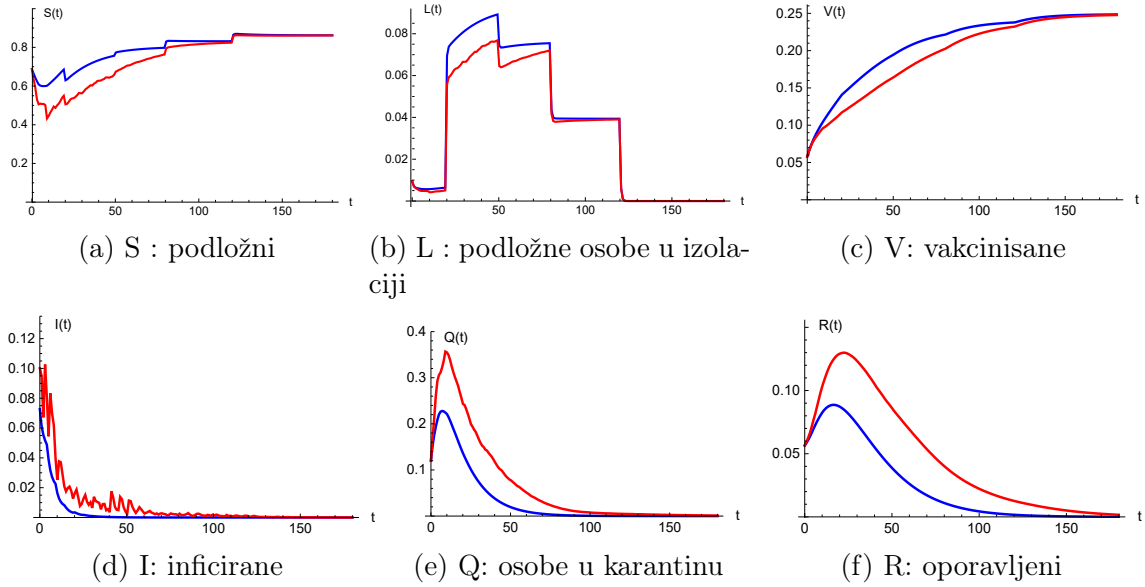
Analizom odabranih vrednosti parametara po režimima može se uočiti jasna dinamika u odgovoru na širenje infekcije. U početnoj fazi (režim 1), evidentan je porast broja inficiranih, što se može povezati sa nedovoljnom stopom vakcinacije i slabim preventivnim merama. Kao odgovor na pogoršanje epidemiološke situacije, u režimu 2 dolazi do povećanja preventivnih mera, što je izraženo kroz višu vrednost parametra $l(2)$, koji može predstavljati intenzitet sprovođenja mera poput zatvaranja (lockdown). U skladu sa smanjenjem broja aktivnih infekcija, koje je rezultat primenjenih intervencija, u narednim režimima dolazi do smanjenja vrednosti parametra l , što ukazuje na postepeno ublažavanje mera i prelazak u stabilniju fazu epidemije.

Uzimajući u obzir da parametar l zavisi od trenutnog stadijuma infekcije u kome se sistem nalazi, opravdano je postaviti pretpostavku da prelazak npr. iz stanja 3 i 4 u stanje 1 i 2, nije moguć. Zbog toga, odabrana je generatorska matrica oblika

$$\Upsilon = \begin{bmatrix} -1/10 & 1/10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/30 & 1/30 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/30 & 1/30 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/40 & 1/40 \\ 1/30 & 0 & 0 & 0 & -1/30 \end{bmatrix}$$

Generatorska matrica je konstruisana na osnovu empirijskih pretpostavki koje uzimaju u obzir da se stopa prenosa virusa ne menja trenutno, već da sistem zadržava određeno stanje tokom izvesnog vremenskog perioda pre nego što pređe u sledeće. Ova osobina odražava prirodu bioloških procesa infekcije, pri čemu svaka faza bolesti ima svoju karakterističnu dužinu trajanja, za razliku od sistema tipičnih za oblasti kao što su telekomunikacije ili širenje računarskih virusa, gde su prelazi između stanja brzi i gotovo trenutni. Takav pristup omogućava realističnije prikazivanje dinamike bolesti kroz različite faze infekcije.

Ovakav izbor parametara modela zadovoljava uslov Teoreme 5.2, pa se, na osnovu rezultata Teoreme 5.2, može se zaključiti da će bolest biti iskorenjena sa verovatnoćom jedan. Grafici na Slici 5.1 potvrđuju ove teorijske rezultate.



Slika 5.1: Iskorenjivanje bolesti - Trajektorije modela (5.8) (crvena) i njegovog ekvivalenta koji ne sadrži Brownovo kretanje i Poissonov proces (plava).

Na Slici 5.2 je ilustrovan je rezultat dokazan u Teoremi 5.3 s parametrima modela i početnim uslovima datim u Tabeli 5.2. Kao i u prvom primeru, važi pretpostavka da je $a(t)$ neprekidan zdesna lanac Markova koji ima vrednosti u konačnom prostoru stanja $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Stanja režima srednje vrednosti stope transmisije β_e i intenziteta šumova su

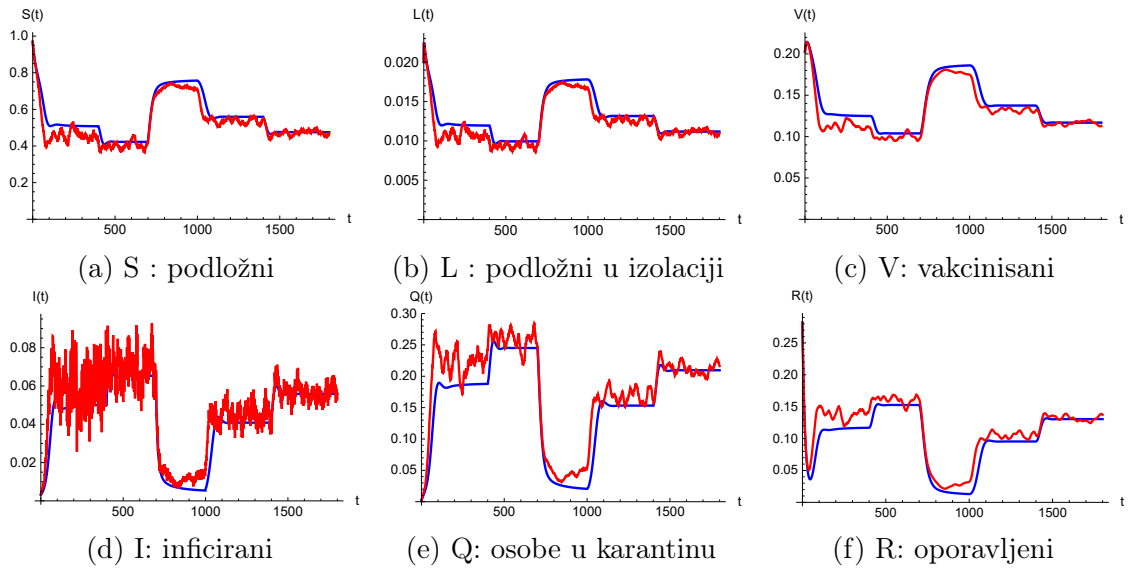
1. $\beta_e(1) = 0.75$, $\bar{\sigma}(1) = 0.3$, $\eta(1) = 0.1$;
2. $\beta_e(2) = 0.9$, $\bar{\sigma}(2) = 0.2$, $\eta(2) = 0.05$;
3. $\beta_e(3) = 0.5$, $\bar{\sigma}(3) = 0.15$, $\eta(3) = 0.025$;
4. $\beta_e(4) = 0.68$, $\bar{\sigma}(4) = 0.12$, $\eta(4) = 0.03$;
5. $\beta_e(5) = 0.8$, $\bar{\sigma}(5) = 0.1$, $\eta(5) = 0.01$.

Za ovakav odabir režima pretpostavlja se da su sva stanja međusobno dostižna u jednom koraku i da se sistem zadržava u svakom stanju određeni vremenski period, što je

opisano generatorskom matricom

$$\Upsilon = \begin{bmatrix} -4/400 & 1/400 & 1/400 & 1/400 & 1/400 \\ 1/300 & -4/300 & 1/300 & 1/300 & 1/300 \\ 1/300 & 1/300 & -4/300 & 1/300 & 1/300 \\ 1/400 & 1/400 & 1/400 & -4/400 & 1/400 \\ 1/300 & 1/300 & 1/300 & 1/300 & -4/300 \end{bmatrix}$$

Takav izbor parametara modela zadovoljavaju prvi uslov Teoreme 5.3. Na osnovu Teoreme 5.3, sistem (5.8) je strogo perzistentan u srednjem, što je potvrđeno i numeričkim rezultatima prikazanim na Slici 5.2.



Slika 5.2: Perzistentnost bolesti - Trajektorije modela (5.8) (crvena) i njegovog ekvivalenta koji ne sadrži Brownovo kretanje i Poissonov proces (plava).

5.1.7 Zaključak

U ovom poglavlju je predstavljen stohastički epidemiološki model sa kašnjenjem (5.8) koji može biti primenjen za modeliranje širenja virusa SARS-CoV-2, nakon kalibracije. Slučajnost iz okruženja je uključena u stopu prenosa, pod pretpostavkom da stopa prenosa zadovoljava mean-reverting Ornstein-Uhlenbeckovu SDJ. Pored standardnog Brownovog kretanja, u model su uključena još dva procesa kojima su opisani slučajni uticaji iz okruženja: stacionarni Poissonov proces i lanac Markova sa konačnim brojem stanja. Dokazano je postojanje globalnog pozitivnog rešenja konstruisanog stohastičkog epidemiološkog modela i utvrđeni dovoljni uslovi za iskorenjivanje i perzistentnost bolesti. Dokazano je da će bolest biti iskorenjena ako je $R_1^* < 1$. S druge strane, ako je $R_0^S > 1$ ili $R_0^{S*} > 1$, bolest će biti perzistentna u populaciji.

Iz oblika za R_1^* , R_0^S i R_0^{S*} može se zaključiti da beli šum i Poissonov proces imaju pozitivan efekat na suzbijanje bolesti. Naime, veći intenziteti belog šuma σ i procesa Lévyja η dovode do iskorenjivanja bolesti. Zamenom identiteta

$$\bar{\sigma}(k) = \frac{\xi(k)}{\sqrt{2\theta(k)}}, k \in A,$$

u izraze R_1^* , R_0^S i R_0^{S*} , može se utvrditi da su R_1^* , R_0^S i R_0^{S*} rastuće funkcije po ξ i opadajuće funkcije po θ , što implicira da manji intenzitet volatilnosti $\xi(k)$, $k \in A$, odnosno veća brzina reverzije $\theta(k)$, $k \in A$, može doprineti da bolest bude perzistentna. Međutim, telegrafski šum ima negativan efekat na suzbijanje bolesti. To znači da, čak i ako je bolest perzistentna samo u jednom režimu dok u ostalim režimima dolazi do iskorenjivanja bolesti, na kraju će bolest imati priliku da opstane u populaciji.

Stohastički model razmatran u ovom poglavlju pruža nova saznanja o epidemiološkim situacijama kada se razmatraju različite vrste šumova iz okruženja. Prisustvo belog šuma, telegrafskog šuma, Lévyjevih skokova i vremenskog kašnjenja pruža dodatno nivo realističnosti modelu čime se bolje opisuju epidemiološke karakteristike i način širenja epidemije u poređenju sa postojećim modelima. Pokazano je da kombinacija ovih perturbacija sa vremenskim kašnjenjem u epidemiološkom modelu ima značajan uticaj na perzistentnost i iskorenjivanje infekcije i obogaćuje dinamiku modela.

U nastavku će biti upoređeni dinamički rezultati sledećih stohastičkih verzija modela:

- Prvi model je stohastički model u kojem je koeficijent prenosa oblika $\beta \rightarrow \beta_e(a(t))$ i parametri modela mogu menjati režim (model ne sadrži beli šum ili proces Lévyja):

$$\begin{aligned} dS(t) &= \left(\Lambda(a(t)) - \frac{\beta_e(a(t))}{N(t)} I(t - \tau) S(t) - (l(a(t)) + v(a(t))) S(t) \right. \\ &\quad \left. - \mu(a(t)) S(t) + l_1(a(t)) L(t) + v_1(a(t)) V(t) + r_1(a(t)) R(t) \right) dt, \\ dL(t) &= (l(a(t)) S(t) - (\mu(a(t)) + l_1(a(t))) L(t)) dt, \\ dV(t) &= (v(a(t)) S(t) - (\mu(a(t)) + v_1(a(t))) V(t)) dt, \\ dI(t) &= \left(\frac{\beta_e(a(t))}{N(t)} I(t - \tau) S(t) - (\alpha(a(t)) + \rho_i(a(t)) + \mu(a(t))) I(t) \right. \\ &\quad \left. - \delta(a(t)) I(t) \right) dt, \\ dQ(t) &= (\alpha(a(t)) I(t) - (\mu(a(t)) + \rho_q(a(t))) Q(t)) dt, \\ dR(t) &= (\rho_i(a(t)) I(t) + \rho_q(a(t)) Q(t) - (\mu(a(t)) + r_1(a(t))) R(t)) dt, \end{aligned}$$

Trajektorije ovog modela ilustrovane su narandžastom bojom na Slikama 5.3 and 5.4.

- Kako bi se bolje opisale epidemiološke karakteristike bolesti, u drugom modelu je odabrana stopa prenosa β oblika $\beta \rightarrow \beta_e(a(t)) + (\beta(0) - \beta_e(a(t))) e^{-\theta(a(t))t}$ i pretpostavlja se da parametri modela mogu menjati režime, odnosno, drugi model je oblika

$$\begin{aligned} dS(t) &= \left(\Lambda(a(t)) - \frac{\beta_e(a(t)) + (\beta(0) - \beta_e(a(t))) e^{-\theta(a(t))t}}{N(t)} I(t - \tau) S(t) \right. \\ &\quad \left. - (l(a(t)) + v(a(t)) - \mu(a(t))) S(t) + l_1(a(t)) L(t) + v_1(a(t)) V(t) \right. \\ &\quad \left. + r_1(a(t)) R(t) \right) dt, \\ dL(t) &= (l(a(t)) S(t) - (\mu(a(t)) + l_1(a(t))) L(t)) dt, \\ dV(t) &= (v(a(t)) S(t) - (\mu(a(t)) + v_1(a(t))) V(t)) dt, \\ dI(t) &= \left(\frac{\beta_e(a(t)) + (\beta(0) - \beta_e(a(t))) e^{-\theta(a(t))t}}{N(t)} I(t - \tau) S(t) - (\alpha(a(t)) + \rho_i(a(t))) I(t) \right. \\ &\quad \left. - (\mu(a(t)) + \delta(a(t))) I(t) \right) dt, \\ dQ(t) &= (\alpha(a(t)) I(t) - (\mu(a(t)) + \rho_q(a(t))) Q(t)) dt, \\ dR(t) &= (\rho_i(a(t)) I(t) + \rho_q(a(t)) Q(t) - (\mu(a(t)) + r_1(a(t))) R(t)) dt, \end{aligned}$$

Trajektorije ovog modela su ilustrovane plavom bojom na Slikama 5.3 and 5.4.

