Универзитет у Нишу
Природно-математички факултет у Нишу
Департман за математику 14.07.2025.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ

ПРИЈЕМНИ ИСПИТ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

1. За $x > 25$ одредити вредност израза

$$\left(\frac{x-25}{x+5\sqrt{x}+25} : \frac{x^{1/2}+5}{x^{3/2}-125}\right)^{1/2} - \sqrt{x}.$$

2. Ако је реалан део комплексног броја $z \neq 0$ два пута већи од имагинарног дела, одредити количник реалног и имагинарног дела комплексног броја z^4.

3. За које реалне вредности параметра m је полином

$$P(x) = x^3 - 3mx^2 + 4(m^2+1)x - (m^3+5)$$

дељив са $x-1$?

4. За које вредности реалног параметра p неједначина

$$(p-1)\,x^2 - (p+1)\,x + p + 1 > 0$$

важи за свако реално x?

5. У скупу реалних бројева решити неједначину

$$|x-1| < 2\sqrt{-x^2+2x}.$$

6. Одредити сва реална решења једначине

$$9^{x+2} - 3^{x^2} = 0.$$

7. У скупу реалних бројева решити једначину

$$\cos 3x - \cos 2x + \cos x = 0.$$

8. Центар горње основе коцке и средишта ивица њене доње основе су темена пирамиде. Колика је површина те пирамиде ако је ивица коцке $a = 10$?

9. Дата су темена троугла $A\,(-1,6)\,, B\,(5,3)$ и $C\,(-5,-2)\,.$ Одредити површину троугла ABC, дужину тежишне линије троугла која садржи тачку B и једначину висине троугла која садржи тачку A.

10. Решити једначину

$$(x-3) + x + (x+3) + (x+6) + \cdots + (x+129) = 2025.$$

Универзитет у Нишу
Природно-математички факултет у Нишу
Департман за математику 14.07.2025.

ПРИЈЕМНИ ИСПИТ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
РЕШЕЊА ЗАДАТАКА

1. За $x > 25$ јасно је да је

$$x - 25 > 0, x + 5\sqrt{x} + 25 > 0,$$
$$x^{\frac{1}{2}} + 5 > 0, x^{\frac{3}{2}} - 125 > 0,$$

тако да је задати израз добро дефинисан на том интервалу.

$$\begin{aligned}
S &= \left(\frac{x-25}{x+5\sqrt{x}+25} : \frac{x^{\frac{1}{2}}+5}{x^{\frac{3}{2}}-125}\right)^{\frac{1}{2}} - \sqrt{x} \\
&= \left(\frac{(\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}+5)}{x+5\sqrt{x}+25} : \frac{\sqrt{x}+5}{(\sqrt{x}-5)(x+5\sqrt{x}+25)}\right)^{\frac{1}{2}} - \sqrt{x} \\
&= \left(\frac{(\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}+5)}{x+5\sqrt{x}+25} \cdot \frac{(\sqrt{x}-5)(x+5\sqrt{x}+25)}{\sqrt{x}+5}\right)^{\frac{1}{2}} - \sqrt{x} \\
&= \left(\left(\sqrt{x}-5\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} - \sqrt{x} \\
&= |\sqrt{x}-5| - \sqrt{x}.
\end{aligned}$$

Како је $x > 25$,

$$S = \sqrt{x} - 5 - \sqrt{x} = -5.$$

2. Како је за неко $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\begin{aligned}
&z = 2b + ib \\
&z^4 = (2b+ib)^4 = b^4(2+i)^4 \\
&(2+i)^4 = ((2+i)^2)^2 = (4+4i+i^2)^2 = (3+4i)^2 = -7+24i \\
&z^4 = b^4(-7+24i) = -7b^4 + 24b^4 i,
\end{aligned}$$

тада је

$$\frac{Re(z^4)}{Im(z^4)} = \frac{-7b^4}{24b^4} = \frac{-7}{24}.$$

3. На основу Безуовог става, да би полином $p(x)$ био дељив са $x-1$, потребно је да је $p(1) = 0$. Имамо да је

$$\begin{aligned}
p(1) = 1 - 3m + 4\left(m^2+1\right) - \left(m^3+5\right) &= 0 \\
1 - 3m + 4m^2 + 4 - m^3 - 5 &= 0 \\
-m^3 + 4m^2 - 3m &= 0 \\
-m(m-1)(m-3) &= 0.
\end{aligned}$$

Коначно је

$$m_1 = 0, m_2 = 1, m_3 = 3.$$

4. Да би постављена неједначина била тачна за свако реално x, потребно је да квадратна функција

$$f(x) = (p-1)x^2 - (p+1)x + p + 1$$

буде на целом свом домену изнад $x-$осе. То значи да дискриминанта квадратне финкције мора да буде негативна и да водећи коефиијент мора да буде позитиван. На основу ова два услова добија се следећи систем неједначина:

$$\begin{aligned} D &= (p+1)^2 - 4(p-1)(p+1) < 0 \\ a &= p - 1 > 0, \end{aligned}$$

што је:

$$\begin{aligned} D &= -3p^2 + 2p + 5 < 0 \\ a &= p - 1 > 0. \end{aligned}$$

Прво налазимо корене квадратне једначине $-3p^2 + 2p + 5 = 0$. То су бројеви $p_1 = -1$ и $p_2 = \frac{5}{3}$. Дакле, $-3p^2 + 2p + 5 < 0 \Leftrightarrow -3(p+1)\left(p - \frac{5}{3}\right) < 0$, па је потребно да $p \in (-\infty, -1) \cup \left(\frac{5}{3}, +\infty\right)$.

