
UNIVERZITET U NIŠU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA RAČUNARSKE NAUKE

DEPARTMAN ZA RAČUNARSKE NAUKE

Uputstvo za pripremu prijemnog ispita
iz matematike

1. Kvadratne jednačine, nejednačine i Vijetove formule

Osnovne formule:

Opšti oblik kvadratne jednačine je: $ax^2 + bx + c = 0$

Rešenja kvadratne jednačine:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ukoliko je diskriminanta:

$$D = b^2 - 4ac$$

- $D > 0$: imamo dva različita realna rešenja
- $D = 0$: imamo jedno dvostruko realno rešenje
- $D < 0$: imamo konjugovano-kompleksna rešenja

Vijetove formule: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ i $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.

Kanonski oblik kvadratne jednačine je :

$$y = a(x - \alpha)^2 + \beta,$$

gde je $T(\alpha, \beta) = T\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ teme parabole.

Zadaci:

1. Odrediti vrednost parametra m tako da rešenja jednačine $x^2 - (m+1)x + m + 4 = 0$ budu realna i različita.
2. Ako su x_1 i x_2 rešenja jednačine $3x^2 - 5x - 2 = 0$, izračunati vrednost izraza $x_1^3 + x_2^3$ bez rešavanja jednačine.
3. Rešiti nejednačinu: $\frac{x^2-3x+2}{x^2+x+1} < 0$.
4. Za koje vrednosti parametra k je funkcija $f(x) = (k-1)x^2 + 2kx + k + 2$ uvek pozitivna za svako $x \in \mathbb{R}$?
5. Naći sve vrednosti $a \in \mathbb{R}$ tako da zbir kvadrata rešenja jednačine $x^2 + ax + a - 2 = 0$ bude minimalan.
6. Rešiti jednačinu: $x^2 + |x| - 6 = 0$.
7. Odrediti parametar p tako da rešenja jednačine $x^2 - px + 6 = 0$ zadovoljavaju relaciju $x_1 - x_2 = 1$.

8. Odredi intervale na kojima je funkcija $f(x) = x^2 - 4x + 3$ pozitivna.
9. Rešiti sistem jednačina: $x + y = 7$ i $x \cdot y = 10$.

2. Eksponencijalne i logaritamske jednačine i nejednačine

Osnovne formule:

Eksponencijalna pravila:

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y},$$

$$(a^x)^y = a^{xy},$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}.$$

Definicija logaritma:

$$\log_a b = c \iff a^c = b$$

(uslovi: $a > 0, a \neq 1, b > 0$)

Osnovna pravila:

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a \left(\frac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a x^n = n \log_a x$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \text{ (promena osnove)}$$

Zadaci:

1. Rešiti jednačinu: $2^{x+2} + 2^x = 20$.
2. Rešiti jednačinu: $9^x - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$.
3. Izračunati: $\log_2 \log_2 \sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}$.

4. Rešiti jednačinu: $\log_2(x-1) + \log_2(x+2) = 2$.
5. Rešiti nejednačinu: $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-3} > 4$.
6. Rešiti nejednačinu: $\log_{0.5}(2x-4) > -1$.
7. Rešiti jednačinu: $\sqrt{\log_2 x} = \log_2 \sqrt{x}$.
8. Rešiti sistem: $2^x \cdot 3^y = 12$ i $2^y \cdot 3^x = 18$.

3. Trigonometrija

Osnovni identitet:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

Adicione formule:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

Dvostruki ugao:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

Transformacija zbira u proizvod:

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

Zadaci:

1. Ako je $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ i $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, izračunati $\cos 2\alpha$ i $\operatorname{tg} \alpha$.
2. Rešiti jednačinu: $2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0$ na intervalu $[0, 2\pi]$.
3. Dokazati identitet: $\frac{1 - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \operatorname{tg} \alpha$.
4. Rešiti jednačinu: $\sin 3x = \sin x$.
5. Odrediti vrednost izraza: $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ$.
6. Naći opšte rešenje jednačine: $\sqrt{3} \sin x + \cos x = 1$.
7. Rešiti nejednačinu: $\cos x > \frac{1}{2}$ za $x \in [0, 2\pi]$.

