1	2	3	4	5	6	$\sum$

UNIVERZITET U NIŠU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA RAČUNARSKE NAUKE

sreda 04.07.2012.

MATEMATIKA

1. Dokazati da je: $5^{n-1} + 2^n$ deljivo sa 3, gde je n prirodan broj.

2. Naći korene x_1 i x_2 polinoma $f(x) = 2x^2 - (c+1)x + c - 1$, ako je

$$x_1 - x_2 = x_1 x_2, \quad \text{i } c \in \mathbb{R}.$$

3. Rešiti jednačinu: $\sin^2 4x + \sin^2 2x = \dfrac{3}{2}$.

4. Izračunati površinu jednakokrakog trapeza, ako su mu dijagonale uzajamno normalne, dužina kraka jednaka 10cm i ugao između veće osnovice i kraka 60°.

5. Odrediti jednačinu geometrijskog mesta tačaka $M(x, y)$ u ravni, tako da je $\dfrac{AM}{BM} = \dfrac{2}{3}$, gde su A i B tačke $A(1,1)$ i $B(6,6)$.

6. Zbir koeficijenata prvog, drugog i trećeg člana u razvojnom obliku binoma $(x^2 + \dfrac{1}{x})^n$ jednak je 46. Odrediti član koji ne sadrži x.

Napomena: Prijemni ispit traje 120 min. Pri izradi zadataka rešenja ispisati detaljno.

04.07.2012.

REŠENJA ZADATAKA PRIJEMNOG ISPITA

---

1. Tvrđenje dokazujemo korišćenjem principa matematičke indukcije:
1) Za $n = 1$ tvrđenje važi, jer je

$$5^{1-1} + 2^1 = 5^0 + 2^1 = 1 + 2 = 3,$$

odnosno dobijena vrednost izraza je 3 što je deljivo sa 3.

2) Indukcijska pretpostavka: Neka tvrđenje važi za $n = k$, tj. neka je $5^{k-1} + 2^k$ broj oblika $3m$ (deljiv sa 3).

3) Dokazujemo da tvrđenje važi za $n = k + 1$. Imamo da je

$$5^{k+1-1}+2^{k+1} = 5^k+2^{k+1} = 5\cdot5^{k-1}+2\cdot2^k = 3\cdot5^{k-1}+2\cdot5^{k-1}+2\cdot2^k = 3\cdot5^{k-1}+2(5^{k-1}+2^k) == 3\cdot5^{k-1}+2\cdot3m,$$

pa je jasno da smo dobili broj deljiv sa 3. Na osnovu principa matematičke indukcije zaključujemo da tvrđenje važi za svaki prirodan broj n.

2. Prema Vietovim formulama za korene x_1 i x_2 polinoma $f(x)$ važi:

$$x_1 + x_2 = \frac{c+1}{2}, \quad x_1x_2 = \frac{c-1}{2}.$$

Kako je

$$(x_1 - x_2)^2 = x_1{}^2 - 2x_1x_2 + x_2{}^2 = x_1{}^2 + 2x_1x_2 + x_2{}^2 - 4x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2,$$

to dobijamo

$$\begin{aligned}
&(x_1 - x_2)^2 = x_1x_2{}^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2\\
\Leftrightarrow\ &\frac{(c-1)^2}{4} = \frac{(c+1)^2}{4} - 4\frac{c-1}{2}\\
\Leftrightarrow\ &\frac{c^2-2c+1}{4} = \frac{c^2+2c+1}{4} - 4\frac{c-1}{2}\\
\Leftrightarrow\ &-2c = 2c - 8(c-1)\\
\Leftrightarrow\ &4c = 8 \quad \Leftrightarrow \quad c = 2.
\end{aligned}$$

Koreni polinoma su rešenja kvadratne jednačine $f(x) = 2x^2 - 3x + 1 = 0$. Rešavanjem jednačine dobijamo da je $x_1 = 1$ i $x_2 = \frac{1}{2}$.