Из другог услова добијамо да је $p \in (1, +\infty)$.

Коначно решење се добија као пресек претходна два скупа,

$$p \in \left(\frac{5}{3}, +\infty\right).$$

5. Прво ћемо одредити област дефинисаности неједначине:

$$\begin{aligned} -x^2 + 2x \geq 0 &\Leftrightarrow x(2-x) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (x \geq 0 \wedge 2 - x \geq 0) \vee (x \leq 0 \wedge 2 - x \leq 0) \\ &\Leftrightarrow (x \geq 0 \wedge x \leq 2) \vee (x \leq 0 \wedge x \geq 2) \\ &\Leftrightarrow (x \geq 0 \wedge x \leq 2). \end{aligned}$$

Потражићемо сада решење у добијеној области дефинисаности. С обзиром на то да су обе стране полазне неједначине ненегативне, квадрирањем и леве и десне стране, добићемо еквивалентну неједначину.

$$\begin{aligned} |x-1|^2 &< 4\sqrt{-x^2+2x}^2 \\ \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 &< 4\left(-x^2 + 2x\right). \end{aligned}$$

Даље је ово еквивалентно са

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + 1 &< -4x^2 + 8x \\ \Leftrightarrow 5x^2 - 10x + 1 &< 0 \\ \Leftrightarrow 5\left(x - 1 + \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)\left(x - 1 - \frac{2\sqrt{5}}{5}\right) &< 0. \end{aligned}$$

Имајући у виду да је $1-\frac{2\sqrt{5}}{5}>0$ и $1+\frac{2\sqrt{5}}{5}<2$, коначно решење се добија као

$$[0,2]\cap\left(1-\frac{2\sqrt{5}}{5},1+\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)=\left(1-\frac{2\sqrt{5}}{5},1+\frac{2\sqrt{5}}{5}\right).$$

6. Решење полазне једначине се добија коришћењем особина експоненцијалне функције на следећи начин

$$\begin{aligned}
3^{2(x+2)}-3^{x^2} &= 0\\
3^{2x+4} &= 3^{x^2}\\
2x+4 &= x^2\\
x^2-2x-4 &= 0\\
x_1=1+\sqrt{5}\quad\vee\quad x_2 &= 1-\sqrt{5}.
\end{aligned}$$

7. Трансформацијом збира косинусних функција у производ, полазна једначина се може решити на следећи начин

$$\begin{aligned}
\cos 3x-\cos 2x+\cos x &= 0\\
\cos 3x+\cos x-\cos 2x &= 0\\
2\cos 2x\cos x-\cos 2x &= 0\\
\cos 2x\,(2\cos x-1) &= 0\\
\cos 2x=0\quad\vee\quad 2\cos x &= 1,
\end{aligned}$$

На основу добијеног имамо:

$$\cos 2x=0\implies 2x=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\implies x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbb{Z}$$

или

$$2\cos x=1\implies \cos x=\frac{1}{2}\implies x=\pm\frac{\pi}{3}+2l\pi,l\in\mathbb{Z}.$$

8. Основна ивица пирамиде је $b=\frac{a\sqrt{2}}{2}=5\sqrt{2}$, док је висина пирамиде $H=a=10$. Апотему пирамиде h израчунавамо преко Питагорине теореме $h^2=H^2+(\frac{b}{2})^2$. Тада је $h=\frac{15\sqrt{2}}{2}$. Омотач пирамиде је $M=2bh=150$, док је основа $B=b^2=50$. Дакле, површина износи $P=200$.

9. Површина троугла ABC је $P_\Delta=\frac{1}{2}|D|$, где је D детерминанта

$$D=\begin{vmatrix}-1 & 6 & 1\\ 5 & 3 & 1\\ -5 & -2 & 1\end{vmatrix}.$$

Дакле, $P_\Delta=\frac{1}{2}|-60|=30$.

Означимо са B_1 средиште дужи AC. Тада је $B_1\left(\frac{x_A+x_C}{2},\frac{y_A+y_C}{2}\right)=B_1\left(\frac{-1-5}{2},\frac{6-2}{2}\right)=B_1\left(-3,2\right)$. Дужина тежишне линије BB_1 једнака је:

$$|BB_1|=\sqrt{(x_{B_1}-x_B)^2+(y_{B_1}-y_B)^2}=\sqrt{(-3-5)^2+(2-3)^2}=\sqrt{64+1}=\sqrt{65}.$$

Једначина висине која садржи тачку A је: $y - y_A = k_h \left(x - x_A\right)$, где је k_h коефицијент правца праве која је нормална на страницу BC. Тада је веза два коефицијента правца $k_h = -\frac{1}{k_{BC}}$. Имамо да је

$$k_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{-2-3}{-5-5} = \frac{-5}{-10} = \frac{1}{2}.$$

Тако добијамо да је $k_h = -2$, а тражена једначина висине је $y - 6 = -2\left(x+1\right)$, односно

$$2x + y - 4 = 0.$$

10. Ако ову суму представимо као суму првих 45 чланова аритметичког низа у коме је $a_1 = x - 3$ први члан, а $d = 3$ корак, онда је

$$\begin{aligned} S &= (x-3) + x + (x+3) + (x+6) + \cdots + (x+129) \\ &= a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \cdots + (a_1 + 44d) \\ &= \frac{45}{2}\left((x-3) + (x+129)\right) \\ &= \frac{45}{2}\left(2x + 126\right) = 45\left(x + 63\right) = 2025. \end{aligned}$$

Лако се добија да је $x = -18$.