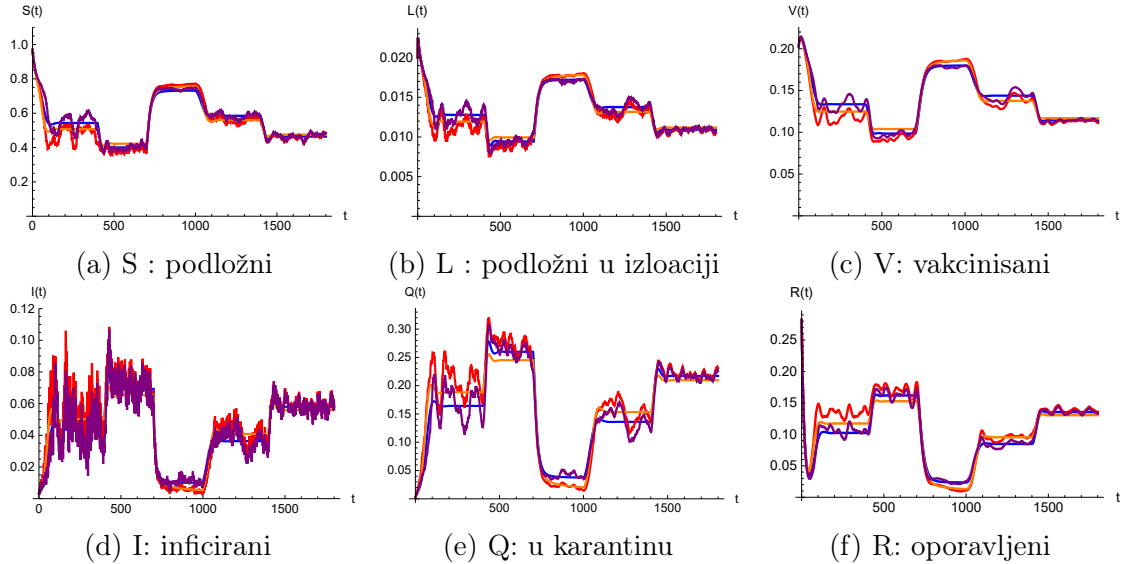
- Treći model je stohastički model u kojem stopa prenosa β zadovoljava OU jednačinu (5.3), a parametri modela mogu menjati režim. Ovaj model koji, za razliku od modela razmatranog u radu, ne sadrži skokove Lévyja, je oblika:

$$\begin{aligned}
dS(t) &= \left(\Lambda(a(t)) - \frac{\beta_e(a(t)) + (\beta(0) - \beta_e(a(t)))e^{-\theta(a(t))t}}{N(t)} I(t - \tau) S(t) \right. \\
&\quad \left. - (l(a(t)) + v(a(t) + \mu(a(t)))) S(t) + l_1(a(t)) L(t) + v_1(a(t)) V(t) \right. \\
&\quad \left. + r_1(a(t)) R(t) \right) dt - \frac{\sigma(a(t), t)}{N(t)} I(t - \tau) S(t) dB(t), \\
dL(t) &= (l(a(t)) S(t) - (\mu(a(t)) + l_1(a(t))) L(t)) dt, \\
dV(t) &= (v(a(t)) S(t) - (\mu(a(t)) + v_1(a(t))) V(t)) dt, \\
dI(t) &= \left(\frac{\beta_e(a(t)) + (\beta(0) - \beta_e(a(t)))e^{-\theta(a(t))t}}{N(t)} I(t - \tau) S(t) - (\alpha(a(t)) + \rho_i(a(t))) I(t) \right. \\
&\quad \left. - (\mu(a(t)) + \delta(a(t))) I(t) \right) dt + \frac{\sigma(a(t), t)}{N(t)} I(t - \tau) S(t) dB(t), \\
dQ(t) &= (\alpha(a(t)) I(t) - (\mu(a(t)) + \rho_q(a(t))) Q(t)) dt, \\
dR(t) &= (\rho_i(a(t)) I(t) + \rho_q(a(t)) Q(t) - (\mu(a(t)) + r_1(a(t))) R(t)) dt,
\end{aligned}$$

Trajektorije ovog model su ilustrovane ljubičastom bojom na Slikama 5.3 i 5.4.

- Četvrti model je (5.8), razmatran u ovom poglavlju, i trajektorije ovog modela su ilustrovane crvenom bojom na Slikama 5.3 i 5.4.

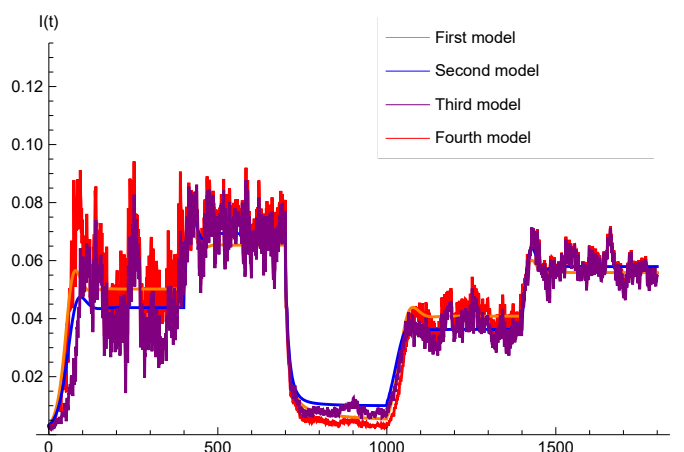
Trajektorije prethodno navedenih verzija modela prikazane na Slikama 5.3 i 5.4 su dobijene korišćenjem istih vrednosti parametara modela, početnih vrednosti, intenziteta belog šuma i generatorske matrice lanca Markova kao u ilustraciji rezultata o perzistentnosti u Podpoglavljju 5.1.6. Ovde intenzitet Lévyjevog procesa ima pet podrežima $\eta(1) = 0.1$, $\eta(2) = 0.05$, $\eta(3) = -0.025$, $\eta(4) = 0.03$, i $\eta(5) = 0.01$.



Slika 5.3: Dinamičko ponašanje različitih verzija modela (5.8).

Kako bi se bolje ilustrovalo poređenje ovih modela, na Slici 5.4 je prikazana klasa inficiranih.

Trajektorije drugog modela, koji po definiciji ima mean-reverting osobinu, veoma su slične trajektorijama prvog modela. Međutim, ovo nije dovoljno poboljšanje jer ovaj model ne opisuje slučajne uticaje iz okruženja. Iz tog razloga su u model uvedene



Slika 5.4: Dinamičko ponašanje klase $I(t)$ različitih verzija modela (5.8).

perturbacije. Trajektorije trećeg modela, u koji su uključene slučajnost iz okruženja, osciluju oko trajektorija drugog (plavog) modela. Ovo čini treći model realističnijim u poređenju sa drugim. Prednosti četvrtog modela ogledaju se u činjenici da četvrti model omogućava opisivanje iznenadnih i značajnih povećanja broja inficiranih osoba pomoću Poissonovog procesa, što nije moguće kod trećeg modela koji sadrži samo beli šum. Na Slici 5.4, upoređujući trajektorije trećeg i četvrtog modela, u trećem režimu možemo videti uticaj Poissonovog skoka koji dovodi do porasta broja zaraženih osoba, što može biti posledica većeg okupljanja ljudi na raznim događajima kao što su koncerti, utakmice i drugi. U četvrtom režimu uticaj skokova dovodi do smanjenja broja zaražene populacije, što, na primer, može biti posledica uvođenja obaveznih preventivnih mera.

Nedostatak modela je pretpostavka da je promena vrednosti parametara modela opisana lancem Markova sa konačnim skupom stanja. Realističnija pretpostavka bi bila modelirati prelaz iz jednog podrežima u drugi ne-Markovskim procesom. Stoga se model može poboljšati uvođenjem ne-Markovskog lanca za modeliranje prelaza između podrežima sa nekom funkcijom raspodele perioda između dva prelaza. Još jedno poboljšanje modela bi bilo uvođenje pretpostavke da verovatnoće prelaza iz jednog podrežima u drugi zavise od broja zaraženih pojedinaca. Osim toga, složenost modela, odnosno, veliki broj parametara modela može dovesti do neadekvatnih rezultata u kalibraciji i oceni parametara modela. Iz tog razloga posebnu pažnju treba posvetiti oceni parametara modela. Takođe, vremensko kašnjenje može se modelirati određenom determinističkom funkcijom ili slučajnom promenljivom, a ne konstantom.

5.2 Stacionarna raspodela stohastičkog epidemiološkog modela sa skokovima Lévyja, kašnjenjem i promenama režima

U ovom poglavlju će biti razmatrano postojanje stacionarne raspodele segment procesa sistema (5.8), koji je opisan u Poglavlju 5.1. Ovde se ispituje postojanje stacionarne raspodele segment procesa sistema (5.8) koji je proces Markova, jer rešenje sistema (5.8) zavisi od stanja iz prošlosti tj. nije proces Markova, pa samim tim nema

stacionarnu raspodelu. Model (5.8) sadrži slučajnost kroz Brownovo kretanje, lanac Markova i Lévyjeve skokove. Kao i u Podpoglavlju 4.2.4, u ispitivanju postojanja stacionarne raspodele modela (5.8), ne može se primeniti teorija iz [13], jer se ona odnosi na stohastičke jednačine koje uključuju samo Brownovo kretanje. Zbog toga će ovde najpre biti pokazano da je segment proces sistema (5.8) proces Markova, a potom će biti primenjena Lema 1.9.

Teorema 5.4 *Neka važi Pretpostavka 1 i neka je $(X(t), a(t)) = (S(t), L(t), V(t), I(t), Q(t), R(t), a(t))$, $t \geq -\tau$, rešenje sistema (5.8) sa proizvoljnom početnom vrednošću $(S(\zeta), L(\zeta), V(\zeta), I(\zeta), Q(\zeta), R(\zeta), a(\zeta)) \in \mathcal{L}^1([-\tau, 0], \Gamma \times \mathbb{A})$. Tada je $\{(X_t, a(t))\}_{t \geq 0}$, proces Markova sa verovatnoćama prelaza $p(s, (\xi, i); t, dy \times \{j\})$ gde je*

$$\mathbb{P}((X_t^{s,(\xi,i)}, a(s)) \in B \times A_1) := \sum_{j \in A_1} \int_B p(s, (\xi, i); t, dy \times \{j\}),$$

za $B \in \mathcal{B}(\mathcal{D}_\tau)$, $(\xi, i) \in \mathcal{D}_\tau \times \mathbb{A}$, $\mathcal{D}_\tau := \mathcal{L}^1([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$, i $A_1 \subset \mathbb{A}$, gde je $X_t^{s,(\xi,i)}$ segment proces rešenja jednačine (5.8) za $t \geq s$, sa početnom vrednošću $X(\theta) = \xi(\theta)$, $\theta \in [s-\tau, s]$ i $a(s) = i \in \mathbb{A}$.

Dokaz. Ova teorema će biti dokazana primenom dokaza Teoreme 1.22 i Leme 1.1

Na osnovu Poglavlja 1 u [19], lanac Markova $a(t)$, čija je generatorska matrica $\Upsilon = \{\gamma_{ij}\}_{n \times n}$, se može predstaviti u obliku stohastičkog integrala u odnosu na Poissonovu slučajnu meru. Neka su Δ_{ij} uzastopni, levo zatvoreni, desno otvoreni intervali realne prave dužine γ_{ij} oblika

$$\begin{aligned} \Delta_{12} &:= [0, \gamma_{12}), \\ \Delta_{13} &:= [\gamma_{12}, \gamma_{12} + \gamma_{13}), \\ &\vdots \\ \Delta_{1n} &:= \left[\sum_{j=2}^{n-1} \gamma_{1j}, \sum_{j=2}^n \gamma_{1j} \right), \\ \Delta_{21} &:= \left[\sum_{j=2}^n \gamma_{1j}, \sum_{j=2}^n \gamma_{1j} + \gamma_{21} \right), \\ \Delta_{23} &:= \left[\sum_{j=2}^n \gamma_{1j} + \gamma_{21}, \sum_{j=2}^n \gamma_{1j} + \gamma_{21} + \gamma_{23} \right), \\ &\vdots \\ \Delta_{2n} &:= \left[\sum_{j=2}^n \gamma_{1j} + \sum_{j=1, j \neq 2}^{n-1} \gamma_{2j}, \sum_{j=2}^n \gamma_{1j} + \sum_{j=1, j \neq 2}^n \gamma_{2j} \right) \end{aligned}$$

i tako dalje. Definiše se funkcija $r : \mathbb{A} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sa

$$r(i, y) := \begin{cases} j - i, & \text{ako } y \in \Delta_{ij}, \\ 0, & \text{u suprotnom.} \end{cases}$$

Tada važi

$$da(t) = \int_{\mathbb{R}} r(a(t^-), y) \nu(dt, dy),$$

sa početnim uslovom $a(0) = i_0$, gde je $\nu(dt, dy)$ Poissonova slučajna mera sa intenzitetom $dt \times \varrho(dy)$, i ϱ Lebesgueova mera na $\mathbb{R}$. Oдавde je

$$a^{s,i}(t) = i + \int_s^t \int_{\mathbb{R}} r(a^{s,i}(u^-), y) \nu(du, dy), \quad (5.25)$$

za $0 \leq s \leq t < \infty$ i $i \in \mathbb{A}$. Zbog nezavisnosti lanca Markova $a(\cdot)$ od Brownovog kretanja $B(\cdot)$ i kompenzovanog Poissonovog procesa $\tilde{N}(\cdot, V)$, $V \subset Y$, ваži i nezavisnost Poissonove slučajne mere $\nu(dt, dy)$ od $B(\cdot)$ i $\tilde{N}(\cdot, V)$, $V \subset Y$.

