PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET U NIŠU
DEPARTMAN ZA RAČUNARSKE NAUKE

Četvrtak, 30.06.2016.

PRIJEMNI ISPIT IZ INFORMATIKE

PITANJA I ZADACI IZ MATEMATIKE

1. Uprostiti izraz

$$\frac{1-x^{-2}}{\sqrt{x}+\sqrt{x^{-1}}}-\frac{x-x^{-2}}{\sqrt{x}-\sqrt{x^{-1}}}+\sqrt{x}.$$

2. Odrediti sve vrednosti realnog parametra m za koje je polinom

$$P(x)=x^5-2mx^4+m^2x^3-3mx^2-2x-8$$

deljiv polinomom $x-2$.

3. U skupu realnih brojeva rešiti jednačinu

$$5^{x^2}-3^{x^2-1}=3^{x^2+1}-5^{x^2-1}.$$

4. Dokazati da za svaki realan broj α za koji je $\sin\alpha \neq 0$ i $\cos\alpha \neq 0$ važi

$$\frac{1}{\sin^4\alpha}+\frac{1}{\cos^4\alpha}\geq 8.$$

5. Dat je kvadrat $ABCD$. Neka je tačka M središte stranice AD, a tačka N podnožje normale iz tačke M na dijagonalu AC. Odrediti odnos površine trougla ΔMNC i kvadrata $ABCD$.

6. Date su tačke $A(2,3)$ i $B(2,c)$, kao i parabola x^2+ax+1. Odrediti vrednost parametra c, tako da simetrala duži AB dodiruje parabolu u tačno jednoj tački.

Napomena: Izrada zadataka traje 120 minuta. Svaki tačno rešen zadatak se boduje sa 10 poena.

REŠENJA

1. Primenom elementarnih transformacija dobija se

$$\frac{1-x^{-2}}{\sqrt{x}+\sqrt{x^{-1}}}-\frac{x-x^{-2}}{\sqrt{x}-\sqrt{x^{-1}}}+\sqrt{x}=\frac{1-\frac{1}{x^2}}{\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}}-\frac{x(1-\frac{1}{x^3})}{\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}}+\sqrt{x}=$$
$$\frac{(1-\frac{1}{x})(1+\frac{1}{x})}{\sqrt{x}(1+\frac{1}{x})}-\frac{x(1-\frac{1}{x})(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}{\sqrt{x}(1-\frac{1}{x})}+\sqrt{x}=$$
$$\frac{1-\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}-\frac{x(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}{\sqrt{x}}+\sqrt{x}=\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x\sqrt{x}}-\sqrt{x}(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})+\sqrt{x}=\frac{-2}{x\sqrt{x}}$$

2. Da bi polinom $P(x)$ bio deljiv sa $x-2$, po Bezuovom stavu, mora da važi $P(2)=0$.

$$P(2)=8m^2-44m+20$$

Rešenja kvadratne jednačine $8m^2-44m+20=0$ su $m_1=\frac{1}{2}$ i $m_2=5$. Dakle, za ove vrednosti broja m je polinom $P(x)$ deljiv sa $x-2$.

3. Podelimo jednačinu sa 3^{x^2} i uvedemo smenu $t=\left(\frac{5}{3}\right)^{x^2}$.

$$\begin{aligned}5^{x^2}-3^{x^2-1}&=3^{x^2+1}-5^{x^2-1} &\Leftrightarrow\\ t-\tfrac{1}{3}&=3-\tfrac{1}{5}t &\Leftrightarrow\\ 18t&=50\end{aligned}$$

Dakle, $\left(\frac{5}{3}\right)^{x^2}=\left(\frac{5}{3}\right)^2$, pa je $x=\pm\sqrt{2}$.

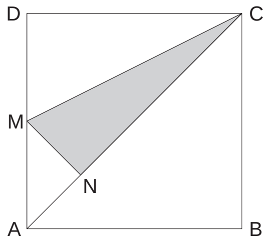
4. Primenom osnovnih osobina trigonometrijskih funkcija dobijamo

$$\frac{1}{\sin^4\alpha}+\frac{1}{\cos^4\alpha}=\frac{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha}{\sin^4\alpha\cos^4\alpha}=16\frac{1-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\sin^4 2\alpha}=16\frac{1-\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha}{\sin^4 2\alpha}$$

Kako je $\sin x\leq 1$ za svako $x\in\mathbf{R}$, to je

$$16\frac{1-\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha}{\sin^4 2\alpha}\geq 16(1-\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha)\geq 8.$$

5. Trougao ΔANM je jednakokrako-pravougli (vidi sliku). Neka je dužina duži AN jednaka a. Tada je $MN=a$ i $AM=a\sqrt{2}$. Dakle, stranica kvadrata ima dužinu $2\sqrt{2}a$. Dijagonala AC onda ima dužinu $4a$, pa je $CN=3a$.
Zaključujemo da je površina trougla ΔCMN jednaka $\frac{3a^2}{2}$, a površina kvadrata je $8a^2$, pa je traženi odnos $\frac{3}{16}$.



Slika 1: Zadatak 5

6. Kako je duž AB paralelna sa y-osom, njena simetrala s je paralelna sa x-osom i prolazi kroz središte C duži AB. Koordinate tačke C su $(2, \frac{c+3}{2})$, pa jednačina prave s glasi $y = \frac{c+3}{2}$. Prava s dodiruje datu kvardratnu funkciju u tačno jednoj tački, a to je moguće jedino ukoliko je ta tačka dodira istovremeno i tačka u kojoj funkcija dostiže svoj minimum. Neka je to tačka M. Koordinate tačke M su $M(-\frac{a}{2}, 1 - \frac{a^2}{4})$. Tačka M pripada pravoj s, pa zaključujemo $c = \frac{-2-a^2}{2}$.