Univerzitet u Nišu
Prirodno-matematički fakultet
Departman za matematiku

06.09.2021.

ZADACI SA REŠENJIMA SA PRIJEMNOG ISPITA IZ MATEMATIKE

1. Izračunati:

$$\sqrt{\left(\sqrt{2}-2\right)^2} - \frac{(-\sqrt{3})^2}{0,6} \cdot \frac{2}{\sqrt{50}} \cdot 2^{-\frac{1}{2}} + \sqrt{1.69} \cdot ((-\sqrt{2}) \cdot \sqrt{5})^2.$$

Rešenje. Važi:

$$\begin{aligned}\sqrt{\left(\sqrt{2}-2\right)^2} - \frac{(-\sqrt{3})^2}{0,6} \cdot \frac{2}{\sqrt{50}} \cdot 2^{-\frac{1}{2}} + \sqrt{1.69} \cdot (-10)^2 &= |2-\sqrt{2}| - \frac{3}{\frac{3}{5}} \cdot \frac{2}{5\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{\frac{169}{100}} \cdot 10 \\ &= 2-\sqrt{2}-1+13 \\ &= 14-\sqrt{2}.\end{aligned}$$

2. Rešiti nejedačinu:

$$\frac{|x-1|-1}{x} > 2021.$$

Rešenje: Oblast definisanosti jednačine je $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ako je $x > 1$, imamo

$$\begin{aligned}\frac{|x-1|-1}{x} &> 2021 \\ \Leftrightarrow \frac{x-2}{x} &> 2021 \\ \Leftrightarrow x-2 &> 2021x \\ \Leftrightarrow 2020x &< -2 \\ \Leftrightarrow x &< -\frac{1}{1010},\end{aligned}$$

te u ovom slučaju nejednačina nema rešenja. Ukoliko je $x < 1$ i $x \neq 0$, onda je

$$\begin{aligned}\frac{|x-1|-1}{x} &> 2021 \\ \Leftrightarrow \frac{-x}{x} &> 2021 \\ \Leftrightarrow -1 &> 2021,\end{aligned}$$

što je netačno. Dakle, nejednačina nema rešenja.

3. Ako je $x = 1-i$ jedna nula polinoma $P(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x$, odrediti ostale nule polinoma.

Rešenje: Ako je $1-i$ nula polinoma $P(x)$, onda je i $1+i$ nula ovog polinoma, a samim tim je $P(x)$ deljiv sa $(x-(1-i))(x-(1+i)) = x^2 - 2x + (1-i^2) = x^2 - 2x + 2$. Količnik pri deljenju $P(x)$ sa $x^2 - 2x + 2$ je $x^2 - 2x = x(x-2) = x(x-2)$. Nule polinoma $P(x)$ su $0, 2, 1-i$ i $1+i$.

4. Za koliko celobrojnih vrednosti parametra k je $kx^2 - kx - 2 < 0$ za svako $x \in \mathbb{R}$?

Rešenje: Da bi nejednakost važila za svako $x \in \mathbb{R}$ uslov je da je $k < 0$ i $D < 0$ pri čemu je D diskriminanta $D = k^2 + 8k$. Uzevši u obzir da je $k < 0$ iz $D < 0$ zaključujemo $k + 8 > 0$, odnosno

$k > -8$. Celobrojne vrednosti parametra k za koje je nejednakost istinita za sve realne brojeve su $\{-7, -6, -5, -4, -3, -2, -1\}$, pa ih ima 7.

5. Rešiti jednačinu

$$\sqrt{5x^2 + 1} = x^2 - 1.$$

Rešenje: Potkorena veličina $5x^2+1$ je uvek pozitivna, pa je oblast definisanosti jednačine skup realnih brojeva. Međutim kako je leva strana jednačine pozitivna jer je $\sqrt{5x^2+1} > 0$, zaključujemo da mora važiti i $x^2 - 1 > 0$, te rešenja tražimo u skupu $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. U tom skupu, data jednačina je ekvivalentna sa $5x^2 + 1 = x^4 - 2x^2 + 1$, odnosno $x^4 - 7x^2 = 0$. Rešenja poslednje jednačine su $-\sqrt{7}, 0$ i $\sqrt{7}$, ali uzevši u obzir skup u kome tražimo rešenje dobijamo da su rešenja polazne jednačine samo $-\sqrt{7}$ i $\sqrt{7}$.