Neka je $\mathcal{G}_s := \sigma\{B(u) - B(s), \tilde{N}(u, V) - \tilde{N}(s, V), \nu(u, U) - \nu(s, U), u \geq s, U \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), V \subset Y\}$. Kako je $\mathcal{F}_s := \sigma\{B(s), \tilde{N}(s, V), \nu(s, U), s \geq 0, U \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), V \subset Y\}$, očigledno je $\mathcal{G}_s$ nezavisno od $\mathcal{F}_s$ i $\mathcal{F}_t \cap \mathcal{G}_s, t \geq s$, nezavisno od $\mathcal{F}_s$. Pored toga, $(X_t^{s,(\xi,i)}, a^{s,i}(t))$ zavisi od priraštaja $B(u) - B(s), \tilde{N}(u, V) - \tilde{N}(s, V), \nu(u, U) - \nu(s, U)$ za $t \geq u \geq s$, pa je $(X_t^{s,(\xi,i)}, a^{s,i}(t)) \mathcal{F}_t \cap \mathcal{G}_s$ merljiv. Dakle, $(X_t^{s,(\xi,i)}, a^{s,i}(t))$ je nezavisan od $\mathcal{F}_s$. Sa druge strane je $(X_t, a(t)) = (X_t^{s,(X_s, a(s))}, a^{s,a(s)}(t))$ jer $(X_t, a(t))$ zadovoljava jednačine (5.8) i (5.25). Prema tome, za svako $B \in \mathcal{B}(\mathcal{D}_\tau), A_1 \subset \mathbb{A}$, primenom Leme 1.1 gde je $\bar{h}((\xi, i), \omega) := I\{(X_t^{s,(\xi,i)}, a^{s,i}(t)) \in B \times A_1\} = I_{B \times A_1}(X_t^{s,(\xi,i)}, a^{s,i}(t))$, sledi

$$\begin{aligned} \mathbb{P}((X_t, a(t)) \in B \times A_1 | \mathcal{F}_s) &= \sum_{j \in A_1} \mathbb{P}((X_t, a(t)) \in B \times \{j\} | \mathcal{F}_s) \\ &= \sum_{j \in A_1} \mathbb{E}(I_{B \times \{j\}}(X_t, a(t)) | \mathcal{F}_s) \\ &= \sum_{j \in A_1} \mathbb{E}(I_{B \times \{j\}}(X_t^{s,(X_s, a(s))}, a^{s,a(s)}(t)) | \mathcal{F}_s) \\ &= \sum_{j \in A_1} \mathbb{E}(I_{B \times \{j\}}(X_t^{s,(\xi,i)}, a^{s,i}(t)) | \xi = X_s, i = a(s)) \\ &= \sum_{j \in A_1} \mathbb{P}(s, (X_s, a(s)); t, B \times \{j\}) \\ &= \mathbb{P}(s, (X_s, a(s)); t, B \times A_1), \end{aligned}$$

gde je primenjena Teorema 1.40. Ovim je dokaz kompletan. $\triangle$

Sledeća Lema će biti korišćena u dokazu glavnog rezultata.

Lema 5.1 ([180], Posledica 6.4.5) *Diferencijabilna funkcija $f : I \rightarrow \mathbb{R}, I \subseteq \mathbb{R}^n$ je Lipschitzova na I ako i samo ako je f' ograničena na I . Specijalno, ako je f' neprekidna na I , tada je f Lipschitzova na svakom kompaktnom podskupu (tj. zatvorenom, ograničenom podintervalu) od I .*

Teorema 5.5 Neka ваži Pretpostavka 1 i neka je $(X(t), a(t)) = (S(t), L(t), V(t), I(t), Q(t), R(t), a(t))$, $t \geq -\tau$, rešenje sistema (5.8) sa proizvoljnom početnom vrednošću $(S(\zeta), L(\zeta), V(\zeta), I(\zeta), Q(\zeta), R(\zeta), a(\zeta)) \in \mathcal{L}^1([-\tau, 0], \Gamma \times A)$. Ako je

$$R_0^S > 1, \quad (5.26)$$

tada $(X_t, a(t))$ ima jedinstvenu ergodičku stacionarnu raspodelu.

Dokaz. Na osnovu Teoreme 5.4, $(X_t, a(t))$ je proces Markova. Prvo će biti pokazano da $(X_t, a(t))$ ima svojstvo Feller-a, prateći postupak Leme 3.2 iz [181]. Neka je r proizvoljan pozitivan ceo broj i proces $z(X_t, a(t)), t \geq 0, \theta \in [-\tau, 0]$ definisan na sledeći način

$$z(X_t, a(t)) := X_t(\theta) I_{\{|X_t(\theta)| \leq r\}}.$$

Za dato $r > 0$, koeficijenti procesa $X_t(\theta)I_{\{|X_t(\theta)| \leq r\}}$ zadovoljavaju globalni Lipschitzov uslov. Neka je τ_r prvi trenutak u kom proces $X_t(\theta)$ izlazi iz lopte $B(0, r)$, $\tau_r = \inf\{t : X_t(\theta) \notin B(0, r), \theta \in [-\tau, 0]\}$. Za svaku ograničenu Lipschitzovu funkciju f definisanu na $\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{A}$, za koju je $|f(z_1) - f(z_2)| \leq K|z_1 - z_2|$, važi

$$\begin{aligned}
& |Ef(X_t^{x_0}(\theta), a^{x_0}(t)) - Ef(X_t^{y_0}(\theta), a^{y_0}(t))| \\
&= |E(f(X_t^{x_0}(\theta), a^{x_0}(t)) - f(X_t^{y_0}(\theta), a^{y_0}(t)))| \\
&\leq KE(|X_t^{x_0}(\theta) - X_t^{y_0}(\theta)|) \\
&= KE(|X_t^{x_0}(\theta)I_{\{|X_t^{x_0}(\theta)| \leq r\}} + X_t^{x_0}(\theta)I_{\{|X_t^{x_0}(\theta)| > r\}} \\
&\quad - X_t^{y_0}(\theta)I_{\{|X_t^{y_0}(\theta)| \leq r\}} - X_t^{y_0}(\theta)I_{\{|X_t^{y_0}(\theta)| > r\}}|) \\
&\leq 2KE(|X_t^{x_0}(\theta)I_{\{|X_t^{x_0}(\theta)| \leq r\}} - X_t^{y_0}(\theta)I_{\{|X_t^{y_0}(\theta)| \leq r\}}|) \\
&\quad + 2KE(|X_t^{x_0}(\theta)I_{\{|X_t^{x_0}(\theta)| > r\}} - X_t^{y_0}(\theta)I_{\{|X_t^{y_0}(\theta)| > r\}}|) \\
&=: I_1 + I_2,
\end{aligned} \tag{5.27}$$

gde su $X_t^{x_0}(\theta)$ i $X_t^{y_0}(\theta)$ vrednosti segment procesa rešenja sistema (5.8) čije su početne vrednosti x_0 i y_0 , redom. Neka je $X_t^{x_0} := x_0 + \int_0^t b(X_s^{x_0}, a(s))ds + \int_0^t \sigma(X_s^{x_0}, a(s))dB(s) + \int_0^t \int_Y \gamma(X_s^{x_0}, u)\tilde{N}(ds, du)$. Kako je $b(X_t^{x_0}(\theta)I_{\{|X_t^{x_0}(\theta)| \leq r\}}, a(t))$ Lipschitzova funkcija sa koeficijentom K_r , na osnovu Grönwall–Bellmanove nejednakosti (Teorema 1.47), sledi

$$\begin{aligned}
I_1 &= 2KE \left(|x_0 - y_0| + \int_0^t \left[b(X_s^{x_0}(\theta)I_{\{|X_s^{x_0}(\theta)| \leq r\}}, a(s)) - b(X_s^{y_0}(\theta)I_{\{|X_s^{y_0}(\theta)| \leq r\}}, a(s)) \right] ds \right. \\
&\quad + \int_0^t \left[\sigma(X_s^{x_0}(\theta)I_{\{|X_s^{x_0}(\theta)| \leq r\}}, a(s)) - \sigma(X_s^{y_0}(\theta)I_{\{|X_s^{y_0}(\theta)| \leq r\}}, a(s)) \right] dB(s) \\
&\quad \left. + \int_0^t \int_Y \left[\gamma(X_s^{x_0}(\theta)I_{\{|X_s^{x_0}(\theta)| \leq r\}}, u) - \gamma(X_s^{y_0}(\theta)I_{\{|X_s^{y_0}(\theta)| \leq r\}}, u) \right] \tilde{N}(ds, du) \right) \\
&= 2KE \left(|x_0 - y_0| + \int_0^t \left[b(X_s^{x_0}(\theta)I_{\{|X_s^{x_0}(\theta)| \leq r\}}, a(s)) - b(X_s^{y_0}(\theta)I_{\{|X_s^{y_0}(\theta)| \leq r\}}, a(s)) \right] ds \right) \\
&\leq 2KE \left(|x_0 - y_0| + \int_0^t K_r (X_s^{x_0}(\theta)I_{\{|X_s^{x_0}(\theta)| \leq r\}} - X_s^{y_0}(\theta)I_{\{|X_s^{y_0}(\theta)| \leq r\}}) ds \right) \\
&\leq |x_0 - y_0|\varphi(t, \theta, r),
\end{aligned} \tag{5.28}$$

pri čemu je $\varphi(t)$ deterministička funkcija argumenata t, θ i r . Kako je $S(t) + L(t) + V(t) + I(t) + Q(t) + R(t) \leq \frac{\Lambda}{\mu}$ uniformno ograničeno, odnosno, za svako $\varepsilon > 0$, postoji dovoljno veliko $r > 0$, tako da je

$$I_2 \leq 4KE(|X_t^{y_0}(\theta)I_{\{|X_t^{y_0}(\theta)| > r\}}|) \leq \varepsilon. \tag{5.29}$$

Na osnovu nejednakosti (5.27), (5.28), (5.29), za svaku ograničenu Lipschitzovu funkciju f na $\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{A}$, važi

$$|Ef(X_t^{x_0}(\theta), a^{x_0}(t)) - Ef(X_t^{y_0}(\theta), a^{y_0}(t))| \rightarrow 0, \quad \text{kada} \quad x_0 \rightarrow y_0.$$

Na osnovu Leme 5.1 važi da je klasa beskonačno diferencijabilnih funkcija koje nestaju van ograničenog skupa podklasa klase ograničenih Lipschitzovih funkcija, što implicira da

$$|Ef(X_t^{x_0}(\theta), a^{x_0}(t)) - Ef(X_t^{y_0}(\theta), a^{y_0}(t))| \rightarrow 0, \quad \text{kada} \quad x_0 \rightarrow y_0,$$

za svaku beskonačno diferencijabilnu funkciju $f : \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{A}$ koja nestaje van ograničenog skupa. Na osnovu Leme 1.3, sledi da

$$|Ef(X_t^{x_0}(\theta), a^{x_0}(t)) - Ef(X_t^{y_0}(\theta), a^{y_0}(t))| \rightarrow 0, \quad \text{kada} \quad x_0 \rightarrow y_0,$$

za svaku neprekidnu funkciju f na $\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{A}$. Ovo implicira da proces $(X_t, a(t))$ ima svojstvo Feller.

U nastavku će biti konstruisan kompaktan skup D za koji je

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{P}(s, (X_s, a(s)), D) ds > 0, \quad \text{s.i.},$$

gde je $\mathbb{P}(t, (X_t, a(t)), D)$ verovatnoća da $(X_t, a(t))$ pripada skupu D , što, na osnovu Leme 1.9 implicira da $(X_t, a(t))$ ima jedinstvenu ergodičku stacionarnu raspodelu. Neka je C^2 -funkcija $W(t, X_t, k)$ definisana na sledeći način

$$\begin{aligned} W(t, X_t, k) := & M(S(t) + L(t) + V(t) + I(t) + Q(t) + R(t) - \ln(I(t) + 1) - \ln S(t) \\ & - \ln L(t) - \ln V(t) + \max\{\beta_e(k), \beta(0)\} \frac{\mu(k) + \delta(k)}{\Lambda(k)} \int_{t-\tau}^t I(s) ds + \omega(k) \Big) \\ & + \frac{1}{2} (S(t) + L(t) + V(t) + I(t) + Q(t) + R(t))^2 \\ & - \ln S(t) - \ln L(t) - \ln V(t) - \ln Q(t) - \ln R(t), \end{aligned}$$

pri čemu je M dovoljno velika pozitivna konstanta koja zadovoljava

$$-M\psi + A_1 \leq -2, \quad (5.30)$$

ψ i A_1 su definisani izrazima

$$\begin{aligned} \psi := & \sum_{k=1}^n \pi(k) (\Lambda(k) + 4\mu(k) + \alpha(k) + \rho_i(k) + \delta(k) + l(k) + v(k) + l_1(k) + v_1(k) \\ & + \min\{\beta_e(k), \beta(0)\} \frac{\Lambda(k)}{\mu(k)} + \frac{\bar{\sigma}^2(k)}{2} \left(\frac{\Lambda^2(k)}{\mu^2(k)} + \frac{(\mu(k) + \delta(k))^2}{\mu^2(k)} \right) + \int_Y \frac{1}{2} \eta^2(k, u) \frac{\Lambda^2(k)}{\mu^2(k)} \lambda(du) \Big) \\ & (R_0^S - 1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_1 := & \sup_{X_t} \left\{ -\frac{1}{2} \hat{\mu} S^2(t) - \frac{1}{2} \hat{\mu} L^2(t) - \frac{1}{2} \hat{\mu} V^2(t) - \frac{1}{2} (\hat{\mu} + \hat{\delta}) I^2(t) - \frac{1}{2} \hat{\mu} Q^2(t) \right. \\ & - \frac{1}{2} \hat{\mu} R^2(t) + C_2 - \frac{\hat{\Lambda}}{S(t)} - \hat{l} \frac{S(t)}{L(t)} - \hat{v} \frac{S(t)}{V(t)} - \hat{\alpha} \frac{I(t)}{Q(t)} - \hat{\rho}_i \frac{I(t)}{R(t)} \\ & + \frac{\max\{\beta_e, \beta(0)\}}{N(t)} I(t - \tau) + \check{l} + \check{v} + 5\check{\mu} + \frac{\bar{\sigma}^2}{2N^2(t)} I^2(t - \tau) \\ & \left. + \int_Y \frac{1}{2} \eta^2(u) \frac{\hat{\Lambda}^2}{\hat{\mu}^2} \lambda(du) + \check{l}_1 + \check{v}_1 + \check{\rho}_q + \check{r}_1 \right\}, \quad (5.31) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_2 := & \max_{X_t} \left\{ \hat{\Lambda} (S(t) + L(t) + V(t) + I(t) + Q(t) + R(t)) - \frac{1}{2} \hat{\mu} S^2(t) - \frac{1}{2} \hat{\mu} L^2(t) \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \hat{\mu} V^2(t) - \frac{1}{2} (\hat{\mu} + \hat{\delta}) I^2(t) - \frac{1}{2} \hat{\mu} Q^2(t) - \frac{1}{2} \hat{\mu} R^2(t) \right\}, \end{aligned}$$

