UNIVERZITET U NIŠU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA RAČUNARSKE NAUKE

07.07.2014.

PRIJEMNI ISPIT IZ MATEMATIKE

1. U jednačini $x^2 - mx + m - 1 = 0$ odrediti vrednosti parametra m, tako da za rešenja jednačine važi:

$$\frac{{x_1}^2 + {x_2}^2}{x_1 + x_2} \geqslant 2x_1x_2.$$

2. Rešiti jednačinu:

$$5^{\frac{1}{x-\sqrt{x}}} \cdot 0{,}2^{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \sqrt[3]{25}.$$

3. Za delegaciju škole od 10 učenika koji govore ruski i 15 učenika koji govore engleski jezik, treba odabrati 5 učenika od kojih bar jedan govori ruski jezik. Na koliko načina se može napraviti izbor?

4. Rešiti jednačinu:

$$\sin 4x + \sqrt{3} \cos 4x = \sqrt{2}.$$

5. Dva naspramna temena pravougaonika su $A(5, 0)$ i $C(2, 4)$. Odrediti koordinate ostala dva temena tog pravougaonika, ako se jedno od njih nalazi na pravoj $x - 3y = 0$.

6. Zbir tri broja koji čine geometrijski niz je 28. Ako se najveći broj umanji za 4, dobijaju se tri broja koji čine aritmetički niz. Koji su to brojevi?

Napomena: Prijemni ispit traje 120min. Pri izradi zadataka rešenja ispisati detaljno.

REŠENJA ZADATAKA PRIJEMNOG ISPITA

1. Primenom Vijetovih formula, dobijamo da rešenja x_1 i x_2 jednačine $x^2 - mx + m - 1 = 0$ zadovoljavaju

$$x_1 + x_2 = m, \quad x_1 \cdot x_2 = m - 1.$$

Iz

$$\frac{{x_1}^2 + {x_2}^2}{x_1 + x_2} \geqslant 2x_1x_2,$$

dobijamo

$$\frac{{x_1}^2 + {x_2}^2}{x_1 + x_2} - 2x_1x_2 = \frac{{x_1}^2 + {x_2}^2 - 2x_1x_2(x_1 + x_2)}{x_1 + x_2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_2(x_1 + x_2)}{x_1 + x_2} =$$
$$= \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2(1 + x_1 + x_2)}{x_1 + x_2} = \frac{m^2 - 2(m^2 - 1)}{m} =$$
$$= \frac{m^2 - 2m^2 + 2}{m} = \frac{2 - m^2}{m} \geqslant 0.$$

Parametri koji zadovoljavaju ovu nejednačinu su $m \in (-\infty, -\sqrt{2}] \cup (0, \sqrt{2}]$

2. Da bi jednačina

$$5^{\frac{1}{x - \sqrt{x}}} \cdot 0{,}2^{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \sqrt[3]{25},$$

imala smisla neophodno je koren bude definisan, kao i da imenioci u izložiocu stepena budu različiti od 0, tj. da bude $x \geqslant 0$, $x \neq 1$ i $x \neq 0$, odnosno, $x > 0$ i $x \neq 1$.

Data jednačina se može napisati u obliku

$$
\begin{aligned}
& 5^{\frac{1}{x-\sqrt{x}}} \cdot \frac{1}{5}^{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \sqrt[3]{25} \\
\Leftrightarrow\ & 5^{\frac{1}{x-\sqrt{x}}} \cdot 5^{-\frac{1}{\sqrt{x}}} = 5^{\frac{2}{3}} \\
\Leftrightarrow\ & 5^{\frac{1}{x-\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}}} = 5^{\frac{2}{3}} \\
\Leftrightarrow\ & 5^{\frac{2\sqrt{x} - x}{\sqrt{x}(x-\sqrt{x})}} = 5^{\frac{2}{3}} \\
\Leftrightarrow\ & 2x\sqrt{x} + x - 6\sqrt{x} = \sqrt{x}(2x + \sqrt{x} - 6) = 0, \quad x > 0 \\
\Leftrightarrow\ & 2x + \sqrt{x} - 6 = 0 \quad / \quad \text{smena: } \sqrt{x} = t,\ t > 0 \\
\Leftrightarrow\ & 2t^2 + t - 6x = 0 \\
\Leftrightarrow\ & t_1 = \frac{3}{2}, \quad t_2 = -2.
\end{aligned}
$$

Vraćanjem smene dobijamo da je $x = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$.