3. Korišćenjem jednakosti:

$$\sin^2 2x = \frac{1-\cos 4x}{2} \quad \text{i} \quad \sin^2 4x = 1 - \cos^2 4x$$

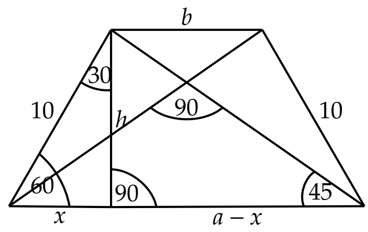
dobijamo jednačinu: $\cos 4x(1 + 2\cos 4x) = 0$. Odavde je $\cos 4x = 0$ ili $\cos 4x = -\dfrac{1}{2}$, odnosno

$$4x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \text{ tj. } x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4},\ k \in \{0, \pm1, \pm2\ldots\},$$

ili

$$4x = \pi \pm \frac{\pi}{3} + 2m\pi, \text{ tj. } x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12} + \frac{m\pi}{2},\ m \in \{0, \pm1, \pm2\ldots\}.$$

4. Primetimo da je $x = \dfrac{10}{2} = 5$ (stranica naspram ugla od 30°u pravouglom trouglu). Odavde je jasno da je $h = \dfrac{10\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$.



Kako su dijagonale jednakokrakog trapeza međusobno normalne, one sa većom osnovicom a zaklapaju uglove od 45°, pa je $a - x = h = 5\sqrt{3}$, odnosno

$$a = x + h = 5 + 5\sqrt{3} = 5(1 + \sqrt{3}).$$

Prema tome $b = a - 2x = 5 + 5\sqrt{3} - 10 = 5\sqrt{3} - 5 = 5(\sqrt{3} - 1)$. Površina trapeza je

$$P = \frac{a+b}{2} \cdot h = \frac{10\sqrt{3}}{2} \cdot 5\sqrt{3} = 25 \cdot 3 = 75.$$

5. Traženo geometrijsko mesto tačaka $M(x, y)$ dobijamo iz uslova da je

$$\begin{aligned}
&AM^2 = (x-1)^2 + (y-1)^2, \quad BM^2 = (x-6)^2 + (y-6)^2 \quad \text{i} \\
&\frac{AM^2}{BM^2} = \frac{4}{9} \\
\Leftrightarrow\ &\frac{(x-1)^2 + (y-1)^2}{(x-6)^2 + (y-6)^2} = \frac{4}{9} \\
\Leftrightarrow\ &9\big((x-1)^2 + (y-1)^2\big) = 4\big((x-6)^2 + (y-6)^2\big) \\
&\vdots \\
\Leftrightarrow\ &5\big((x+3)^2 + (y+3)^2\big) = 360 \\
\Leftrightarrow\ &(x+3)^2 + (y+3)^2 = 72
\end{aligned}$$

6. Zbir koeficijenata prvog, drugog i trećeg člana u razvoju binoma $(x^2 + \frac{1}{x})^n$ je

$$\begin{aligned}
&\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} = 46 \\
\Leftrightarrow\ &1 + n + \frac{n(n-1)}{2} = 46 \\
\Leftrightarrow\ &n^2 + n = 90 \\
\Leftrightarrow\ &n^2 + n - 90 = 0 \\
\Leftrightarrow\ &n_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 360}}{2} \\
\Leftrightarrow\ &n_{1,2} = \frac{-1 \pm 19}{2} \\
\Leftrightarrow\ &n_1 = 9 \quad n_2 = -10.
\end{aligned}$$

Kako je n prirodan broj, to je $n = n_1 = 9$ i $k + 1$. član u razvoju binoma je

$$T_{k+1} = \binom{9}{k}(x^2)^{9-k}\Big(\frac{1}{x}\Big)^k,$$

pa je član u razvoju binoma koji ne sadrži x onaj član kod koga je $2(9 - k) = k$. Odavde je $k = 6$, pa je traženi član

$$T_7 = \binom{9}{6} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2} = 84.$$