6. Rešiti nejednačinu:

$$\log_{2021} \log_2(x + 2021) < 0.$$

Rešenje: Oblast definisanosti logaritamske jednačine je

$$\begin{aligned} D &= \{x \in \mathbb{R} \mid x + 2021 > 0 \land \log_2(x + 2021) > 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid x > -2021 \land x + 2021 > 1\} \\ &= (-2020, +\infty). \end{aligned}$$

Polazna nejednačina je tada ekvivalentna sa

$$\log_2(x + 2021) < 1 \Leftrightarrow x + 2021 < 2 \Leftrightarrow x > -2019.$$

Skup rešenja je $(-2019, +\infty)$.

7. Rešiti jednačinu

$$\cos x + \sin x = \sqrt{2}.$$

Rešenje: Prethodna jednačina može biti napisana u ekvivalentnom obliku

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cos x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x = 1.$$

Kako je $\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, važi $\cos \frac{\pi}{4} \ \cos x + \sin \frac{\pi}{4} \ \sin x = 1$. Na osnovu formule $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$, polazna jednačina se svodi na jednačinu $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$ čija su rešenja

$$x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

8. Neka je u pravouglom trouglu $\triangle ABC$ hipotenuza $AB = 10$cm i unutrašnji ugao $\angle CAB = 60°$. Odrediti:

(a) Visinu iz temena C.

(b) Poluprečnik opisane kružnice oko trougla $\triangle ABC$.

(c) Poluprečnik upisane kružnice u trougao $\triangle ABC$.

Rešenje: Iz uslova da je $\angle CAB = 60°$, sledi da je $CA = 5$cm i $BC = 5\sqrt{3}$cm.
(a) Neka je D podnožje visine iz temena C na hipotenuzu AB. Trougao $\triangle ABC$ je pravougli, pa je

$$P = \frac{BC \cdot CA}{2} = \frac{AB \cdot CD}{2}.$$

Dužina visine CD je

$$CD = \frac{BC \cdot CA}{AB} = \frac{25\sqrt{3}}{10} = \frac{5\sqrt{3}}{2}\text{cm}.$$

(b) Centar opisane kružnice oko pravouglog trougla je na sredini hipotenuze, pa je poluprečnik opisane kružnice jednak 5cm.
(c) Poluprečnik upisane kružnice je $\frac{P}{s}$ pri čemu je s poluobim trougla. Dakle,

$$r = \frac{\frac{5\cdot5\sqrt{3}}{2}}{\frac{5\sqrt{3}+5+10}{2}} = \frac{25\sqrt{3}}{5(3+\sqrt{3})} = \frac{5\sqrt{3}(3-\sqrt{3})}{6} = \frac{5(\sqrt{3}-1)}{2}.$$

9. Osni presek pravog valjka je kvadrat. Ako je zapremina valjka jednaka $128\pi\text{cm}^3$, odrediti njegovu površinu.

Rešenje: Stranice osnog preseka su prečnik $2r$ i visina H, te je $H = 2r$. Zapremina valjka se određuje po formuli $V = \pi r^2 H = 2\pi r^3 = 128\pi\text{cm}^3$, odakle je $r = 4\text{cm}$ i $H = 8\text{cm}$. Površina valjka je

$$P = 2\pi r(r+H) = 96\pi\text{cm}^2.$$

10. Zbir prva tri člana geometrijskog niza je 1.5 puta veći od zbira prva dva člana tog niza. Ako je $a_0 = 2^{2021}$, odrediti a_{2021}.

Rešenje: Ako je a_0 prvi član geometrijskog niza i q koeficijent, to su sume $S_2 = a_0 + a_0 q$ i $S_3 = a_0 + a_0 q + a_0 q^2$. Iz uslova zadatka je

$$\frac{3}{2} = \frac{S_3}{S_2} = \frac{a_0(1+q+q^2)}{a_0(1+q)} = \frac{1+q+q^2}{1+q},$$

što je ekvivalentno sa

$$3 + 3q = 2q^2 + 2q + 2 \iff 2q^2 - q - 1 = 0.$$

Rešenja kvadratne jednačine su $q = 1$ i $q = -\frac{1}{2}$. Ako je $q = 1$, onda je $a_{2021} = a_0 = 2^{2021}$, dok je u slučaju $q = -\frac{1}{2}$, $a_{2021} = a_0 q^{2020} = 2$.