i $\omega(k) = (\omega_1, \dots, \omega_n)^T(k)$, $k \in A$ će biti definisano u nastavku. Kako je $d^2W(t, X_t, k) > 0$, postoji minimum funkcije $W(t, X_t, k)$. Neka je $W(t_0, X_{t_0}, k_0)$ minimum funkcije W , i neka je $\tilde{W}(t, X_t, k)$ nenegativna C^2 -funkcija definisana na sledeći način

$$\begin{aligned} \tilde{W}(t, X_t, k) := & M(S(t) + L(t) + V(t) + I(t) + Q(t) + R(t) - \ln(I(t) + 1) - \ln S(t) \\ & - \ln L(t) - \ln V(t) + \max\{\beta_e(k), \beta(0)\} \frac{\mu(k) + \delta(k)}{\Lambda(k)} \int_{t-\tau}^t I(s) ds + \omega(k) \Big) \\ & + \frac{1}{2} (S(t) + L(t) + V(t) + I(t) + Q(t) + R(t))^2 \\ & - \ln S(t) - \ln L(t) - \ln V(t) - \ln Q(t) - \ln R(t) - W(t_0, X_{t_0}, k_0). \end{aligned}$$

Radi jednostavnijeg zapisa, uvode se oznake

$$W_1(t, X_t, k) := S(t) + L(t) + V(t) + I(t) + Q(t) + R(t) - \ln(I(t) + 1) - \ln S(t) \\ - \ln L(t) - \ln V(t) + \max\{\beta_e(k), \beta(0)\} \frac{\mu(k) + \delta(k)}{\Lambda(k)} \int_{t-\tau}^t I(s) ds + \omega(k),$$

$$W_2(t, X_t, k) := \frac{1}{2} (S(t) + L(t) + V(t) + I(t) + Q(t) + R(t))^2,$$

$$W_3(t, X_t, k) := -\ln S(t) - \ln L(t) - \ln V(t) - \ln Q(t) - \ln R(t).$$

Na osnovu (5.19), važi

$$\begin{aligned} LW_1(t, X_t, k) &\leq -\sum_{k=1}^n \pi(k) R^*(k) + \max\{\beta(0), \check{\beta}_e\} \frac{\check{\mu} + \check{\delta}}{\hat{\Lambda}} I(t) \\ &= -\sum_{k=1}^n \pi(k) (\Lambda(k) + 4\mu(k) + \alpha(k) + \rho_i(k) + \delta(k) + l(k) + v(k) \\ &\quad + l_1(k) + v_1(k) + \frac{\bar{\sigma}^2(k)}{2} \left(\frac{\Lambda^2(k)}{\mu^2(k)} + \frac{(\mu(k) + \delta(k))^2}{\mu^2(k)} \right. \\ &\quad \left. + \min\{\beta_e(k), \beta(0)\} \frac{\Lambda(k)}{\mu(k)} + \int_Y \frac{1}{2} \eta^2(k, u) \frac{\Lambda^2(k)}{\mu^2(k)} \lambda(du) \right) (R_0^S - 1) \\ &\quad + \max\{\beta(0), \check{\beta}_e\} \frac{\check{\mu} + \check{\delta}}{\hat{\Lambda}} I(t) \\ &= -\psi + \max\{\beta(0), \check{\beta}_e\} \frac{\check{\mu} + \check{\delta}}{\hat{\Lambda}} I(t), \end{aligned} \quad (5.32)$$

pri čemu je odabrano $\omega = (\omega(1), \dots, \omega(n))^T$ koje zadovoljava sledeći Poissonov sistem

$$\Upsilon \omega = \sum_{i=1}^n \pi(i) R^*(i) (1, 1, \dots, 1)^T - R^*,$$

s obzirom da je lanac Markova A ireducibilan,

$$R^*(k) = 3 \sqrt[3]{\min\{\beta_e(k), \beta(0)\} \frac{\Lambda^2(k)}{\mu(k) + \delta(k)} \frac{\mu(k)}{\frac{\Lambda(k)}{\mu(k)} + 1}} + 2\sqrt{l(k)l_1(k)} + 2\sqrt{v(k)v_1(k)} - \varpi(k),$$

$$R^* = (R^*(1), \dots, R^*(n))^T.$$

Primenom operatora $L(\cdot)$ (1.45) na funkciju $W_2(t, X_t, k)$, dobija se

$$\begin{aligned} LW_2(t, X_t, k) &= (S(t) + L(t) + V(t) + I(t) + Q(t) + R(t)) \\ &\quad (\Lambda(k) - \mu(k) (S(t) + L(t) + V(t) + I(t) + Q(t) + R(t)) - \delta(k) I(t)) \\ &\leq \Lambda(k) (S(t) + L(t) + V(t) + I(t) + Q(t) + R(t)) - \mu(k) S^2(t) \\ &\quad - \mu(k) L^2(t) - \mu(k) V^2(t) - (\mu(k) + \delta(k)) I^2(t) - \mu(k) Q^2(t) \\ &\quad - \mu(k) R^2(t) \\ &\leq \check{\Lambda} (S(t) + L(t) + V(t) + I(t) + Q(t) + R(t)) - \hat{\mu} S^2(t) - \hat{\mu} L^2(t) \\ &\quad - \hat{\mu} V^2(t) - (\hat{\mu} + \hat{\delta}) I^2(t) - \hat{\mu} Q^2(t) - \hat{\mu} R^2(t) \\ &\leq -\frac{1}{2} \hat{\mu} S^2(t) - \frac{1}{2} \hat{\mu} L^2(t) - \frac{1}{2} \hat{\mu} V^2(t) - \frac{1}{2} (\hat{\mu} + \hat{\delta}) I^2(t) - \frac{1}{2} \hat{\mu} Q^2(t) \\ &\quad - \frac{1}{2} \hat{\mu} R^2(t) + C_2. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Primenom operatora $L(\cdot)$ (1.45) na $W_3(t, X_t, k)$, dobija se

$$\begin{aligned}
 LW_3(t, X_t, k) &= -\frac{1}{S(t)} \left(\Lambda(k) - \frac{\beta_e(k) + (\beta(0) - \beta_e(k))e^{-\theta(k)t}}{N(t)} I(t - \tau) S(t) - (l(k) + v(k)) S(t) \right. \\
 &\quad - \mu(k) S(t) + l_1(k) L(t) + v_1(k) V(t) + r_1(k) R(t) + \frac{\sigma^2(k, t)}{2N^2(t)} I^2(t - \tau) \\
 &\quad \left. + \int_Y \left(\eta(k, u) \frac{I((t-\tau)^-)}{N(t^-)} - \ln \left(1 + \eta(k, u) \frac{I((t-\tau)^-)}{N(t^-)} \right) \right) \lambda(du) \right. \\
 &\quad - \frac{1}{L(t)} (l(k) S(t) - (\mu(k) + l_1(k)) L(t)) \\
 &\quad - \frac{1}{V(t)} (v(k) S(t) - (\mu(k) + v_1(k)) V(t)) \\
 &\quad - \frac{1}{Q(t)} (\alpha(k) I(t) - (\mu(k) + \rho_q(k)) Q(t)) \\
 &\quad \left. - \frac{1}{R(t)} (\rho_i(k) I(t) + \rho_q(k) Q(t) - (\mu(k) + r_1(k)) R(t)) \right) \\
 &\leq -\frac{\Lambda(k)}{S(t)} + \frac{\beta_e(k) + (\beta(0) - \beta_e(k))e^{-\theta(k)t}}{N(t)} I(t - \tau) + (l(k) + v(k) + \mu(k)) \\
 &\quad - l_1(k) \frac{L(t)}{S(t)} - v_1(k) \frac{V(t)}{S(t)} - r_1(k) \frac{R(t)}{S(t)} + \frac{\sigma^2(k, t)}{2N^2(t)} I^2(t - \tau) \\
 &\quad + \int_Y \frac{1}{2} \left(\eta(k, u) \frac{I((t-\tau)^-)}{N(t^-)} \right)^2 \lambda(du) - l(k) \frac{S(t)}{L(t)} + (\mu(k) + l_1(k)) \\
 &\quad - v(k) \frac{S(t)}{V(t)} + (\mu(k) + v_1(k)) - \alpha(k) \frac{I(t)}{Q(t)} + (\mu(k) + \rho_q(k)) \\
 &\quad - \rho_i(k) \frac{I(t)}{R(t)} - \rho_q(k) \frac{Q(t)}{R(t)} + \mu(k) + r_1(k) \\
 &\leq -\frac{\hat{\Lambda}}{S(t)} + \frac{\max\{\check{\beta}_e, \beta(0)\}}{N(t)} I(t - \tau) + \check{l} + \check{v} + 5\check{\mu} + \frac{\check{\sigma}^2}{2N^2(t)} I^2(t - \tau) \\
 &\quad + \int_Y \frac{1}{2} \check{\eta}^2(u) \frac{\check{\Lambda}^2}{\check{\mu}^2} \lambda(du) \\
 &\quad - \hat{l} \frac{S(t)}{L(t)} - \hat{v} \frac{S(t)}{V(t)} - \hat{\alpha} \frac{I(t)}{Q(t)} - \hat{\rho}_i \frac{I(t)}{R(t)} - \hat{\rho}_q \frac{Q(t)}{R(t)} + \check{l}_1 + \check{v}_1 + \check{\rho}_q + \check{r}_1.
 \end{aligned} \tag{5.34}$$

Na osnovu (5.32), (5.33) i (5.34), sledi da je

$$\begin{aligned}
 LW(t, X_t, k) &\leq M \left(-\psi + \max\{\beta(0), \check{\beta}_e\} \frac{\check{\mu} + \check{\delta}}{\hat{\Lambda}} I(t) \right) - \frac{1}{2} \hat{\mu} S^2(t) \\
 &\quad - \frac{1}{2} \hat{\mu} L^2(t) - \frac{1}{2} \hat{\mu} V^2(t) - \frac{1}{2} (\hat{\mu} + \hat{\delta}) I^2(t) - \frac{1}{2} \hat{\mu} Q^2(t) - \frac{1}{2} \hat{\mu} R^2(t) \\
 &\quad + C_2 - \frac{\hat{\Lambda}}{S(t)} - \hat{l} \frac{S(t)}{L(t)} - \hat{v} \frac{S(t)}{V(t)} - \hat{\alpha} \frac{I(t)}{Q(t)} - \hat{\rho}_i \frac{I(t)}{R(t)} \\
 &\quad + \frac{\max\{\check{\beta}_e, \beta(0)\}}{N(t)} I(t - \tau) + \check{l} + \check{v} + 5\check{\mu} + \frac{\check{\sigma}^2}{2N^2(t)} I^2(t - \tau) \\
 &\quad + \int_Y \frac{1}{2} \check{\eta}^2(u) \frac{\check{\Lambda}^2}{\check{\mu}^2} \lambda(du) + \check{l}_1 + \check{v}_1 + \check{\rho}_q + \check{r}_1.
 \end{aligned} \tag{5.35}$$

Neka je kompakt D definisan na sledeći način

$$\begin{aligned}
 D := \left\{ (X_t, a(t)) : \epsilon \leq S(t) \leq \frac{\hat{\Lambda}}{\hat{\mu}} - \epsilon, \epsilon^2 \leq L(t) \leq \frac{\hat{\Lambda}}{\hat{\mu}} - \epsilon^2, \epsilon^2 \leq V(t) \leq \frac{\hat{\Lambda}}{\hat{\mu}} - \epsilon^2, \right. \\
 \left. \epsilon \leq I(t), I(t - \tau) \leq \frac{\hat{\Lambda}}{\hat{\mu}} - \epsilon, \epsilon^2 \leq Q(t) \leq \frac{\hat{\Lambda}}{\hat{\mu}} - \epsilon^2, \epsilon^2 \leq R(t) \leq \frac{\hat{\Lambda}}{\hat{\mu}} - \epsilon^2 \right\},
 \end{aligned}$$

pri čemu je $\epsilon \in (0, 1)$ konstanta. Za svako $(X_t, a(t)) \in D^c$, može se odabrati dovoljno mala vrednost ϵ tako da su zadovoljeni sledeći uslovi

$$-\frac{\hat{\Lambda}}{\epsilon} + A_2 \leq -1, \tag{5.36}$$

$$-\frac{\hat{l}}{\epsilon} + A_2 \leq -1, \tag{5.37}$$

$$-\frac{\hat{v}}{\epsilon} + A_2 \leq -1, \quad (5.38)$$

$$-\psi M + (\check{\theta}\beta(0) + \max\{\beta(0), \check{\beta}_e\}) M\epsilon + A_1 \leq -1, \quad (5.39)$$