8. Izračunati $\sin 15^\circ$ koristeći adiconu formulu.

4. Analitička geometrija

Osnovne formule:

Rastojanje dve tačke $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Jednačina prave:

$y = kx + n$ (eksplicitni)

ili $Ax + By + C = 0$ (implicitni)

Uslov paralelnosti: $k_1 = k_2$;

Uslov normalnosti: $k_1 \cdot k_2 = -1$

Kružnica: $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$

Elipsa: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Zadaci:

1. Odrediti jednačinu prave koja prolazi kroz tačku $A(1, 2)$ i normalna je na pravu $y = 2x + 5$.
2. Naći rastojanje tačke $M(2, 3)$ od prave $3x - 4y + 1 = 0$.
3. Odrediti parametar p tako da prava $y + x + p = 0$ predstavlja tangentu elipse $2x^2 + 3y^2 = 30$
4. Napisati jednačinu tangente kružnice $x^2 + y^2 = 25$ u njenoj tački $P(3, 4)$.
5. Odrediti ugao između pravih $y = 3x - 1$ i $y = -2x + 4$.
6. Naći jednačinu elipse ako je njena velika osa 10, a žiža u tački $F(4, 0)$.
7. Odrediti presečne tačke prave $x + y = 7$ i kružnice $x^2 + y^2 = 25$.
8. U presečnim tačkama prave $5x - 3y = 14$ i elipse $x^2 + 3y^2 = 28$ konstruisane su tangente na elipsu. Odrediti jednačine tangenata. I naći tačke preseka.

5. Kombinatorika

Osnovne formule:

Permutacije (bez ponavljanja):

$$P(n) = n!$$

Varijacije (bez ponavljanja):

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Kombinacije (bez ponavljanja):

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Zadaci:

1. Na koliko načina se 5 osoba može rasporediti na 5 stolica u redu?
2. Koliko se trocifrenih brojeva može formirati od cifara $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ ako se cifre ne ponavljaju?
3. Od 10 učenika treba izabrati tročlanu delegaciju. Na koliko načina je to moguće?
4. Koliko ima parnih četvorocifrenih brojeva sa različitim ciframa?
5. Na koliko načina se 4 različite knjige iz matematike i 3 iz fizike mogu poređati na policu tako da knjige iz iste oblasti budu jedna do druge?
6. Koliko dijagonala ima pravilan desetougao?
7. Od 5 devojčica i 4 dečaka treba izabrati ekipu od 4 člana u kojoj su bar dve devojčice. Na koliko načina to može da se uradi?
8. Koliko se različitih "reči" može dobiti ispremestanjem slova reči "MATEMATIKA"?

6. Binomna formula

Osnovna formula:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Opšti član razvoja:

$$T_{k+1} = \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Zadaci:

1. Razviti po binomnoj formuli izraz $(x + 2)^4$.
2. Odrediti peti član u razvoju binoma $(x^2 + \frac{1}{x})^8$.
3. Naći član koji ne sadrži x u razvoju $(\sqrt{x} + \frac{1}{x^2})^{10}$.
4. Odrediti koeficijent uz x^7 u razvoju $(x + 2)^{10}$.
5. Zbir svih binomnih koeficijenata u razvoju $(a+b)^n$ je 64. Odrediti n .
6. Zbir koeficijenta prvog, drugog i trećeg člana u razvoju binoma $(x^2 + x^{-1})^n$ jednak je 46. Naći koji član ne sadrži x .
7. Odrediti srednji član u razvoju $(\frac{a}{b} - \frac{b}{a})^{12}$.
8. Naći n ako se binomni koeficijenti trećeg i petog člana u razvoju $(x + 1)^n$ odnose kao 2 : 7.
9. Izračunati vrednost izraza $(\sqrt{2} + 1)^3 - (\sqrt{2} - 1)^3$.