3. Broj mogućih izbora za delegaciju škole je:

$$\binom{10}{1}\cdot\binom{15}{4}+\binom{10}{2}\cdot\binom{15}{3}+\binom{10}{3}\cdot\binom{15}{2}+\binom{10}{4}\cdot\binom{15}{1}+\binom{10}{5}$$

4. Deljenjem i leve i desne strane jednačine sa 2 dobijamo:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\sin 4x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 4x=\frac{\sqrt{2}}{2}\\
\Leftrightarrow\ &\sin 4x\cos\frac{\pi}{3}+\cos 4x\sin\frac{\pi}{3}=\sin\frac{\pi}{4}\\
\Leftrightarrow\ &\Big(\sin(4x+\frac{\pi}{3})=\sin(\frac{\pi}{4}+2k\pi)\Big)\quad\vee\quad\Big(\sin(4x+\frac{\pi}{3})=\sin(\frac{3\pi}{4}+2k\pi)\Big),\quad k\in\mathbb{N}^0\\
\Leftrightarrow\ &4x=-\frac{\pi}{12}+2k\pi\quad\vee\quad 4x=\frac{5\pi}{12}+2k\pi,\quad k\in\mathbb{N}^0\\
\Leftrightarrow\ &x=-\frac{\pi}{48}+\frac{k\pi}{2}\quad\vee\quad x=\frac{5\pi}{48}+\frac{k\pi}{2},\quad k\in\mathbb{N}^0.
\end{aligned}$$

5. Sva temena pravougaonika leže na krugu K sa centrom u središtu $O(\frac{7}{2},2)$ dijagonale AC, dok je prečnik kruga dužina duži AC, tj. 5. Dakle, koordinate (x,y) temena B koje se nalazi na pravoj $x-3y=0$ zadovoljavaju sledeći sistem jednačina:

$$\begin{aligned}
&(x-\frac{7}{2})^2+(y-2)^2=\frac{25}{4}\\
&x-3y=0.
\end{aligned}$$

Rešavanjem ovog sistema dobijamo kvadratnu jednačinu $2y^2-5y+2=0$ čija su rešenja $y=\frac{1}{2}$ i $y=2$. Na osnovu ovoga zaključujemo da ima dva rešenja $B_1(\frac{3}{2},\frac{1}{2})$ i $B_2(6,2)$, odakle se lako dobijaju koordinate četvrtog temena pravougaonika (simetrično temenu B u odnosu na centar O opisanog kruga) $D_1(\frac{11}{2},\frac{7}{2})$ i $D_2(1,2)$.

6. Tri broja čine geometrijski niz, što znači da je $a_1+a_2+a_3=a_1+a_1q+a_1q^2=a_1(1+q+q^2)=28$. Takođe, a_1, a_1q i a_1q^2-4 čine aritmetički niz, odakle je

$$\begin{aligned}
&a_1q-a_1=a_1(q-1)=d\\
&a_1q^2-4-a_1q=a_1q(q-1)-4=d\\
&a_1q^2-4-a_1=a_1(q^2-1)-4=2d\\
&a_1q=\frac{a_1+a_1q^2-4}{2}.
\end{aligned}$$

Ovaj sistem jednačina svodi se na sistem:

$$\begin{aligned}
&a_1q=8\quad\text{i}\\
&4q^2-10q+4=0,
\end{aligned}$$

čijim rešavanjem dobijamo da je $q_1=2$ i $q_2=\frac{1}{2}$. Dakle, $a_1=4$ ili $a_1=16$.

Prema tome, traženi niz brojeva je $4,8,16$, odnosno, $16,8,4$.