$$-\frac{\hat{\alpha}}{\epsilon} + A_2 \leq -1, \quad (5.40)$$

$$-\frac{\hat{\rho}_i}{\epsilon} + A_2 \leq -1, \quad (5.41)$$

$$-\frac{\hat{\mu}}{4\epsilon^2} + A_3 \leq -1, \quad (5.42)$$

$$-\frac{\hat{\mu}}{4\epsilon^4} + A_4 \leq -1, \quad (5.43)$$

$$-\frac{\hat{\mu}}{4\epsilon^4} + A_5 \leq -1, \quad (5.44)$$

$$-\frac{\hat{\mu} + \hat{\delta}}{4\epsilon^2} + A_6 \leq -1, \quad (5.45)$$

$$-\frac{\hat{\mu}}{4\epsilon^4} + A_7 \leq -1, \quad (5.46)$$

$$-\frac{\hat{\mu}}{4\epsilon^4} + A_8 \leq -1, \quad (5.47)$$

pri čemu su A_2 do A_8 definisane sledećim izrazima

$$A_2 := \sup_{X_t} \tilde{A}(X_t) \quad (5.48)$$

$$\begin{aligned} \tilde{A}(X_t) := & \left\{ M \left(-\psi + \max\{\beta(0), \check{\beta}_e\} \frac{\check{\mu} + \check{\delta}}{\Lambda} I(t) \right) + \frac{\max\{\check{\beta}_e, \beta(0)\}}{N(t)} I(t - \tau) - \frac{1}{2} \hat{\mu} S^2(t) \right. \\ & - \frac{1}{2} \hat{\mu} L^2(t) - \frac{1}{2} \hat{\mu} V^2(t) - \frac{1}{2} (\hat{\mu} + \hat{\delta}) I^2(t) - \frac{1}{2} \hat{\mu} Q^2(t) - \frac{1}{2} \hat{\mu} R^2(t) + C_2 \\ & \left. + \check{l} + \check{v} + 5\check{\mu} + \frac{\check{\sigma}^2}{2N^2(t)} I^2(t - \tau) + \int_Y \frac{1}{2} \check{\eta}^2(u) \frac{\check{\Lambda}^2}{\hat{\mu}^2} \lambda(du) + \check{l}_1 + \check{v}_1 + \check{\rho}_q + \check{r}_1 \right\}, \end{aligned}$$

$$A_3 := \sup_{X_t} \left\{ \tilde{A}(X_t) + \frac{1}{4} \hat{\mu} S^2(t) \right\}, \quad (5.49)$$

$$A_4 := \sup_{X_t} \left\{ \tilde{A}(X_t) + \frac{1}{4} \hat{\mu} L^2(t) \right\}, \quad (5.50)$$

$$A_5 := \sup_{X_t} \left\{ \tilde{A}(X_t) + \frac{1}{4} \hat{\mu} V^2(t) \right\}, \quad (5.51)$$

$$A_6 := \sup_{X_t} \left\{ \tilde{A}(X_t) + \frac{1}{4} (\hat{\mu} + \hat{\delta}) I^2(t) \right\}, \quad (5.52)$$

$$A_7 := \sup_{X_t} \left\{ \tilde{A}(X_t) + \frac{1}{4} \hat{\mu} Q^2(t) \right\}, \quad (5.53)$$

$$A_8 := \sup_{X_t} \left\{ \tilde{A}(X_t) + \frac{1}{4} \hat{\mu} R^2(t) \right\}. \quad (5.54)$$

Za dovoljno malo ϵ , uslov (5.39) važi na osnovu (5.30). Neka su skupovi $D_i, i \in \{1, 2, \dots, 12\}$, definisani na sledeći način

$$\begin{aligned} D_1 &:= \{(X_t, a(t)) : S(t) < \epsilon\}, & D_2 &:= \{(X_t, a(t)) : S(t) \geq \epsilon, L(t) < \epsilon^2\}, \\ D_3 &:= \{(X_t, a(t)) : S(t) \geq \epsilon, V(t) < \epsilon^2\}, & D_4 &:= \{(X_t, a(t)) : I(t) < \epsilon\}, \\ D_5 &:= \{(X_t, a(t)) : I(t) \geq \epsilon, Q(t) < \epsilon^2\}, & D_6 &:= \{(X_t, a(t)) : I(t) \geq \epsilon, R(t) < \epsilon^2\}, \\ D_7 &:= \{(X_t, a(t)) : S(t) > \frac{1}{\epsilon}\}, & D_8 &:= \{(X_t, a(t)) : L(t) > \frac{1}{\epsilon^2}\}, \\ D_9 &:= \{(X_t, a(t)) : V(t) > \frac{1}{\epsilon^2}\}, & D_{10} &:= \{(X_t, a(t)) : I(t) > \frac{1}{\epsilon}\}, \\ D_{11} &:= \{(X_t, a(t)) : Q(t) > \frac{1}{\epsilon^2}\}, & D_{12} &:= \{(X_t, a(t)) : R(t) > \frac{1}{\epsilon^2}\}. \end{aligned}$$

Tada je $D^c = \cup_{i=1}^{12} D_i$. Kako važi (5.35), da bi se pokazalo da je $LW(t, X_t, k) \leq -1$ za svako $(t, X_t, k) \in \mathbb{R}_+ \times D^c$, dovoljno je pokazati da je $LW(t, X_t, k) \leq -1$, za svako $(t, X_t, k) \in \mathbb{R}_+ \times D_i, i \in \{1, 2, \dots, 12\}$.

Slučaj 1. Za svako $(t, X_t, k) \in \mathbb{R}_+ \times D_1$, važi

$$LW(t, X_t, k) \leq -\frac{\hat{\Lambda}}{S(t)} + A_2 \leq -\frac{\hat{\Lambda}}{\epsilon} + A_2,$$

pri čemu je A_2 definisano izrazom (5.48). Primenom (5.36), sledi $LW(t, X_t, k) \leq -1$.

Slučaj 2. Za svako $(t, X_t, k) \in \mathbb{R}_+ \times D_2$, važi

$$LW(t, X_t, k) \leq -\hat{l} \frac{S(t)}{L(t)} + A_2 \leq -\frac{\hat{l}}{\epsilon} + A_2.$$

Primenom nejednakosti (5.37), sledi $LW(t, X_t, k) \leq -1$.

Slučaj 3. Za svako $(t, X_t, k) \in \mathbb{R}_+ \times D_3$, važi

$$LW(t, X_t, k) \leq -\hat{v} \frac{S(t)}{V(t)} + A_2 \leq -\frac{\hat{v}}{\epsilon} + A_2.$$

Primenom nejednakosti (5.38), dobija se $LW(t, X_t, k) \leq -1$.

Slučaj 4. Za svako $(t, X_t, k) \in \mathbb{R}_+ \times D_4$, važi

$$\begin{aligned} LW(t, X_t, k) &\leq -\psi M + \max\{\beta(0), \check{\beta}_e\} \frac{\check{\mu} + \delta}{\hat{\Lambda}} MI(t) + A_1 \\ &\leq -\psi M + \max\{\beta(0), \check{\beta}_e\} \frac{\check{\mu} + \delta}{\hat{\Lambda}} M\epsilon + A_1, \end{aligned}$$

gde je A_1 definisano izrazom (5.31). Primenom (5.39), sledi $LW(t, X_t, k) \leq -1$.

Slučaj 5. Za svako $(t, X_t, k) \in \mathbb{R}_+ \times D_5$, važi

$$LW(t, X_t, k) \leq -\hat{\alpha} \frac{I(t)}{Q(t)} + A_2 \leq -\frac{\hat{\alpha}}{\epsilon} + A_2.$$

Primenom nejednakosti (5.40), dobija se $LW(t, X_t, k) \leq -1$.

Slučaj 6. Za svako $(t, X_t, k) \in \mathbb{R}_+ \times D_6$, važi

$$LW(t, X_t, k) \leq -\hat{\rho}_i \frac{I(t)}{R(t)} + A_2 \leq -\frac{\hat{\rho}_i}{\epsilon} + A_2.$$

Primenom nejednakosti (5.41), sledi $LW(t, X_t, k) \leq -1$.

Slučaj 7. Za svako $(t, X_t, k) \in \mathbb{R}_+ \times D_7$, važi

$$LW(t, X_t, k) \leq -\frac{1}{4} \hat{\mu} S^2(t) + A_3 \leq -\frac{\hat{\mu}}{4\epsilon^2} + A_3,$$

gde je A_3 definisano izrazom (5.49). Primenom (5.42), dobija se $LW(t, X_t, k) \leq -1$.

Slučaj 8. Za svako $(t, X_t, k) \in \mathbb{R}_+ \times D_8$, važi

$$LW(t, X_t, k) \leq -\frac{1}{4} \hat{\mu} L^2(t) + A_4 \leq -\frac{\hat{\mu}}{4\epsilon^4} + A_4,$$

gde je A_4 definisano izrazom (5.50). Primenom (5.43), sledi $LW(t, X_t, k) \leq -1$.
Slučaj 9. Za svako $(t, X_t, k) \in \mathbb{R}_+ \times D_9$, važi

$$LW(t, X_t, k) \leq -\frac{1}{4}\hat{\mu}V^2(t) + A_5 \leq -\frac{\hat{\mu}}{4\epsilon^4} + A_5,$$

gde je A_5 definisano izrazom (5.51). Primenom (5.44), sledi $LW(t, X_t, k) \leq -1$.
Slučaj 10. Za svako $(t, X_t, k) \in \mathbb{R}_+ \times D_{10}$, važi

$$LW(t, X_t, k) \leq -\frac{1}{4}(\hat{\mu} + \hat{\delta})I^2(t) + A_6 \leq -\frac{\hat{\mu} + \hat{\delta}}{4\epsilon^2} + A_6,$$

gde je A_6 definisano izrazom (5.52). Primenom (5.45), sledi $LW(t, X_t, k) \leq -1$.
Slučaj 11. Za svako $(t, X_t, k) \in \mathbb{R}_+ \times D_{11}$, važi

$$LW(t, X_t, k) \leq -\frac{1}{4}\hat{\mu}Q^2(t) + A_7 \leq -\frac{\hat{\mu}}{4\epsilon^4} + A_7,$$

gde je A_7 definisano izrazom (5.53). Primenom (5.46), sledi $LW(t, X_t, k) \leq -1$.
Slučaj 12. Za svako $(t, X_t, k) \in \mathbb{R}_+ \times D_{12}$, važi

$$LW(t, X_t, k) \leq -\frac{1}{4}\hat{\mu}R^2(t) + A_8 \leq -\frac{\hat{\mu}}{4\epsilon^4} + A_8,$$

gde je A_8 definisano izrazom (5.54). Primenom (5.47), sledi $LW(t, X_t, k) \leq -1$.
 Na osnovu prethodnih razmatranja, može se zaključiti da je

$$L\tilde{W}(t, X_t, k) = LW(t, X_t, k) \leq -1, \quad \text{za svako } (t, X_t, k) \in \mathbb{R}_+ \times D^c.$$

Pored toga, važi

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{\mathbb{E}\tilde{W}(t, X_t, a(t))}{t} = \frac{\mathbb{E}\tilde{W}(0, X_0, a(0))}{t} + \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E} \left(L\tilde{W}(s, X_s, a(s)) \right) ds \\ &= \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E} \left(L\tilde{W}(s, X_s, a(s)) \right) ds. \end{aligned}$$

Na osnovu definicije funkcije $\tilde{W}(s, X_s, a(s))$, sledi da je

$$L\tilde{W}(s, X_s, a(s)) \leq K, \quad \forall (s, X_s, a(s)) \in \mathbb{R}_+ \times (D \cup D^c),$$

gde je

$$\begin{aligned} K &= \sup_{X(t) \in \mathbb{R}_+^6} \left\{ M \left(-\psi + \max \{ \beta(0), \check{\beta}_e \} \frac{\hat{\mu} + \hat{\delta}}{\hat{\Lambda}} I(t) \right) - \frac{1}{2}\hat{\mu}S^2(t) \right. \\ &\quad - \frac{1}{2}\hat{\mu}L^2(t) - \frac{1}{2}\hat{\mu}V^2(t) - \frac{1}{2}(\hat{\mu} + \hat{\delta})I^2(t) - \frac{1}{2}\hat{\mu}Q^2(t) - \frac{1}{2}\hat{\mu}R^2(t) + C_2 \\ &\quad - \frac{\hat{\Lambda}}{S(t)} - \hat{l} \frac{S(t)}{L(t)} - \hat{v} \frac{S(t)}{V(t)} - \hat{\alpha} \frac{I(t)}{Q(t)} - \hat{\rho}_i \frac{I(t)}{R(t)} + \frac{\max \{ \check{\beta}_e, \beta(0) \}}{N(t)} \frac{\hat{\Lambda}}{\hat{\mu}} \\ &\quad \left. + \check{l} + \check{v} + 5\check{\mu} + \frac{\hat{\sigma}^2}{2N^2(t)} \frac{\hat{\Lambda}^2}{\hat{\mu}^2} + \int_Y \frac{1}{2} \check{\eta}^2(u) \frac{\hat{\Lambda}^2}{\hat{\mu}^2} \lambda(du) + \check{l}_1 + \check{v}_1 + \check{\rho}_q + \check{r}_1 \right\}. \end{aligned}$$

Tada važi

$$\begin{aligned} 0 &\leq \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E} \left(L\tilde{W}(s, X_s, a(s)) \right) ds \\ &= \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E} \left(L\tilde{W}(s, X_s, a(s)) \right) 1_{\{(X_s, a(s)) \in D\}} ds \\ &\quad + \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E} \left(L\tilde{W}(s, X_s, a(s)) \right) 1_{\{(X_s, a(s)) \in D^c\}} ds \\ &\leq K \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t 1_{\{(X_s, a(s)) \in D\}} ds - \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t 1_{\{(X_s, a(s)) \in D^c\}} ds \\ &\leq (K + 1) \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E} 1_{\{(X_s, a(s)) \in D\}} ds - 1, \end{aligned}$$

što implicira

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E} 1_{\{(X_s, a(s)) \in D\}} ds \geq \frac{1}{K+1} > 0, \quad \text{s.i.}$$

Kako je sa $\mathbb{P}(t, (X_t, a(t)), D)$ označena verovatnoća da $(X_t, a(t))$ pripada skupu D , to je

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{P}(s, (X_s, a(s)), D) ds \geq \frac{1}{K+1} > 0, \quad \text{s.i.}$$

Na osnovu Leme 1.9, $(X_t, a(t))$ ima jedinstvenu ergodičku stacionarnu raspodelu. Ovim je dokaz kompletan. $\triangle$

U Teoremi 5.5 je dokazano da, ako je uslov $R_0^S > 1$ zadovoljen, tada $(X_t, a(t))$ ima ergodičku stacionarnu raspodelu. Kako postojanje stacionarne raspodele označava stohastičku slabu stabilnost sistema, segment proces netrivialnog rešenja stohastičkog sistema oscilira oko segment procesa endemskog ekvilibrijuma odgovarajućeg determinističkog sistema, odnosno, bolest je perzistentna u populaciji.

