PRIRODNO – MATEMATIČKI FAKULTET U NIŠU **Ponedeljak, 06.09.2021. godine**
DEPARTMAN ZA RAČUNARSKE NAUKE

PRIJEMNI ISPIT IZ MATEMATIKE

1. Reši jednačinu po nepoznatoj x:

$$(log_7 x)^2 + (log_7 5) * (log_5 x) = 2.$$

Resenje:

$$(log_7 x)^2 + \frac{log_5 x}{log_5 7} - 2 = 0,$$
$$(log_7 x)^2 + log_7 x - 2 = 0.$$

Označimo $t = log_7 x$ i dobijamo:

$$t^2 + t - 2 = 0$$
$$t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2}$$
$$t_1 = -2;\ t_2 = 1.$$

$$log_7 x = -2;\ log_7 x = 1.$$
$$x = \frac{1}{7^2}; x = 7.$$

2. U jednačini $x^2 - 2(3m - 1)x + 2m + 3 = 0$ odrediti parametar m tako da je zbir kubova rešenja date jednačine jednak zbiru rešenja.

Na osnovu Vijetovih formula koreni x_1 i x_2 kvadratne jednačine

$$ax^2 + bx + c = 0$$

ispunjavaju sledeće uslove

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}\ , \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Dakle za korene jednačine

$$x^2 - 2(3m - 1)x + 2m + 3 = 0$$

važi

$$x_1 + x_2 = 2(3m - 1)\ , \quad x_1 \cdot x_2 = 2m + 3$$

Sada na osnovu uslova zadatka važi

$$x_1^{\ 3} + x_2^{\ 3} = x_1 + x_2$$

Pa imamo

$$(x_1+x_2)(x_1{}^2-x_1x_2+\ x_2{}^2)=x_1+x_2$$
$$(x_1+x_2)(x_1{}^2+2x_1x_2+\ x_2{}^2-3x_1x_2)=x_1+x_2$$
$$(x_1+x_2)((x_1+x_2)^2-3x_1x_2)=x_1+x_2$$
$$\big(2(3m-1)\big)\left(\big(2(3m-1)\big)^2-3(2m+3)\right)=2(3m-1)$$
$$\big(2(3m-1)\big)\left(\big(2(3m-1)\big)^2-3(2m+3)-1\right)=0$$

Odavde imamo

$$2(3m-1)=0 \quad \text{ili} \quad \big(2(3m-1)\big)^2-3(2m+3)-1=0$$
$$3m-1=0 \quad \text{ili} \quad 36m^2-30m-6=0$$
$$m=\frac{1}{3} \quad \text{ili} \quad 6m^2-5m-1=0$$
$$m=\frac{1}{3} \quad \text{ili} \quad m=1 \quad ili \quad m=-\frac{1}{6}$$

3. Koeficijenat drugog člana u razvoju binoma $\left(\frac{x}{\sqrt{y}}+\frac{\sqrt{y}}{x}\right)^n$ odnosi se prema koeficijentu trećeg člana kao 2:11. Odrediti peti član.
   Resenje:

   k+1-vi član u razvoju ovog binoma je:

$$T_{k+1}=\binom{n}{k}\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right)^{n-k}\left(\frac{\sqrt{y}}{x}\right)^k$$

Dakle,

$$T_2=\binom{n}{1}\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right)^{n-1}\left(\frac{\sqrt{y}}{x}\right)^1$$
$$T_3=\binom{n}{2}\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right)^{n-2}\left(\frac{\sqrt{y}}{x}\right)^2$$

Kako je $T_2 : T_3 = 2 : 11$ imamo da je:

$$11\binom{n}{1}=2\binom{n}{2}$$
$$11n=2\frac{n(n-1)}{2}$$
$$11n=n^2-n$$

$$n = 12$$

$$T_5 = \binom{n}{4}\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right)^{n-4}\left(\frac{\sqrt{y}}{x}\right)^4 =$$

$$T_5 = \binom{12}{4}\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right)^{12-4}\left(\frac{\sqrt{y}}{x}\right)^4 = 495x^4y^{-2}.$$

4. Koliko ima rešenja jednačine $2sinxcos2x + cos^2x = 3sin^2x + sinx$ koja pripadaju intervalu $\left(-\frac{\pi}{2}, \pi\right)$?

