Univerzitet u Nišu, Prirodno-matematički fakultet
Prijemni ispit za upis OAS Matematika

Rešenja

1. Matematičkom indukcijom dokazati da za svaki prirodan broj n važi jednakost:

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}.$$

Rešenje. Ako je $n=1$, onda tražena jednakost jeste $\frac{1}{1\cdot 3}=\frac{1}{3}$, što je očigledno tačno.

Indukcijska pretpostvka jeste da je traženo tvrđenje tačno za neki prirodan broj n, tj. pretpostavimo da važi

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}.$$

Potrebno je dokazati tvrđenje za prirodan broj $n+1$, odnosno treba dokazati da važi

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{n+1}{2n+3}.$$

Na osnovu indukcijske pretpostavke sledi:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}\\
&=\frac{n}{2n+1}+\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}\\
&=\frac{2n^2+3n+1}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{n+1}{2n+3}.
\end{aligned}$$

Time je tvrđenje dokazano.

2. Dat je aritmetički niz $a_1, a_2, a_3, \ldots$. Zbir prva 3 člana na neparnim mestima je 3, a zbir prva 3 člana na parnim mestima je 12. Odrediti prvih šest članova ovog aritmentičkog niza.

Rešenje. Neka je a_1 prvi član, a d neka je razlika tog aritmetičkog niza. Tada je, na osnovu uslova zadatka, ispunjeno:

$$a_1+a_3+a_5=3, \qquad a_2+a_4+a_6=12.$$

Takođe je

$$a_2=a_1+d, \quad a_3=a_1+2d, \quad a_4=a_1+3d, \quad a_5=a_1+4d, \quad a_6=a_1+5d.$$

Dolazimo do sistema linearnih jednačina

$$3a_1 + 6d = 3, \quad 3a_1 + 9d = 12,$$

odnosno

$$a_1 + 2d = 1, \quad a_1 + 3d = 4,$$

čija su rešenja

$$a_1 = -5, \quad d = 3.$$

Prvih šest članova ovog aritmetičkog niza jesu

$$a_1 = -5,\ a_2 = -2,\ a_3 = 1,\ a_4 = 4,\ a_5 = 7,\ a_6 = 10.$$

3. Odrediti broj a tako da rešenja x_1 i x_2 kvadratne jednačine $4x^2 - 15x + a = 0$ zadovoljavaju uslov $x_1^2 = x_2$.

Rešenje. Na osnovu Vijetovih formula, važe jednakosti:

$$x_1 + x_2 = \frac{15}{4}, \quad x_1 x_2 = \frac{a}{4}.$$

Ako tim uslovima pridružimo pretpostavku zadatka $x_1^2 = x_2$, tada je

$$4x_1^2 + 4x_1 - 15 = 0, \quad a = 4x_1^3.$$

Rešavanjem prve jednačine dolazimo do zaključka da može biti $x_1 = -\dfrac{5}{2}$, ili $x_1 = \dfrac{3}{2}$. Stoga postoje dve mogućnosti za a, i to: $a = -\frac{125}{2}$ ili $a = \frac{27}{2}$.

4. Rešiti nejednačinu $\dfrac{x^2 - 4x + 3}{x + 1} < 0$.

Rešenje. Kako je $x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$, potrebno je rešiti nejednačinu

$$\frac{(x-1)(x-3)}{x+1} < 0.$$

Znak svakog činioca posmatramo u odnosu na karakteristične tačke $-1, 1, 3$, i prikazujemo tabelarno:

$$\begin{array}{c|ccccccc}
 & & -1 & & 1 & & 3 & \\
x+1 & - & 0 & + & + & + & + & + \\
x-1 & - & - & - & 0 & + & + & + \\
x-3 & - & - & - & - & - & 0 & + \\
\dfrac{(x-1)(x-3)}{x+1} & - & * & + & 0 & - & 0 & +
\end{array}$$

Sledi da je $\dfrac{(x-1)(x-3)}{x+1} < 0$ ako i samo ako je $x < -1$ ili $1 < x < 3$.

5. Rešiti jednačinu $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 2$.

Rešenje. Data jednačina može biti zapisana u ekvivalentnom obliku:

$$\frac{1}{2}\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = 1.$$

Kako je $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ i $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, poslednja jednačina je ekvivalentna jednačini

$$\sin x \cos\frac{\pi}{3} - \cos x \sin\frac{\pi}{3} = 1,$$

ili

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1.$$

Rešenje ove jednačine jeste

$$x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z},$$

odnosno

$$x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

6. Izračunati $\left(-3 + i\sqrt{3}\right)^{10}$.

Rešenje. Neka je $z = -3 + i\sqrt{3}$. Tada je $|z| = \sqrt{12}$. Argument φ kompleksnog broja z zadovoljava uslov $\operatorname{tg}\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{3}$. Kako broj z pripada drugom kvadrantu (realan deo broja z je pozitivan, a imaginaran deo broja z je negativan), sledi da je $\varphi = \frac{5}{6}\pi$. Stoga je

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \sqrt{12}\left(\cos\frac{5}{6}\pi + i\sin\frac{5}{6}\pi\right).$$

Na osnovu Moavrove formule, važi

$$z^{10} = |z|^{10}(\cos 10\varphi + i\sin 10\varphi) = 12^5\left(\cos\frac{25}{3}\pi + i\sin\frac{25}{3}\pi\right).$$

7. Rašiti jednačinu $6 \cdot 4^x - 13 \cdot 6^x + 6 \cdot 9^x = 0$.

Rešenje. Polaznu jednačinu podelimo sa 9^x, i dobijamo jednačinu

$$6 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^x - 13 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x + 6 = 0.$$