Bibliografija

- [1] J. Đorđević, I. Papić, N. Šuvak. A two diffusion stochastic model for the spread of the new corona virus SARS-CoV-2. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2021.
- [2] J. Đorđević, C. J. Silva. A stochastic SICA epidemic model for HIV transmission. *Applied Mathematics Letters*, 84:168–175, 2018.
- [3] J. Đorđević, C. J. Silva. A stochastic analysis of the impact of fluctuations in the environment on pre-exposure prophylaxis for HIV infection. *Soft Computing*, 23, 2019.
- [4] D. Li, F. Wei, X. Mao. Stationary distribution and density function of a stochastic SVIR epidemic model. *Journal of the Franklin Institute*, 359:9422–9449, 2022.
- [5] Z. Cao, W. Feng, X. Wen. Dynamical behavior of a stochastic SEI epidemic model with saturation incidence and logistic growth. *Physica A*, 523:894–907, 2019.
- [6] W. Wang, Y. Cai, Z. Ding, Z. Gui. A stochastic differential equation SIS epidemic model incorporating Ornstein–Uhlenbeck process. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 509:921–936, 2018.
- [7] Y. Cai, J. Jiao, Z. Gui, Y. Liu, W. Wang. Environmental variability in a stochastic epidemic model. *Applied Mathematics and Computation*, 329:210–226, 2018.
- [8] X. Zhang, D. Jiang, A. Alsaedi, T. Hayat. Stationary distribution of stochastic SIS epidemic model with vaccination under regime switching. *Applied Mathematics Letters*, 59:87–93, 2016.
- [9] Q. Liu, D. Jiang, N. Shi. Threshold behavior in a stochastic SIQR epidemic model with standard incidence and regime switching. *Applied Mathematics and Computation*, 316:310–325, 2018.
- [10] B. Boukanjime, T. Caraballo, M. E. Fatini, M. E. Khalifi. Dynamics of a stochastic coronavirus (COVID-19) epidemic model with markovian switching. *Chaos, Solitons & Fractals*, 141, 2020.
- [11] L. D. Bergsman, J. M. Hyman, C. A. Manore. A mathematical model for the spread of west nile virus in migratory and resident birds. *Mathematical biosciences and engineering*, 3:401–424, 2016.
- [12] B. Jovanović, J. Đorđević, J. Manojlović, N. Šuvak. Analysis of stability and sensitivity of deterministic and stochastic models for the spread of the new corona

- virus SARS-CoV-2. *Filomat*, 35 (3):1045–1063. (B. Jovanović, J. Đorđević, J. Manojlović, N. Šuvak. Corrigendum to "Analysis of Stability and Sensitivity of Deterministic and Stochastic Models for the Spread of the New Corona Virus SARS-CoV-2"[*Filomat* 35:3 (2021), 1045–1063], *Filomat* (2025), accepted), 2021.
- [13] R.Z. Khasminskii. *Stochastic stability of differential equations*. Sijthoff Noordhoff, Alphen aan den Rijn, The Netherlands, 1980.
- [14] A. A. Elsadany, Waleed Adel, Yassine Sabbar. *Biology and Sustainable Development Goals, Applications of Mathematical Methods*. Springer Singapore, 2025.
- [15] B. Jovanović. Dynamical analysis and stationary distribution of a stochastic delayed epidemic model with lévy jump. *Mathematical Communications*, 30:1–25, 2025.
- [16] J. Đorđević, B. Jovanović. Dynamical analysis of a stochastic delayed epidemic model with lévy jumps and regime switching. *Journal of the Franklin Institute*, 360:1252–1283. (J. Đorđević, B. Jovanović. Corrigendum to Dynamical analysis of a stochastic delayed epidemic model with Lévy jumps and regime switching"[*Journal of the Franklin Institute* 360 (2023) 1252–1283], *Journal of the Franklin Institute* 362(6):107582 (2025))., 2023.
- [17] E. Allen. Environmental variability and mean-reverting processes. *Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series B*, 21 (7):2073–2089, 2016.
- [18] X. Mao. *Stochastic Differential Equations and Applications*. Woodhead Publishing Limited, 2011.
- [19] X. Mao, C. Yuan. *Stochastic Differential Equations With Markovian Switching*. Imperial College Press, 2006.
- [20] B. Øksendal. *Stochastic Differential Equations*. Springer, 2003.
- [21] B. Øksendal, A. Sulem. *Applied Stochastic Control of Jump Diffusions*. Heidelberg: Springer-Verlag, 2005.
- [22] P. E. Protter. *Stochastic Integration and Differential Equations*. Springer-Verlag, 1990.
- [23] D. Applebaum. *Lévy Processes and Stochastic Calculus*. 2nd ed., Cambridge University Press, 2009.
- [24] R. Situ. *Theory of stochastic differential equations with jumps and applications*. Springer, 2005.
- [25] J. L. Doob. Stochastic processes. *John Wiley, New York*, 1953.
- [26] P. A. Meyer. Probability and potentials. *Blaisdell, Waltham*, 1966.
- [27] R. Lipster. A strong law of large numbers for local martingales. *Stochastics*, 3:217–228, 1980.
- [28] R. Bhattacharya, E. Waymire. *Stochastic Processes with Applications*. John Wiley and Sons, New York, 1990.

- [29] B. Øksendal. Space-Time Stochastic Calculus and White Noise. In: Morel, JM., Teissier, B. (eds) *Mathematics Going Forward. Lecture Notes in Mathematics. Springer Cham.*, vol 2313, 2023.
- [30] K. Ito. On a formula concerning stochastic differentials. *Nagoya Math. J.*, 3:55–65, 1951.
- [31] K. Ito. On a formula of stochastic differentials. *Mathematika, Sbornik perevodov inost. statei*, 3:131–141, 1959.
- [32] P. A. Meyer. Un cours sur les intégrales stochastiques. *Lecture Notes in Math.*, 511:245–398, 1976.
- [33] I. I. Gikhman. Certain differential equations with random functions. *Ukrainian Mathematical Journal*, 2(3):45–69 (InRussian), 1950.
- [34] I. I. Gikhman. On the theory of differential equations of random processes. *Ukrainian Mathematical Journal*, 2(4):37–63 (InRussian), 1950.
- [35] K. Itô. Stochastic integrals. *Proceedings of the Imperial Academy*, 20(8):519–524, 1944.
- [36] K. Itô. On stochastic differential equations. *American Mathematical Society*, 4:1–51, 1951.
- [37] D.R. Baños, F. Cordoni, G. Di Nunno, L. Di Persio, E.E. Røse. Stochastic systems with memory and jumps. *Journal of Differential Equations*, 266:5772–5820, 2019.
- [38] S.E.A. Mohammed. *Stochastic differential systems with memory: theory, examples and applications*, In: L. Decreusefond, B. Øksendal, J. Gjerde, A.S. Üstünel. (eds) *Stochastic Analysis and Related Topics VI. Progress in Probability*. vol 42. Birkhäuser, Boston, MA, 1998.
- [39] I.I. Gikhman, A.V. Skorokhod. *Stochastic differential equations and their applications*. Naukova Dumka, 1982.
- [40] S. Peng, X. Zhu. Necessary and sufficient condition for comparison theorem of 1-dimensional stochastic differential equations. *Stochastic Processes and their Applications*, 116:370–380, 2006.
- [41] S. Crepey. About the pricing equations in finance. *Paris-Princeton Lectures on Mathematical Finance*, page 63–203, 2010.
- [42] E. Savku. Memory and anticipation: two main theorems for markov regime-switching stochastic processes. *Stochastics*, pages 1–18, 2024.
- [43] C. Yuan, X. Mao. Stability of stochastic delay hybrid systems with jumps. *European Journal of Control*, 6:595–608, 2010.
- [44] C. Zhu, G. Yin. Asymptotic properties of hybrid diffusion systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 46 (4):1155–1179, 2007.
- [45] W. Kliemann. Qualitative theory of stochastic dynamical systems—applications to life sciences. *Bull. Math. Biol.*, 45:483–506, 1983.

- [46] N. Ikeda, S. Watanabe. *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes*, 2nd ed. North-Holland Math. Libr., Vol. 24, North-Holland, Amsterdam, 1989.
- [47] F. Xi, C. Zhu. On feller and strong feller properties and exponential ergodicity of regime-switching jump diffusion processes with countable regimes. *SIAM J. Control Optim.*, 55(247):1789–1818, 2017.
- [48] L. Stettner. On the Existence and Uniqueness of Invariant Measure for Continuous Time Markov Processes. *Tech. report*, pages 18–86, 1986.
- [49] L.J. Allen. *Stochastic Population and Epidemic Models: Persistence and Extinction*. Springer, 2015.
- [50] D. S. Mitrinović, J. E. Pečarić, A. M. Fink. *Inequalities Involving Functions and Their Integrals and Derivatives*. Kluwer Academic Publishers, 1991.
- [51] S. Bhowmick, J. Gethmann, F. J. Conraths, I. M. Sokolov, H. H.K. Lentz. Locally temperature - driven mathematical model of west nile virus spread in germany. *Journal of Theoretical Biology*, 488:110117, 2020.
- [52] W. Zhou, Y. Xiao, R. A. Cheke. A threshold policy to interrupt transmission of west nile virus to birds. *Applied Mathematical Modelling*, 40:8794–8809, 2016.
- [53] I. Kioutsoukisa, N. I. Stilianakis. Assessment of west nile virus transmission risk from a weather-dependent epidemiological model and a global sensitivity analysis framework. *Acta Tropica*, 193:129–141, 2019.
- [54] M. Jovanović, M. Krstić. Stochastically perturbed vector-borne disease models with direct transmission. *Applied Mathematical Modelling*, 36:5214–5228, 2012.
- [55] D. B. Botkin, R. S. Miller. Mortality rates and survival of birds. *American Naturalist*, 108:181–192, 1974.
- [56] L. Colton, B. J. Biggerstaff, A. Johnson, R. S. Nasci. Quantification of west nile virus in vector mosquito saliva. *Journal of the American Mosquito Control Association*, 21:49–53, 2005.
- [57] D. S. Farner. Age groups and longevity in the american robin: Comments, further discussion, and certain revisions. *The Wilson Bulletin*, 61:68–81, 1949.
- [58] L. B. Goddard, A. E. Roth, W. K. Reisen, T. W. Scott. Vertical transmission of west nile virus by three california culex (diptera: Culicidae) species. *Journal of medical entomology*, 40:743–746, 2003.
- [59] N. Komar. West nile virus: epidemiology and ecology in north america. *Advances in virus research*, 61:185–234, 2003.
- [60] R. G. McLean, S. R. Ubico, D. E. Docherty, W. R. Hansen, L. Sileo, T. S. McNamara. West nile virus transmission and ecology in birds. *Annals of the New York Academy of Sciences*, 951:54–57, 2001.
- [61] F. Morneau, C. Lpine, R. Dcarie, M.-A. Villard, J.-L. DesGranges. Reproduction of american robin (*turdus migratorius*) in a suburban environment. *Landscape and urban planning*, 32:55–62, 1995.

- [62] W. K. Reisen, M. M. Milby, R. P. Meyer. Population dynamics of adult culex mosquitoes (diptera: Culicidae) along the kern river, kern county, california, in 1990. *Journal of medical entomology*, 29:531–543, 1992.
- [63] M. R. Sardelis, M. J. Turell, D. J. Dohm, M. L. O’Guinn. Vector competence of selected north american culex and coquillettidia mosquitoes for west nile virus. *Emerging infectious diseases*, 7:1018, 2001.
- [64] J. E. Simpson, P. J. Hurtado, J. Medlock, G. Molaei, T. G. Andreadis, A. P. Galvani, M. A. Diuk-Wasser. Vector host-feeding preferences drive transmission of multi-host pathogens: West nile virus as a model system. *Proceedings of the Royal Society B: Biological Sciences*, 279:925–933, 2012.
- [65] S. Tiawsirisup, K. B. Platt, R. B. Evans, W. A. Rowley. Susceptibility of ochlerotatus trivittatus (coq.), aedes albopictus (skuse), and culex pipiens (l.) to west nile virus infection. *Vector-Borne Zoonotic Diseases*, 4:190–197, 2004.
- [66] S. Tiawsirisup, K. B. Platt, R. B. Evans, W. A. Rowley. A comparision of west nile virus transmission by ochlerotatus trivittatus (coq.), culex pipiens (l.), and aedes albopictus (skuse). *Vector-Borne Zoonotic Diseases*, 5:40–47, 2005.
- [67] M. J. Turell, M. R. Sardelis, D. J. Dohm, M. L. O’Guinn. Potential for north american mosquitoes to transmit west nile virus. *American Journal of Tropical Medicine and Hygiene*, 62:413–414, 2000.
- [68] E. B. Vinogradova. Culex pipiens pipiens mosquitoes: taxonomy, distribution, ecology, physiology, genetics, applied importance and control. *Pensoft Publishers*, 2000.
- [69] A. M. Kilpatrick, L. D. Kramer, M. J. Jones, P. P. Marra, P. Daszak. West nile virus epidemics in north america are driven by shifts in mosquito feeding behavior. *PLoS Biol.*, 4:e82, 2006.
- [70] J. L. Kwan, S. Kluh, W. K. Reisen. Antecedent avian immunity limits tangential transmission of west nile virus to humans. *PLoS ONE*, 7:e34127, 2012.
- [71] C. A. Bradley, S. E. J. Gibbs, S. Altizer. Urban land use predicts west nile virus exposure in songbirds. *Ecological Applications*, 18:1083–1092, 2008.
- [72] T. A. Beveroth, M. P. Ward, R. L. Lampman, A. M. Ringia, R. J. Novak. Changes in seroprevalence of west nile virus across illinois in free-ranging birds from 2001 through 2004. *The American journal of tropical medicine and hygiene*, 74:174–179, 2006.
- [73] G. Buckley. Carrying capacity. 2021.
- [74] P. R. Ehrlich. Human carrying capacity, extinctions, and nature reserves. *Bio-Science*, 32(5):331–333, 1982.
- [75] G. N. Milstein, E. Platen , H. Schurz. Balanced implicit methods for stiff stochastic systems. *SIAM J Numer Anal*, 35:1010–9, 1998.
- [76] World Health Organization. <https://bit.ly/3lHPb3l>, 2021.