Resenje:

$$2\sin x\cos 2x + \cos^2 = 3\sin^2 x + \sin x$$
$$\Leftrightarrow 2\sin x(1-2\sin^2 x) + (1-\sin^2 x) = 3\sin^2 x + \sin x$$
$$\Leftrightarrow (1-4\sin^2 x)(\sin x + 1) = 0$$
$$\Leftrightarrow \sin x = \pm\tfrac{1}{2} \vee \sin x = -1$$
$$\Leftrightarrow \sin x = \tfrac{1}{2} \vee \sin x = -\tfrac{1}{2} \vee \sin x = -1$$
$$\Rightarrow x_1 = \tfrac{\pi}{6} + 2k\pi \vee \quad x_2 = -\tfrac{\pi}{6} + 2k\pi \vee \quad x_3 = \tfrac{5\pi}{6} + 2k\pi \vee \quad x_4 = -\tfrac{5\pi}{6} + 2k\pi \vee$$
$$x_5 = \tfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in z$$

Rešenja koja pripadaju intervalu $\left(-\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ su $-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{2}$

5. Odrediti sva rešenja jednačine $9^{sin^2x} + 3^{1+cos2x} = 10$ koja pripadaju intervalu $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$.

Kako je $1 + \cos 2x = 2\cos^2 x$ polaznu jednačinu transformišemo na sledeći način:

$$9^{\sin^2 x} + 3^{2\cos^2 x} = 10$$
$$\Leftrightarrow 9^{\sin^2 x} + 9^{1-\sin^2 x} = 10$$
$$\Leftrightarrow 9^{\sin^2 x} + 9 \cdot 9^{-\sin^2 x} = 10$$

Ako uvedemo smenu $9^{\sin^2 x} = t$ prelazimo na jednačinu:

$$t^2 - 10t + 9 = 0$$
$$t_1 = 9 \vee t_2 = 1$$

Vraćanjem smene imamo:

$$\Rightarrow \sin^2 x = \pm 1 \vee \sin^2 x = 0$$
$$\Leftrightarrow \sin x = 1 \vee \sin x = -1 \vee \sin x = 0$$
$$\Rightarrow x_1 = 0, x_2 = \pi, x_3 = \tfrac{\pi}{2}, x_4 = \tfrac{3\pi}{2}$$

6. Osnova piramide je trougao čije su stranice 13cm, 14cm i 15cm. Bočna ivica naspram srednje po veličini osnovne ivice normalna je na ravan osnove i jednaka je 16cm. Izračunati površinu i zapreminu piramide.

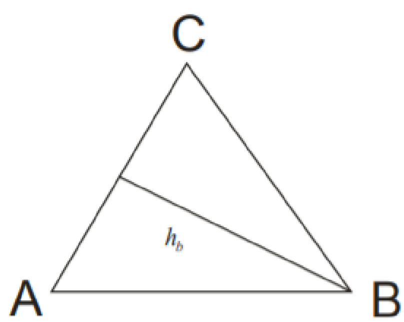
Resenje:

Nadjimo najpre površinu baze preko Heronovog obrasca.

$$a = 13cm,\quad b = 14cm,\quad c = 15cm \quad \Rightarrow \quad s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{13+14+15}{2} = 21$$

$$B = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{21 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 6} = 84cm^2$$

Nama treba dužina srednje po veličini visine (h_b) osnove.

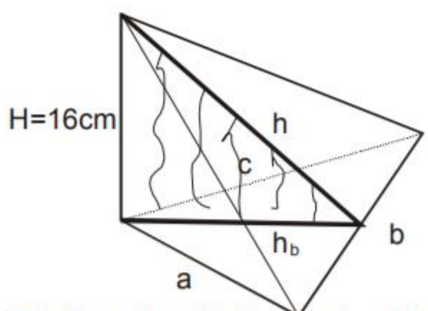


$$P = \frac{b \cdot h_b}{2} \Rightarrow \quad 84 = \frac{14 \cdot h_b}{2}$$

$$84 = 7h_b$$

$$h_b = 12cm$$

Naći ćemo dalje visinu bočne strane h.



$$h^2 = H^2 + h_b$$

$$h^2 = 16^2 + 12^2$$

$$h^2 = 256 + 144$$

$$h^2 = 400$$

$$h = 20cm$$

Površina piramide je jednaka zbiru površina ova četiri trougla!

$$P = B + \frac{a \cdot H}{2} + \frac{c \cdot H}{2} + \frac{bh}{2}$$

$$P = 84 + \frac{13 \cdot 16}{2} + \frac{15 \cdot 16}{2} + \frac{14 \cdot 20}{2}$$

$$P = 84 + 104 + 120 + 140$$

$$P = 448cm^2$$

$$V = \frac{1}{3}BH$$

$$V = \frac{1}{3}84 \cdot 16$$

$$V = 448cm^3$$