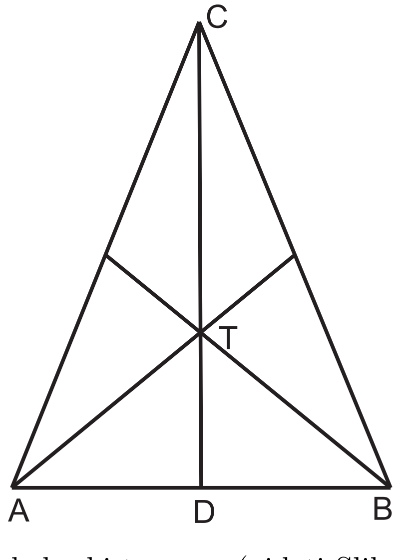
Smenom $t = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ dolazimo do kvadratne jednačine

$$6t^2 - 13t + 6 = 0,$$

čija su rešenja $t = \frac{2}{3}$ i $t = \frac{3}{2}$. Ako je $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{2}{3}$, onda je jedno rešenje $x = 1$. Ako je $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{3}{2}$, onda je drugo rešenje jednačine $x = -1$.

8. Osnovica jednakokrakog trougla iznosi 2. Težišne duži koje su povučene na krake, seku se pod pravim uglom. Odrediti površinu trougla.

Rešenje.



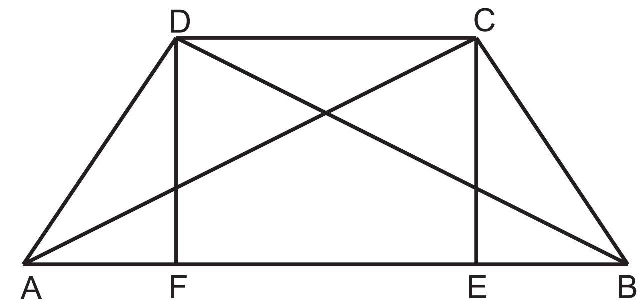
Slika 1.

Neka je ΔABC polazni jednakokraki trougao (videti Sliku 1.), tako da je AB osnovica tog trougla. Povucimo sve tri težišne duži trougla, koje se seku u težištu T. Neka je D sredina osnovice AB. Tada je AD istovremeno težišna duž i visina koja odgovara osnovici AB. Stoga je $AD = 1$. Troguao ΔABT je jednakokraki, sa pravim uglom u tački T. Sledi da je trougao ΔATD takođe jednakokraki sa pravim uglom u tački D. Proizilazi da je $DT = AD = 1$. Poznato je da težiste T deli svaku težišnu duž, pa i duž CD u odnosu $2 : 1$, posmatrano od C ka D. Dakle, $CT : TD = 2 : 1$. Sledi da je $CD = 3$. Na kraju, površina trougla ΔABC jeste

$$P = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CD = 3.$$

9. Dužina dijagonale jednakokrakog trapeza je 12, a ugao izmedu dijagonale i osnovice tog trapeza je $30°$. Odrediti površinu tog trapeza.

Rešenje.



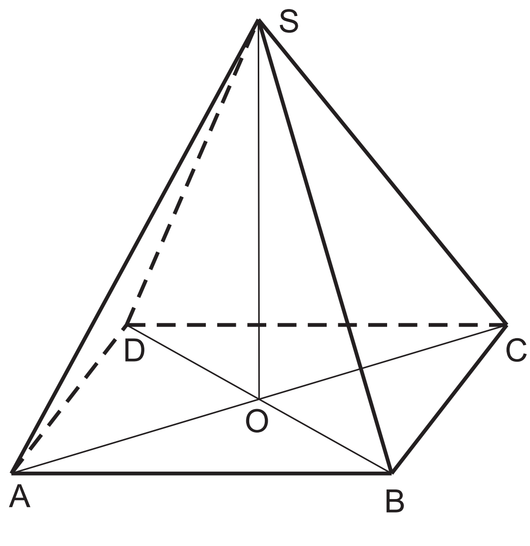
Slika 2.

Neka je $AB = a$ duža osnovica, a $CD = b$ kraća osnovica trapeza (videti Sliku 2.). Neka su tačke E i F na osnovici AB, tako da su $CE = h$ i $DF = h$ visine trapeza. Kako je $EF = b$, sledi da je $EB = \dfrac{a-b}{2}$ i $AE = \dfrac{a+b}{2}$. Uočimo trougao ΔAEC, koji kod temena E ima prav ugao, a kod temena A ima ugao od $30°$. Tada je $CE = h = 6$, a na osnovu Pitagorine tereme sledi $AE = 6\sqrt{3}$. Proizilazi da je površina trapeza jednaka

$$P = \frac{a+b}{2}h = 36\sqrt{3}.$$

10. Izračunati zapreminu pravilne četvorostrane piramide, koja ima visinu 8 i čiji je dijagonalni presek površine 60.

Rešenje.



Slika 3.

Neka je osnova piramide kvadrat $ABCD$, teme piramide neka je S, i neka je O presek dijagonala osnove (videti Sliku 3.). Tada je SO visina piramide, koja iznosi 8. Dijagonalni presek piramide jeste bilo koji od podudarnih trouglova ΔACS i ΔBDS. Visina OS ovih trouglova je 8, a površina je 60. Sledi da je $AC = BD = 15$. Kvadrad $ABCD$ ima dijagonalu 15, te je njegova stranica jednaka $\frac{15\sqrt{2}}{2}$. Na kraju, zapremina piramide je

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{225}{2} \cdot 8 = 300.$$