- [77] H. S. Rahman, M. S. Aziz, R. H. Hussein, H. H. Othman, S. H. S. Omer, E. S. Khalid, N. A. Abdulrahman, K. Amin, R. Abdullah. The transmission modes and sources of COVID-19: A systematic review. *International Journal of Surgery Open*, 26, 2020.
- [78] H. S. Rahman, M.S. Aziz et al. The transmission modes and sources of COVID-19: A systematic review. *International Journal of Surgery Open*, 26:125–136, 2020.
- [79] M. Cevik, K. Kuppalli, J. Kindrachuk, M. Peiris. Virology, transmission, and pathogenesis of SARS-CoV-2. *The BMJ*, 371:m3862, 2020.
- [80] A. M. Pollock. Asymptomatic transmission of COVID-19. *The BMJ*, 371:m4851, 2020.
- [81] R. Subramanian, Q. He, M. Pascual. Quantifying asymptomatic infection and transmission of COVID-19 in New York City using observed cases, serology, and testing capacity. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 118(9), 2021.
- [82] A. P. Lemos-Paiao, C. J. Silva, D. F. M. Torres. A new compartmental epidemiological model for COVID-19 with a case study of Portugal. *Ecological Complexity*, 44, 2020.
- [83] F. Ndaïrou, I. Area, J.J. Nieto, D.F.M. Torres. Mathematical modeling of COVID-19 transmission dynamics with a case study of Wuhan. *Chaos, Solitons & Fractals*, 135, 2020.
- [84] A. Viguerie, G. Lorenzo et al. Simulating the spread of COVID-19 via a spatially-resolved susceptible–exposed–infected–recovered–deceased (SEIRD) model with heterogeneous diffusion. *Applied Mathematics Letters*, 111:106617, 2021.
- [85] A. Idris, Modu G.U. et al. A mathematical model of coronavirus disease (COVID-19) containing asymptomatic and symptomatic classes. *Results in Physics*, 21:103776, 2021.
- [86] A. Babaei, H. Jafari, S. Banihashemi, M. Ahmadi. Mathematical analysis of a stochastic model for spread of coronavirus. *Chaos, Solitons & Fractals*, 145:110788, 2021.
- [87] D. Adak, A. Majumder, N. Bairagi. Mathematical perspective of COVID-19 pandemic: Disease extinction criteria in deterministic and stochastic models. *Chaos, Solitons & Fractals*, 142:110381, 2021.
- [88] Statista. <https://www.statista.com/statistics/250650/number-of-births-in-china>, 2021.
- [89] F. Ndaïrou, I. Area, J. J. Nieto, D. F. M. Torres. Corrigendum to mathematical modeling of COVID-19 transmission dynamics with a case study of Wuhan. *Chaos, Solitons & Fractals*, 141, 2020.
- [90] S. Janković . *Diferencijalne jednačine, 2004*. Prirodno-matematički fakultet, Niš, 2004.

- [91] P. Van den Driessche, J. Watmough. Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission. *Mathematical Biosciences*, 180(1-2):29–48, 2002.
- [92] C. Castillo-Chavez, B. Song. Dynamical models of tuberculosis and their applications. *Mathematical Biosciences and Engineering*, 1(2):361–404, 2004.
- [93] R. Rifhat, T. Teng, C. Wang. Extinction and persistence of a stochastic SIRV epidemic model with nonlinear incidence rate. *Advances in Difference Equations*, (200), 2021.
- [94] N. Chitnis, J. M. Hyman, J. M. Cushing. Determining important parameters in the spread of malaria through the sensitivity analysis of a mathematical model. *Bulletin of Mathematical Biology*, 70, 2008.
- [95] S. K. Biswas, U. Ghosh, S. Sarkar. Mathematical model of zika virus dynamics with vector control and sensitivity analysis. *Infectious Disease Modelling*, 5:23–41, 2020.
- [96] P. Samui, J. Mondal, S. Khajanchi. A mathematical model for covid-19 transmission dynamics with a case study of india. *Chaos, Solitons & Fractals*, 140, 2020.
- [97] S. S. Nadim, J. Chattopadhyay. Occurrence of backward bifurcation and prediction of disease transmission with imperfect lockdown: A case study on covid-19. *Chaos, Solitons & Fractals*, 140, 2020.
- [98] D. Shangguan, Z. Liu, L. Wang, R. Tan. A stochastic epidemic model with infectivity in incubation period and homestead-isolation on the susceptible. *Journal of Applied Mathematics and Computing (2021)* 67:785–805, 67:785–805, 2021.
- [99] K. Bao, Q. Zhang. Stationary distribution and extinction of a stochastic sirs epidemic model with information intervention. *Advances in Difference Equations*, 352, 2017.
- [100] B. Han, B. Zhou, D. Jiang, T. Hayat, A. Alsaedi. Stationary solution, extinction and density function for a high-dimensional stochastic sei epidemic model with general distributed delay. *Applied Mathematics and Computation*, 405:126236, 2021.
- [101] Q. Liu, D. Jiang, T. Hayat, A. Alsaedi. Dynamics of a stochastic SIR epidemic model with distributed delay and degenerate diffusion. *Journal of the Franklin Institute*, 356:7347–7370, 2019.
- [102] M. Gao, D. Jiang . Ergodic stationary distribution of a stochastic chemostat model with regime switching. *Physica A*, 524:491–502, 2019.
- [103] C. Liu, J. Heffernan. Stochastic dynamics in a delayed epidemic system with markovian switching and media coverage. *Advances in Difference Equations*, 439, 2020.
- [104] S. Levin. Dynamical behavior of epidemiological models with nonlinear incidence rates. *Journal of Mathematical Biology*, 25:359–380, 1987.

- [105] K. L. Cooke, P. van Den Driessche. Analysis of an SEIRS epidemic model with two delays. *J. Math. Biol.*, 35:240–260, 1996.
- [106] W. Wang. Global behavior of an SEIRS epidemic model with time delays. *Appl. Math. Lett.*, 15:423–428, 2002.
- [107] D. Nguyen, N. Nguyen, G. Yin. Analysis of a spatially inhomogeneous stochastic partial differential equation epidemic model. *J. Appl. Probab.*, 57:613–636, 2020.
- [108] N. Nguyen, G. Yin. Stochastic partial differential equation SIS epidemic models: modeling and analysis. *Commun. Stoch. Anal.*, 13:3, 8, 2019.
- [109] H. W. Hethcote, P. van den Driessche. Some epidemiological models with nonlinear incidence. *J. Math. Biol.*, 29:271–287, 1991.
- [110] R. M. May, R. M. Anderson. Regulation and stability of host-parasite population interactions II: Destabilizing process. *J. Anim. Ecol.*, 47:219–267, 1978.
- [111] S. Ruan, W. Wang. Dynamical behavior of an epidemic model with nonlinear incidence rate. *J. Differential Equations*, 188:135–163, 2003.
- [112] J. Hui, L. Chen. Impulsive vaccination of sir epidemic models with nonlinear incidence rates. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, 4:595–605, 2004.
- [113] N. H. Du, N. T. Dieu, N. N. Nhu. Conditions for permanence and ergodicity of certain SIR epidemic models. *Acta Appl. Math.*, page 1–19, 2018.
- [114] N. H. Du, N. N. Nhu. Permanence and extinction of certain stochastic SIR models perturbed by a complex type of noises. *Appl. Math. Lett.*, 64:223–230, 2017.
- [115] T. Caraballo, M. Fatini, R. Pettersson, R. Taki. A stochastic SIRI epidemic model with relapse and media coverage. *Discrete Cont. Dyn. B*, 23:2483–3501, 2018.
- [116] L. Huo, J. Jiang, S. Gong, B. He. Dynamical behavior of a rumor transmission model with holling-type II functional response in emergency event. *Physica A*, 450:228–240, 2016.
- [117] Q. Liu, D. Jiang, N. Shi, T. Hayat, A. Alsaedi. Dynamical behavior of a stochastic HBV infection model with logistic hepatocyte growth. *Acta Math. Sci.*, 37 (4):927–940, 2017.
- [118] T. Feng, X. Meng, T. Zhang, Z. Qiu. Analysis of the predator-prey interactions: a stochastic model incorporating disease invasion. *Qual. Theor. Dyn. Syst.*, 19 (55):1–20, 2020.
- [119] S. P. Rajasekar, M. Pitchaimani. Ergodic stationary distribution and extinction of a stochastic sirs epidemic model with logistic growth and nonlinear incidence. *Appl. Math. Comput.*, 377:125143, 2020.
- [120] J. Li, Z. Teng, G. Wang, L. Zhang, C. Hu. Stability and bifurcation analysis of an sir epidemic model with logistic growth and saturated treatment. *Chaos, Solitons and Fractals.*, 99:63–71, 2017.

- [121] J. Djordjević, K. R. Dahl. Stochastic optimal control of pre-exposure prophylaxis for HIV infection. *Mathematical Medicine and Biology: A Journal of the IMA*, 39:197–225, 2022.
- [122] A. Din, T. Chen, G. Zhang, Z. Li. Dynamic analysis and optimal control of a stochastic covid-19 model. *Mathematics and Computers in Simulation*, 215:498–517, 2024.
- [123] T. Cui, A. Din, P. Liu, A. Yusuf. Stochastic optimal control analysis for the covid-19 epidemic model under real statistics. *Fractals*, 30(8):2240220, 2022.
- [124] L. Huang, A. Yusuf, P. Liu, A. Din. Stochastic optimal control analysis for the hepatitis b epidemic model. *Results in Physics*, 26:104372, 2021.
- [125] R. Balderrama, J. Peressutti, J. P. Pinasco, F. Vazquez, C. Sánchez de la Vega . Optimal control for a SIR epidemic model with limited quarantine. *Scientific reports*, 12, 2022.
- [126] A. A. Khan, S. Ullaha, R. Amin. Optimal control analysis of COVID-19 vaccine epidemic model: a case study. *Eur. Phys. J. Plus*, 2022.
- [127] A. Rachah, D. F. M. Torres. Mathematical modelling, simulation, and optimal control of the 2014 ebola outbreak in West Africa. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 842792:9 pages, 2015.
- [128] C. L. Althaus. Estimating the reproduction number of ebola virus (EBOV) during the 2014 outbreak in west africa. *PLOS Currents Outbreaks*, 2:6, 2014.
- [129] S. Alizon, S. Lion, C. L. Murall, J. L. Abbate. Quantifying the epidemic spread of ebola virus (EBOV) in Sierra Leone using phylodynamics. *Virulence*, 5 (8):825–827, 2014.
- [130] G. C. E. Mbah, I. S. Onah, Q. O. Ahman, O. C. Collins, C. C. Asogwa, C. Okoye. Mathematical modeling approach of the study of ebola virus disease transmission dynamics in a developing country. *Afr. J. Infect. Dis.*, 17(1):10–26, 2023.
- [131] B. Øksendal. *Stochastic Differential Equation*. 6th edn. Berlin Heidelberg: Springer, 2007.
- [132] H. J. Kushner. Necessary conditions for continuous parameter stochastic optimization problems. *SIAM J. Control*, 10:550–565, 1972.
- [133] J. M. Bismut. Conjugate convex functions in optimal stochastic control. *J. Math. Anal. Appl.*, 44:384–404, 1973.
- [134] S. Peng. A general stochastic maximum principle for optimal control problems. *SIAM J. Control Optim.*, 28:966–979, 1990.
- [135] B. Øksendal, A. Sulem. *Applied Stochastic Control of Jump Diffusions*. 2nd edn. Berlin Heidelberg: Springer, 2007.
- [136] B. Øksendal, A. Sulem. Risk minimization in financial markets modeled by Itô–Lévy processes. *Afrika Mat.*, 26(3):939–979, 2015.

- [137] N. Metropolis, S. Ulam. The monte carlo method. *Journal of the American Statistical Association*, 44(247):335–341, 1949.
- [138] S. Binder, A. Levitt, J. Sacks, J. Hughes. Emerging infectious diseases: Public health issues for the 21st century. *Science*, 284:1311–1313, 1999.
- [139] S. Blower, A. McLean. Mixing ecology and epidemiology. *Proc. R. Soc. Lond. B.*, 245:187–192, 1991.
- [140] A. Din, Y. Li, T. Khan, K. Anwar, G. Zaman. Stochastic dynamics of hepatitis B epidemics. *Results Phys.*, 20:103730, 2021.
- [141] H. Hethcote. The mathematics of infectious diseases. *SIAM Rev.*, 42:599–653, 2000.
- [142] H. Hethcote, P. Van den Driessche. Some epidemiological models with nonlinear incidence. *J. Math. Biol.*, 29:271–287, 1991.
- [143] B. Oksendal. *Stochastic differential equations: An introduction with applications*. Springer, 2010.
- [144] L. J. S. Allen. *L.J.S. Allen , An Introduction to Stochastic Epidemic Models, in: in: Mathematical Epidemiology*. Springer, 2008.
- [145] X. Mao, G. Marion, E. Renshaw. Environmental brownian noise suppresses explosions in population dynamics. *Stoch. Pro. Appl.*, 97 (1):95–110, 2002.
- [146] X. Li, X. Mao. Population dynamical behavior of non-autonomous lotka-volterra competitive system with random perturbation. *Dis. Con. Dyn. Sys. A.*, 24 (2):523, 2009.
- [147] Q. Liu, D. Jiang, T. Hayat, B. Ahmad. Analysis of a delayed vaccinated SIR epidemic model with temporary immunity and Lévy jumps. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 27:29–43, 2018.
- [148] K. Fan, Y. Zhang, S. Gao et al. A delayed vaccinated epidemic model with nonlinear incidence rate and Lévy jumps. *Physica A*, 123379, 2019.
- [149] B. Berrhazi, M. El Fatini, A. Laaribi, R. Pettersson. A stochastic SIRS epidemic model incorporating media coverage and driven by Lévy noise. *Chaos, Solitons & Fractals*, 105:60–68, 2017.
- [150] X. Zhang, F. Chen, K. Wang, H. Du. Stochastic SIRS model driven by Lévy noise. *Acta Math. Sci.*, 36B (3):740–752, 2016.
- [151] T. Caraballo, A. Settati, M. El Fatini, A. Lahrouz, A. Imlahi. Global stability and positive recurrence of a stochastic SIS model with Lévy noise perturbation. *Physica A*, 523:677–690, 2019.
- [152] X. Zhang, D. Jiang, T. Hayat, B. Ahmad. Dynamics of a stochastic SIS model with double epidemic diseases driven by Lévy jumps. *Physica A*, 471:767–777, 2017.

