PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET U NIŠU
DEPARTMAN ZA RAČUNARSKE NAUKE

Utorak, 26.06.2018.

PRIJEMNI ISPIT IZ MATEMATIKE

1. U jednačini $x^2 + mx + 8 = 0$, odrediti realnu vrednost broja m tako da je zbir recipročnih vrednosti rešenja te jednačine jednak $\frac{3}{4}$.

2. Date su tačke A(1, 2), B(1, 5) i C(3, 3). Šta treba da važi za tačku D tako da ugao izmedju pravih AC i BD bude jednak 60°?

3. Rešiti jednačinu po x
$$\log(5 - x) + 2\log\sqrt{2 - x} = 1$$

4. Dokazati da se zbir proizvoljnih 2000 uzastopnih prirodnih brojeva završava sa 3 nule.

5. Rešiti jednačinu
$$\cos x + \cos 2x = 2\cos\frac{3x}{2}$$

6. U trapezu ABCD je zbir dužina krakova BC i AD jednak dužini osnovice CD. Dokazati da se simetrale uglova kod temena A i B seku na duži CD.

Napomena: Izrada zadataka traje 120 minuta.

Pri izradi zadataka rešenja ispisati detaljno.

Rešenja:

1. Prema uslovu zadatka rešenja jednačine $x^2 + mx + 8 = 0$ zadovoljavaju sledeći uslov

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{3}{4}$$

odnosno

$$\frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{3}{4} \qquad (*)$$

Dalje, na osnovu Vijetovih formula za rešenja jednačine $ax^2 + bx + c = 0$ važi

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$
$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

Dakle rešenja jednačine $x^2 + mx + 8 = 0$ zadovoljavaju sledeće

$$x_1 x_2 = \frac{8}{1} = 8$$
$$x_1 + x_2 = \frac{-m}{1} = -m$$

Zamenom u (*) dobijamo

$$\frac{-m}{8} = \frac{3}{4}$$

odnosno $m = -6$.

2. Koeficijent pravca prave koja prolazi kroz tacke A i C je $k_1 = \frac{3-2}{3-1} = \frac{1}{2}$. Oznacimo koeficijent pravca prave koja prolazi kroz B i D sa k_2. Da bi ugao izmedju pravih AC i BD bio 60°, imamo da vazi:

- u jednom slucaju $\sqrt{3} = tg60° = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} = \frac{\frac{1}{2} - k_2}{1 + k_2/2}$, odakle se dobija da je $k_2 = 8 - \sqrt{3}$. Kako tacka B pripada pravoj BD imamo da vazi $5 = 1(8 - 5\sqrt{3}) + n_2$ odakle je $n_2 = 5\sqrt{3} - 3$. Resenje su sve tacke koje pripadaju pravoj $y = (8 - 5\sqrt{3})\, x + (5\sqrt{3} - 3)$ izuzev tacke B.

- u drugom slucaju $\sqrt{3} = tg60° = -\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} = \frac{k_2 - \frac{1}{2}}{1 + k_2/2}$, odakle se dobija da je $k_2 = 8 + 5\sqrt{3}$. Kako tacka B pripada pravoj BD imamo da vazi $5 = 1(8 - 5\sqrt{3}) + n\_2$ odakle je $n\_2 = -5\sqrt{3} - 3$. Resenje su sve tacke koje pripadaju pravoj $y = (8 + 5\sqrt{3})\, x - (5\sqrt{3} + 3)$ izuzev tacke B.

3. Na osnovu osobina logaritamske funkcije imamo da važi

$$\log_a b^c = c \log_a b$$
$$\log_a b + \log_a c = \log_a bc$$
$$\log_a b = c \quad \text{ako i samo ako} \quad a^c = b$$

Primenom ovih osobina na datu jednačinu dobijamo

$$\log(5-x) + 2\log\sqrt{(2-x)} = 1$$
$$\log(5-x) + 2\log(2-x)^{\frac{1}{2}} = 1$$
$$\log(5-x) + 2\frac{1}{2}\log(2-x) = 1$$
$$\log(5-x) + \log(2-x) = 1$$
$$\log(5-x)(2-x) = 1$$
$$(5-x)(2-x) = 10^1$$
$$x^2 - 7x + 10 = 10$$
$$x^2 - 7x = 0$$
$$x(x-7) = 0$$
$$x_1 = 0 \quad x_2 = 7$$

Vrednost $x_2 = 7$ nije rešenje date jednačine jer sva rečenja jednačine moraju da ispine sledeći uslov

$$x < 2$$

Dakle data jednačina ima jedno rešenje a to je $x = 0$

4. Traženi zbir ima oblik

$$x + (x+1) + \cdots + (x+1999) = 2000x + (1 + 2 + \cdots + 1999) =$$
$$2000x + \frac{1999 * 2000}{2} = 1000 * (2x + 1999)$$

Kako je broj $2x + 1999$ neparan, on nije deljiv sa 10, pa je ovaj zbir deljiv sa 1000 a nije sa 10000, tj. Završava se sa 3 nule.

5. Na osnovu formule

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

imamo

$$\cos x + \cos 2x = 2\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{-x}{2}$$

Dakle polazna jednačina

$$\cos x + \cos 2x = 2\cos\frac{3x}{2}$$

Je ekvivalentna sa

$$2\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{-x}{2} = 2\cos\frac{3x}{2}$$

Tj

$$\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{-x}{2}-\cos\frac{3x}{2}=0$$
$$\cos\frac{3x}{2}\left(\cos\frac{-x}{2}-1\right)=0$$
$$\cos\frac{3x}{2}=0 \quad \cos\frac{-x}{2}-1=0$$
$$\cos\frac{3x}{2}=0 \quad \cos\frac{x}{2}=1$$
$$\frac{3x}{2}=\frac{\pi}{2}+k\pi \quad \text{i} \quad \frac{x}{2}=2k\pi$$

$$x=\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3} \quad \text{i} \quad x=4k\pi$$

pri čemu je $k \in Z$

6.

Neka je E tačka na duži CD, tako da je BC = BE i AD = DE (ova tačka postoji zbog uslova da je BC + AD = CD) i neka su uglovi trapeza kod temena A, B, C i D, redom, α, β, γ i δ.

Kako je ABCD trapez, to je $\alpha+\delta=180°$, kao i $\beta+\gamma=180°$.

Trougao ΔDAE je jednakokraki, pa je $\sphericalangle DAE=\sphericalangle DEA=\frac{(180°-\delta)}{2}=\frac{\alpha}{2}$. Dakle, prava određena sa AE je simetrala ugla kod temena A. Analogno je BE simetrala ugla kod temena B, pa se, dakle, simetrale uglova na osnovici seku u tački E, tj. na duži CD.