PRIRODNO – MATEMATIČKI FAKULTET U NIŠU **Ponedeljak, 05.09.2022. godine**
DEPARTMAN ZA RAČUNARSKE NAUKE

PRIJEMNI ISPIT IZ MATEMATIKE

1. Dokazati da za svaki prirodan broj *n* važi

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Rešenje:

Dokaz izvodimo korišćenjem matematičke indukcije.

Označimo sumu sa leve strane izraza sa $S(n)$. Za $n = 1$, tvrđenje očigledno važi.

Pretpostavimo da je $S(n) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$. Tada je

$$S(n+1) = S(n) + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3$$

$$= \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

što je i trebalo dokazati.

2. Za koje vrednosti realnog broja *m* je zbir korena jednačine $x^2 + (2 + m - m^2)x - m^2 = 0$ jednak nuli?

Rešenje:

Kako je $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = m^2 - m - 2$, dobijamo da je $x_1 + x_2 = 0$ za $m_1 = -1$, $m_2 = 2$. Prema tome $m \in \{-1, 2\}$.

3. Rešiti jednačinu

$$\sin(x + 30°) + \cos(x + 60°) = 1 + \cos 2x$$

Rešenje:

$$\sin(x + 30°) + \cos(x + 60°) = 1 + \cos 2x \Leftrightarrow$$
$$\sin x \cos 30° + \cos x \sin 30° + \cos x \cos 60° - \sin x \sin 60° = 2\cos^2 x \Leftrightarrow$$
$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x = 2\cos^2 x \Leftrightarrow$$
$$\cos x - 2\cos^2 x = 0 \Leftrightarrow \cos x\,(1 - \cos 2x) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\cos x = 0 \lor \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z \lor x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in Z$$

4. Rešiti nejednačinu

$$\log_{2022}\log_2(x+2022)<0$$

Rešenje:

Oblast definisanosti logaritamske nejednačine je $(-2021,+\infty)$. Kako su osnove logaritama veće od jedinice, imamo da je

$$\log_{2022}\log_2(x+2022)<0 \Leftrightarrow \log_2(x+2022)<1 \Leftrightarrow x+2022<2$$
$$\Leftrightarrow x< -2020$$

5. Dužina hipotenuze pravouglog trougla je $c=5cm$, a zbir dužina katete i njene projekcije na hipotenuzu je $\frac{36}{5}cm$. Izračunati dužine kateta.

Rešenja:

Neka je b dužina uočene katete, a p dužina njene projekcije na hipotenuzu.

Iz uslova zadatka je $b+p=\frac{36}{5}$. Takođe, važi da je $b^2=pc$, tj. $b^2=5p$. Dalje dobijamo

$$b^2+5b-36=0$$

tj. $b=-9$ ili $b=4$. Kako je b kao dužina stranice pozitivan broj, zaključujemo da je $b=4cm$, a na osnovu Pitagorine teoreme je $a=3cm$.

6. Ako se poluprečnik lopte poveća za 1cm, njena površina se poveća za $8\pi\ cm^2$. Za koliko se u tom slučaju poveća njena zapremina?

Rešenja:

Površina lopte je $4r^2\pi$. Kada se poluprečnik poveća za 1cm, nova površina lopte iznosi $P_1=4(r+1)^2\pi$.

Kako je $P_1-P=8\pi\ cm^2$, dobijamo

$$4(r+1)^2\pi-4r^2\pi=8\pi$$

a odatle

$$r=\frac{1}{2}cm$$

Razlika u zapremini lopte posle povećanja poluprečnika je

$$V_1-V=\frac{4}{3}((r+1)^3-r^3)\pi=\frac{13}{3}\pi cm^3$$