1	2	3	4	5	6	$\sum$

UNIVERZITET U NIŠU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA RAČUNARSKE NAUKE

02.07.2013.

PRIJEMNI ISPIT IZ MATEMATIKE

1. U jednačini $x^2 - 2(m-3)x = 5m - 11$ odrediti vrednosti parametra m tako da koreni jednačine zadovoljavaju uslov

(a) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 1$;

(b) $x_1^2 + x_2^2 = 2$.

2. Rešiti sledeću logaritamsku jednačinu:

$$\frac{1}{5 - \log_2 x} + \frac{2}{1 + \log_2 x} = 1.$$

3. Dokazati identitet:

$$\frac{1 + \sin 2\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha} = \sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4} - \alpha).$$

4. Stranice trougla podeljene su na k, m i n jednakih delova, redom svaka. Koliko ima trouglova čija su temena deone tačke?
(Smatra se da su i temena trougla deone tačke.)

5. Iz koordinatnog početka povučene su tangente na kružnicu $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$. Naći ugao izmedju ovih tangenti.

6. Izračunati prvi član a_1 i količnik q geometrijskog niza $\{a_1, a_2, a_3 \ldots\}$, kod koga je

$$a_3 + a_5 = -40 \quad \wedge \quad a_1 - a_5 = 30.$$

Napomena: Prijemni ispit traje 120min. Pri izradi zadataka rešenja ispisati detaljno.

02.07.2013.

REŠENJA ZADATAKA PRIJEMNOG ISPITA

1. Primenom Vijetovih formula, dobijamo da koreni x_1 i x_2 jednačine $x^2-2(m-3)x-5m+11 = 0$ zadovoljavaju

$$x_1 + x_2 = 2(m-3), \quad x_1 \cdot x_2 = -5m + 11.$$

(a) Dobijamo

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} =& \frac{x_2 + x_1}{x_1 \cdot x_2} = \frac{2m-6}{-5m+11} = 1, \quad m \neq \frac{11}{5} \\
& 2m - 6 = -5m + 11 \\
& 7m = 17 \\
& m = \frac{17}{7}.
\end{aligned}$$

(b) Slično,

$$\begin{aligned}
{x_1}^2 + {x_2}^2 =& (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2 = (2m-6)^2 - 2 - 5m + 11 = 2 \\
& 4m^2 - 24m + 36 + 10m - 22 = 2 \\
& 4m^2 - 14m + 12 = 0 \\
& m_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49-48}}{4} \\
& m_1 = 2, \quad m_2 = \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

2. Da bi jednačina

$$\frac{1}{5 - \log_2 x} + \frac{2}{1 + \log_2 x} = 1,$$

imala smisla neophodno je logaritmi budu definisani, tj. da je $x > 0$, kao i da imenioci u razlomcima budu različiti od 0, odnosno, $5 - \log_2 x \neq 0$ i $1 + \log_2 x \neq 0$.
Dakle, x mora da zadovolji uslove: $x > 0,\ x \neq 2^5,$ i $x \neq 2^{-1}$.
Data jednačina se može napisati u obliku

$$\begin{aligned}
& \frac{11 - 2\log_2 x}{(5 - \log_2 x) \cdot (1 + \log_2 x)} = 1 \\
\Leftrightarrow\ & 11 - 2\log_2 x = 5 - \log_2 x + 5\log_2 x - \log_2^2 x \\
\Leftrightarrow\ & \log_2^2 x - 5\log_2 x + 6 = 0 / \quad \text{smena: } \log_2 x = t / \\
\Leftrightarrow\ & t^2 - 5t + 6 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & t_1 = 3, \quad t_2 = 2.
\end{aligned}$$

Vraćanjem smene dobijamo da je $x = 2^3 = 8$ ili $x = 2^2 = 4$.

3. Obzirom da je

$$\begin{aligned}
\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4} - \alpha) =& \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}\cos\alpha + \sin\frac{\pi}{4}\sin\alpha) \\
=& \sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha) = \sin\alpha + \cos\alpha,
\end{aligned}$$

dovoljno je pokazati da je leva strana identiteta jednaka $\sin\alpha + \cos\alpha$.

$$\begin{aligned}\frac{1+\sin 2\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha} &= \frac{1+2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}\\ &= \frac{\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}\\ &= \frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{\sin\alpha+\cos\alpha} = \sin\alpha+\cos\alpha.\end{aligned}$$

4. Na svakoj stranici trougla se nalazi $m+1$, $n+1$ i $k+1$ deonih tačaka, a ukupan broj tačaka je $m+n+k$ (svako teme datog trougla pripada dvema stranicama pa se na svakoj stranici dva puta broji).

Proizvoljne tri tačke neće određivati trougao ako i samo ako se nalaze na istoj stranici polaznog trougla. Prema tome, ukupan broj trouglova je:

$$\binom{m+n+k}{3} - \binom{m+1}{3} - \binom{n+1}{3} - \binom{k+1}{3}$$

5. Jednačina date kružnice može se napisati u sledećem obliku:

$$\begin{aligned}&x^2+y^2-6x-4y+9=0\\ &(x^2-6x+9)-9+(y^2-4y+4)-4+9=0\\ &(x-3)^2+(y-2)^2=4.\end{aligned}$$

Dakle,centar kruga ima koordinate $(p,q)=(3,2)$, a poluprečnik je $r=2$. Prava $y=kx+n$ je tangenta kružnice ako i samo ako važi $(1+k^2)\cdot r^2=(q-kp-n)^2$. Odatle je

$$\begin{aligned}&(1+k^2)\cdot 4=(2-3k-n)^2\\ &4k^2+4=(2-3k-n)^2 \quad \dots(*)\end{aligned}$$

Kako tangenta sadrži koordinatni početak $(0,0)$, to je $0=k\cdot 0+n$, te je $n=0$. Zamenom u (*) dobijamo

$$\begin{aligned}&4k^2+4=(2-3k)^2\cdot 4=(2-3k-n)^2\\ &4k^2+4=4-12k+9k^2\\ &5k^2-12k=0\\ &k(5k-12)=0 \quad\Rightarrow\quad k_1=0,\ k_2=\frac{12}{5}\end{aligned}$$

Pretpostavimo da tangenta t_1 ima koeficijent k_1, a tangenta t_2 koeficijent k_2. Dakle, ako je φ ugao između t_1 i t_2 imamo:

$$tg\,\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}=\frac{\frac{12}{5}}{1+0}=\frac{12}{5}.$$

Ugao između tangenti na datu kružnicu je $\varphi = arctg\,\frac{12}{5}$.

6. Prema definiciji geometrijskog niza važi:

$$\begin{aligned}&a_3+a_5=a_1q^2+a_1q^4=a_1q^2(1+q^2)=-40\\ &a_1-a_5=a_1-a_1q^4=a_1(1-q^4)=a_1(1-q^2)(1+q^2)=30.\end{aligned}$$

Deljenjem druge jednačine prvom dobijamo da je

$$\frac{1-q^2}{q^2}=-\frac{30}{40}=-\frac{3}{4},$$

pa je $\frac{1}{q^2}-1=-\frac{3}{4}$. Dakle, $q^2=4$, odakle dobijamo $q=2$ ili $q=-2$.

(1) Za $q=2$ je $a_1\cdot 4(1+4)=20\cdot a_1=-40$, tj. $a_1=-2$. Tada je $a_2=-4$, $a_3=-8$ itd.

(2) Za $q=-2$ je, takođe, $a_1=-2$. Tada je $a_2=4$, $a_3=-8$ itd.