- [153] Y. Zhang, Y. Li, Q. Zhang. Behaviour of a stochastic SIR epidemic model with saturated incidence and vaccination rules. *Physica A*, 501:178–187, 2018.
- [154] X. Zhang, K. Wang. Stochastic model for spread of AIDS driven by Lévy noise. *J. Dynam. Differential Equations*, 27:215–236, 2015.
- [155] M. Krstić. On stability of stochastic delay model for tumor-immune interaction. *Filomat*, 32:4:1273–1283, 2018.
- [156] W. Ma , Y. Takeuchi , T. Hara , E. Beretta. Permanence of an SIR epidemic model with distributed time delays. *Tohoku Math. J.*, 54:581–591, 2002.
- [157] B. Berrhazi, M. El Fatini, A.Laaribi. A stochastic threshold for an epidemic model with Beddington–DeAngelis incidence, delayed loss of immunity and Lévy noise perturbation. *Physica A*, 507:312–320, 2018.
- [158] K. Fan, Y. Zhang, S. Gao, X. Wei. A class of stochastic delayed SIR epidemic models with generalized nonlinear incidence rate and temporary immunity. *Physica A*, 481:198–208, 2017.
- [159] K. Hattaf, M. Mahrouf, J. Adnani, N. Yousfi. Qualitative analysis of a stochastic epidemic model with specific functional response and temporary immunity. *Physica A*, 490:591–600, 2018.
- [160] M. El Fatini, I. Sekkak, A. Laaribi. A threshold of a delayed stochastic epidemic model with Crowley–Martin functional response and vaccination. *Physica A*, 520:151–160, 2019.
- [161] C. Xu, X. Li. The threshold of a stochastic delayed SIRS epidemic model with temporary immunity and vaccination. *Chaos, Solitons & Fractals*, 111:227–234, 2018.
- [162] T. Caraballo, M.E. Fatini, M.E. Khalifi. Analysis of a stochastic distributed delay epidemic model with relapse and gamma distribution kernel. *Chaos, Solitons and Fractals*, 133:109643, 2020.
- [163] N. Macdonald. *Time Lags in Biological Models*, in: *Lecture Notes in Biomathematics*. Springer-Verlag, Heidelberg, 1978.
- [164] A. Din, A. Khan, Y. Sabbar. Long-term bifurcation and stochastic optimal control of a triple-delayed ebola virus model with vaccination and quarantine strategies. *Fractal and fractional*, 6:578, 2022.
- [165] L. Hua, S. Gana. Convergence and stability of the balanced methods for stochastic differential equations with jumps. *International Journal of Computer Mathematics*, 88(10):2089–2108, 2011.
- [166] G. O. Fosu, J. M. Opong, J. K. Appati. Construction of compartmental models for COVID-19 with quarantine, lockdown and vaccine interventions. *SSRN Electronic Journal*, 2020.
- [167] Z. Bai. Threshold dynamics of a time-delayed SEIRS model with pulse vaccination. *Mathematical Biosciences*, 269:178–185, 2015.

- [168] E. Beretta, D. Breda. An SEIR epidemic model with constant latency time and infectious period. *Mathematical Biosciences and Engineering*, 8:931–952, 2011.
- [169] N. Ferguson, D. Laydon, N. Gilani, N. Imai, K. Ainslie, M. Baguelin et al. Impact of non-pharmaceutical interventions (npis) to reduce COVID-19 mortality and healthcare demand, report 9.
- [170] R. Li, S. Pei, B. Chen, Y. Song, T. Zhang, W. Yang, and J. Shaman. Substantial undocumented infection facilitates the rapid dissemination of novel coronavirus (SARS-CoV-2). *Science*, 368 (6490):489–493, 2020.
- [171] M. Shen, Z. Peng, Y. Xiao, L. Zhang. Modelling the epidemic trend of the 2019 novel coronavirus outbreak in China. *bioRxiv*.
- [172] S. E. Eikenberry, M. Mancuso, E. Iboi, T. Phan, K. Eikenberry, Y. Kuang, E. Kostelich, A. B. Gumel. To mask or not to mask: Modeling the potential for face mask use by the general public to curtail the COVID-19 pandemic. *Infectious Disease Modelling*, 5:293–308, 2020.
- [173] T. A. Biala, Y. O. Afolabi, A. Q. M. Khaliq. How efficient is contact tracing in mitigating the spread of COVID-19? A mathematical modeling approach. *Applied Mathematical Modelling*, 103:714–730, 2022.
- [174] J. T. Wu, K. Leung, G. M. Leung. Nowcasting and forecasting the potential domestic and international spread of the 2019-nCoV outbreak originating in Wuhan, China: a modelling study. *The Lancet*, 395:689–697 (10225), 2020.
- [175] F. Zhou, T. Yu, R. Du, G. Fan, Y. Liu, Z. Liu, J. Xiang, Y. Wang, B. Song, X. Gu, L. Guan, Y. Wei. Clinical course and risk factors for mortality of adult inpatients with COVID-19 in Wuhan, China: a retrospective cohort study. *The Lancet*, 395:1054–1062 (10229), 2020.
- [176] B. Tang, N. L. Bragazzi, Q. Li, S. Tang, Y. Xiao, J. Wu. An updated estimation of the risk of transmission of the novel coronavirus (2019-ncov). *Infectious Disease Modelling*, 5:248 – 255, 2020.
- [177] S. L. Lauer, K. H. Grantz, Q. Bi, F. K. Jones, Q. Zheng, H. R. Meredith, A. S. Azman, N. G. Reich, J. Lessler . The incubation period of coronavirus disease 2019 (COVID-19) from publicly reported confirmed cases: Estimation and application. *Annals of Internal Medicine*, 172 (9):577–582, 2020.
- [178] Q. Lin, S. Zhao, D. Gao, Y. Lou, S. Yang, S. S. Musa, M. H. Wang, Y. Cai, W. Wang, L. Yang, D. He. A conceptual model for the coronavirus disease 2019 (COVID-19) outbreak in Wuhan, China with individual reaction and governmental action. *International Journal of Infectious Diseases*, 93:211 – 216, 2020.
- [179] R. Li, S. Pei, B. Chen, Y. Song, T. Zhang, W. Yang, J. Shaman. Substantial undocumented infection facilitates the rapid dissemination of novel coronavirus (SARS-CoV-2). *Science*, 368 (6490):489–493, 2020.
- [180] H. H. Sohrab. *Basic Real Analysis*. Springer Science Business Media, 2003.

- [181] J. Tong, Z. Zhang, J. Bao. The stationary distribution of the facultative population model with a degenerate noise. *Statistics and Probability Letters*, 83:655–664, 2013.

Biografija

Bojana Lj. Jovanović je rođena 20. marta 1991. godine u Vranju. Osnovnu školu „Jovan Jovanović Zmaj“ u Vranju završila je 2006. godine, kao nosilac Vukove diplome i đak generacije, a Gimnaziju „Bora Stanković“ u Vranju 2010. godine. Tokom školovanja učestvovala je na brojnim takmičenjima iz matematike, fizike i hemije, od opštinskog do republičkog i saveznog nivoa, i osvajala medalje.

Osnovne akademske studije na Departmanu za matematiku Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Nišu upisala je 2010. godine i završila ih 2013. godine sa prosečnom ocenom 9.68. Iste godine upisala je master akademske studije (smer Primenjena matematika, modul Matematika u finansijama) na istom fakultetu, koje je završila 2015. godine sa prosečnom ocenom 9.88. Master rad pod nazivom „Primena Poissonove slučajne mere u teoriji neživotnog osiguranja“ odbranila je sa najvišom ocenom, pod mentorstvom prof. dr Marije Milošević.

Učestvovala je na projektu „Funkcionalna analiza, stohastička analiza i primene“ (ON 174007) Ministarstva prosvete, nauke i tehnološkog razvoja Republike Srbije. Autor je ili koautor tri naučna rada u međunarodnim časopisima koji su na SCI listi. Angažovana je u nastavi na Prirodno-matematičkom fakultetu na izvođenju vežbi od 2018. godine. Do sada je bila angažovana na predmetima: Teorija rizika (MAS, Departman za matematiku), Finansijsko modeliranje 1 (MAS, Departman za matematiku), Finansijsko modeliranje 2 (MAS, Departman za matematiku) i Matematika 1 (OAS, Departman za računarske nauke). Od školske 2020/2021. godine angažovana je u Gimnaziji „Svetozar Marković“ u Nišu na izvođenju nastave iz predmeta „Verovatnoća i matematička statistika“ za IV razred specijalizovanog odeljenja za nadarene matematičare.

Takođe je učestvovala na različitim festivalima koji promovišu nauku i bila je deo tima „Prve škole prirodno–matematičkih nauka“ Prirodno-matematičkog fakulteta u Nišu.

Rezultate svojih istraživanja predstavila je na sledećim međunarodnim kongresima i konferencijama:

- 6th edition of the tri-annual conference on Stochastic Processes in Evolutionary Biology, CIRM, Aix-Marseille University, Marseille, France, May 2024. Presented work with the title: “Dynamical analysis of a stochastic delayed epidemic model with Lévy jumps and regime switching and application in modelling COVID-19 disease”.
- Research school ‘Stochastic and Deterministic Analysis for Irregular Models’, CIRM, Aix-Marseille University, Marseille, France, January 2024.
- 43rd Conference on Stochastic Processes and their Applications, SPA 2023 Bernoulli Society, Faculty of Sciences of the University of Lisbon, Lisbon, Portugal, July 2023. Presented work with the title: “Dynamical analysis of a stochastic delayed epidemic model with Lévy jumps and regime switching”.
- Summer school ‘Probability and geometry on configuration spaces’, SPP2265: Random Geometric Systems, Berlin, Germany, July 2023.
- Congress of Young Mathematicians, organized by the Serbian Scientific Mathematical Society, Serbian Academy of Sciences and Arts, Novi Sad, October 2022. Presented work with the title: “Analysis of stability and sensitivity of deterministic and stochastic models for the spread of the new corona virus SARS-CoV-2”.

- STORM - Stochastics for time-space Risk Models Workshop, The Faculty of Mathematics and Natural Sciences, University of Oslo, Oslo, Norway, September 2022. Presented work with the title: “Dynamical analysis of a stochastic delayed epidemic model with lévy jumps and regime switching”.
- Congress of Probability and Statistics, Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Osijek, Croatia, July 2022. Presented work with the title: “A stochastic epidemic model for modeling the spread of West Nile virus”.
- 7th Croatian Mathematical Congress, Faculty of Science, University of Split, Croatian Academy of Sciences and Arts, Split, Croatia, June 2022. Presented work with the title: “Dynamical analysis of a stochastic delayed epidemic model with lévy jumps and regime switching”.
- Congress of Young Mathematicians, organized by the Serbian Scientific Mathematical Society, Serbian Academy of Sciences and Arts, Novi Sad, October 2019.
- Course ‘Nonsmooth optimization and piecewise linearization’ DAAD Project Center of Excellence for Application of Mathematics, Novi Sad, Serbia, 2014.

Bibliografija

1. B. Jovanović, J. Đorđević, J. Manojlović, N. Šuvak, Analysis of stability and sensitivity of deterministic and stochastic models for the spread of the new corona virus SARS-CoV-2, *Filomat* 35:3, 2021, 1045–1063.
 - B. Jovanović, J. Đorđević, J. Manojlović, N. Šuvak. Corrigendum to "Analysis of Stability and Sensitivity of Deterministic and Stochastic Models for the Spread of the New Corona Virus SARS–CoV–2"[*Filomat* 35:3 (2021), 1045–1063], *Filomat*, 2025, accepted.
2. J. Đorđević, B. Jovanović, Dynamical analysis of a stochastic delayed epidemic model with levy jumps and regime switching. *Journal of the Franklin Institute* 360 (2023) 1252–1283.
 - J. Đorđević, B. Jovanović. Corrigendum to „Dynamical analysis of a stochastic delayed epidemic model with Lévy jumps and regime switching"[*Journal of the Franklin Institute* 360 (2023) 1252–1283], *Journal of the Franklin Institute* 362(6):107582, 2025.
3. B. Jovanović. Dynamical analysis and stationary distribution of a stochastic delayed epidemic model with lévy jump. *Mathematical Communications*, 30, 2025, 1-25.

ИЗЈАВА О АУТОРСТВУ

Изјављујем да је докторска дисертација, под насловом

Стохастички епидемиолошки модели и њихова анализа

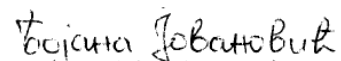
која је одбрањена на Природно-математичком факултету Универзитета у Нишу:

- резултат сопственог истраживачког рада;
- да ову дисертацију, ни у целини, нити у деловима, нисам пријављивао/ла на другим факултетима, нити универзитетима;
- да нисам повредио/ла ауторска права, нити злоупотребио/ла интелектуалну својину других лица.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци, који су у вези са ауторством и добијањем академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада, и то у каталогу Библиотеке, Дигиталном репозиторијуму Универзитета у Нишу, као и у публикацијама Универзитета у Нишу.

У Нишу, 24.06.2025.

Потпис аутора дисертације:



Бојана Љ. Јовановић

**ИЗЈАВА О ИСТОВЕТНОСТИ ЕЛЕКТРОНСКОГ И ШТАМПАНОГ ОБЛИКА
ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ**

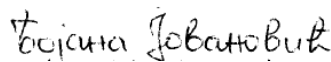
Наслов дисертације:

**Стохастички епидемиолошки модели
и њихова анализа**

Изјављујем да је електронски облик моје докторске дисертације, коју сам предао/ла за уношење у **Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу**, истоветан штампаном облику.

У Нишу, 24.06.2025.

Потпис аутора дисертације:



Бојана Љ. Јовановић

ИЗЈАВА О КОРИШЋЕЊУ

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Никола Тесла“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу унесе моју докторску дисертацију, под насловом:

Стохастички епидемиолошки модели

и њихова анализа

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском облику, погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију, унету у Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу, могу користити сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons), за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство **(CC BY)**

2. Ауторство – некомерцијално **(CC BY-NC)**

3. Ауторство – некомерцијално – без прераде (CC BY-NC-ND)

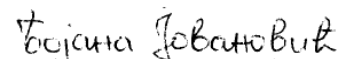
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима **(CC BY-NC-SA)**

5. Ауторство – без прераде **(CC BY-ND)**

6. Ауторство – делити под истим условима **(CC BY-SA)⁴**

У Нишу, 24.06.2025.

Потпис аутора дисертације:



Бојана Љ. Јовановић